Міжнародна науково-методична Інтернет-конференція «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності (2026)»

23-24 червня 2026 року

Збірник матеріалів

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Міжнародна науково-методична Інтернет-конференція «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності (2026)»

23-24 червня 2026 року

Збірник матеріалів

Електронне наукове видання

Вінниця
ВНТУ
2026

УДК 001
М58

Видається за рішенням Вченої ради Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Організаційний комітет конференції:

Голова – І. Ю. Єпіфанова, д.е.н., проф., проректор з наукової роботи, Вінницький національний технічний університет.

Співголова – В. М. Михалевич, д.т.н., проф., завідувач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет.

Заступники голови:

Антонюк О. П. – начальник науково-дослідної частини, Вінницький національний технічний університет.

Петрук В. А. – д.пед.н., проф. каф. вищої математики, Вінницький національний технічний університет.

Члени оргкомітету:

Ю. Ю. Бурєнніков – проректор з науково-педагогічної роботи, міжнародного співробітництва та молодіжної політики, ВНТУ.

О. В. Петров – проректор з науково-педагогічної роботи та організації освітнього процесу.

В. Є. Циркун – проректор з науково-педагогічної роботи, перспективного розвитку та інфраструктури, ВНТУ.

О. Г. Сухецька – головний бухгалтер, ВНТУ.

С. А. Кирилащук – к.пед.н., доц., декан ФІТКІ, ВНТУ.

І. В. Хом'юк – д.пед.н., проф. каф. вищої математики, ВНТУ.

О. П. Войтович – к.т.н., доц. кафедри захисту інформації, начальник навчального відділу ВНТУ;

З. В. Бондаренко – к.пед.н., доц. каф. вищої математики, ВНТУ.

О. П. Прозор – к.пед. н., доц. каф. вищої математики, ВНТУ.

М. М. Ковтонюк – к.ф.-м.н., д.пед.н., проф., ВДПУ ім. М. Коцюбинського.

С. М. Бак – д.ф.-м.н., проф., ВДПУ ім. М. Коцюбинського.

Матеріали міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції

М58 «Проблеми математичної освіти: виклики сучасності (2026)» : збірник матеріалів [Електронний ресурс]. – Вінниця : ВНТУ, 2026. – (PDF, 254 с.)

ISBN 978-617-8163-98-3

Збірник містить тексти доповідей Міжнародна науково-методичної Інтернет-конференція «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності (2026)».

Конференція проводилась 23-24 червня 2026 року на базі Вінницького національного технічного університету з метою вивчення досвіду, проблем та перспектив найбільш ефективного та економного навчання математики при сучасних до неї вимогах; використання нових технологій навчання, обговорення питань науково-методичного супроводу викладання математичних дисциплін; розробки і застосування інформаційно-комунікаційних та інноваційних педагогічних технологій.

УДК 001

ISBN 978-617-8163-98-3

Зміст

Методологічні аспекти розбудови сучасної математичної освіти

Теоретико-методологічні та психологічні аспекти створення і впровадження інформаційно-комунікаційних та інноваційних тех

Математика та математичне моделювання

Використання систем комп'ютерної математики в наукових дослідженнях та освіті

УДК 378.147

І. В. Хом'юк
В. В. Хом'юк

ШЛЯХИ РОЗВИТКУ КРЕАТИВНОСТІ МАЙБУТНІХ ФАХІВЦІВ ІТ-СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ НА ЗАНЯТТЯХ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У статті розглянуто проблему розвитку креативності майбутніх фахівців ІТ-спеціальностей у процесі вивчення вищої математики. Обґрунтовано значення творчого мислення як важливої складової професійної компетентності сучасного ІТ-спеціаліста. Проаналізовано потенціал математичних дисциплін щодо формування креативних здібностей студентів та визначено ефективні шляхи їх розвитку.
Ключові слова: заклад вищої освіти, вища математика, ІТ-спеціальності, креативність.

Abstract
The article considers the problem of developing creativity of future IT specialists in the process of studying higher mathematics. The importance of creative thinking as an important component of the professional competence of a modern IT specialist is substantiated. The potential of mathematical disciplines for the formation of students' creative abilities is analyzed and effective ways of their development are identified.
Keywords: higher education institution, higher mathematics, IT specialties, creativity.

Вступ

У сучасному світі цифрових технологій та стрімкого розвитку ІТ-індустрії особливого значення набуває підготовка фахівців, здатних не лише володіти ґрунтовними знаннями, але й мислити нестандартно, генерувати інноваційні ідеї та ефективно вирішувати складні професійні завдання. Креативність стає однією з ключових компетентностей майбутніх ІТ-спеціалістів, оскільки саме вона забезпечує конкурентоспроможність у динамічному професійному середовищі.

Водночас вища математика традиційно розглядається як фундаментальна дисципліна, спрямована на формування логічного та аналітичного мислення. Проте її потенціал значно ширший: за умови відповідної організації освітнього процесу вона може виступати ефективним засобом розвитку креативності студентів. Інтеграція творчих підходів у процес вивчення математичних дисциплін сприяє формуванню здатності до гнучкого мислення, пошуку альтернативних рішень та міждисциплінарного бачення проблем.

У зв'язку з цим актуальності набуває дослідження шляхів розвитку креативності майбутніх фахівців ІТ-спеціальностей саме на заняттях з вищої математики.

Результати дослідження

Метою статті є дослідження та обґрунтування ефективних шляхів розвитку креативності майбутніх фахівців ІТ-спеціальностей у процесі вивчення вищої математики, а також визначення методів, прийомів і педагогічних умов, що сприяють формуванню творчого мислення, здатності до нестандартного розв'язання задач і генерації інноваційних ідей у професійній діяльності.

Розвиток креативності студентів ІТ-спеціальностей на заняттях з вищої математики може варіюватися в залежності від їхнього попереднього досвіду, освітнього середовища та індивідуальних навичок, конкретних потреб та методів навчання викладача. Можна стверджувати, що креативний розвиток студентів на пряму залежить від креативного потенціалу викладачів ЗВО. Студенти першого курсу, які вступили на навчання у 2025 році, це як раз ті діти, які навчались останні 5 роки дистанційно через пандемію COVID-19 та початок війни в Україні. Це все відклало відбиток на їхній рівень шкільної підготовки та розвиток особистісних якостей, які допомагають продуктивно діяти в ситуаціях невизначеності, виходити за рамки передбачуваного, виявляти спонтанність, а отже, впливають на розвиток креативності. Розвиваючи креативність студентів на заняттях з вищої математики, важливо забезпечити середовище [1; 2], де вони не бояться помилок і мають свободу експериментувати. Це допомагає не лише оволодіти математичними методами, а й готувати їх до вирішення складних реальних проблем.

Запропонуємо деякі шляхи розвитку креативності студентів на заняттях з вищої математики.

1) *Застосування гейміфікації* в освітньому процесі вивчення вищої математики для створення інтерактивного та мотивуючого середовища. Включення елементів гри в освітній процес (математичні квести, онлайн-вікторини, конкурсні завдання) досить широко розглянуто нами в багатьох дослідженнях [5]. В процесі гри студенти проходять різні рівні, розв'язують різноманітні задачі, і логічні в тому ж числі.

2) *Використання завдань на комбінування різних підходів* [6].

Наприклад, після вивчення теми «Криві другого порядку» студенти отримали завдання:

Створити унікальний малюнок або візуальний об'єкт, використовуючи рівняння: 1) кола; 2) еліпса; 3) гіперболи; 4) параболи. Описати, як кожна крива була використана, і які математичні властивості допомогли досягти результату.

В роботах оцінювалась: креативність створеного об'єкта; здатність пояснити математичні аспекти малюнка.

3) *Використання завдань на деталізацію*.

Наприклад, після вивчення розділу «Лінійна алгебра» студенти отримали завдання:

Описати, як можна використати матриці для аналізу соціальних мереж.

1. Як створити матрицю зв'язків між людьми? 2. Як знайти ключові вузли в мережі? 3. Як за допомогою матриць оцінити ефективність комунікації?

В роботах оцінювалась: глибина пояснень та рівень деталізації кожного кроку.

4) *Використання завдань на креативний опис поняття*.

Наприклад, описати поняття нескінченності: 1) математично (через приклади); 2) в художньому стилі (як історію чи образ); 3) як фізичне явище.

В роботах оцінювалась: глибина розуміння поняття нескінченності та різноманітність підходів [3].

5) *Використання креативних завдань* з вищої математики, які можуть розвивати аналітичне мислення, здатність застосовувати теоретичні знання на практиці.

Наприклад, після вивчення розділу «Диференціальне числення» студенти першого курсу двох спеціальностей «Комп'ютерна інженерія» та «Комп'ютерні науки» отримали завдання на гнучкість мислення: «Поясніть, що таке похідна: 1) для математика; 2) для художника; 3) для учня початкової школи; 4) для музиканта.

Оцінювалось: здатність адаптувати складне поняття до різних аудиторій та різноманіття підходів до пояснення.

б) гумористичне тлумачення похідної (як відмічає британський дослідник Філіп Картер креативній особистості притаманна впевненість, самодостатність поведінки та почуття гумору).

в) фантастична новела «Пояснення. Математичні пригоди»; г) казки про похідну (креативній особистості притаманна розвинена уява, фантазія, художньо-творчі здібності); д) мультимедійні презентації; е) відеоролики та власноруч написані пісні з музичним супроводом.

6) *Використання завдань, спрямованих на генерування якомога більшої кількості ідей*.

Наприклад, 1) Які нестандартні способи можна використати, щоб знайти значення інтегралу, не виконуючи безпосереднього інтегрування? 2) Як можна пояснити поняття градієнта за допомогою реальних прикладів із різних сфер життя?

Оцінюється: кількість ідей та оригінальність відповідей.

7) *Використання інформаційно-комунікаційних технологій*. Застосування сучасних цифрових інструментів у навчанні.

Приклад: робота з Python (бібліотеки NumPy, Matplotlib) для візуалізації функцій або використання систем комп'ютерної алгебри (наприклад, MATLAB) [4].

Застосування цих практик потребує комплексного оцінювання, що включає як кількісні, так і якісні показники. Під час аналізу результатів важливо враховувати не лише правильність розв'язків, а й оригінальність та інноваційність ідей.

Висновки

Таким чином, реалізація запропонованих шляхів розвитку креативності на заняттях з вищої математики дозволяє підвищити якість підготовки майбутніх IT-фахівців, забезпечуючи формування компетентностей, необхідних для ефективної професійної діяльності в умовах швидкозмінного технологічного простору. Перспективи подальших досліджень вбачаються у розробленні та апробації конкретних методик і дидактичних матеріалів, спрямованих на інтеграцію творчих підходів у викладання математичних дисциплін.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хом'юк І. В. Розвиток креативності майбутніх фахівців спеціальностей G11 машинобудування (за спеціалізаціями) засобами вищої математики / І. В. Хом'юк, В.В.Хом'юк // Науковий журнал «Педагогіка безпеки». – Вінниця : ВНТУ, Том 11, Вип. 1(26). 2026. – С.1-8.
2. Хом'юк І. В. Розвиток креативності майбутніх фахівців IT-спеціальностей засобами вищої математики / І. В. Хом'юк, В.В.Хом'юк, Є.А. Іванченко //Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». – Суми : Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка, 2025. – Вип. 1(25). – С. 107–115.
3. Хом'юк І. В. Визначення рівня креативності майбутніх фахівців IT-спеціальностей засобами вищої математики / І. В. Хом'юк, С.А.Кирилащук, В.В.Хом'юк //Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». – Суми : Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка, 2025. – Вип. 1(25). – С. 156–163.
4. Хом'юк І.В. Застосування інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання вищої математики у технічних ЗВО / І. В. Хом'юк, С.А.Кирилащук, В.В.Хом'юк // Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: педагогіка і психологія, 2022. – № 69 . – С.38-45.
5. Хом'юк, І.В., Петрук, В.А., Хом'юк, В.В. (2012). Інтерактивні технології навчання вищої математики студентів технічних ВНЗ : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ. 122с.
6. Хом'юк, В. В., Хом'юк, І. В. (2017). Компетентностно-орієнтовані завдання як важливий чинник формування когнітивної складової математичної компетентності майбутніх інженерів. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти» Сумського держ. педагогічного університету ім. А. С. Макаренка, 1(9), 107–114.

Хом'юк Ірина Володимирівна – д. пед. н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Хом'юк Віктор Вікторович – к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Khomyuk Irina V. – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Khomyuk V. V. – Associate Professor the department of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiravvh@gmail.com

УДК 378.147:51:159.955

Н. В. Майбородіна[1]
Ю. А. Мейш[2]
В. П. Герасименко[1]

РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ У ФОРМУВАННІ КРЕАТИВНОГО МИСЛЕННЯ ТА ПРОФЕСІЙНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ІНЖЕНЕРІВ-ЕНЕРГЕТИКІВ

[1]ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут»;
[2]Національний університет біоресурсів та природокористування України

Анотація

У статті розглядається роль математичної освіти у формуванні креативного мислення та професійних компетентностей майбутніх інженерів-енергетиків. Обґрунтовано значення математики як базового інструменту розвитку логічного, аналітичного та креативного мислення, необхідного для сучасного фахівця технічного профілю. Показано, що математична підготовка є ключовим чинником становлення здатності до моделювання складних процесів, аналізу даних та прийняття обґрунтованих інженерних рішень. У роботі підкреслено важливість вивчення вищої математики, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики для підготовки фахівців енергетичної галузі. Розкрито зв'язок між розвитком математичного мислення та формуванням професійних компетентностей, необхідних для роботи із сучасними енергетичними системами, зокрема Smart Grid та відновлюваною енергетикою.Окрему увагу приділено ролі практикоорієнтованого навчання, використанню прикладних задач, проєктних технологій та міждисциплінарного підходу у викладанні математики. Узагальнено міжнародний досвід підвищення математичної грамотності та визначено основні напрями удосконалення математичної освіти. Зроблено висновок, що якісна математична підготовка є необхідною умовою формування конкурентоспроможного інженера-енергетика та розвитку інноваційної економіки України.

Ключові слова: математична освіта, креативне мислення, професійні компетентності, інженер-енергетик, математичне моделювання, енергетичні системи.

Abstract

The article examines the role of mathematical education in the development of creative thinking and professional competencies of future power engineers. The significance of mathematics as a fundamental tool for developing logical, analytical, and creative thinking necessary for modern technical specialists is substantiated. It is shown that mathematical training is a key factor in developing the ability to model complex processes, analyze data, and make informed engineering decisions. The study emphasizes the importance of higher mathematics, mathematical analysis, differential equations, probability theory, and mathematical statistics in the training of energy sector specialists. The relationship between the development of mathematical thinking and the formation of professional competencies required for working with modern energy systems, including Smart Grid technologies and renewable energy systems, is highlighted. Particular attention is paid to the role of practice-oriented learning, the use of applied problems, project-based technologies, and interdisciplinary approaches in mathematics education. International experience in improving mathematical literacy is summarized, and the main directions for enhancing mathematical education are identified. It is concluded that high-quality mathematical training is a necessary prerequisite for the formation of a competitive power engineer and for the development of Ukraine's innovative economy.

Keywords: mathematical education, creative thinking, professional competencies, power engineer, mathematical modeling, energy systems.

Постановка проблеми

В умовах стрімкого розвитку науки, цифрових технологій та інженерних систем математична освіта набуває особливого значення. Сьогодні математика розглядається не лише як фундаментальна навчальна дисципліна, а як важливий інструмент формування логічного, аналітичного та творчого мислення. Саме ці якості є необхідною передумовою успішної професійної діяльності сучасного фахівця, здатного працювати з великими обсягами інформації, аналізувати складні процеси та приймати обґрунтовані рішення.

Особливої актуальності математична підготовка набуває в інженерній освіті, оскільки є основою для вивчення спеціальних дисциплін, математичного моделювання, проєктування та дослідження технічних систем. Від рівня сформованості математичних компетентностей значною мірою залежить здатність майбутніх інженерів розв'язувати професійні завдання, застосовувати сучасні цифрові технології та впроваджувати інноваційні рішення.

Сучасна енергетика перебуває в умовах масштабної цифрової трансформації, розвитку Smart Grid-технологій, відновлюваних джерел енергії та систем автоматизованого керування. У зв'язку з цим зростає потреба у висококваліфікованих інженерах-енергетиках, які володіють математичними методами аналізу, прогнозування та оптимізації складних енергетичних процесів. Тому якісна математична освіта є важливою складовою формування професійних компетентностей майбутніх фахівців енергетичної галузі.

Мета дослідження. Метою статті є аналіз ролі математичної освіти у формуванні креативного мислення та професійних компетентностей майбутніх інженерів-енергетиків, а також визначення її значення в умовах сучасних технологічних змін.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Аналіз сучасних наукових досліджень свідчить, що проблема формування математичних компетентностей і розвитку творчого мислення майбутніх інженерів залишається актуальною в міжнародному та вітчизняному освітньому просторі. У працях зарубіжних і українських авторів розглядаються різні аспекти цієї проблеми: від методології навчання математики до її ролі у професійній підготовці інженерів, зокрема енергетичного профілю.

У дослідженні [1] узагальнено сучасні підходи до викладання математики в інженерній освіті. Автори підкреслюють необхідність переходу від традиційного алгоритмічного навчання до практико-орієнтованих та інноваційних методик, що сприяють розвитку професійного мислення студентів. Особливу увагу приділено інтеграції математики з інженерними дисциплінами та реальними задачами.

Романчук Н. О. в роботі [2] розглядає теоретико-методологічні засади формування математичних компетентностей майбутніх інженерів. Автор акцентує увагу на компетентнісному підході, який передбачає не лише засвоєння знань, а й формування здатності застосовувати їх у професійній діяльності. Важливим є розвиток аналітичного мислення та готовності до розв’язування прикладних задач.

У праці [3] досліджується розвиток критичного мислення через створення математичних задач. Автори доводять, що процес конструювання задач є ефективним інструментом формування творчого та критичного мислення, оскільки стимулює самостійний пошук рішень і аналіз альтернатив.

Вороновська Л. П. [4] підкреслює значення математичної компетентності для майбутніх інженерів, наголошуючи на необхідності поєднання теоретичних знань із практичними навичками. Автор зазначає, що ефективне навчання математики має бути спрямоване на формування здатності до моделювання реальних процесів.

У дослідженні [5] розглядаються педагогічні стратегії формування техніко-математична грамотність у майбутніх інженерів. Автори підкреслюють важливість використання технологій і цифрових інструментів у навчанні математики, що дозволяє наблизити навчальний процес до реальних інженерних практик.

Сосницька Н. та Кривильова О. [6] акцентують увагу на підготовці майбутніх фахівців енергетичного профілю до розв’язування практичних задач на основі проєктного підходу. Показано, що інтеграція фізичних і математичних моделей сприяє кращому розумінню енергетичних процесів і розвитку професійних компетентностей.

Кашканова Г. та Кашканов А. [7] розглядають математичну освіту як чинник розвитку творчої особистості. Вони доводять, що процес вивчення вищої математики може і повинен сприяти розвитку креативності, якщо навчання організоване на основі проблемних та дослідницьких методів.

Коломієць А. в роботі [8] підкреслює значення математичної спрямованості професійної підготовки інженерів електроніки та телекомунікацій, що є актуальним і для енергетичної галузі, де потрібні навички моделювання та аналізу складних систем.

Окрему увагу в роботах [9–12] приділено розвитку творчого мислення студентів у процесі вивчення вищої математики та дисциплін природничо-математичного циклу. Автори наголошують, що використання прикладних задач, диференціальних рівнянь та міждисциплінарних зв’язків значно підвищує рівень зацікавленості студентів і сприяє формуванню професійних компетентностей.

Узагальнюючи результати аналізу, можна зробити висновок, що сучасні дослідження одностайно підкреслюють необхідність переходу до практико-орієнтованого, компетентнісного та міждисциплінарного навчання математики. Особливо важливим є розвиток творчого мислення студентів через розв’язування прикладних задач, використання цифрових технологій та інтеграцію з професійною підготовкою інженерів-енергетиків.

Виклад основного матеріалу

Математичне мислення як основа розвитку особистості. Головна цінність математики полягає не лише у вивченні формул чи обчислень. Насамперед вона формує здатність аналізувати інформацію, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, працювати з даними та приймати обґрунтовані рішення. Саме математичне мислення допомагає людині структурувати складні завдання, знаходити закономірності та шукати ефективні шляхи розв'язання проблем. Ці навички необхідні не лише інженерам чи програмістам, а й менеджерам, економістам, маркетологам та представникам багатьох інших професій.

Особливе значення математика має для розвитку креативного мислення. На відміну від поширеної думки, креативність і точні науки не суперечать одна одній. Навпаки, пошук нестандартних способів розв'язання задач, побудова математичних моделей та аналіз різних варіантів рішень сприяють розвитку креативності, самостійності та гнучкості мислення.

Вища математика займає важливе місце у професійній підготовці студентів. Вона допомагає розвивати логіку, аналітичні здібності та вміння застосовувати знання в нових ситуаціях [9–12]. Ефективне навчання вищій математиці повинно бути спрямоване не на механічне запам'ятовування формул, а на формування здатності самостійно здобувати знання та використовувати їх на практиці. Для цього необхідно застосовувати проблемне навчання, дослідницькі завдання, проєктну діяльність та міждисциплінарний підхід.

Особливо важливим є використання прикладних задач. Під час їх розв'язування студенти аналізують реальні процеси, визначають взаємозв'язки між величинами та будують математичні моделі. Така діяльність сприяє розвитку креативного мислення значно більше, ніж виконання стандартних обчислень за готовими алгоритмами. Важливу роль у цьому відіграють теми математичного аналізу та диференціальних рівнянь. Вони дозволяють описувати фізичні, технічні, економічні та природні процеси, поєднуючи теоретичні знання з практичними завданнями майбутньої професійної діяльності.

Особливо актуальною математична підготовка є для майбутніх фахівців енергетичної галузі. Сучасні енергетичні системи являють собою складні технічні комплекси, функціонування яких неможливо забезпечити без використання математичних методів аналізу та прогнозування. Під час професійної діяльності енергетики застосовують математичні моделі для розрахунку режимів електричних мереж, оцінювання надійності обладнання, прогнозування споживання електроенергії та оптимізації роботи енергетичних систем.

Вивчення математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики створює основу для розуміння процесів, що відбуваються в електроенергетичних, теплоенергетичних та відновлюваних енергетичних системах. Саме математичний апарат дозволяє описувати динаміку навантажень, досліджувати перехідні процеси та оцінювати ефективність роботи енергетичного обладнання.

Значення математичної освіти для бізнесу. Проблема математичної підготовки має значення не лише для освітян, а й для бізнесу. Енергетичні компанії щодня працюють з великими обсягами інформації, аналітикою та цифровими технологіями. Саме тому роботодавці потребують фахівців, які здатні критично мислити, працювати з даними та приймати рішення на основі фактів. Недостатній рівень математичної грамотності часто проявляється у невмінні аналізувати звіти, інтерпретувати графіки, знаходити логічні помилки або робити обґрунтовані висновки. Без належної математичної бази нове покоління фахівців ризикує залишитися на узбіччі технологічного прогресу, оскільки індустрія 4.0 вимагає миттєвої адаптації до складних алгоритмів. Це ускладнює підготовку кадрів і змушує компанії додатково навчати працівників базовим навичкам, які повинні формуватися ще у школі, а надалі в закладі вищої освіти.

Тому бізнес зацікавлений у якісній математичній освіті не менше, ніж освітня система. Саме вища школа закладає фундамент, на якому згодом будуються професійні компетентності майбутніх інженерів-енергетиків. Саме тому інвестиції бізнесу в розвиток точних наук є не благодійністю, а стратегічним капіталовкладенням у власну безпеку та стабільність.

Світовий досвід підвищення математичної грамотності. Досвід багатьох країн свідчить, що високі результати з математики досягаються завдяки системній та довготривалій роботі.

Одним із показових прикладів є Польща. Освітня реформа дозволила продовжити загальну підготовку учнів і відтермінувати ранню спеціалізацію. У результаті середній рівень математичної підготовки суттєво зріс, особливо серед учнів, які раніше мали нижчі результати.

Успішним прикладом також є Естонія, яка демонструє одні з найкращих показників математичної грамотності в Європі. Основою успіху стала системна підтримка кожного учня та створення умов, за яких високий рівень знань досягається не окремими талановитими дітьми, а більшістю школярів.

Сінгапур стабільно очолює світові рейтинги PISA завдяки унікальній методиці «Сінгапурської математики». Її суть полягає у переході від конкретного до абстрактного (триступеневий підхід: предмет – малюнок – математичний символ). Учні та студенти не просто зазубрюють формули, а глибоко візуалізують і розуміють суть кожного математичного процесу, фокусуючись на меншій кількості тем, але вивчаючи їх досконало.

Фінський підхід базується на принципах рівності та практичного застосування. Тут мінімізовано стрес від іспитів, а математику інтегрують у реальне життя через феноменологічне навчання. Учні вчать математичні концепції, розв'язуючи прикладні життєві завдання – від розрахунку сімейного бюджету до проектування моделей будинків, що формує стійку внутрішню мотивацію.

Успіх південно корейської системи тримається на культурі високих очікувань та цифровізації. Країна активно впроваджує адаптивні освітні платформи на базі штучного інтелекту, які аналізують індивідуальний прогрес кожного учня і студента та миттєво підбирають завдання потрібного рівня складності. Це дозволяє вчасно виявляти прогалини у знаннях і коригувати їх ще на ранніх етапах.

Досвід цих країн показує, що покращення результатів відбувається не через спрощення вимог, а через підвищення якості навчання та підтримку учнів та студентів на всіх етапах освіти. Ключем до успіху є не зміна кількості годин у розкладі, а зміна самої філософії викладання – від механічного заучування до розуміння смислів та практичного застосування.

Напрямки покращення математичної освіти. Підвищення рівня математичної підготовки потребує спільних зусиль держави, закладів освіти, бізнесу та громадськості.

Серед найважливіших напрямів можна виділити:

- оновлення методик викладання вищої математики;
- використання цифрових технологій та інтерактивних засобів навчання;
- розширення практико-орієнтованих і проєктних завдань;
- розвиток математичних гуртків і наукових спільнот;
- підтримку талановитих студентів та мотивованих викладачів;
- посилення співпраці між закладами освіти та роботодавцями.

Важливо також демонструвати студентам практичну цінність математичних знань через реальні приклади з науки, енергетичної техніки, економіки та сучасних цифрових технологій.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Математика є не лише інструментом обчислень, а й потужним засобом розвитку логічного, креативного та критичного мислення. Вона формує фундамент професійної підготовки майбутніх інженерів-енергетиків і створює передумови для розвитку інноваційної енергетики.

Вища математика допомагає студентам навчитися аналізувати складні процеси, будувати математичні моделі та знаходити нестандартні рішення. Саме ці якості є основою креативного мислення та професійної успішності. Розвиток математичної освіти починається зі створення умов, у яких кожен учень і студент може навчитися мислити, аналізувати та творчо застосовувати знання на практиці.

Для бізнесу якісна математична освіта означає ширше коло підготовлених спеціалістів, здатних працювати з інформацією, аналітикою та сучасними технологіями. Тому підвищення рівня математичної грамотності є спільним завданням держави, освітньої системи та роботодавців.

Особливого значення математична освіта набуває у підготовці майбутніх енергетиків. Вона забезпечує формування навичок математичного моделювання, аналізу складних технічних систем та прийняття інженерних рішень. Умови цифрової трансформації енергетики, впровадження Smart Grid-технологій та розвитку відновлюваних джерел енергії потребують фахівців, які володіють сучасними математичними методами дослідження та прогнозування. Саме тому якісна математична підготовка є необхідною умовою формування конкурентоспроможного інженера енергетичної галузі.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробленням та впровадженням інноваційних методик навчання вищої математики, спрямованих на розвиток творчого мислення та професійних компетентностей майбутніх інженерів-енергетиків. Особливий інтерес становить вивчення можливостей використання цифрових освітніх технологій, систем комп'ютерної математики, засобів математичного моделювання та проєктно-орієнтованого навчання у процесі професійної підготовки здобувачів вищої освіти.

Подальших досліджень також потребує проблема формування техніко-математичної грамотності майбутніх фахівців енергетичної галузі в умовах цифрової трансформації енергетики, розвитку Smart Grid-технологій та впровадження відновлюваних джерел енергії. Важливим напрямом є розроблення міждисциплінарних освітніх підходів, які забезпечують інтеграцію математичної підготовки з професійно орієнтованими дисциплінами та реальними інженерними задачами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Pepin B. Mathematics in Engineering Education: a Review of the Recent Literature with a View towards Innovative Practices / Pepin B., Biehler R., Gueudet G. // International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education. – 2021. –Vol. 7. – P. 163–188. – DOI: 10.1007/s40753-021-00139-8.
2. Романчук Н. О. Теоретико-методологічні засади формування математичних компетентностей майбутніх інженерів у вищих технічних закладах освіти // Академічні студії. Серія «Педагогіка». – 2022. – № 2. – С. 25–30. – DOI: 10.52726/as.pedagogy/2022.2.4.
3. Svecova V. Development of Critical Thinking through the Creation of Mathematical Problems / Svecova V., Balgova M., Uhríkova V. // Athens Journal of Education. – 2025. – Vol. 12, № 3. – P. 493–508. – DOI: 10.30958/aje.12-3-8.
4. Вороновська Л. П. Математична компетентність майбутніх інженерів // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. – 2022. – Вип. 52. – С. 259–262.
5. van der Wal N. J. Teaching Strategies to Foster Techno-Mathematical Literacies in an Innovative Mathematics Course for Future Engineers / van der Wal N. J., Bakker A., Drijvers P. // ZDM Mathematics Education. – 2019. – Vol. 51. – P. 885–897. – DOI: 10.1007/s11858-019-01095-z.
6. Сосницька Н. Підготовка майбутніх фахівців енергетичного профілю до вирішення практичних задач на основі фізичних проєктів / Сосницька Н., Кривильова О. // Фізико-математична освіта. – 2021. – Т. 31, № 5. – С. 11–16. – DOI: 10.31110/2413-1571-2021-031-5-002.
7. Кашканова Г. Вища математика та розвиток творчої особистості: психолого-педагогічний підхід у технічній освіті / Кашканова Г., Кашканов А. // Педагогіка безпеки. – 2026. – Т. 11, № 1. – С. 9–17.
8. Коломієць А. Математична спрямованість професійної підготовки майбутніх інженерів галузі електроніки та телекомунікацій // Педагогіка безпеки. – 2023. – Т. 5, № 2. – С. 94–101.
9. Maiborodina N. Development of Student's Creative Thinking at the Study of Discipline «Higher Mathematics» // Zeszyty Naukowe WSA w Łomży. – 2022. – Nr 85. – S. 93–103. – DOI: 10.58246/6w65bh74.
10. Майбородіна Н. В. Основні характеристики та особливості творчого мислення студентів // Майбутня професія – виклик сьогодення: матеріали ІІ Інтернет-конференції, 25 березня 2021 р., м. Рівне. – Рівне, 2021. – С. 64–68.
11. Майбородіна Н. В. Психологічні аспекти розвитку мислення студентів при вивченні дисципліни «Вища математика» // Актуальні питання методики викладання загальноосвітніх дисциплін в умовах реформування ЗФПО: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції, м. Київ, 2 листопада 2021 р. / за заг. ред. Ю. В. Ївженка. – Київ, 2022. – Ч. 2.
12. Майбородіна Н. В. Розвиток творчого мислення студентів під час вивчення дисциплін природничо-математичного циклу / Майбородіна Н. В., Майоров Д. В. // Наука і сьогодення: матеріали міжвузівської студентської науково-практичної конференції, 26 травня 2021 р., м. Бобровиця. – Бобровиця, 2021. – С. 7–10.

Майбородіна Наталія Вікторівна **–** канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри природничо-математичних та загальноінженерних дисциплін, ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут», м. Ніжин, e-mail: mainataliia2311@gmail.com

Мейш Юлія Анатоліївна – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ

Герасименко В'ячеслав Панасович **–** канд. техн. наук, доцент кафедри електричної інженерії, ВП НУБіП України «Ніжинський агротехнічний інститут», м. Ніжин

Maiborodina Nataliia V. – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Natural, Mathematical and General Engineering Disciplines, Separate Subdivision of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine "Nizhyn Agrotechnical Institute", Nizhyn, Ukraine; e-mail: mainataliia2311@gmail.com

Yuliia A. Meish – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine.

Viacheslav P. Herasymenko – PhD in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Electrical Engineering, Separate Subdivision of the National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine "Nizhyn Agrotechnical Institute", Nizhyn, Ukraine.

УДК 004.92

О. Н. Романюк
В. П. Майданюк
О. В. Романюк

ГРАФІЧНІ ЗАСОБИ ПІДТРИМКИ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНІЧНИХ УНІВЕРСИТЕТАХ

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

Проаналізовано роль комп'ютерної графіки, систем динамічної математики, засобів візуалізації математичних об'єктів та інтерактивних програмних платформ у формуванні математичних компетентностей студентів. Особливу увагу приділено використанню програмних середовищ та цифрових інструментів для візуалізації математичних моделей, функцій, поверхонь і геометричних об'єктів. Показано, що застосування графічних засобів сприяє підвищенню мотивації студентів, покращенню розуміння абстрактних математичних понять та розвитку навичок математичного моделювання.

Ключові слова: вища математика, комп'ютерна графіка, візуалізація, математичне моделювання, цифрові технології.

Abstract

The role of computer graphics, dynamic mathematics systems, visualization tools for mathematical objects and interactive software platforms in the formation of students' mathematical competencies is analyzed. Particular attention is paid to the use of software environments and digital tools for the visualization of mathematical models, functions, surfaces and geometric objects. It is shown that the use of graphic tools contributes to increasing students' motivation, improving the understanding of abstract mathematical concepts and developing mathematical modeling skills.

Keywords: higher mathematics, computer graphics, visualization, mathematical modeling, digital technologies.

Вступ

У сучасних умовах цифровізації освіти особливого значення набуває підвищення ефективності викладання вищої математики в технічних університетах. Одним із перспективних напрямів удосконалення математичної підготовки студентів є використання графічних засобів [1-4], які забезпечують наочне подання складних математичних об'єктів, процесів і закономірностей. Застосування сучасних технологій комп'ютерної графіки та візуалізації сприяє кращому розумінню абстрактних понять, розвитку математичного мислення та формуванню професійних компетентностей майбутніх фахівці

Результати дослідження

Сучасний етап розвитку технічної освіти характеризується широким впровадженням цифрових технологій у навчальний процес. Особливої актуальності набуває задача підвищення ефективності викладання дисциплін математичного циклу, які є фундаментом підготовки майбутніх інженерів, програмістів та фахівців інформаційних технологій. Однією з основних труднощів під час вивчення вищої математики є високий рівень абстрактності математичних понять, що нерідко ускладнює їх сприйняття студентами. Тому важливим напрямом удосконалення математичної освіти є використання графічних засобів підтримки навчання, які забезпечують наочне представлення математичних об'єктів і процесів.

Візуалізація математичних понять є одним із найбільш ефективних способів формування математичного мислення. Сучасні дослідження свідчать, що застосування цифрових технологій та інтерактивних графічних інструментів позитивно впливає на якість засвоєння математичних знань, сприяє розвитку просторової уяви та підвищує пізнавальну активність студентів. Особливо важливими такі засоби є для технічних спеціальностей, де математичні методи широко використовуються під час моделювання фізичних процесів, проєктування технічних систем та розроблення програмного забезпечення.

Серед найбільш поширених графічних засобів підтримки математичної освіти важливе місце займають системи динамічної математики. Однією з найвідоміших платформ є GeoGebra, яка поєднує можливості геометричного моделювання, алгебраїчних обчислень, статистичного аналізу та візуалізації функцій. Використання GeoGebra дозволяє студентам досліджувати властивості математичних об'єктів у режимі реального часу, змінювати параметри моделей та спостерігати результати відповідних перетворень. Дослідження ефективності використання GeoGebra демонструють його позитивний вплив на формування математичних компетентностей та покращення результатів навчання.

Важливим напрямом використання графічних засобів є візуалізація функцій та їх властивостей. Під час вивчення математичного аналізу студенти стикаються з необхідністю дослідження поведінки функцій, знаходження екстремумів, точок перегину, асимптот та інших характеристик. Традиційні методи побудови графіків часто потребують значних часових витрат і не завжди забезпечують належний рівень наочності. Застосування сучасних графічних пакетів дозволяє швидко будувати двовимірні та тривимірні графіки, виконувати параметричні дослідження та аналізувати вплив окремих параметрів на форму функції.

Особливого значення набуває використання тривимірної комп'ютерної графіки під час вивчення аналітичної геометрії та лінійної алгебри. Візуалізація векторів, площин, поверхонь другого порядку та багатовимірних об'єктів дозволяє студентам краще розуміти геометричний зміст математичних операцій. Графічне представлення матриць перетворень, операцій масштабування, повороту та проєціювання сприяє формуванню зв'язку між математичними моделями та їх практичними застосуваннями у комп'ютерній графіці, робототехніці та системах автоматизованого проєктування.

У підготовці студентів технічних спеціальностей широко використовуються професійні математичні пакети MATLAB, Mathematica та Maple. Дані системи забезпечують не лише виконання складних чисельних обчислень, але й потужні засоби графічної візуалізації. За допомогою цих програм можна моделювати фізичні процеси, будувати поверхні складної форми, досліджувати диференціальні рівняння та аналізувати результати математичного моделювання. Використання таких інструментів наближає навчальний процес до реальних завдань інженерної практики.

Сучасні тенденції цифровізації освіти передбачають використання технологій доповненої та віртуальної реальності. Дані технології дозволяють створювати інтерактивні тривимірні математичні моделі, які можна досліджувати у віртуальному просторі. Застосування VR та AR відкриває нові можливості для вивчення багатовимірних геометричних об'єктів, складних поверхонь та математичних конструкцій, які важко представити традиційними засобами навчання.

Окремої уваги заслуговує використання засобів штучного інтелекту та адаптивної візуалізації. Сучасні інтелектуальні навчальні системи здатні аналізувати рівень підготовки студентів та автоматично формувати індивідуальні графічні моделі для пояснення складних математичних понять. Такі технології забезпечують персоналізацію навчального процесу та підвищують ефективність засвоєння навчального матеріалу.

Висновки

Таким чином, графічні засоби підтримки викладання вищої математики є важливим компонентом сучасного освітнього середовища технічних університетів. Їх використання сприяє підвищенню наочності навчання, формуванню професійних компетентностей майбутніх фахівців та розвитку навичок математичного моделювання. Подальший розвиток даного напряму пов'язаний із впровадженням технологій штучного інтелекту, віртуальної реальності та сучасних засобів комп'ютерної графіки, які забезпечують новий рівень інтерактивності та ефективності математичної освіти

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Романюк О. Н., Романюк О. В., Чехместрук Р. Ю. Комп'ютерна графіка : електронний навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2023. 147 с.
2. He C., Li Y. Research on Real-Time Graphics Rendering and Interaction Optimisation Strategies in Virtual Reality // *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*. 2024. Vol. 9(1). DOI: 10.2478/amns-2024-3540.

3. Xing Y., Pan G., Chen X. et al. Real-Time All-Frequency Global Illumination with Radiance Caching // *Computational Visual Media*. 2024. Vol. 10. P. 923–936. DOI: 10.1007/s41095-023-0367-z.
4. Wu W., Wang B., Hašan M. et al. Efficient Participating Media Rendering with Differentiable Regularization // *Computational Visual Media*. 2024. Vol. 10. P. 937–948. DOI: 10.1007/s41095-023-0372-2.

***Романюк Олександр Никифорович*-** д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: rom8591@gmail.com.

***Майданюк Володимир Павлович* -** канд. техн. наук, доцент кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: maidaniuk2000@gmail.com.

Романюк Оксана Володимирівна – доцент кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: romaniukoksanav@gmail.com.

***Romanyuk Oleksandr Nikiforovych*-** Dr. of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Software, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: rom8591@gmail.com.

***Maidaniuk Volodymyr Pavlovych* -** Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Software, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: maidaniuk2000@gmail.com.

Romaniuk Oksana Volodymyrivna – Associate Professor of the Software Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: romaniukoksanav@gmail.com.

УДК 378.147:004.8:17:51

Г.І.Ткаченко[1]
Т.М. Ковальчук[1]

ЕТИЧНЕ ВИКОРИСТАННЯ ІНСТРУМЕНТАРІЮ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ МАЙБУТНІМИ ФАХІВЦЯМИ ІТ-ГАЛУЗІ ПРИ ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИКИ

[1]Криворізький національний університет, Кривий Ріг, Україна

АНОТАЦІЯ

У публікації розкрито питання інтеграції штучного інтелекту у математичну підготовку ІТ-фахівців. Авторки акцентують увагу на компетентностях ЮНЕСКО, етичних викликах, ризиках залежності від штучного інтелекту та необхідності розвитку критичного мислення у процесі вивчення вищої математики. Обґрунтовано роль викладача у формуванні відповідального використання ШІ та дотримання академічної доброчесності студентами. Розглянуто вплив дистанційного навчання та цифрових інструментів на освітній процес.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: штучний інтелект, математика, ІТ-освіта, академічна доброчесність, критичне мислення, цифрові технології

ABSTRACT

The publication addresses the issue of integrating artificial intelligence into the mathematical training of IT specialists. The authors focus on UNESCO competencies, ethical challenges, risks of dependence on artificial intelligence and the need to develop critical thinking in the process of studying higher mathematics. The role of the teacher in shaping the responsible use of AI and adherence to academic integrity by students is substantiated. The impact of distance learning and digital tools on the educational process is considered.

KEYWORDS: artificial intelligence, mathematics, IT education, academic integrity, critical thinking, digital technologies

Вступ

У затвердженої Кабінетом міністрів України Концепції розвитку штучного інтелекту в Україні до 2030 року наголошується, що «Впровадження інформаційних технологій, частиною яких є технології штучного інтелекту, є невід'ємною складовою розвитку соціально-економічної, науково-технічної, оборонної, правової та іншої діяльності у сферах загальнодержавного значення» [1]. Зазначається, що освіта відноситься до першочергових пріоритетних сфер, в яких «реалізуються завдання державної політики розвитку галузі штучного інтелекту» [1].

Понад два десятиліття використання штучного інтелекту (ШІ) в освіті є однією з найбільш обговорюваних тем серед науковців в Україні. Існують багаточисельні напрацювання щодо етичності використання ШІ у навчанні. Розвиток цифрових технологій розвивається настільки стрімко, що в результаті виникає спостережуваний розрив між цифровими навичками студентів ІТ-спеціальностей та їх мотивацією до свідомого сприйняття інформації, дослідницькими компетенціями, готовністю відповідально застосовувати інструментарії ШІ. При практичній реалізації напрямків «Концепції…..» в освіту, окрім надання рівного доступу до ІТ- технологій для всіх учасників освітнього процесу, важливо забезпечити відповідальне використання ШІ, враховуючи етичні питання.

Актуальність даного дослідження зумовлена необхідністю формування відповідального ставлення здобувачів вищої освіти до використання сучасних платформ ШІ, які здатні впливати на індивідуальні результати навчання і майбутню професійну діяльність.

Результати дослідження

Згідно з «Компетентнісною рамкою ЮНЕСКО» та «Рекомендації щодо етики штучного Інтелекту» [2,3], майбутні користувачі технологій ШІ повинні оволодіти не лише технічними, а й етичними та соціальними навичками, що гарантує безпечну та відповідальну інтеграцію інновацій. У документах описано 12 ключових компетентностей, об'єднаних у чотири виміри: людино центрований підхід, етика використання ШІ, методи та застосування ШІ, а також проектування систем ШІ. Ці компетентності охоплюють три рівні розвитку: розуміння, застосування та створення. Концепція чітко визначає цілі навчальних програм і пропонує специфічні педагогічні підходи для кожної з галузей знань. «Рекомендації…» також підкреслюють важливість використання ШІ розвитку людських можливостей.

Проведений науковицей Вакалюк Т.А. та ін. [4] огляд навчальних планів підготовки бакалаврів за напрямом «комп'ютерні науки» у провідних країнах світу показав, що курси «штучний інтелект», «людська мова для штучного інтелекту», «машинне навчання» вже обов'язково входять до складу до вибіркових дисциплін в університетах. Варто відзначити, що більшість українських університетів вже додали до циклу професійної підготовки в освітньо-професійні програми дисципліни пов'язані зі ШІ. У якості прикладів можна навести галузі знань: F «Інформаційні технології»; A «Освіта/Педагогіка», спеціальність A5 «Професійна освіта» спеціалізація «Цифрові технології». Це підтверджує, що ШІ поступово переходить із розряду інноваційних технологій у категорію базових інструментів для навчання і формує як загальні так і спеціальні компетентності майбутньої професійної діяльності ІТ-фахівців.

О. Малихін, Т. Ярмольчук [5] визначили певну сукупність навчальних стратегій, на підставі якої було розроблено стратегічну модель підготовки ІТ-фахівців, яка передбачає враховувати інформаційно-технологічні та індивідуально-психологічні особливості готовності студентів до опанування ІТ-технологій і ШІ. Н. Козаченко [6] розкриває «можливість академічно доброчесної взаємодії зі штучним інтелектом з урахуванням особливостей його функціонування з точки зору епістемології чеснот в реальних навчальних та дослідницьких кейсах».

Автори [7] пропонують розглядати сучасні інформаційно-комунікаційні технології, до яких безумовно відноситься ШІ. в навчанні вищої математики як комплексний освітній засіб, що поєднує сучасні можливості візуалізації навчального матеріалу та інноваційні методи його подання: «робота з Python (бібліотеки NumPy, Matplotlib) для візуалізації функцій або використання систем комп'ютерної алгебри (наприклад, Matlab)».Такий підхід, на їх думку, сприяє модернізації змісту математичної освіти, розвитку інформаційно-пошукових компетентностей, а також створює умови для розвитку дослідницької самостійності майбутніх ІТ-фахівців.

Отже, науковцями розглядаються різні аспекти використання інструментарію ШІ при навчанні ІТ-фахівців, але окремої уваги потребують етичні й психологічні виклики.

Студенти часто ставлять правомірні запитання: «Чому при використанні Matlab, AutoCAD, Excel, Grammarly, Google–перекладачами, тощо, викладачі не говорять про загрози традиційним цінностям та дотримання принципів академічної доброчесності»?

Як провести етичну межу між звичайним повсякденним користуванням стандартними програмами, обчислювальними інструментами й інструментарієм ШІ?

Серед цілої низки викликів, пов'язаних з використанням генеративних інструментів у навчанні, на нашу думку, ключовими є наступні: - потенційна залежність від ІТ-технологій, яка може виникнути при введенні ШІ в освітній процес; - обмежена здатність ШІ до розвитку креативності та критичного мислення ІТ-фахівців. Розглянемо детальніше ці виклики.

З погляду на сучасний індивідуально-особистісний стиль пізнавальної діяльності студентів можна стверджувати, що інтеграція ШІ в освіту може сформувати ризик залежності. Практична реалізація інструментарію ШІ щоденно демонструється студентами через: використання інтелектуальних асистентів (наприклад, ChatGPT), а саме ШІ вважається - раціональним агентом-помічником.

Прикладом має бути звертання до ШІ при виконанні будь-якого завдання; уникання самостійного пошуку рішень і розв'язування задач. Спостерігається зниження мотивації до навчання, так як зникає стимул заглиблюватись глибше у тематику дисципліни. При виконанні письмових робіт, опрацюванні теоретичного матеріалу лекцій надмірне використання ШІ дуже часто перетворюється на звичайне копіювання розв'язань задач. Це зазвичай послаблює логічне мислення, здатність формулювати висновки, провокує ефект «ілюзії знань».

Майбутні ІТ-фахівці, зазвичай розуміють, що ШІ, зокрема системи на кшталт ChatGPT або Google Gemini, працює на основі аналізу великих масивів даних і виявлення закономірностей. ШІ комбінує вже відому інформацію або генерує текст, базуючись на типових аргументах і стилях. Використання інструментів ШІ саме по собі не є неетичним. Навпаки, з огляду на те, що ШІ є невід'ємною частиною нашого життя, важливо обговорювати зі студентами його переваги й етичні обмеження. Важливим психолого-педагогічним завданням викладачів має бути методичність й наполегливість у формуванні ІТ-фахівців культури відповідального застосування, збалансованості й узгодженості при використанні інструментарію ШІ. Студенти повинні чітко розуміти, що попри величезний потенціал ШІ як інструменту підтримки їхнього навчання, саме вони, здобувачі вищої освіти, є суб'єктами дотримання етичних норм і академічної доброчесності. формуванні.

Декілька років тому COVID-19, а зараз війна в Україні зумовили активне впровадження дистанційного навчання в навчальних закладах країни. В Криворізькому національному університеті дистанційні заняття проводяться на платформі Google Meet. Навчання, постановка завдань та можливість консультацій з викладачем здійснюється, як безпосередньо, так і опосередковано через Google Classroom (розміщення дистанційних електронних навчальних курсів, матеріалів дисципліни, методичної літератури, тестувань знань). Програмне забезпечення для роботи з освітнім контентом дисципліни та успішне виконання передбачених видів освітньої діяльності: PowerPoint; Word; Excel.

Студенти ІТ-спеціальностей активно використовують цифрові інструменти у навчальному процесі, і першочергове завдання викладача пояснювати, що використання ШІ виправдане метою зручності та оперативності пошуку інформації, створення розрахункових таблиць, побудови графічного матеріалу.

В умовах дистанційної форми навчання та із врахуванням наявності здобувачів з низьким рівнем математичної підготовки, викладачі кафедри вищої математики та фізики Криворізького національного університету використовують нестандартні підходи до створення теоретичної бази знань та вміння їх використовувати при розв'язанні задач практичного змісту. Одним із таких методичних підходів є алгоритмізація навчання, яка полягає у тому, що наряду з розгорнутим, повним лекційним матеріалом, що включає базовий матеріал, трактування означень, доведення теорем і властивостей, приклади розв'язаних задач, пропонуються скорочені версії алгоритмів застосування у вигляді схеми. Так алгоритмічній підхід застосовується при викладанні методу довірчих інтервалів в математичній статистиці [8].

З метою формування здатності до самостійної дослідницької діяльності авторам впроваджено методичний підхід до організації лабораторних занять з фізики для студентів бакалаврату ІТ-спеціальностей, який передбачає використання двофакторного експерименту під час виконання лабораторних робіт з електрики. Для ілюстрації запропонованої методики розглянемо лабораторну роботу «Визначення потужності в електричному колі постійного струму». У межах двофакторного аналізу предметом дослідження є експериментальні дані, що залежать від двох незалежних факторів. У даному випадку розглядається потужність електричного кола, яка залежить від двох незалежних факторів: напруги та опору. Лабораторне заняття складається з наступних послідовних етапів: постановка дослідницької задачі; визначення факторів та меж їх варіювання, проведення вимірювань та реєстрація результатів; побудова діаграм розсіювання; обчислення парних коефіцієнтів кореляції, які вказують на тісноту зв'язків між факторами і потужністю; обговорення результатів. Розв'язання системи рівнянь регресії здійснюється за допомогою формул Крамера із використанням пакета MS Excel, у якому обчислюються визначники третього порядку із застосуванням функції МОПРЕД. Побудову діаграм розсіювання студенти також виконують у програмному середовищі MS Excel.

Викладач пояснює основні концепції грамотності у галузі штучного інтелекту; оцінює контент, створений за допомогою ШІ (зокрема, опрацювання теоретичного матеріалу, побудова графіків, виконання обчислень); доводить, що застосування ШІ не гарантує фактичний рівень знань і не впливає на результат оцінювання. Згенерований контент має бути ретельно перевірений, порівняний звласними розрахунками, і ця обов'язкова практика формує критичне мислення студента. Отже, одним із нових підходів до підготовки майбутніх ІТ-фахівців є розвиток критичного мислення. Студенти мають не лише використовувати інструменти штучного інтелекту, а й аналізувати результати їх роботи, ставити запитання щодо їх достовірності та можливих упереджень. При використанні Інтернет – ресурсів, ШІ та інших джерел інформації здобувач має вказати джерело, використане під час виконання завдання. Виникнення спокуси видачі роботи, яку згенеровано ШІ за свою, вже є прямим порушенням положень Кодексу академічної етики, який впроваджено в університеті [9] та розміщено на сайті навчального закладу.

Висновки

Отже, етичне використання технологій ШІ при вивченні вищої математики, фізики та інших дисциплін є базовою вимогою до ІТ-фахівця. Враховуючи сучасні виклики та концепцію розвитку вищої освіти майбутні ІТ-фахівці мають залучати та упроваджувати нові технології та цифрові інструменти при вивченні вищої математики, використовувати сучасне програмне забезпечення тощо. Водночас важливо зберігати баланс між використанням цифрових технологій і розвитком самостійного мислення. Сучасні ІТ-освітні технології дозволяють мінімізувати розрив між технічними навичками і етичним використанням ШІ шляхом оновлення змісту навчання, впровадження міждисциплінарних підходів. Вирішальну роль відіграє викладач у формуванні етичної культури та відповідального застосування ШІ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1.Україна, Кабінет Міністрів України. (2020, 02 груд.). Постанова Кабінету Міністрів України № 1556-р. Про схвалення Концепції розвитку штучного інтелекту в Україні, (дата звернення: 25 04. 2026). [Онлайн]. Доступно https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-2020-%D1%80#Text:

2. UNESCO. AI competency framework for students. United Nations Educational, Scientific c and Cultural Organization. Paris, 2024. (дата звернення: 27.03.2026) URL: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000391105

3. Recommendation on the Ethics of Artificial Intelligence. UNESCO. 2022.URL:https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000381137.

4. Вакалюк, Т. А., Антонюк, Д. С., Новицька, І. В., Марцева, Л. А., Кот, Н. С. Досвід підготовки бакалаврів у галузі інформаційних технологій у провідних країнах світу. *Педагогічні науки: теорія та практика*, №1(45),2023, с. 83-91. https://doi.org/10.26661/2786-5622-2023-1-12

5. Малихін О.В. Ярмольчук Т.М. Актуальні стратегії навчання у професійній підготовці фахівців з інформаційних технологій. *Інформаційні технології і засоби навчання*, №2(76),с.43-57, 2020 doi: 10.33407/itlt.v76i2.2682 .

6. Козаченко Н. Штучний інтелект і академічна доброчесність в контексті епістемології чеснот. *Актуальні проблеми духовності*, *25*, с.315-342, 2024 https://doi.org/10.55056/apm.7740

7. Хом'юк, І., Кирилащук, С., & Хом'юк, В. (2022). Застосування інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання вищої математики у технічних ЗВО. *Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Педагогіка та психологія, (69),* 38–45. doi: 10.31652/2415-7872-2022-69-38-44 https://surli.cc/mwnaom

8. Т.М. Ковальчук, І.І. Максимов, Н.М. Кіяновська. Застосування алгоритмічних підходів при викладанні методу довірчих інтервалів в математичній статистиці. *Наука, промисловість, суспільство:* матеріали XXIV міжнар. наук.-техн. конф. (Кривий Ріг, 26 – 29 травня 2026 р.). Кривий Ріг, 2026. С.403. https://surli.cc/pordpn

9 Кодекс честі студента та Кодекс академічної доброчесності. Режим доступу: URL:https://www.knu.edu.ua/storage/files/2/3/128.pdf

Галина Іванівна Ткаченко – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики та фізики,Криворізький національний університет, Кривий Ріг

Тетяна Михайлівна Ковальчук - кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики та фізики,Криворізький національний університет, Кривий Ріг

Galina I. Tkachenko - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics and Physics, Kryvyi Rih National University, Kryvyi Rih, 4011598galina@gmail.com

Tetyana M. Kovalchuk - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics and Physics, Kryvyi Rih National University, Kryvyi Rih

УДК [159.9.072:519.23]:378.147

О.В.Костюніна

Математико-статистичний апарат у сучасних психологічних дослідженнях: методологічні виклики, Mixed Methods та стандарти Open Science у вищій освіті

Державна академія інтелектуальниї технологій та зв'язку (м.Одеса)

Анотація

Статтю присвячено модернізації системи підсумкового контролю магістрів-психологів в умовах цифровізації та переходу до стандартів Відкритої науки (Open Science). Розглянуто методологічні виклики вищої школи, пов'язані з кризою відтворюваності результатів, практиками p-hacking та HARKing. Обґрунтовано перехід від репродуктивного відтворення статистичних формул до розвитку методологічної інтуїції студентів. На прикладі розроблених трикомпонентних екзаменаційних комплексів проілюстровано інтеграцію методів квантифікації якісних ознак у парадигмі Mixed Methods. Визначено етичні межі та легітимні інструменти залучення генеративного штучного інтелекту як асистента дослідника на етапі експлораторного аналізу даних (AI Disclosure, модель Human-in-the-loop). Запропоновано банк прикладних кейс-завдань, який позиціонується як гнучкий методичний конструктор для оптимізації та технологізації викладацької практики без додаткового бюрократичного навантаження.

Ключові слова: вища освіта, магістри-психологи, криза відтворюваності, *Open Science*, *Mixed Methods*, квантифікація, генеративний штучний інтелект, екзаменаційні кейси.

Abstract

The article is devoted to the modernization of the final assessment system for Master's students in psychology under digitalization and the transition to Open Science standards. The study addresses methodological challenges in higher education linked to the replication crisis, p-hacking, and HARKing. A transition from reproductive memorization of statistical formulas to the development of students' methodological intuition is substantiated. Using the developed three-component exam complexes as an example, the integration of qualitative data quantification methods within the Mixed Methods paradigm is illustrated. Ethical boundaries and legitimate tools for incorporating generative artificial intelligence as a research assistant at the stage of exploratory data analysis are defined (AI Disclosure, Human-in-the-loop model). A bank of applied case tasks is proposed, serving as a flexible methodological framework to optimize and technologicalize teaching practices without introducing additional bureaucratic burdens.

Keywords: higher education, Master's students in psychology, replication crisis, Open Science, Mixed Methods, quantification, generative artificial intelligence, examination cases.

Вступ

Сучасна вища школа функціонує в умовах кардинальної зміни наукових парадигм, викликаної цифровізацією науки, масовим розгортанням генеративного штучного інтелекту та переходом до жорстких стандартів відкритих даних. У контексті підготовки магістрів за напрямом 053 «Психологія» ці зміни актуалізують гостру академічну проблему: необхідність подолання традиційного розриву між гуманітарною складовою психологічного знання та вимогами Data Science.

Криза відтворюваності та виклики для вищої школи

Психологічна наука XXI століття продовжує переживати глибоку методологічну кризу — кризу відтворюваності (*Replication Crisis*), за якої результати класичних емпіричних експериментів не підтверджуються при їхньому незалежному повторенні верифікованими дослідницькими групами. Однією з фундаментальних причин цього феномену визнано недостатню математико-статистичну грамотність дослідників, що породжує латентні маніпуляції з даними:

- **p-hacking** — селективний відбір значущих коефіцієнтів (p <.05) при ігноруванні загального масиву нульових гіпотез;
- **HARKing** (*Hypothesizing After the Results are Known*) — формулювання гіпотез після того, як результати вже отримані, що спотворює індуктивно-дедуктивну логіку науки;
- **ігнорування статистичної потужності** — проведення досліджень на мікро-вибірках, де ймовірність виявити реальний психологічний ефект прагне до випадкової;

У зв'язку з цим реформація математичної освіти для студентів гуманітарних спеціальностей стає пріоритетним завданням вищої школи. Студент-магістр повинен сприймати математичний апарат не як формальний бар'єр перед захистом, а як наскрізний інструмент забезпечення внутрішньої та зовнішньої валідності свого дослідження.

Парадигма Open Science та архітектоніка концептуального апарату

Перехід до постнекласичної наукової парадигми вимагає від вищої освіти впровадження принципів руху «Відкрита наука» (*Open Science*). Сучасний стандарт психологічного дослідження, зокрема за вимогами American Psychological Association (APA 7), базується на наступних умовах:

- пререєстрація дослідницьких протоколів (*Pre-registration*): фіксація гіпотез, дизайну та плану статистичного аналізу в незалежних репозиторіях (наприклад, OSF) до початку збору даних, що повністю виключає феномен HARKing;
- відкриті бази даних (*Open Data*): публікація деідентифікованих «сирих» матриць даних разом із текстом роботи для можливості проведення незалежного аудиту та реплікації;
- строгий синтаксис таблиць та індексів: оформлення статистичних висновків у курсивних шрифтах із точним зазначенням ступенів свободи (*d*□), рівнів значущості (p) та величини ефекту (d Коена, η^2).

Математична підготовка магістрантів має змістити фокус із репродуктивного відтворення формул на розвиток методологічної інтуїції. Дослідник зобов'язаний чітко співвідносити об'єкт, предмет та ієрархію гіпотез. dнауковому психологічному дослідженні виділяють чотири рівні гіпотез, кожен з яких потребує математичного обґрунтування (Таблиця 1).

Таблиця 1. Ієрархічна матриця наукових гіпотез у психологічному дослідженні

Рівень гіпотези	Сутність та психологічний зміст	Математичне вираження / Інструмент	Приклад формулювання
Теоретична	Припущення про наявність генерального зв'язку між абстрактними конструктами	Якісні концептуальні моделі	Генеративний ШІ дестабілізує професійну ідентичність співробітників
Емпірична	Переклад теорії на рівень конкретних методик та спостережуваних феноменів	Опис операціоналізованих змінних, показники шкал	Показники шкал Опитувальника професійної ідентичність (VIQ за Дж. Марсіа) пов'язані з характером візуальних аватарів геймерів
Операціональна	Фіксація конкретних очікувань у вимірюваних балах та кодах якісного аналізу	Оцифровані індекси та метричні шкали	Бал вигорання за MBI буде статистично вищим у співробітників на віддаленій роботі
Статистична	Пари взаємовиключних гіпотез: нульова (H_0) та альтернативна H_1	Математичні критерії порівняння (t, F, χ^2, r)	H_0: $\mu_1 = \mu_2$ (відмінностей немає); H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ (існують значущі відмінності)

Планування вибірки та апріорний розрахунок потужності (G*Power)

Наслідком слабкої математичної підготовки магістрів є проєктування обсягу вибірки «зі стелі» або на основі суб'єктивного принципу «чим більше, тим краще». Недобір вибірки веде до помилки другого роду (β-помилка): дослідник приймає хибну нульову гіпотезу і втрачає реальний психологічний ефект через слабкість «математичного ліхтарика». Перебір вибірки є економічно недоцільним і може зробити статистично значущими мікроскопічні, життєво безглузді відмінності. У навчальний процес вищої школи має бути інтегроване обов'язкове освоєння програмного середовища G*Power. Розглянемо покроковий алгоритм розрахунку обсягу вибірки для двофакторного експерименту зі змішаним планом (дизайн: *Repeated measures, within-between interaction*, що включає порівняння експериментальної та контрольної груп у двох часових точках — до і після психологічного впливу).

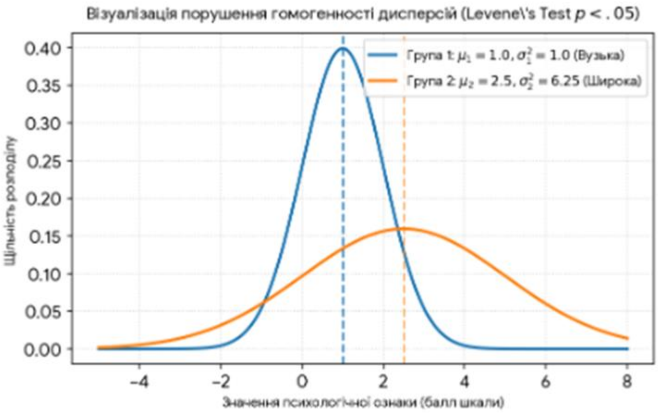
1. Вибір сімейства тестів (*Test family*): *F*-тести
2. Статистичний критерій: *ANOVA: Repeated measures, within-between interaction*
3. Тип аналізу: *A priori: Compute required sample size* — розрахунок обсягу вибірки на етапі планування
4. Фіксація вхідних параметрів (*Input parameters*):
   - Розмір ефекту (*Effect size f*) = 0.25 (консервативний середній рівень за стандартами Коена);
   - Альфа-рівень (α-помилка) = 0.05 (загальноприйнятий науковий ценз)
   - Статистична потужність (1-β) = 0.80 (ймовірність зафіксувати ефект, якщо він існує);
   - Кількість груп (*Number of groups*) = 2 (експериментальна та контрольна);
   - Кількість замірів (*Number of measurements*) = 2 (пре-тест і пост-тест).

Програма видає показник *Total Sample Size* (загальний обсяг вибірки), який дослідник зобов'язаний пропорційно розділити між групами. Навчання магістрів цієї процедури повністю страхує наукові проєкти від методологічної сліпоти.

Верифікація статистичних допущень та подолання помилок. Грубою помилкою багатьох кваліфікаційних магістерських робіт є автоматичне застосування параметричних критеріїв (таких як, *t*-критерій Стьюдента або ANOVA) до масивів даних без попередньої перевірки математичних допущень. Вища освіта має виробити у студентів жорсткий алгоритм експрес-аудиту даних.

Характер розподілу ознаки. Перевірка на нормальність здійснюється не лише візуально, а й з використанням строгих критеріїв: Шапіро-Вілка (для вибірок (N <50) та Колмогорова-Смирнова (для великих вибірок). Якщо розподіл значущо відхиляється від нормального (p <.05), параметрична статистика є неприйнятною, і магістр зобов'язаний переходити до непараметричних аналогів (критерії Манна-Витні, Краскела-Валліса, Вілкоксона).

Гомогенність дисперсій (критерій Лівена (*Levene's test*). Перед розрахунком класичного *t*-критерію Стьюдента для незалежних вибірок критично важливо перевірити однорідність розкиду даних у групах за допомогою критерію Лівена. Якщо допущення порушено (P_{Levene} <.05), дисперсії значущо відрізняються, дослідник зобов'язаний застосувати критерій Велча (*Welch's t-test*), який автоматично апроксимує ступені свободи (*df*) у менший бік, роблячи критерій більш суворим до помилок першого роду. Нижче представлена візуалізація поведінки щільності розподілу двох вибірок із порушеним допущенням про гомогенність дисперсій (різний розкид навколо середніх значень), що ілюструє суть критерію Лівена.



Проблема мультиколінеарності в регресійних моделях

При побудові моделей множинної лінійної регресії магістранти часто включають незалежні предиктори змінні, які тісно корелюють між собою (наприклад, «Рівень доходу» та «Суб'єктивне економічне благополуччя»). Це породжує ***мультиколінеарність***, що спотворює ваги регресії (*ß*-коефіцієнти) і робить модель математично нестабільною. Для діагностики цього спотворення використовується показник **VIF** (Variance Inflation Factor). Якщо показник VIF перевищує критичний поріг 5 (VIF> 5), це свідчить про те, що предиктори дублюють один одного і один з них має бути вилучений або інтегрований через факторний аналіз (EFA) (Таблиця 2)

Таблиця 2. Діагностика мультиколінеарності та регуляризація моделі

Предиктор моделі	Значення VIF	Статус предиктора	Методологічне рішення дослідника
Рівень доходу	1.20	Стабільний (колінеарність відсутня)	Залишається у фінальному рівнянні регресії
Економічне благополуччя	8.45	Критичний (виражена мультиколінеарність)	Дія. Видалити предиктор з моделі або об'єднати його з доходом через факторний аналіз (EFA)

Парадигма Mixed Methods та квантифікація якісних даних

Сучасне психологічне дослідження вийшло за межі виключно кількісних тестів. Міжнародним золотим стандартом став дизайн змішаних методів *(Mixed Methods Designs).* Він вимагає інтеграції стандартизованої психометрики та якісних джерел (дискурсивно – графічні тести, нарративні інтерв'ю, пострисункові бесіди). Якісні дані не повинні бути просто ілюстрацією («Студент А намалював сумний малюнок»); вони переводяться в жорсткі матриці кодів. Виклик для вищої школи — навчити магістрів проводити *квантифікацію (оцифровку)* якісного контенту.

Контроль суб'єктивної помилки (Каппа Коена). Для верифікації даних дослідження залучаються незалежні експерти. Рівень їхньої узгодженості вимірюється коефіцієнтом Каппа Коена (k). Магістр повинен розуміти градацію цього індексу:

k <0.60 — незадовільний рівень, висока частка суб'єктивної помилки; дані використовувати в статистиці заборонено;
$0.60 \leq k$ <0.70— помірний рівень, що вимагає проведення дебрифінгу експертів та перекодування спірних випадків;
$k \geq$ 0.70-0.75 — високий науковий ценз, що дозволяє включати оцифровані коди до матриць багатовимірного аналізу;

Після успішної квантифікації якісна ознака (наприклад, дихотомічний код: 0 — бар'єра на малюнку немає, 1 — бар'єр є) зіставляється з метричним інтервальним балом тесту за допомогою точково-бісеріального коефіцієнта кореляції *rpb*, забезпечуючи справжню тріангуляцію даних.

Інтеграція штучного інтелекту та етичний протокол

Стрімкий вибух генеративного ШІ (LLM-моделей: ChatGPT, Claude, Gemini) у 2022–2026 роках поставив вищу школу перед вибором: забороняти технології чи очолити їхню інтеграцію. Загальні заборони неефективні та ведуть до академічного регресу. Стратегічний крок сучасної освіти — навчання магістрів легітимним методам *AI-assisted research* та методології *Prompt Engineering* (зокрема технології *Few-Shot Prompting*). При аналізі великих масивів текстів ШІ виступає як асистент для розвідувального (*exploratory*) контент-аналізу за умови чіткого кодування та виведення результатів у форматі CSV-таблиць. Зважаючи на те, що психологічні дослідження магістрів вивчають як взаємодію людини з технологіями, так і розробляють корекційно-реабілітаційні програми, спрямовані на відновлення психічного здоров'я (наприклад, після бойових травм, втрат або ізоляції), використання ШІ тут вимагає найвищого рівня обережності. Тут ШІ виступає і як об'єкт дослідження, і як інструмент реабілітації, що подвоює етичні ризики для магістра. Заклади вищої освіти зобов'язані впроваджувати жорсткий етичний протокол використання ШІ, який розмежовує легітимну роботу та академічне шахрайство (Таблиця 3).

Таблиця 3. Етичний комплаєнс та дихотомія застосування інструментів генеративного ШІ в академічному середовищі

Легітимні методи (дозволено)	Грубі порушення (заборонено)
Первинний аналіз методик: ШІ допомагає підібрати валідні опитувальники під об'єкт дослідження.	Генерація відповідей респондентів: симуляція ШІ заповнення тестів замість реальної вибірки людей.
Обробка відкритих відповідей: класифікація великої кількості якісних текстових відповідей респондентів за категоріями.	Порушення анонімності: завантаження в ШІ реальних протоколів консультацій чи ПІБ досліджуваних.
Написання коду для SPSS/R: генерація скриптів для розрахунку кореляцій, Т-критерію чи регресі.	ШІ-діагностика: використання ШІ для встановлення психологічних діагнозів чи висновків без перевірки психолого.
Огляд теорій та брейнштормінг: структурування підходів різних психологічних шкіл, пошук патернів та сіток кодів.	Підгонка результатів та обхід систем: прохання до ШІ "змінити цифри", прихована фабрикація даних, обхід систем «Антиплагіат».
Адаптація кейсів та VR-сценаріїв: створення гіпотетичних описів клієнтських випадків, генерація описів віртуальних середовищ для терапії.	Заміна психолога алгоритмом та ретригер: проведення реабілітаційних сесій через ШІ з реальними особами без нагляду лікаря, неконтрольований ретригер травми .
Аналіз поведінки та маркерів: обробка знеособленої статистики геймерів, пошук депресивних маркерів у закритих базах даних.	Ігнорування "цифрового розриву" та завантаження медичних карток: внесення до ШІ історій хвороб (МКХ-10), видача онлайн-рекомендацій без урахування відсутності доступу до технологій у пацієнтів.

Ключовими зонами особливої відповідальності магістра-психолога при роботі з ШІ є: обов'язкове декларування за правилами *AI Disclosure* (із зазначенням назви моделі, версії та характеру запитів), дотримання принципу *Human-in-the-loop* (верифікація людиною), сувора заборона на завантаження терапевтичних сесій у «хмари», збереження критичного мислення щодо «ідеальної» статистики та адаптація висновків під реальний контекст вибірки вручну.

Метод кейс-завдань як основа контролю якості освіти

Перехід від репродуктивної моделі освіти («зазубрювання формул») до компетентнісної вимагає радикального оновлення екзаменаційних матеріалі. Традиційні білети мають бути замінені банком наскрізних методологічних кейс-завдань. Екзаменаційний білет сучасного магістра-психолога бажано розробляти як трикомпонентну структуру, що містить питання теоретико-методологічних основ (Блок 1), інструментально-статистичний апарат (Блок 2) та практичну кейс-задачу з реальним контекстом (Блок 3). З метою комплексного контролю сформованості математичних компетенцій у магістрів до екзаменаційного комплексу інтегровано завдання з психометричного аудиту та аналізу якісних ознак. Концептуальна інтеграція банку екзаменаційних кейс-завдань до системи підготовки реалізується через наскрізне поєднання теоретичних знань магістрів-психологів із прикладними задачами цифрової психометрії та кіберпсихології. У межах науково-методичного обґрунтування цієї моделі банк екзаменаційних кейсів виступає не лише інструментом фінального контролю, а й об'єктивним маркером здатності випускника розв'язувати реальні дослідницькі задачі. Практична реалізація зазначеного підходу у структурі статті ілюструється двома базовими типами комплексних завдань:

Кейси з психометричного аудиту цифрового інструментарію. У межах цього блоку магістрам пропонується завдання на верифікацію надійності та валідності нових онлайн-тестів або діагностичних ШІ-додатків. Наприклад, у кейсі «Психометричний аудит надійності (α Кронбаха)» магістрант проводить пілотну валідизацію нового опитувальника цифрового стресу з 10 пунктів (N = 30). Первинний розрахунок показує незадовільну (α = .52), але в таблиці виводу SPSS «Item-Total Statistics» у стовпці «Cronbach's Alpha if Item Deleted» навпроти пункту №7 стоїть значення .79, а в стовпці «Corrected Item-Total Correlation» — значення -0.24. Студент має надати аргументовану відповідь щодо математичної причини низької надійності (наприклад, неперекодована зворотна шкала) та описати практичні дії для покращення властивостей методики.

Кейси з математичного аналізу якісних (нечислових) ознак. Цей напрям орієнтований на обробку текстової та категоріальної інформації. Типовим прикладом є завдання на статистичний аналіз контенту соціальних мереж: магістр має категоризувати якісні маркери психологічного вигорання або агресії у текстових повідомленнях користувачів, перевести ці дані у номінативну шкалу та математично довести наявність зв'язку між ознаками за допомогою критерію хі-квадрат (χ^2) Пірсона.

Комплексна архітектура підсумкового контролю, що включає інноваційні екзаменаційні кейси, дозволяє перевести атестацію магістрів-психологів із площини формальної перевірки знань у площину реальної оцінки їхньої професійної спроможності. Узагальнення описаного нами науково-методичного досвіду, а також аналіз результатів його практичного застосування на кафедрі, дають підстави для формулювання низки узагальнюючих висновків . Окрім суто академічного ефекту, запропонований підхід має чітко окреслену практичну значущість для модернізації вищої психологічної освіти в умовах цифровізації науки. Підсумовуючи вищесказане, детально окреслимо висновки щодо ефективності моделі та прикладні рекомендації для колег-освітян, які прагнуть оптимізувати процес оцінювання дослідницьких компетенцій магістрів.

Висновки та практична значущість

1. Орієнтація на подолання кризи відтворюваності результатів: головним вектором модернізації оцінювання у вищій освіті визначено відмову від пасивного репродуктивного відтворення статистичних формул на користь розвитку методологічної інтуїції магістрів. Запропонована архітектура комплексних кейс-завдань навчає студентів суворого дотримання математичних допущень критеріїв і повністю відповідає міжнародним стандартам руху Відкритої науки (*Open Science*).
2. Валідність методології змішаних методів (*Mixed Methods*): на прикладі розроблених екзаменаційних комплексів обґрунтовано, що якісні, дискурсивні та графічні методи кіберпсихологічного аналізу є не просто ілюстративним матеріалом у наукових роботах, а мають проходити обов'язкову процедуру квантифікації (переведення у номінативні чи порядкові шкали) для подальшого багатовимірного статистичного аналізу.
3. Генеративний ШІ як інноваційний інструмент дидактики: штучний інтелект визнано легітимним асистентом магістра-дослідника на етапі експлораторного (розвідувального) аналізу даних та первинної класифікації якісних ознак. Проте його залучення є припустимим виключно за умови обов'язкового прозорого декларування правил використання (*AI Disclosure* відповідно до вимог APA 7) та фінальної верифікації всіх результатів людиною (модель *Human-in-the-loop*).
4. Технологізація та оптимізація викладацької практики: розроблений трикомпонентний банк екзаменаційних кейсів дозволяє мінімізувати суб'єктивізм та перевести підсумкову атестацію у площину прозорого аудиту дослідницьких компетенцій. Описаний досвід репрезентує гнучкий методичний конструктор для викладачів інших кафедр психологічного профілю, оскільки дозволяє адаптувати та масштабувати завдання під будь-яку прикладну тематику без створення додаткового бюрократичного навантаження на професорсько-викладацький склад.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дзьобань О. П. Методологія, організація та технологія наукових досліджень : навч. посіб. для аспірантів /; ДНУ «Ін-т інформації, безпеки і права Нац. академії прав. наук України». Київ; Одеса: Фенікс,2025. 284 с.
2. Методика та організація наукових досліджень з психології:навчальний посібник для студентів спеціальності 053 Психологія /Укладачі: В.Й. Бочелюк, В.В. Нечипоренко, О.Л. Позднякова, Н.Є.Завацька, Ю.А. Завацький, І.Є. Жигаренко, В.Ю. Завацький. [3-ге вид., перероб. і доп.]. Київ: КНТ, 2024. 384 с.
3. Освітні вимірювання та статистичні методи обробки даних [Електронний ресурс] : електрон. метод. рекомендації до практичних занять з курсу для здобувачів спеціальності 011 "Освітні, педагогічні науки" / уклад.: В. В. Павлова, Н. В. Нагорна. Одеса, 2023. 33 с. URL: https://nupp.edu.ua/page/osnovi-matematichnoi-statistiki-dlya-psikhologiv-053.html
4. Стиль APA: вимоги до оформлення списку використаних джерел кирилицею та латиницею в наукових виданнях : метод. рек. / уклад.: М. П. Гребенюк, Г. З. Шевчук, Л. І. Гаврилюк, Ю. А. Кліванська, Р. А. Ткачук. Луцьк : ВІППО, 2025. 68 с.
5. Crayne, M. P., & Medeiros, K. E. (2024). Making sense of the machine: Professional identity transformation in the age of AI. *Journal of Vocational Behavior*, *148*, Article 103952. doi.org

6. URL: https://osf.io (Міжнародний репозиторій Відкритої науки).G*Power Official Software & Manual (HHU Düsseldorf)
7. URL: https://www.psychologie.hhu.de/arbeitsgruppen/allgemeine-psychologie-und-arbeitspsychologie/gpower G*Power. Statistical Power Analyses for Mac and Windows

Костюніна Олена Володимирівна – кандидат психологічних наук, доцент кафедри кіберпсихології та реабілітації, Державна академія інтелектуальниї технологій та зв'язку , м.Одеса, email : favoritelena09@gmail.com

Olena V. Kostiunina – PhD in Psychological Sciences, Associate Professor of the Department of Cyberpsychology and Rehabilitation, State Academy of Intellectual Technologies and Communications, Odesa, Ukraine, email : favoritelena09@gmail.com

УДК 378.011.3-057.175:51:[37.013+37.091.3]:004.77

М. М. Ковтонюк
О. М. Соя

МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСОБЛИВОСТІ РОЗВИТКУ МЕТОДИЧНОЇ ТА ПЕДАГОГІЧНОЇ КУЛЬТУРИ ВИКЛАДАЧА МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ГЛОБАЛЬНОГО ІНФОРМАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація

У статті досліджено методологічні особливості розвитку методичної та педагогічної культури викладача математики в умовах глобального інформаційного простору. Обґрунтовано актуальність проблеми в контексті стрімкого зростання обсягів інформації, цифровізації освіти та необхідності безперервного оновлення професійних компетентностей науково-педагогічних працівників. Визначено сутність професійної культури викладача математики як інтегрованої динамічної властивості особистості, що поєднує математичну, науково-методичну, педагогічну, цифрову та інформаційну складові. Охарактеризовано зміст методичної та педагогічної культури викладача, а також окреслено етапи побудови його власної методичної системи, зокрема проєктування, моделювання, оптимізацію, моніторинг, мотивацію та систематизацію. Зроблено висновок, що розвиток методичної та педагогічної культури викладача математики є важливою передумовою його професійного зростання та ефективної діяльності в сучасному освітньому середовищі.

Ключові слова: методична культура, педагогічна культура, професійна культура, викладач математики, глобальний інформаційний простір, цифрові технології, професійний розвиток, методична система.

Abstract

The article examines the methodological features of the development of the methodological and pedagogical culture of a mathematics teacher in the context of the global information space. The relevance of the problem is substantiated in view of the rapid growth of information volume, the digitalization of education, and the need for the continuous renewal of the professional competencies of academic and teaching staff. The essence of the professional culture of a mathematics teacher is defined as an integrated dynamic personal characteristic that combines mathematical, scientific-methodological, pedagogical, digital, and informational components. The content of the methodological and pedagogical culture of the teacher is characterized, and the stages of developing the teacher's own methodological system are outlined, in particular design, modeling, optimization, monitoring, motivation, and systematization. It is concluded that the development of the methodological and pedagogical culture of a mathematics teacher is an important prerequisite for professional growth and effective activity in the modern educational environment.

Keywords: methodological culture, pedagogical culture, professional culture, mathematics teacher, global information space, digital technologies, professional development, methodological system.

Вступ

Одним із ключових викликів сучасної освіти є безперервне зростання обсягу знань, які мають опановувати як здобувачі вищої освіти, так і науково-педагогічні працівники. Ця тенденція супроводжується інтенсифікацією інформаційного обміну та стрімким розвитком цифрових технологій. За оцінками аналітиків, глобальний обсяг інформації подвоюється щонайменше кожні два роки [1], тому до закінчення навчання в бакалавраті та магістратурі професійні компетентності учасників освітнього процесу потрібно оновлювати. Отже, для формування методичної культури викладача, зокрема викладача математики, важливо враховувати динамічність освітнього процесу, його синергетичний характер в умовах інформаційного суспільства, яке представляє «якісно новий етап соціотехнологічної еволюції суспільства, що формується в результаті довгострокових тенденцій попереднього соціально-економічного розвитку, який передбачає збільшення ролі інформації і знань, а також формування та споживання інформаційних ресурсів у всіх системах життєдіяльності суспільства за допомогою розвитку інформаційно-комунікаційних технологій, що існують у глобальних масштабах» [1].

Питанням професійно-педагогічної культури присвячено роботи Гриньової В. [2], Кайди Н, Пасик-Косарєвої Н., Розум А. [3], Павленка О. [4], праці авторів статті [5–7] та інших учених.

Результати дослідження

Розвиток викладача математики відбувається протягом тривалого часу й проходить етапи формування математичної, методичної, педагогічної, цифрової та інформаційної компетентностей, які разом становлять його професійну компетентність і професійну культуру (Рис. 1).

У нашому дослідженні під *професійною культурою викладача математики ми розуміємо інтегровану динамічну властивість особистості, яка проєктує його загальну культуру в галузі професії, є синтезом математичної, науково-методичної та педагогічної культур і реалізується в умовах синергетичного освітнього простору з використанням цифрових технологій* [5]. Зокрема методична культура викладача математики містить компоненти: методики викладання і навчання, навчально-методичний продукт. Педагогічна культура викладача математики в умовах постіндустріального суспільства поєднує здатність до самоаналізу власної професійної діяльності й прагнення до підвищення кваліфікації; рівень самоосвіти, саморозвитку, самоменеджменту; наявність мотивації, комунікації, професійної моралі та рефлексії викладача як компоненти індивідуальної траєкторії його професійного розвитку [5].

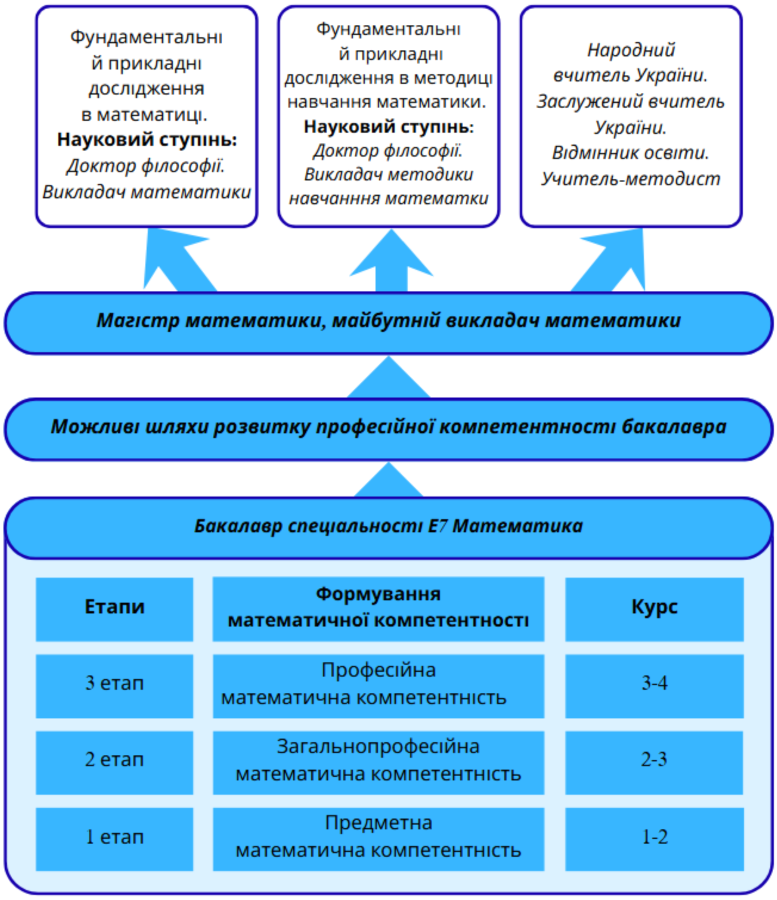


Рис. 1. Схема розвитку професійної компетентності здобувача вищої освіти спеціальності Е7 Математика

Методична та педагогічна культури майбутнього викладача математики формується в магістратурі і розвивається у процесі викладацької діяльності за власною індивідуальною траєкторією з використанням так званого циклу Демінга: Плануй – Роби – Перевіряй – Дій. Ми виділимо деякі загальні тенденції цього процесу.

Науково-методичний супровід формування методичної та педагогічної культур викладача математики (Рис. 2) містить цільовий, змістовий, операційно-діяльнісний та діагностично-результативний компоненти педагогічного процесу, основні його функції: гносеологічна, проектувальна, нормативна і рефлексивна.

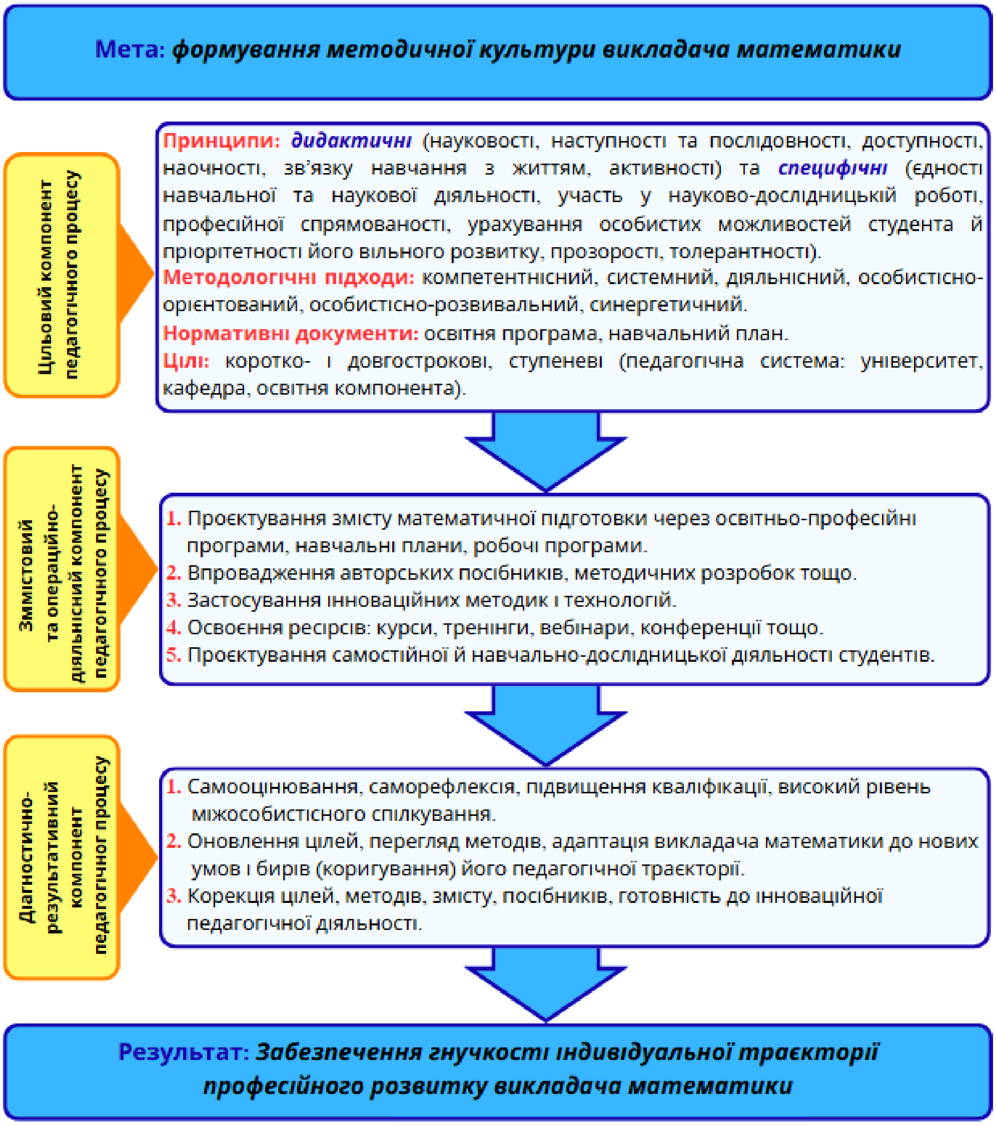


Рис. 2. Науково-методичний супровід формування методичної культури викладача математики

Викладач математики усвідомлює важливість побудови власної методичної системи, яка проходить етапи: проєктування, моделювання, оптимізації, моніторингу (постійно), мотивації (усвідомлення своїх здобутків, які приводять до гарантованого успіху), систематизації (узгодження всіх або більшості компонентів методичної системи).

Перший етап – створення пакету «Теоретичне обґрунтування власної методичної та педагогічної системи», який включає діагностику й постановку цілей короткострокових і довгострокових, ступеневих на основі дидактичних і специфічних принципів, методологічних підходів; проєктування змісту математичної підготовки через освітньо-професійні програми, робочі програми, навчальні плани з виділенням змістових модулів, освітніх компонент, логічну схему їх вивчення; варіант очікуваного результату від освітнього процесу в межах конкретної спеціальності [8–9].

Другий етап – створення пакету «Методичний інструментарій викладача математики», який відіграє провідну роль у проєктуванні та реалізації освітнього процесу. Технологія формує у викладача поняття про освітній процес як логічну структуру. Така структура постає як послідовність освітніх компонент, згрупованих у змістові модулі відповідно до вище зазначених цілей. У її межах передбачається планування й застосування сучасних освітніх технологій, створення банку власних інноваційних методик, упровадження авторських навчальних посібників і методичних рекомендацій [10–12]. Водночас викладач закладає програму розвитку мислення, пам'яті, мовлення, уваги та пізнавального інтересу здобувачів вищої освіти.

Третій етап – створення пакету «Критерії й методи замірів результатів реалізації власної методичної системи»: тести, контрольні роботи, колоквіуми, індивідуальні навчально-дослідницькі завдання, проєкти, опитування тощо.

Четвертий етап – створення пакету «Культура засвоєння власної методичної системи»: моніторинг, корекція, самооцінювання, саморефлексія (підвищення кваліфікації через стажування, курси, тренінги, вебінари, конференції, написання наукових статей), адаптація викладача математики до викликів сучасного освітнього середовища.

Наразі викладач один раз на п’ять років проходить індивідуальне одномісячне стажування в Україні. Водночас в умовах сучасного освітнього простору особливого значення набуває неперервна самоосвіта, спрямована на самовдосконалення та підвищення рівня професійної діяльності викладача. Вона охоплює опрацювання наукової й методичної літератури, підготовку наукових статей, підручників, навчальних посібників і методичних рекомендацій, оволодіння новими освітніми технологіями, а також участь у тренінгах, вебінарах і курсах, зокрема закордонних. Отже, методична система викладача математики може постійно вдосконалюватися, досягаючи індивідуально зумовленого рівня професійного розвитку (Рис. 3а).

Хоча, зауважимо, глобальний інформаційний простір може зумовлювати на окремих етапах розвитку методичної системи викладача математики суттєві трансформаційні зрушення, тому довгострокове прогнозування її розвитку нині є вкрай ускладненим. Це пов’язано зі стрімким і нерівномірним розвитком цифрових технологій, що спричиняє постійне коригування можливих прогнозів (Рис. 3б).

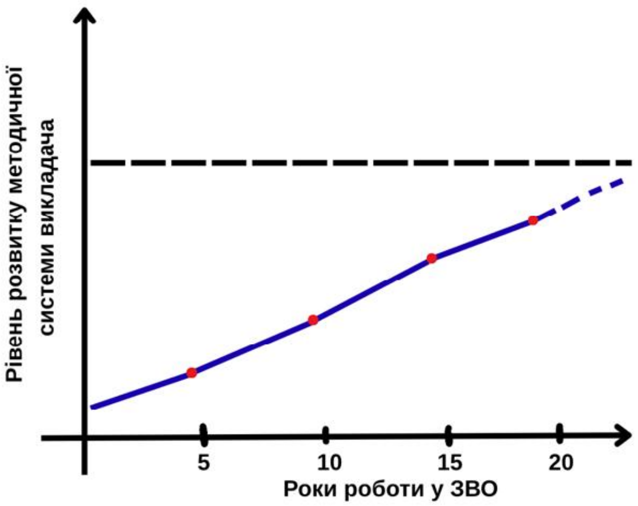


Рис. 3а

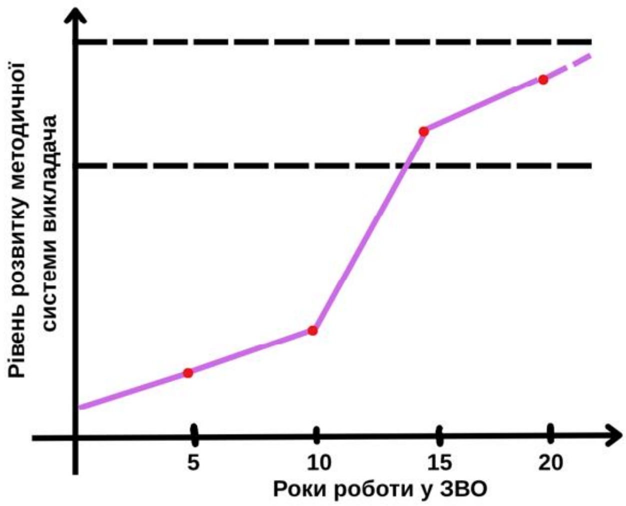


Рис. 3б

Рис. 3. Розвиток методичної системи викладача математики

Водночас для кожного викладача існує певна межа досконалості методичної системи, зумовлена індивідуальними особливостями його професійного розвитку.

Висновки

Професійна культура викладача математики є інтегрованою динамічною властивістю особистості – синтезом математичної, науково-методичної та педагогічної культур, що реалізується в умовах синергетичного освітнього простору з використанням цифрових технологій. Її розвиток відбувається поетапно за циклом Демінга («Плануй – Роби – Перевіряй – Дій») і передбачає неперервну самоосвіту: опрацювання наукової літератури, створення навчально-методичних матеріалів, оволодіння новими технологіями, участь у тренінгах, вебінарах і міжнародних курсах тощо. Попри суттєві трансформації, що їх спричиняє глобальний інформаційний простір, довгострокове прогнозування розвитку методичної системи викладача математики залишається вкрай ускладненим через стрімкий і нерівномірний розвиток цифрових технологій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Інформаційна культура сучасного фахівця : навчальний посібник / уклад.: Кух О. М., Смалько О. А. Кам'янець-Подільський: Друкарня «Рута», 2021. 92 с.
2. Гриньова В. М. Формування педагогічної культури майбутнього вчителя (теоретичний та методичний аспекти: дис.д-ра пед.наук: 13.00.04. Харків, 2000, 416 с.
3. Кайда Н. О., Пасик-Косарєва Н. О., Розум А. П. Методична культура викладача ЗВО як складова його професійно-педагогічної культури: постановка проблеми. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*, 2021. Вип. 194. С. 208–213. https://doi.org/10.36550/2415-7988-2021-1-194-208-213
4. Павленко О. О. Формування методичної культури викладача економіки: теретико-методологічний аспект: монографія. Кривий Ріг: Вид-во Р. А. Козлов, 2016. 472 с.
5. Ковтонюк М. М., Соя О. М. Особливості формування професійної культури викладача математики. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*, 2024. Вип. 1(2). С. 183–199. https://doi.org/10.31652/3041-1955/2024-01-02-09
6. Ковтонюк М. Формування математичної культури бакалаврів математики в умовах змішаної форми навчання. *Матеріали науково-педагогічного підвищення кваліфікації «Інноваційна педагогіка XXI століття: нові компетентності викладача закладу вищої освіти»*: Збірник тез. Вінниця: ВДПУ, 2024. С. 52–56. https://doi.org/10.31652/3041-1211-2024-52-56
7. Ковтонюк М. М., Соя О. М. Інноваційні підходи до формування методичної культури майбутнього викладача математики в освітньому середовищі університету. *X Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті»* (20–21 лютого 2025 року, Київ) : тези доповідей. Київ, 2025. С. 179–183.
8. Ковтонюк М. М. Освітньо-професійна програма «Комп'ютерна математика» (СВО бакалавр, спеціальність Е7 Математика) / М. М. Ковтонюк, С. М. Бак, Г. М. Ковтонюк, Л. А. Тютюн, Д. А. Семенець, А. В. Дідусенко, І. І. Кухта. Вінниця: ВДПУ, 2025. 22 с.
9. Бак С. М. Освітньо-професійна програма «Математика. Математичне моделювання» (СВО магістр, спеціальність Е7 Математика) / М. М. Ковтонюк, Л. А. Тютюн, Д. А. Семенець, О. В. Ларкін, А. В. Дідусенко. Вінниця: ВДПУ, 2025. 19 с.
10. Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М. Практикум з диференціального числення функції однієї змінної. Навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика) [Електронний ресурс]. Вінниця : ВНТУ, 2022. (PDF, 380 с.). https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/731
11. Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М., Соя О. М. Практикум з диференціального числення функції багатьох змінних. Вінниця: ВНТУ. Практикум з диференціального числення функцій багатьох змінних. Навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика) [Електронний ресурс]. Вінниця: ВНТУ, 2023. (PDF, 251 с.). https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/812
12. Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М., Соя О. М., Косовець О. П. Практикум з інтегрального числення функції однієї змінної та рядів (з використанням чисельних методів та систем комп'ютерної математики). Навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр спеціальностей Е7 Математика та А4 Середня освіта (Математика). Вінниця : ТОВ «ТВОРИ», 2025. 656 с. https://dspace.vspu.edu.ua/handle/123456789/15944

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна – д-р пед. наук, канд. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, e-mail: kovtonyukmm@vspu.edu.ua

Соя Олена Миколаївна – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, e-mail: soia.om@vspu.edu.ua

Kovtoniuk Mariana M. – Dr. Sc. (Pedagogy), Cand. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Mathematics and Computer Science, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, email: kovtonyukmm@vspu.edu.ua

Soia Olena M. – Cand. Sc. (Pedagogy), Associate Professor, Associate Professor of Mathematics and Computer Science Department, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia, email: soia.om@vspu.edu.ua

УДК 378.147:51:630

Г. А. Гай
Ю. А. Мейш

ПРОБЛЕМИ ТА ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ СПЕЦІАЛЬНОСТІ «ЛІСОВЕ ГОСПОДАРСТВО»

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Анотація
Розглядаються особливості вивчення вищої математики студентами спеціальності H4 «Лісове господарство» в умовах сучасних освітніх трансформацій. Проаналізовано рівень мотивації та початкової математичної підготовки студентів за результатами анкетування та вступної контрольної роботи. Показано, що значній частині студентів властива неоднорідна шкільна підготовка з математики, а недостатня професійна орієнтація курсу знижує мотивацію до його вивчення. Запропоновано прикладну задачу на основі моделі росту Джонсона–Шумахера, що дозволяє інтегрувати вивчення границі та похідної функції з фаховими задачами лісового господарства. Зроблено висновок, що орієнтація курсу вищої математики на професійно значущі задачі сприяє формуванню стійкої мотивації студентів та підвищенню якості їхньої підготовки.
Ключові слова: вища математика, лісове господарство, мотивація студентів, прикладні задачі, математичне моделювання.

Abstract
The paper examines the specific features of teaching higher mathematics to students enrolled in the H4 "Forestry" degree programme in the context of contemporary transformations in higher education. The students' motivation and prior mathematical preparation were analysed on the basis of a questionnaire survey and an entrance test. The results revealed considerable variation in the students' prior mathematical preparation and showed that the insufficient professional orientation of the course reduces their motivation to study higher mathematics. An applied problem based on the Johnson–Schumacher growth model is proposed to integrate the study of limits and derivatives with professionally relevant forestry problems. It is concluded that incorporating professionally oriented problems into the higher mathematics course helps to foster sustained student motivation and improve the quality of their professional training.
Keywords: higher mathematics, forestry, student motivation, applied problems, mathematical modelling.

Вступ

Сучасний розвиток економіки, цифровізація та поширення технологій штучного інтелекту зумовлюють зростання попиту на фахівців, здатних застосовувати математичні моделі для аналізу й прогнозування [1]. У педагогічній літературі активно досліджується прикладна спрямованість математичної підготовки: А. Вінтере та Л. Звіргздіна, досліджуючи формування математичної компетентності студентів лісових спеціальностей, показали важливість мотивації для результатів навчання [2]. Адаптацію курсу вищої математики до потреб студентів-екологів досліджували Л. І. Новицька та В. М. Дубчак [3]. Водночас для спеціальності «Лісове господарство» залишаються невирішеними проблеми неоднорідної шкільної підготовки студентів та недостатньої професійної орієнтації курсу.

Метою роботи є дослідження особливостей вивчення вищої математики студентами спеціальності H4 «Лісове господарство» через аналіз рівня їхньої мотивації та підготовки, а також розробка прикладної задачі, що сприяє формуванню професійних компетентностей.

Результати дослідження

На вивчення вищої математики для спеціальності H4 «Лісове господарство» відведено лише 120 годин: 30 год. лекцій, 30 год. практичних і 60 год. самостійної роботи [4]. Анкетування 72 студентів першого курсу показало, що лише 2,8 % опитаних оцінюють свою шкільну підготовку з математики як високу, 75 % – як середню, а 22,2 % – як низьку. Вступна контрольна робота з 28 завдань шкільного курсу підтвердила ці дані: оцінку «незадовільно» отримала понад третина студентів (36,1 %), а оцінки «відмінно» не отримав жоден [6].

Поряд із прогалинами шкільної підготовки існує проблема мотивації: лише 27,8 % студентів вважають вищу математику безумовно необхідною для майбутньої професії, 63,9 % – необхідною частково (лише прикладні теми), а 8,3 % – не потрібною. Найбільш мотивуючим чинником 58,3 % опитаних назвали приклади з професійної сфери (лісознавство, екологія, економіка лісового господарства). Для подолання прогалин шкільної підготовки в НУБіП України щороку проводяться безкоштовні адаптаційні заняття з шкільного курсу математики для першокурсників [6].

З метою посилення професійної спрямованості курсу пропонуємо прикладну задачу для тем «Границя функції» та «Похідна функції» на основі моделі росту Джонсона–Шумахера [5, 6]:

$$H(t) = 30 \cdot e^{-\frac{25}{t+25}}, t \geq 0,$$

де H(t) – домінантна висота дерева (м) у віці t років. Задача передбачає визначення: а) граничної (асимптотичної) висоти деревостану (границя функції при $t \to \infty$); б) висоти дерев у віці 10 та 20 років (значення функції в точці); в) миттєвої швидкості росту дерева у віці 10, 20 і 30 років (значення похідної). Розрахунки в Mathcad Prime показують, що гранична (асимптотична) висота становить 30 м, а миттєва швидкість росту зменшується з 0,300 м/рік (t = 10) до 0,213 м/рік (t = 20) і 0,157 м/рік (t = 30). Це ілюструє уповільнення росту дерева з віком і дає змогу пов'язати математичний апарат із завданнями прогнозування продуктивності деревостану [6].

Висновки

Вища математика є необхідним складником підготовки майбутніх фахівців лісового господарства, оскільки дає інструменти для аналізу, моделювання та прогнозування процесів, пов'язаних із професійною діяльністю, а також розвиває логічне й аналітичне мислення студентів. Серед основних проблем її вивчення виокремлюємо: а) мотиваційні – нерозуміння студентами практичної цінності дисципліни; б) базові – неоднорідність шкільної математичної підготовки; в) методичні – недостатню кількість професійно орієнтованих прикладних задач; г) організаційні – обмежену кількість аудиторних годин. Для їх подолання доцільно запроваджувати адаптаційні курси зі шкільної математики у першому семестрі, модернізувати робочі програми з орієнтацією на прикладні задачі лісового господарства та використовувати програмне забезпечення для математичного моделювання (Mathcad, MATLAB, Python) на практичних заняттях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Tokanov M., Damekova S., Kuttykozhayeva S., Abdoldinova G., Smagulov Y. Information and communication technology integration and teaching mathematics in higher education. Journal on Mathematics Education. 2022. Vol. 13, No. 4. P. 739–752. DOI: https://doi.org/10.22342/jme.v13i4.pp739-752

2. Vintere A., Zvirgzdina L. Case study on development of mathematical competence of forest specialties students. Proceedings of the 18th International Scientific Conference "Engineering for Rural Development". Jelgava, 2019. P. 1954–1961. DOI: 10.22616/ERDev2019.18.N490.

3. Novytska L., Dubchak V. Особливості викладання вищої математики для студентів-екологів. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: Педагогіка. Соціальна робота. 2018. Вип. 1 (42). С. 159–163. DOI: https://doi.org/10.24144/2524-0609.2018.42.159-163

4. Національний університет біоресурсів і природокористування України. Освітньо-професійна програма «Лісове господарство»: спеціальність Н4 «Лісове господарство». Київ: НУБіП України, 2025. URL: https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u186/opp_h4_lisove_gospodarstvo.pdf

5. Salas-Eljatib C., Mehtätalo L., Gregoire T. G., Soto D. P., Vargas-Gaete R. Growth equations in forest research: Mathematical basis and model similarities. Current Forestry Reports. 2021. Vol. 7, No. 4. P. 230–244. DOI: https://doi.org/10.1007/s40725-021-00145-8

6. Гай Г. А., Мейш Ю. А. Особливості вивчення вищої математики студентами спеціальності «Лісове господарство». *Перспективи та інновації науки. Серія «Педагогіка»*. 2025. Вип. 10(56). С. 260–269. DOI: 10.52058/2786-4952-2025-10(56)-260-269.

Гай Ганна Анатоліївна – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, e-mail: sylenok.hanna@nubip.edu.ua.

Мейш Юлія Анатоліївна – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, e-mail: juliameish@nubip.edu.ua.

Gai Hanna Anatoliivna – PhD in Education, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, e-mail: sylenok.hanna@nubip.edu.ua.

Meish Yuliia Anatoliivna – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, e-mail: juliameish@nubip.edu.ua.

УДК 378.048.2 + 378.21

Л.М. Козубцова
О.В. Гуда

ПРО РОЛЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ В СИСТЕМІ ВИЩОЇ ВІЙСЬКОВОЇ ОСВІТИ НА СУЧАСНОМУ ЕТАПІ

[1] Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут;
[2] Луцький національний технічний університет

Анотація
У статті досліджено значення та роль математичної підготовки в сучасній системі вищої освіти, зокрема в процесі підготовки військових фахівців.
Ключові слова: математика, математична підготовка, компетентність, вища військова освіта, курсанти, офіцер.

Abstract
This article examines the significance and role of mathematical training in the modern higher education system, particularly in the training of military specialists.
Keywords: mathematics, mathematical training, competence, higher military education, cadets, officer.

Вступ

Сучасний етап розвитку українського суспільства визначається глибокими трансформаціями, зокрема спричиненими повномасштабною війною. Воєнні дії суттєво вплинули не тільки на геополітичну ситуацію, прискорили зміни у сфері безпеки, науки та технологій, а також зумовили переосмислення багатьох аспектів суспільного розвитку. Винятком не стала і сфера освіти.

У сфері освіти реалізуються реформи, орієнтовані на всебічний розвиток особистості та підготовку конкурентоспроможного, висококваліфікованого фахівця, здатного ефективно застосовувати сукупність знань, умінь, навичок, ціннісних орієнтацій, практичного досвіду й професійних компетентностей. Також підготовка майбутніх офіцерів потребує змін, які спричинені війною в Україні та посиленою співпрацею з державами учасницями НАТО [1].

Результати дослідження

Сьогодні кожний має усвідомлювати, що математика є ефективним інструментом моделювання й дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності, базовим компонентом загальної та професійної освіти сучасної людини, дієвим засобом розвитку мислення, просторової уяви, наукового світогляду особистості, невід’ємною частиною загальнолюдської культури. Якісна математична освіта є необхідною умовою успішного опанування важливих для економіки та оборони країни спеціальностей.

Ефективна професійна діяльність, зокрема виконання та розв’язання фахових завдань, нерозривно пов’язана зі сформованістю уміння «розв’язувати задачі» [2]. У загальному випадку множина професійних завдань (рис. 1) може бути узагальнена до системи типових завдань, які відрізняються між собою неістотними ознаками та виокремлюються в результаті їх групування за ключовими характеристиками [3].

У закладах вищої освіти, зокрема у сфері військової підготовки, формування професійних компетентностей відбувається через послідовне виконання навчальних завдань у межах освітніх компонентів [3]. Такий підхід сприяє поетапному засвоєнню знань, розвитку практичних умінь і навичок, які в подальшому становлять основу професійної діяльності майбутніх фахівців. Разом із тим ефективне опанування будь-якої навчальної дисципліни значною мірою залежить від здатності здобувачів освіти успішно розв’язувати абстрактні задачі, що формують необхідний рівень аналітичного та логічного мислення.

Процес переходу від професійних завдань до типових, а далі до навчальних і абстрактних, передбачає послідовне застосування абстрагування, як одного з провідних методів пізнання. Його сутність полягає у відокремленні другорядних ознак об’єкта та зосередженні уваги на його визначальних характеристиках, які дають змогу виявити закономірності та встановити суттєві зв’язки. Найбільш розвинена система абстракцій сформувалася саме в математиці, де створено широкий спектр методів, моделей і алгоритмів для дослідження та розв’язання задач різного рівня складності.

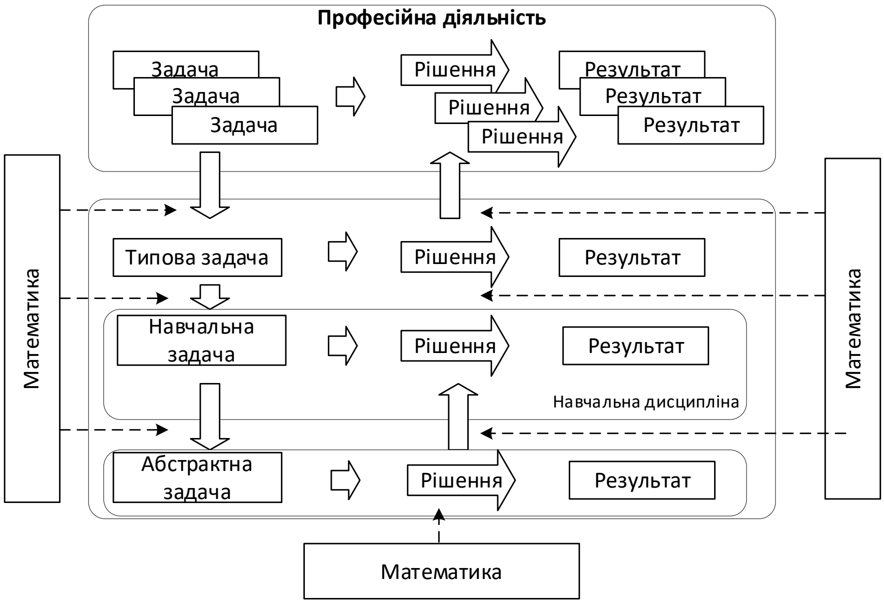


Рис. 1. Математика у розв'язанні завдань професійної та освітньої діяльності.

Математика у військовій освіті виступає як фундаментальний інструмент формування професійних компетентностей офіцера [4]. Вона сприяє розвитку абстрактного мислення, навичок побудови та аналізу моделей реальних об’єктів і процесів, а також умінь застосовувати математичні методи для вирішення навчальних та професійних завдань [5]. Математичні дисципліни дозволяють систематизувати знання, прогнозувати наслідки прийнятих рішень і слугують основою для засвоєння більш складних інтегрованих дисциплін, необхідних для ефективного виконання службово-бойових та управлінських функцій.

Особливу роль у підготовці офіцерів відіграє здатність моделювати ситуації, адаптувати розв’язки навчальних завдань до умов реальної професійної діяльності та прогнозувати їх результати [6]. Такі навички забезпечують ефективну діяльність у складних, динамічних та невизначених умовах, а також дозволяють офіцеру приймати обґрунтовані та своєчасні рішення.

Для формування цих компетентностей освітній процес має включати як теоретичні, так і практичні аспекти математичної підготовки. Математичні освітні компоненти забезпечують розуміння базових понять, логічних структур та аксіоматичних методів, що є основою моделювання та аналітичного мислення, а також формують навички застосування математичних методів у розв’язанні навчальних та абстрактних завдань, у моделюванні реальних процесів, що безпосередньо пов’язані з професійною діяльністю майбутнього офіцера.

Математична підготовка в системі військової освіти забезпечує також неперервність навчального процесу: від засвоєння базових понять до формування умінь розв’язувати навчальні завдання та переносити їх на реальні професійні ситуації. Такий підхід сприяє розвитку ключових компетентностей, необхідних для виконання службово-бойових та управлінських функцій, і формує висококваліфікованого офіцера, здатного діяти у складних і непередбачуваних умовах.

Інтеграція математичних дисциплін із природничими та гуманітарними знаннями дозволяє створити комплексну та гармонійну систему підготовки офіцерів. Це забезпечує не лише технічну та професійну підготовку, але й розвиток аналітичного, логічного та критичного мислення, що є ключовими навичками для сучасного військового фахівця.

Таким чином, математична підготовка виступає стратегічним компонентом системи військової освіти, який формує аналітичні, моделювальні та прогнозні компетентності офіцера, необхідні для ефективної професійної діяльності в умовах сучасних викликів оборонної сфери.

Висновки

Встановлено що, математична підготовка є одним із ключових чинників формування професійної компетентності майбутніх офіцерів та важливою складовою сучасної військової освіти. Вона забезпечує розвиток логічного, аналітичного та критичного мислення, формує здатність до абстрагування, моделювання й прогнозування, що є необхідними умовами ефективного розв'язання професійних завдань. Саме математичні методи та підходи створюють підґрунтя для опанування спеціальних дисциплін і прийняття обґрунтованих рішень у складних та динамічних умовах професійної діяльності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кравець Т., Бахмат М. Кваліфікаційні вимоги до викладачів вищих військових навчальних закладів: український контекст та стандарти НАТО. *Збірник наукових праць Національної академії Державної прикордонної служби України. Серія: педагогічні науки*. 2025. №41(2). С. 95–117.
2. Фурсенко О., Черновол Н., Бобрицька Г. Математичні моделі бойових дій як засіб вдосконалення професійної орієнтованості викладання математичних дисциплін у ВВНЗ. *Фізико-математична освіта*. 2024. Том 39. № 1. С. 64–69.
3. Козубцова Л.М. Професійно-орієнтований підхід до викладання вищої математики курсантам вищих військових навчальних закладів. *Наука і техніка сьогодні. (Серія «Фізико-математичні науки»)*. 2023. №4 (18). С. 373–386.
4. Концепція військової освіти в Україні: Наказ Міністерства оборони України від 04.11.2020 №606. Київ: Міністерство оборони України, 2020. 32 с.
5. Войтко О.В., Базарний С.В. Математичне моделювання застосування воєнних ігор під час підготовки військових фахівців. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони*. 2025. №52(1). С. 118–126.
6. Козубцова Л.М., Козубцов І.М., Ліщина В.О., Глобін А.В. Модель інтелектуального тренажеру прийняття рішень для здобувачів вищої освіти у галузі інформаційних технологій. *«Наука і техніка сьогодні» (Серія «Педагогіка»)*. 2026. №3(57). С. 1121–1137.

Козубцова Леся Михайлівна – канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри фундаментальних дисциплін, Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, Київ

Гуда Оксана Вікторівна – канд. техн. наук, доцент кафедри фізики та вищої математики, Луцький національний технічний університет, Луцьк

Kozubtsova Lesia M. – Cand. Sc. (Eng), Associate Professor, Associate Professor, Head of the Department of Fundamental Disciplines, Military Institute of Telecommunications and Information Technologies named after Kruty Heroes, Kyiv.

Huda Oksana V. – Cand. Sc. (Eng), Associate Professor of the Department of Physics and Mathematics, Lutsk National Technical University, Lutsk.

УДК 378.147

Т. А. Олешко

ПРО ВИКЛАДАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Національний університет «Київський авіаційний інститут», Київ

Анотація

Проведено дослідження особливостей викладання теорії ймовірностей та математичної статистики. Запропоновано застосування різних колективних форм роботи при проведенні практичних занять.

Ключові слова: теорія ймовірностей, викладання теорії ймовірностей, *математична статистика викладання математичної статистики*.

Abstract

The study examines the specific features of teaching probability theory and mathematical statistics. It proposes the use of various collaborative work formats during practical classes.

Keywords: probability theory, teaching probability theory, mathematical statistics, teaching mathematical statistics.

Вступ

Теорія ймовірностей та математична статистика займають особливе місце в математиці, вирізняючись як об'єктом досліджень, так і методами, що використовуються. Вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики є важливим не тільки для математиків, але і для майбутніх інженерів, економістів, ІТ-фахівців. Сьогодні ці дисципліни є фундаментом для розвитку оборонної промисловості: від моделювання бойових дій та оцінки ризиків до проектування високоточної зброї, систем протиповітряної оборони та розвідки на основі штучного інтелекту. Це пов'язано з тим, що теорія ймовірностей та математична статистика є інструментами пізнання випадкових процесів, пізнання закономірності в масових випадкових явищах, фундаментом для прийняття рішень в умовах певної невизначеності.

Слід зауважити, що навчальна дисципліна «Теорія ймовірностей та математична статистика» часто виявляється більш складною для вивчення студентами, ніж інші математичні дисципліни.

Вивчення проблем викладання теорії ймовірностей та математичної статистики проводилось багатьма авторами (більш детально див. [1, 2]).

Метою даної роботи є дослідження особливостей викладання теорії ймовірностей та математичної статистики і надання методичних рекомендацій до викладу навчального матеріалу студентам.

Результати дослідження

Дуже важливим для професійного становлення майбутніх фахівців усіх технічних спеціальностей є знання основних теоретичних засад та володіння (в більшому чи меншому обсязі) навичками застосування математики, зокрема теорії ймовірностей та математичної статистики.

Слід відмітити, що в НУ «КАІ» навчальні плани за більшістю інженерних напрямів підготовки включають тільки одну математичну дисципліну «Вища математика», до складу якої входить модуль «Теорія ймовірностей та математична статистика». Навчальні плани за всіма спеціальностями галузі знань «Інформаційні технології» передбачають, як правило, вивчення кількох математичних дисциплін, в тому числі дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика» та дисципліни «Дискретна математика». Тому студенти, які навчаються за всіма спеціальностями галузі знань F (12) Інформаційні технології отримують достатньо великий обсяг знань з комбінаторики під час вивчення дискретної математики. Зауважимо також, що студенти, які навчаються за спеціальністю F1 (113) «Прикладна математика», вивчають повний набір базових і певний набір спеціальних математичних дисциплін за своєю спеціалізацією. Тому їм окремо викладаються дисципліни «Теорія ймовірностей» і «Математична статистика».

Починаючи з 2006 року автор проводить дослідження різних аспектів викладання математичних дисциплін (в тому числі і теорії ймовірностей та математичної статистики) як самостійно (див. [3–5]), так і в складі авторських груп (див. [1, 2] та [6–14]).

В умовах компетентнісно-орієнтованої парадигми освіти протягом кількох останніх років ми впроваджуємо проектний підхід до організації навчальної і наукової роботи студентів. Як частину реалізації цього проектного підходу ми застосовуємо колективні форми роботи при проведенні практичних занять (більш детально див. [10, 11]). Для цього здійснюється поділ академічної групи на декілька команд для спільного розв'язування декількох складних задач, взаємної перевірки засвоєння матеріалу, підготовки презентацій на практичних заняттях з подальшим обговоренням і порівнянням результатів. Дуже ефективним при цьому виявилося формування мультинаціональних команд. На наш погляд, хоча отримані результати не дозволяють зробити далекосяжні узагальнення, вони є обнадійливими для подальшого вивчення розглянутого підходу.

Висновки

Проведено аналіз практики викладання теорії ймовірностей та математичної статистики студентам, що навчаються за технічними та ІТ спеціальностями в НУ «КАІ». Розглянуто особливості викладання дисципліни і методи організації навчального процесу.

Встановлено, що організація колективної роботи студентів при проведенні практичних занять шляхом поділу академічної групи на декілька команд для розв'язування складних задач, взаємної перевірки засвоєння матеріалу, підготовки презентацій на практичних заняттях з подальшим обговоренням результатів дає достатньо ефективне покращення зацікавленості і успішності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Карупу О. В. Деякі актуальні проблеми викладання теорії ймовірностей англійською мовою в Національному авіаційному університеті / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Актуальні питання природничо-математичної освіти. — 2024. — Вип. 1 (23). — С. 88–95.

2. Олешко Т. Про деякі аспекти викладання теорії ймовірностей та математичної статистики в сучасних умовах / Т. А. Олешко, О. В. Карупу, В. В. Пахненко // Проблеми викладання математики у закладах освіти: теорія, методика, практика : тези доповідей IV Міжнародної конференції на честь О. В. Погорєлова (23–25 березня 2026 р., м. Харків, Україна). — Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2026. — С. 284–287.

3. Олешко Т. А. Про викладання деяких питань теорії ймовірностей англомовним студентам НН ІКІТ НАУ / Т. А. Олешко // Сучасна освіта та інтеграційні процеси : зб. наук. праць міжнар. наук.-метод. конф. (Краматорськ, 22–23 листопада 2017 р.). — Краматорськ, 2017. — С. 150–152.

4. Олешко Т. А. З досвіду викладання теорії ймовірностей в рамках Програми "Вища освіта іноземними мовами" / Т. А. Олешко // Математика у технічному університеті XXI сторіччя : збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції (Краматорськ, 15–16 травня, 2019 р.). — Краматорськ, 2019. — С. 115–117.

5. Oleshko T. A. On some aspects of mastering of probability theory by future aviation specialists / T. A. Oleshko // AVIA-2019 : Proceedings of the 14 International Conference of Science and Technology (Kyiv, April, 23–25, 2019). — Kyiv, 2019. — P. 10.9–10.11.

6. Карупу О. В. On some problems of teaching theory of probability and mathematical statistics to foreign students / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // 13 міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука : тези доп. (Київ, 13–15 травня 2010 р.). — Київ, 2010. — Т. 3. — С. 135.

7. Карупу О. В. Деякі прикладні та методичні аспекти знаходження геометричних ймовірностей / О. В. Карупу, Т. А. Олешко // Прикладна геометрія та інженерна графіка : міжвідомчий наук.-техн. зб. — К. : КНУБА, 2010. — Вип. 86. — С. 385–388.

8. Карупу О. В. Про викладання теорії ймовірностей та математичної статистики англомовним студентам / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. — 2013. — Вип. 113. — С. 36–38.

9. Карупу О. В. Аналіз практики викладання теорії ймовірностей та математичної статистики англомовним студентам в Національному авіаційному університеті / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology. — 2017. — V (52). — С. 34–37.

10. Karupu O. W. From the experience of teaching mathematical disciplines in multinational academic groups of KAI / O. W. Karupu, T. A. Olashko, V. V. Pakhnenko, V. K. Bereta // XX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (17–20 листопада 2025 р.). — К., 2025. — С. 205–206.

11. Karupu O. On some aspects of modeling of professional activity of future aviation engineer in teaching of mathematical disciplines in multinational groups / O. Karupu, T. Oleshko, V. Pakhnenko // Aviation in the XXI-st century : Proceedings of the 8 World Congress (Kyiv, October 12–15, 2018). — K., 2018. — P. 4.3.15–4.3.19.

12. Karupu O. Modeling Future Aviation and IT Specialists' Professional Skills Development on Mathematical Practical Training with Application of Information Technologies / O. Karupu, T. Olashko, V. Pakhnenko // 2021 IEEE 3rd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT) (Kyiv, Ukraine, December 15–16, 2021). — Kyiv, 2021. — P. 215–220.

13. Karupu O. Applying information technologies to mathematical education of IT specialists in English-speaking academic groups / O. Karupu, T. Olashko, V. Pakhnenko, A. Pashko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. — 2019. — P. 70–75. — DOI: https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/4.9.

14. Karupu O. Application of Google Workspace in Mathematical Training of Future Specialists in the Field of Information Technology / O. Karupu, T. Olashko, V. Pakhnenko // Advances in Computer Science for Engineering and Education VI. ICCSEEA 2023 / Hu Z., Dychka I., He M. (eds). — Cham : Springer Nature Switzerland, 2023. — Vol. 181. — P. 939–949. — (Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies). — DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-36118-0_80

Олешко Тетяна Анатоліївна — канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики, Національний університет «Київський авіаційний інститут», Київ, e-mail: tetiana.oleshko@npp.kai.edu.ua

Oleshko Tetiana A. — Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor of Department of Department of Applied Mathematics, National University «Kyiv Aviation Institute», Kyiv, email: tetiana.oleshko@npp.kai.edu.ua

УДК 378.4

В.І. ТРОФИМЕНКО

Шляхи реалізації професійної спрямованості навчання математичних дисциплін

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут

Анотація

В роботі проаналізовано такі напрями, як модернізація змісту навчання, інтеграція прикладних і професійно орієнтованих завдань, використання міждисциплінарних зв'язків та сучасних освітніх технологій. Показано, що професійна спрямованість навчання математики сприяє підвищенню мотивації здобувачів освіти, формуванню фахових компетентностей і готовності до майбутньої професійної діяльності.

Ключові слова: професійно орієнтовані завдання, військово-професійного спрямування, мотивації до навчання, міждисциплінарні зв'язки, навчально-методичного забезпечення.

Abstracts

The work analyzes such areas as modernization of the content of education, integration of applied and professionally oriented tasks, use of interdisciplinary connections and modern educational technologies. It is shown that the profesional orientation of mathematics teaching contributes to increasing the motivation of students, the formation of professional competencies and readiness for future professional activity.

Keywords: professionally oriented tasks, military-professional orientation, motivation for learning, interdisciplinary connections, educational and methodological support.

Вступ

Сучасний процес підготовки курсантів передбачає гармонійне поєднання фундаментальних теоретичних знань із формуванням практичних умінь і навичок, необхідних для успішного виконання професійних обов'язків у майбутньому. У зв'язку з цим особливого значення набуває вивчення вищої математики, оскільки вона є базою для засвоєння значної кількості спеціальних дисциплін, пов'язаних із військовою діяльністю, технічними системами та сучасними інформаційними технологіями.

Результати дослідження

Одним із дієвих засобів підвищення пізнавальної активності курсантів і розвитку їхнього практичного мислення є використання професійно орієнтованих задач у процесі навчання. Такий підхід сприяє наближенню освітнього процесу до реальних умов майбутньої службової діяльності офіцерів, створює передумови для розвитку логічного та аналітичного мислення, а також формує здатність застосовувати математичний апарат для розв'язання практичних завдань військово-професійного спрямування [1].

Використання професійно орієнтованих задач допомагає курсантам усвідомити важливість математичних знань для вирішення завдань військової практики, підвищує їхню мотивацію до навчання та забезпечує тісніший взаємозв'язок між теоретичною підготовкою і практичною діяльністю.

Залежно від змісту та характеру об'єктів, що розглядаються, професійно орієнтовані задачі можна класифікувати на кілька груп. До математичних належать завдання, умова і розв'язання яких повністю базуються на математичних поняттях та закономірностях. Практичні задачі характеризуються наявністю хоча б одного об'єкта, що має реальний зміст. Прикладні задачі виникають у конкретних сферах діяльності та розв'язуються за допомогою методів математичного моделювання. Міжпредметні задачі відображають взаємозв'язки між різними навчальними дисциплінами та ґрунтуються на матеріалі суміжних галузей знань.

У сучасній педагогічній науці дослідження феномену професійної спрямованості навчання математики здійснюються за чотирма ключовими напрямами [2] :

– Визначення шляхів, засобів і педагогічних умов, які забезпечують ефективне впровадження принципу професійно орієнтованого навчання.

– Вивчення особливостей використання математичних знань, методів і підходів у майбутній професійній діяльності.
– Розгляд професійної спрямованості як важливого чинника підвищення мотивації студентів до навчальної діяльності.
– Дослідження професійної спрямованості як засобу розвитку професійно важливих якостей особистості, необхідних для успішного опанування навчальних дисциплін та ефективного виконання професійних обов'язків.

Реалізація професійної спрямованості під час вивчення математичних дисциплін може здійснюватися за такими основними напрямами:

– оновлення змісту навчання шляхом добору та структурування навчального матеріалу відповідно до вимог майбутньої професійної діяльності;
– поєднання теоретичного математичного матеріалу з прикладними аспектами, що передбачає використання під час лекційних і практичних занять завдань професійного змісту;
– використання методів і форм навчання, які сприяють професійній орієнтації курсантів, зокрема проблемного, дослідницького та активного навчання, проведення наукових конференцій, вікторин, брейн-рингів, ділових ігор, інтегрованих і бінарних занять [4,5];
– формування стійкої внутрішньої мотивації до навчання через залучення курсантів до діяльності, максимально наближеної до майбутньої професії, та розвиток потреби у вирішенні практичних і виробничих завдань;
– створення навчально-методичного забезпечення, яке інтегрує матеріали спеціальних дисциплін і сприяє формуванню професійних умінь майбутніх економістів уже під час опанування математичних курсів.

Висновки

Шляхи реалізації професійної спрямованості навчання математичних дисциплін полягають у наближенні змісту навчання до майбутньої професійної діяльності здобувачів освіти. Важливим засобом є використання прикладних задач, які моделюють реальні виробничі, технічні чи військово-професійні ситуації. Ефективності навчання сприяє інтеграція математичних знань із фаховими дисциплінами та демонстрація практичного застосування математичних методів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Використання прикладних задач професійного спрямування при вивченні теорії ймовірностей та математичної статистики Розвиток сучасної освіти і науки: результати, проблеми, перспективи./ Кудзіновська І., Трофименко М., Трофименко В.// IX Міжнар. наук.-практ. конф., Том IX: синергія в розвитку науки та освіти.- 16 листопада 2020 р.: тези доп.– Конін – Ужгород – Херсон – Київ: Посвіт, 2020. – С. 147–149.
2. Ковальчук М. Б. Професійна спрямованість навчання математи- ки як інтеграційна основа фахової підготовки студентів інженерних спе- ціальностей : автореф. дис. ... доктора пед. наук. Київ, 2021. 39 с. URL:https://npu.edu.ua/images/file/vidil_aspirant/avtoref/D_26.053.19/Kovalchyk_ aref.pdf
3. Особливості викладання математичних дисциплін у закладах вищої освіти в умовах воєнного стану . Міжнародний науковий журнал "Інтернаука". – К., 2022. – №9(128). – С. 18-28. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.inter-nauka.com/issues/2022/9/8193 (Index Copernicus International,
4. Орлюк Д.О., Трофименко В.І. Застосування диференціального числення до розв'язку деяких військово-прикладних задач. Матеріали XXIII воєнно-наукової конференції курсантів Військового інституту телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут. Київ: Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені героїв Крут, травень 2025-278с.
5. Віраг О.Ю., Трофименко В.І. Найпростіші диференціальні рівняння у військово- прикладних задачах. Матеріали XXIII воєнно-наукової конференції курсантів Військового інституту телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут. Київ: Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені героїв Крут, травень 2025-260с.

Трофименко Вікторія Ігорівна, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фундаментальних дисциплін Військового інституту телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут (Київ, Україна), **e-mail: viktoriya.trof@gmail.com**

Trofymenko Viktoriya Igorivna, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Fundamental Disciplines of the Heroiv Krut Military Institute of Telecommunications and Informatization (Kyiv, Ukraine), e-mail: viktoriya.trof@gmail.com

УДК 004.42:51

В.П. Приймак
І.А. Клєопа

ІНТЕГРАЦІЯ PYTHON У НАВЧАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Вінницький національний технічний університет

Аннотація

У роботі розглядається використання мови програмування Python як інструменту для вивчення вищої математики. Проаналізовано можливості застосування Python для розв'язування задач з лінійної алгебри, математичного аналізу та чисельних методів. Показано, що інтеграція програмування у навчальний процес сприяє кращому розумінню математичних концепцій та підвищує рівень практичних навичок студентів.

Ключові слова: Python, вища математика, програмування, чисельні методи, лінійна алгебра.

Abstract

The paper considers the use of the Python programming language as a tool for learning higher mathematics. The possibilities of applying Python to solve problems in linear algebra, calculus, and numerical methods are analyzed. It is shown that integrating programming into the educational process improves students' understanding of mathematical concepts and enhances practical skills.

Keywords: Python, higher mathematics, programming, numerical methods, linear algebra.

Вступ

Сучасний розвиток інформаційних технологій вимагає нових підходів до викладання фундаментальних дисциплін, зокрема вищої математики. Традиційні методи навчання часто не забезпечують достатнього рівня розуміння складних математичних концепцій без практичного застосування. У цьому контексті актуальним є використання мов програмування, таких як Python, для моделювання та розв'язування математичних задач.

Python є однією з найпопулярніших мов програмування завдяки своїй простоті, великій кількості бібліотек та широким можливостям застосування в науці та освіті.

Результати дослідження

Інтеграція Python у навчання вищої математики дозволяє зробити навчальний процес більш наочним і практичним. Замість виконання великої кількості однотипних обчислень вручну студенти можуть використовувати програмний код для швидкого отримання результатів і зосереджуватися на розумінні математичних ідей. Це особливо корисно під час роботи з матрицями, функціями та графіками.

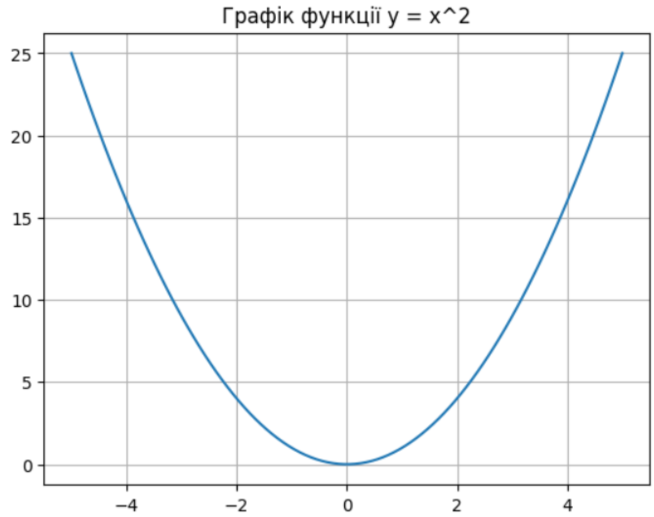
Наприклад, у першому коді використовується бібліотека NumPy для роботи з матрицями. Створюється матриця 2×2, після чого за допомогою вбудованої функції обчислюється її визначник. У традиційному підході студент мав би виконувати обчислення вручну за формулою, але тут результат отримується миттєво. Це дозволяє швидко перевірити правильність розв'язку або експериментувати з різними матрицями, змінюючи їх елементи. Таким чином краще засвоюється сама суть поняття визначника, а не лише алгоритм його обчислення.

У другому коді застосовується бібліотека Matplotlib для побудови графіка функції $y = x^2$. Спочатку створюється набір значень змінної x, потім обчислюються відповідні значення функції, після чого будується графік. Такий підхід дозволяє студенту побачити, як виглядає функція, як вона змінюється, і як її графік залежить від формули. Це значно спрощує розуміння тем з математичного аналізу, оскільки графічне представлення є більш наочним, ніж абстрактні формули.

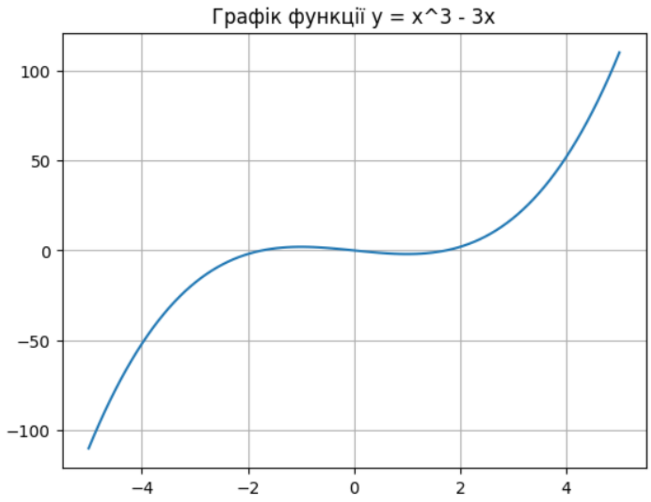
Повний код програми:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-5, 5, 100)
y = x**2

plt.plot(x, y)
plt.title("Графік функції y = x^2")
plt.grid()
plt.show()
```

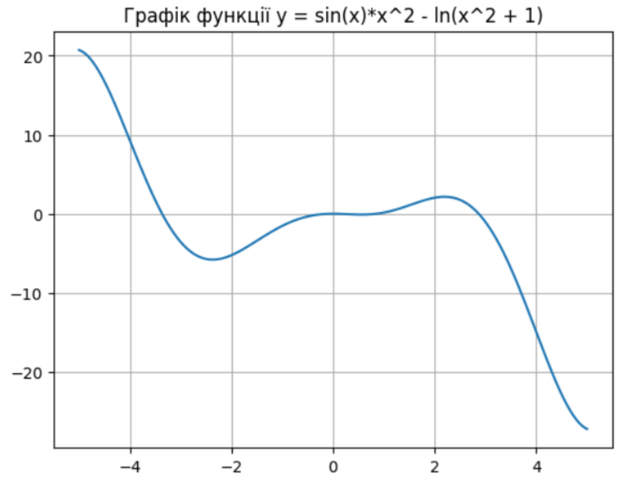
Приклади роботи програми:



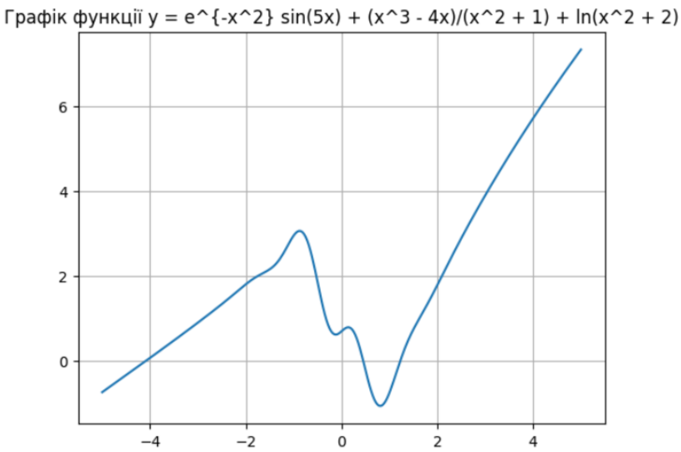
Данний графік є результатом роботи коду з заданою функцією $y = x^2$



Данний графік є результатом роботи коду з заданою функцією $y = x^3 - 3x$



Данний графік є результатом роботи коду з заданою функцією $y = \sin(x) * x^2 - \ln(x^2 + 1)$



Данний графік є результатом роботи коду з заданою функцією $y = e^{-x^2} * \sin(5x) + \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 2)$

Застосування таких інструментів дозволяє візуалізувати математичні об'єкти та процеси, що значно полегшує їх розуміння.

Крім того, використання Python сприяє розвитку алгоритмічного мислення, що є важливим для майбутніх фахівців технічних спеціальностей.

Висновок

Інтеграція Python у навчання вищої математики є ефективним підходом до підвищення якості освіти. Використання програмування дозволяє не лише автоматизувати обчислення, але й глибше зрозуміти математичні процеси. Такий підхід сприяє розвитку аналітичного мислення та практичних навичок студентів, що є важливим у сучасному інформаційному суспільстві.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. NumPy Documentation [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://numpy.org/doc/
2. SymPy Documentation [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://docs.sympy.org/
3. Stinson D. R., Paterson M. B. Cryptography: Theory and Practice. 4th ed. Boca Raton : CRC Press, 2018. 604 p. ISBN 978-1138042276.
4. Python Software Foundation. Built-in Functions (pow()). The Python Standard Library. URL: https://docs.python.org/3/library/functions.html#pow

Приймак Валерія Павлівна **–** студентка групи 2КІТС – 25б, факультет менеджменту та інформаційної безпеки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: valeriapryimak4@gmail.com

Науковий керівник: ***Клєопа Ірина Анатоліївна*** – pHd, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: paceka08@vntu.edu.ua

Pryimak Valeria Pavlivna – student of group 2KITS–25b, Faculty of Management and Information Security, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: valeriapryimak4@gmail.com

Scientific supervisor: ***Klieopa Iryna Anatoliivna*** – PhD, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: paceka08@vntu.edu.ua

УДК 37.091.33:004:51

І. А. Клєопа
П. А. Головащенко

ЗАСТОСУВАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ У ВИВЧЕННІ СКЛАДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі обґрунтовано доцільність та необхідність впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у процес навчання вищої математики з метою подолання формалізму знань та розвитку просторової уяви студентів. Розкрито суть принципу когнітивної наочності, яка, на відміну від традиційної ілюстративної, виконує дослідницьку функцію та забезпечує синхронізацію логічного й образного мислення. Визначено та деталізовано чотири фундаментальні рівні комп'ютерної візуалізації: ілюстративно-дескриптивний, динамічно-маніпулятивний, параметрично-варіативний та конструктивно-моделюючий. На основі порівняльного аналізу традиційних калькуляторів та динамічних середовищ (зокрема, GRAN-3D та Advanced Grapher) доведено переваги безперервного інтерактивного взаємозв'язку між аналітичним виразом та графічним образом. Особливу увагу приділено практичному розв'язанню когнітивних труднощів під час вивчення проблемних тем стереометрії та математичного аналізу (зокрема, концепції «комп'ютерного мікроскопа»). Окреслено роль покрокової алгоритмізації мультимедійних презентацій для оптимізації когнітивного навантаження студентів.

Ключові слова: інформаційно-комунікаційні технології, навчання математики, когнітивна наочність, комп'ютерна візуалізація, динамічні математичні середовища, GRAN-3D, Advanced Grapher, стереометрія, математичний аналіз.

Abstract

The paper substantiates the expediency and necessity of implementing information and communication technologies (ICT) in the process of teaching higher mathematics in order to overcome the formalism of knowledge and develop students' spatial imagination. The essence of the principle of cognitive visualization is revealed. Unlike traditional illustrative visualization, cognitive visualization performs a research function and ensures the synchronization of logical and figurative thinking. Four fundamental levels of computer visualization are identified and described in detail: illustrative-descriptive, dynamic-manipulative, parametric-variational, and constructive-modeling. Based on a comparative analysis of traditional calculators and dynamic mathematical environments (in particular, GRAN-3D and Advanced Grapher), the advantages of a continuous interactive relationship between analytical expressions and graphical representations are demonstrated. Particular attention is paid to the practical solution of cognitive difficulties encountered while studying challenging topics in stereometry and mathematical analysis, including the concept of the "computer microscope." The role of step-by-step algorithmization of multimedia presentations in optimizing students' cognitive load is outlined.

Keywords: information and communication technologies, mathematics education, cognitive visualization, computer visualization, dynamic mathematical environments, GRAN-3D, Advanced Grapher, stereometry, mathematical analysis

Вступ

Сучасний етап розвитку освіти характеризується активним впровадженням інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес [1]. Особливої актуальності це набуває у викладанні математики, де значна частина навчального матеріалу пов'язана з абстрактними поняттями, складними просторовими об'єктами та динамічними процесами, які важко повноцінно пояснити лише за допомогою традиційних засобів навчання крейди, дошки та статичних рисунків. В умовах дефіциту просторової уяви виникає потреба у використанні комп'ютерної візуалізації як інструменту, здатного забезпечити більш глибоке розуміння математичних закономірностей.

Однією з головних проблем сучасного математичного навчання є формалізм знань, коли учні можуть механічно застосовувати формули та алгоритми, але не розуміють їхнього геометричного, фізичного або логічного змісту. Тому комп'ютерні технології стають не лише допоміжним засобом, а повноцінним елементом сучасної методики навчання математики, реалізуючи принцип когнітивної наочності [2]. За такого підходу математичний об'єкт перестає бути статичним символом і перетворюється на динамічну модель, доступну для дослідження.

Результати дослідження

Механізми впливу комп'ютерної візуалізації на пізнавальний процес полягає:

1. Традиційна наочність (класичні таблиці, статичні рисунки на дошці) виконує переважно ілюстративну функцію — вона констатує факт, але не пояснює процес.
2. Когнітивна наочність, своєю чергою, виконує дослідницьку функцію, що характеризується інтерактивністю, операційністю та згорнутістю складної інформації в наочний графічний образ.

Впровадження таких інструментів забезпечує синхронізацію лівої та правої півкуль мозку. Математика традиційно спирається на логіку, символи та алгоритми, тоді як когнітивна наочність залучає просторове й образне мислення [2].

Наприклад, при побудові перерізу складного багатогранника в середовищі GRAN-3D, учень одночасно бачить аналітичне рівняння площини та її просторове втілення [3]. Це створює міцний когнітивний зв'язок «символ - образ».

Застосування ІКТ дозволяє виділити чотири фундаментальні рівні візуалізації об'єктів за ступенем їхньої складності та ролі в навчальному процесі [5]:

1. Ілюстративно-дескриптивний (статичний) рівень: комп'ютер як «ідеальний кресляр». Візуалізація функцій з високою частотою коливань або складних структур для створення еталонного образу, що виключає хиби ручного креслення.
2. Динамічно-маніпулятивний (кінетичний) рівень: подолання проблеми «плоского сприйняття». Завдяки інструментам обертання та масштабування ‘мозок учня формує цілісний 3D-образ просторового тіла (наприклад, у стереометрії).
3. Параметрично-варіативний (дослідницький) рівень: створення «сімейства кривих». Змінюючи параметри за допомогою бігунків (слайдерів) в Advanced Grapher, студент візуально відчуває вплив кожної змінної на загальну форму графіка, розуміючи закономірності (наприклад, розширення віток квадратичної функції).
4. Конструктивно-моделюючий (творчий) рівень: побудова складних об'єктів шляхом алгоритмів або комбінування. Візуалізація стає результатом синтезу нових математичних об'єктів, наприклад, при моделюванні фізичних процесів мовою математики.

Для глибшого розуміння ролі ІКТ варто чітко розрізняти функціонал статичних калькуляторів та динамічних середовищ (див. табл. 1).

Таблиця 1. Порівняльний аналіз динамічних середовищ і традиційних обчислювачів

Критерій порівняння	**Традиційний калькулятор**	**Динамічне математичне середовище**
Орієнтація процесу	Отримання кінцевого результату. Умови і відповіді розірвані («чорна скринька»).	Дослідження самого процесу. Математичний об'єкт існує в динамічному континуумі.
Характер змін	Дискретність. Необхідне постійне введення нових наборів точок вручну.	Безперервність. Повзунки забезпечують динамічну тяглість перетворень графіків.
Реакція на дію	Односторонній зв'язок (команда - сухий результат).	Двосторонній інтерактивний зв'язок (зміна фігури оновлює аналітичне рівняння).
Ставлення до помилки	Результат кваліфікується просто як «неправильний».	Помилка візуалізується і стає стимулом для аналізу та виявлення недоліку в гіпотезі.

Аналіз показав, що найбільшої кількості когнітивних помилок учні припускаються при вивченні стереометрії та математичного аналізу [5].

У стереометрії плоскі проекції не зберігають кутів і довжин. Це викликає ефект «оптичного злиття» мимобіжних прямих та проблему ідентифікації невидимих ліній. Використання програм GRAN-3D усуває цю проблему через можливість просторового обертання та ізоляції допоміжних елементів [3].

У математичному аналізі абстракція граничних переходів та диференціалів викликає ускладнення. Завдяки концепції «комп'ютерного мікроскопа» (масштабування Zoom в Advanced Grapher) будь-яка диференційовна крива перетворюється на пряму лінію, що наочно пояснює суть похідної як лінійної частини приросту функції.

При вивченні складних теорем виникає проблема «втрати логічної нитки». Використання покрокової алгоритмізації доведення через презентації сприяє квантуванню матеріалу — розбиттю масиву інформації на логічні дози (один слайд = один логічний крок). Синхронізація тексту, креслення та пояснень усуває когнітивне перевантаження, а використання гіпертекстової (нелінійної) структури дозволяє адаптувати темп уроку під індивідуальні особливості сприйняття різних груп учнів [4].

Висновок

Підсумовуючи результати дослідження, можна стверджувати, що впровадження ІКТ у процес вивчення математики є об'єктивно необхідним кроком для подолання формалізму в освіті. Когнітивна наочність трансформує роль комп'ютера з простого засобу ілюстрації на активний інструмент дослідження. Динамічні математичні середовища (GRAN, Advanced Grapher) створюють умови для процесуального пізнання, де закон постає як жива модель, доступна для маніпуляцій, що забезпечує глибоке засвоєння складних абстракцій та подолання страху помилки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Семеріков С. О., Мінтій І. С., Словак К. І. Використання систем комп'ютерної математики у навчанні математичних дисциплін. Інформаційні технології в освіті. 2021. № 4. С. 45–59.
2. GeoGebra Team. GeoGebra Mathematics Software. URL: https://www.geogebra.org (дата звернення: 08.06.2026).
3. Hohenwarter M., Lavicza Z. The Strength of the Community: How GeoGebra Can Inspire Technology Integration in Mathematics Education. The Journal of Online Mathematics and Its Applications. 2020. Vol. 20. P. 1–12.
4. Borba M. C., Askar P., Engelbrecht J., Gadanidis G., Llinares S., Sánchez-Aguilar M. Blended Learning, E-Learning and Mobile Learning in Mathematics Education. ZDM Mathematics Education. 2022. Vol. 54. No. 5. P. 1021–1032.
5. Drijvers P. Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (or Doesn't). Educational Studies in Mathematics. 2021. Vol. 106. No. 1. P. 1–20.

Клєопа Ірина Анатоліївна - доктор філософії, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, e-mail: paceka08@gmail.com

Головащенко Павло Андрійович – студент групи 1 КІТС-25б, факультет факультет менеджменту та інформаційної безпеки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: golovashchenkopavlo@gmail.com

Klieopa Iryna, Doctor of Philosophy, Associate Professorof the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, e-mail: paceka08@gmail.com

Holovashchenko Pavlo Andriiovych, student of Group 1 KITS-25b, Faculty of Management and Information Security, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine. E-mail: golovashchenkopavlo@gmail.com.

УДК 378.016:51:004.9

М.О. Бєлова[1]
Ю.А. Мейш[2]

МЕТОДИЧНИЙ СЦЕНАРІЙ ПРИКЛАДНОГО ОПРАЦЮВАННЯ ТЕМ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ЗАСОБАМИ ЦИФРОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ

[1] *Державний торговельно-економічний університет;*
[2] Національний університет біоресурсів і природокористування України

Анотація

У роботі подано підхід до організації занять з вищої математики, за якого цифрові інструменти використовуються не як заміна міркувань студента, а як засіб перевірки, візуалізації та аналізу прикладної ситуації. Окреслено етапи роботи з навчальною задачею: постановка контексту, вибір математичної моделі, виконання обчислень, інтерпретація результату та методичне обговорення.
Ключові слова: вища математика, цифрові інструменти, прикладна задача, навчальний сценарій, математична модель.

Abstract

The paper presents an approach to teaching higher mathematics in which digital tools support verification, visualisation and analysis rather than replace students' reasoning. The proposed sequence includes contextual problem setting, model selection, calculation, interpretation and methodological discussion.
Keywords: higher mathematics, digital tools, applied problem, learning scenario, mathematical model.

Вступ

Оновлення математичної підготовки у закладах вищої освіти пов'язане не лише з появою нових програмних засобів. Значно важливішим є питання, як саме студент працює з математичною ідеєю: чи він лише відтворює готовий алгоритм, чи вміє побачити за ним спосіб опису реального процесу. Для інженерних, природничих та економічних спеціальностей це особливо суттєво, адже формула або графік мають бути пов'язані з умовами задачі, припущеннями та межами застосування отриманого результату [1, 2].

Мета роботи полягає у визначенні методичних прийомів, які дають змогу поєднати прикладний зміст курсу вищої математики з можливостями цифрових середовищ і водночас зберегти провідну роль математичного мислення.

Результати дослідження

У навчанні доцільно переходити від схеми «пояснення - зразок - тренувальні вправи» до сценарію, у якому першим кроком виступає змістовна ситуація. Це може бути потреба оцінити зміну певної величини, підібрати параметр, порівняти варіанти розв'язання або перевірити стійкість результату. Після цього студент формулює математичне питання, обирає потрібний інструмент і лише тоді виконує обчислення. Така послідовність змінює сприйняття дисципліни: математика постає не як окремий набір правил, а як мова аналізу та обґрунтування [1, 2].

Цифрові середовища доцільно залучати на тих етапах, де вони справді підсилюють навчальну дію. Наприклад, графічний модуль допомагає швидко побачити поведінку функції за різних параметрів; електронна таблиця зручна для первинного опрацювання числових даних; комп'ютерна математична система дає можливість зіставити аналітичний і чисельний результат. Однак перед використанням програми студент має записати модель, пояснити вибір методу та спрогнозувати характер відповіді. Це зменшує ризик формального застосування технології без розуміння математичного змісту [4, 5].

Прикладна спрямованість може бути реалізована навіть у межах традиційних тем курсу. Під час вивчення похідної варто акцентувати не тільки техніку диференціювання, а й зміст швидкості зміни, локального максимуму, мінімуму та чутливості моделі до параметра. У темі інтегралів доцільними є задачі на накопичення величини, оцінювання площі або узагальнення дискретних даних. Для лінійної алгебри продуктивними є задачі з балансами, системами обмежень і перетворенням даних. У кожному випадку підсумком має бути не лише числова відповідь, а короткий висновок щодо початкової ситуації [1, 3].

Для груп із неоднорідною підготовкою ефективною є трирівнева побудова завдань. На першому рівні студент відпрацьовує базовий алгоритм; на другому - самостійно добирає спосіб розв'язання; на третьому - змінює умови, порівнює результати або пояснює причини відхилень. Така організація дозволяє підтримати тих, хто має прогалини у попередній підготовці, і водночас створити простір для дослідницької роботи сильніших студентів [2, 3].

У змішаному форматі електронний курс має виконувати роль навігатора навчальної траєкторії. До заняття доцільно розміщувати короткі матеріали для актуалізації знань і діагностичні запитання. Під час аудиторної роботи увага переноситься на моделювання, обговорення припущень та аналіз помилок. Після заняття студент отримує індивідуальне завдання, у якому автоматизована перевірка поєднується з необхідністю подати пояснення або висновок. Такий підхід відповідає сучасному баченню цифрової компетентності викладача, де важливо не лише володіти інструментами, а й методично виправдано інтегрувати їх у навчання [4, 5].

Роль викладача у такій моделі залишається визначальною. Саме він добирає професійно близькі приклади, формулює запитання, що спонукають до міркування, відстежує типові помилки і допомагає студентам відрізняти коректний математичний результат від випадкового машинного обчислення. Отже, цифровізація курсу має розглядатися як педагогічно керований процес, а не як проста заміна дошки, конспекту чи підручника електронними матеріалами [2, 5].

Висновки

Поєднання прикладного моделювання, диференційованих завдань і цифрових інструментів дає змогу зробити курс вищої математики більш змістовним для студентів різних спеціальностей. Найбільший методичний ефект досягається тоді, коли програмний засіб використовується після осмислення задачі та вибору моделі, а результат обов'язково інтерпретується мовою початкової ситуації. Подальше удосконалення навчання доцільно пов'язувати з розробленням коротких професійно орієнтованих кейсів, банку різнорівневих завдань і системи зворотного зв'язку для самостійної роботи студентів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Pepin B., Biehler R., Gueudet G. Mathematics in Engineering Education: a Review of the Recent Literature with a View towards Innovative Practices. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2021. Vol. 7, No. 2. P. 163–188. DOI: 10.1007/s40753-021-00139-8.
2. Niss M., Højgaard T. Mathematical competencies revisited. Educational Studies in Mathematics. 2019. Vol. 102. P. 9–28. DOI: 10.1007/s10649-019-09903-9.
3. Greefrath G., Siller H.-S., Vorhölter K., Kaiser G. Mathematical modelling and discrete mathematics: opportunities for modern mathematics teaching. *ZDM – Mathematics Education*. 2022. Vol. 54, No. 4. P. 865–879. DOI: 10.1007/s11858-022-01339-5.
4. Gökçe S., Güner P. Dynamics of GeoGebra ecosystem in mathematics education. *Education and Information Technologies*. 2022. Vol. 27, No. 4. P. 5301–5323. DOI: 10.1007/s10639-021-10836-1.
5. Weinhandl R., Lindenbauer E., Schallert-Vallaster S., Pirklbauer J., Hohenwarter M. GeoGebra, a comprehensive tool for learning mathematics. In: *Designing Effective Digital Learning Environments*. London : Routledge, 2024. P. 39–56. DOI: 10.4324/9781003386131-6.

Бєлова Марина Олександрівна — канд. фіз.-мат. наук, доцент, заступник декана ФІТ з навчально-методичної та наукової роботи, Державний торговельно-економічний університет, Київ, e-mail: marisha67@ukr.net

Мейш Юлія Анатоліївна — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, e-mail: juliameish@nubip.edu.ua

Bielova Maryna Oleksandrivna — Cand. Sc. (Phys. and Math.), Associate Professor, Deputy Dean of the Faculty of Information Technologies for Educational, Methodological and Scientific Work, State University of Trade and Economics, Kyiv, e-mail: marisha67@ukr.net.

Meish Yuliia A. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, e-mail: juliameish@nubip.edu.ua.

УДК 514.113.5:004.42:378.147

В. А. Сусло
Г. Я. Тулученко

КОМП'ЮТЕРНА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПАРАДОКСІВ: ДИНАМІКА ЗБІЖНОСТІ ІНТЕГРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСКІНЧЕННИХ ТІЛ

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Анотація

У тезах розглянуто методичні аспекти обчислення об'єму та площі поверхні нескінченних тіл обертання — об'єктів, чий аналіз традиційно провокує появу математичних парадоксів та контрінтуїтивних результатів. Обґрунтовано трансформацію дидактичної парадигми: від традиційного монооб'єктного вивчення ізольованих класичних прикладів та виконання абстрактних обчислювальних алгоритмів до впровадження трирівневого ієрархічного комплексу задач, що стимулює самостійну дослідницьку діяльність студентів. На прикладі тіла, утвореного обертанням цисоїди Діокла навколо її асимптоти, показано скінченність обох його інтегральних характеристик (як об'єму, так і площі поверхні). Завдяки комп'ютерному моделюванню в середовищі DESMOS наочно проілюстровано зв'язок між аналітичною структурою підінтегральних функцій та динамікою обчислювальних процесів в околі сингулярності.

Ключові слова: математичні парадокси, тіла обертання, невласні інтеграли, цисоїда Діокла, комп'ютерне моделювання, DESMOS.

Abstract

The abstract examines the pedagogical aspects of calculating the volume and surface area of infinite solids of revolution — objects whose analysis traditionally provokes mathematical paradoxes and counterintuitive results. It substantiates a transformation of the educational paradigm: shifting from the traditional mono-object study of isolated classical examples and the execution of abstract computational algorithms toward the implementation of a three-level hierarchical framework of problems designed to stimulate students' independent research activity. Using the solid formed by the revolution of the cissoid of Diocles around its asymptote as an example, the finiteness of both its integral characteristics (both volume and surface area) is demonstrated. Through computer modeling in the DESMOS environment, the relationship between the analytical structure of the integrands and the dynamics of computational processes in the vicinity of the singularity is clearly illustrated.

Keywords: mathematical paradoxes, solids of revolution, improper integrals, cissoid of Diocles, computer modeling, DESMOS.

Вступ

Для формування у студентів цілісного уявлення про інтегральні характеристики нескінченних тіл обертання доцільно застосувати ієрархічний підхід до добору об'єктів дослідження [1]. Методична стратегія полягає в аудиторній демонстрації результатів, що базується на аналізі класичних парадоксів, та винесенні складних аналітичних розрахунків і комп'ютерного моделювання в площину самостійної роботи або математичного гуртка.

Повна стаття, що готується за результатами дослідження, передбачає розгляд трирівневого дослідницького комплексу задач: від класичного базового рівня (Ріг Габрієля, псевдосфера Белтрамі) та просунутих моделей (цисоїда Діокла, конхоїда Слюза) до задач підвищеної складності, пов'язаних з обертанням навколо похилої асимптоти (декартів лист). У межах цих тез акцентовано увагу на задачі обертання цисоїди Діокла [2], аналітичні розрахунки та комп'ютерна візуалізація якої в середовищі DESMOS дозволяють наочно продемонструвати динаміку збіжності інтегральних характеристик нескінченних тіл.

Результати дослідження

У межах теми «Об'єм та площа поверхні тіл обертання» використання невласних інтегралів традиційно обмежується класичним прикладом «Рога Габрієля» (гіперболічної лійки), який демонструє ефект збіжності об'єму при розбіжності площі поверхні [3–4]. Обмеженість аудиторного часу часто унеможливлює розгляд ширшого спектра нескінченних тіл, що залишає поза увагою студентів приклади, де обидві інтегральні характеристики є скінченними. Дослідження цисоїди Діокла при обертанні навколо її вертикальної асимптоти дозволяє усунути цей методичний недолік, демонструючи альтернативний тип поведінки нескінченних геометричних об'єктів.

Канонічне рівняння цисоїди Діокла в декартовій системі координат має вигляд:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}, \quad x \in [0, 2a) .$$

Крива є симетричною відносно осі Ox і має вертикальну асимптоту $x = 2a$.

Аналітичне обчислення об'єму за допомогою методу циліндричних оболонок. Традиційний підхід до обчислення об'єму тіла обертання із паралельним переносом осі обертання до осі Oy призводить до громіздких алгебраїчних виразів, які знижують мотивацію студентів. Замість цього методично виправдано застосувати метод циліндричних оболонок безпосередньо у початковій системі координат.

Для вертикального елемента інтегрування шириною dx, розташованого на відстані x від осі Oy, радіус обертання навколо асимптоти становить $R(x) = 2a - x$, а висота циліндричної оболонки визначається як

$$h(x) = 2y(x) = 2\sqrt{\frac{x^3}{2a - x}} .$$

Тоді диференціал об'єму дорівнює

$$dV = 2\pi \cdot R(x) \cdot h(x)\, dx ,$$

а повний об'єм тіла обертання задається невласним інтегралом першого роду:

$$V = 2\pi \int_0^{2a} (2a - x) \cdot 2\sqrt{\frac{x^3}{2a - x}}\, dx .$$

Завдяки тотожному перетворенню, ірраціональність у знаменнику підінтегрального виразу повністю скорочується, що демонструє аналітичну елегантність обраного методу і стає першим мотивувальним фактором для студентів:

$$V = 4\pi \int_0^{2a} x^{3/2} \sqrt{2a - x}\, dx . \qquad (1)$$

Отриманий інтеграл є класичним прикладом інтегрування диференціального біному:

$$x^m (b + cx^n)^p\, dx ,$$

де $m = 3/2$, $n = 1$, $p = 1/2$, $b = 2a$, $c = -1$.

Має місце виконання третьої умови інтегрованості бінома:

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{\frac{3}{2} + 1}{1} + \frac{1}{2} = 3 ,$$

і застосування підстановки:

$$2ax^{-1} - 1 = z^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2a}{z^2 + 1} . \qquad (2)$$

На цьому етапі доцільно запропонувати студентам порівняти виконану підстановку з геометричною параметризацією цисоїди Діокла, яка виконується через пучок прямих $y = tx$ і має вигляд:

$$x(t) = \frac{2at^2}{1 + t^2} , \qquad y(t) = \frac{2at^3}{1 + t^2} . \qquad (3)$$

Співвідношення $z = 1/t$ демонструє студентам глибоку конвергенцію між аналітичним апаратом інтегрального числення та конструктивною геометрією, перетворюючи абстрактні формули на логічну систему.

Слід зазначити, що згаданий інтеграл можна обчислити як за допомогою підстановки (2), так і через тригонометричну заміну $x = 2a\sin^2 t$, що становить додаткову методичну перевагу розглянутого прикладу. В обох випадках інтегрування приводить до скінченного значення об’єму тіла обертання:

$$V = 2\pi^2 a^3 . \tag{4}$$

Аналітичне обчислення площі поверхні тіла обертання. Обчислення площі поверхні обертання S вимагає знаходження диференціала дуги кривої $ds = \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx$. Після диференціювання функції $y = \dfrac{x^{3/2}}{\sqrt{2a-x}}$ та алгебраїчних спрощень одержуємо:

$$ds = \frac{a\sqrt{8a-3x}}{\left(2a-x\right)^{3/2}}\,dx .$$

Зважаючи на симетрію обох гілок цисоїди Діокла відносно осі абсцис, повна площа поверхні обертання навколо вертикальної асимптоти $x = 2a$ розраховується як подвоєний інтеграл від добутку довжини кола радіуса $R(x) = 2a - x$ на елемент дуги ds:

$$S = 4\pi\int_0^{2a} R(x)\,ds = 4\pi\int_0^{2a} \left(2a-x\right)\cdot \frac{a\sqrt{8a-3x}}{\left(2a-x\right)^{3/2}}\,dx = 4\pi a\int_0^{2a} \frac{\sqrt{8a-3x}}{\sqrt{2a-x}}\,dx . \tag{5}$$

З методичної точки зору, цей етап є надзвичайно цінним для формування дослідницьких компетентностей студентів, оскільки припускає застосування двох альтернативних способів обчислення отриманого інтеграла.

Спосіб 1. Степенева заміна змінної. Перший підхід полягає в використанні алгебраїчної заміни $2a - x = t^2$, яка усуває сингулярність у знаменнику. Проте під коренем у чисельнику утворюється нова квадратична ірраціональність вигляду $\sqrt{2a+3t^2}$. Подальше інтегрування вимагає використання класичного (хоч і дещо громіздкого) інструментарію: інтегрування частинами або застосування тригонометричних або гіперболічних підстановок. Цей шлях корисний для закріплення базових навичок інтегрування трансцендентних форм.

Спосіб 2. Дробово-лінійна підстановка. Більш витонченим є другий підхід із застосування дробово-лінійної підстановки:

$$u^2 = \frac{8a-3x}{2a-x},$$

яка безпосередньо відповідає третій умові інтегрованості диференціального бінома. Цей метод виконує дію повної раціоналізації підінтегрального виразу: ірраціональність повністю ліквідується, а задача зводиться до інтегрування правильного раціонального дробу вигляду $\dfrac{u^2}{\left(u^2-3\right)^2}$. Такий підхід наочно демонструє студентам силу цілеспрямованих алгебраїчних перетворень у математичному аналізі.

Незалежно від обраного способу отримуємо таке значення площі поверхні досліджуваного тіла обертання:

$$S = 8\pi a^2\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right). \tag{6}$$

Таким чином, отримані аналітичні результати показують, що обидві інтегральні характеристики досліджуваного тіла обертання цисоїди Діокла – як об'єм, так і площа поверхні – є скінченними величинами. Це створює виразний методичний контраст із класичним парадоксом «Рога Габрієля», де скінченний об'єм поєднується з нескінченною площею поверхні. Таке порівняння дозволяє наочно продемонструвати студентам різні сценарії збіжності невласних інтегралів під час геометричного аналізу нескінченних просторових топологій.

Динамічне комп'ютерне моделювання збіжності інтегральних характеристик в середовищі DESMOS. Для інтерактивного супроводу навчального матеріалу та організації самостійної дослідницької роботи студентів авторами розроблено динамічну візуалізаційну модель у середовищі DESMOS (рис. 1).

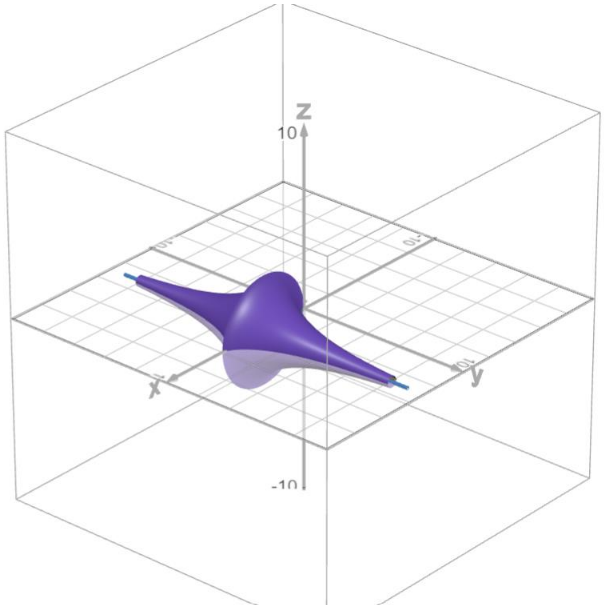


Рис. 1. Динамічна модель тіла обертання цисоїди Діокла навколо її асимптоти в середовищі DESMOS.

В основі комп'ютерної реалізації лежить введення параметра L, який виступає штучно встановленою верхньою межею зміни параметра t параметричних рівняннях кривої (3). Це дозволяє замінити теоретичну верхню межу інтегрування $2a$ на поточне значення $x(L)$, реалізуючи ефект «штучного зрізання» нескінченного тіла обертання. Завдяки такому підходу обчислювальний алгоритм захищено від сингулярності, а студенти мають змогу проводити комп'ютерний експеримент, порівнюючи поточні значення інтегральних характеристик зрізаної моделі:

$$V_{Model}\left(x(L)\right) = 4\pi \int_0^{x(L)} x^{3/2}\sqrt{2a-x}\,dx\,,$$

$$S_{Model}\left(x(L)\right) = 4\pi a \int_0^{x(L)} \frac{\sqrt{8a-3x}}{\sqrt{2a-x}}\,dx\,,$$

з їхніми теоретичними граничними значеннями (формули (4) та (6)).

У ході комп'ютерного моделювання виявляється важливий факт: чисельне значення об'єму моделі збігається до свого теоретичного значення значно швидше, ніж площа її поверхні.

З методичної точки зору це дозволяє наочно продемонструвати студентам аналітичну природу підінтегральних виразів у невласних інтегралах:

- **обчислення об'єму за формулою (1):** підінтегральна функція в околі сингулярності ($x \to 2a$) прямує до нуля, що забезпечує швидке насичення інтегральної суми на початкових етапах інтегрування.
- **обчислення площі поверхні за формулою (5):** підінтегральна функція має інтегральну сингулярність другого роду (знаменник прямує до нуля, а сама функція – до нескінченності). Це доводить, що основна площа нескінченного тіла зосереджена саме в його приасимптотичній

області, тому для досягнення заданої точності потрібне значно більше наближення верхньої межі інтегрування до граничного значення $2a$.

Таким чином, використання DESMOS перетворює абстракте обчислення інтегралів на живий аналіз швидкості збіжності, формуючи у майбутніх інженерів інтуїтивне розуміння поведінки сингулярних систем.

Висновки

Синергія класичного апарату інтегрального числення та сучасних інструментів інтерактивного цифрового моделювання у дослідженні нескінченних просторових топологій дозволяє підбити такі підсумки:

- **Трансформація дидактичної парадигми.** Перехід від монооб'єктного викладання (класичного аналізу «Рога Габрієля») до трирівневого ієрархічного комплексу задач дозволяє диференціювати навчання. Це переводить складні аналітичні розрахунки з категорії рутинних обчислень у площину самостійного наукового пошуку студентів, стимулюючи розвиток інженерно-дослідницького мислення.
- **Подолання концептуальних стереотипів.** Дослідження цисоїди Діокла забезпечує важливий когнітивний зсув у сприйнятті студентами геометрії нескінченності. На відміну від гіперболічної лійки, де скінченність об'єму супроводжується розбіжністю площі поверхні, аналітично доведена скінченність обох характеристик досліджуваного тіла розширює математичний кругозір та демонструє різноманітність сценаріїв збіжності невласних інтегралів.
- **Евристична роль комп'ютерного моделювання.** Інтеграція динамічного середовища DESMOS трансформує сприйняття математичних абстракцій. Введення параметра штучного зрізання L та перехід до динамічної межі інтегрування $x(L)$ дозволяє виявити фундаментальний ефект – суттєву різницю в швидкостях чисельної збіжності значень об'єму та площі поверхні через різну природу підінтегральних сингулярностей. Комп'ютерна візуалізація в такий спосіб перестає бути простою ілюстрацією, а стає автономним інструментом наукового аналізу, що наочно пов'язує аналітичну структуру функцій із динамікою обчислювальних процесів.

Реалізація такого синергетичного підходу не лише оптимізує процес засвоєння фундаментальних концептів математичного аналізу, а й кардинально змінює роль вищої математики в технічному університеті. Вона перестає сприйматися студентами як набір абстрактних алгоритмів, перетворюючись на живий інструмент критичного мислення та комп'ютерно-орієнтованого наукового пошуку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Hart K. Hierarchies in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*. 1981. Vol. 12. № 2. P. 205–218. *JSTOR*, http://www.jstor.org/stable/3482365.

2. van Maanen, J. From Quadrature to Integration: Thirteen Years in the Life of the Cissoid. *The Mathematical Gazette*. 1991. Vol. 75. № 471. P. 1–15. https://doi.org/10.2307/3618976

3. Wijeratne C., Zazkis R. On Painter's Paradox: Contextual and Mathematical Approaches to Infinity. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 2015. Vol. 1. P. 163–186. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0004-z

4. Тулученко Г.Я. Математичні парадокси та поняття нескінченності. Європейське майбутнє: філософсько-освітні студії: Збірник тез і доповідей (Частина 1). за ред. Г. Д. Берегової та ін. (9–10 травня 2024 р. мм. Херсон-Хмельницький) – Херсон: вид-во ФОП Вишемирський В. С., 2024. – С. 134–135.

Сусло Валентин Антонович — здобувач вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за спеціальністю G3 – Електрична інженерія, освітньою програмою «Електропривод, мехатроніка та робототехніка», навчально науковий інститут енергетики, електроніки та електромеханіки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, e-mail: Valentyn.Suslo@ieee.khpi.edu.ua

Тулученко Галина Яківна — д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», email: Halyna.Tuluchenko@khpi.edu.ua.

Suslo Valentyn A. — First-cycle (Bachelor's) student of the major G3 – Electrical Engineering, educational program "Electric Drive, Mechatronics and Robotics", Educational and Scientific Institute of Power Engineering, Electronics and Electromechanics, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, email: Valentyn.Suslo@ieee.khpi.edu.ua

Tuluchenko Halyna Ya. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Higher Mathematics, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, email: Halyna.Tuluchenko@khpi.edu.ua.

УДК 378.147:004

Коваль Д.Л.
Коломієць А. А.

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДОЛОГІЧНІ ТА ПСИХОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ ВПРОВАДЖЕННЯ ІННОВАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ НАВЧАННЯ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У тезах проаналізовано теоретико-методологічні засади та психологічні особливості створення й упровадження інформаційно-комунікаційних та інноваційних технологій в освітній процес. Визначено ключові фактори, що впливають на ефективність цифровізації навчання, зокрема мотивацію здобувачів освіти та когнітивне навантаження.

Ключові слова: інформаційно-комунікаційні технології, інноваційне навчання, психологічні аспекти, методологія освіти.

Abstract

The abstracts analyze the theoretical, methodological, and psychological foundations of creating and implementing information and communication technologies in the educational process. The key factors influencing the effectiveness of digitalization of learning, in particular students' motivation and cognitive load, are determined.

Keywords: information and communication technologies, innovative learning, psychological aspects, educational methodology.

Постановка проблеми

Сучасний етап розвитку суспільства характеризується стрімким упровадженням інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в усі сфери життя, зокрема в освіту. Проте просте технічне оснащення закладів освіти не гарантує автоматичного підвищення якості навчання. Існує нагальна потреба у глибокому осмисленні теоретико-методологічних та психологічних аспектів інтеграції інноваційних технологій для створення ефективного цифрового освітнього середовища.

Мета даної публікації

Дослідити ключові теоретико-методологічні принципи та психологічні чинники, які забезпечують успішне створення та впровадження інноваційних технологій навчання в освітній процес закладів вищої освіти.

Виклад основного матеріалу

Методологічною основою впровадження ІКТ є поєднання конструктивістського, особистісно-орієнтованого та діяльнісного підходів [1]. У межах цих підходів технології розглядаються не лише як засіб передачі інформації чи інструмент візуалізації, а як інтерактивне середовище для активного конструювання знань самими здобувачами освіти. Використання систем комп'ютерної математики та середовищ моделювання вимагає еволюції від репродуктивних до проблемно-дослідницьких та проєктних методів. Так, застосування динамічних систем комп'ютерної алгебри GeoGebra та Wolfram Mathematica під час вивчення вищої математики дозволяє студенту не просто отримати готовий розв'язок диференціального рівняння чи результат дослідження функції, а інтерактивно змінювати параметри моделі й одразу спостерігати, як ці зміни впливають на графік або характер розв'язку, що формує особистий досвід математичного відкриття. Подібний ефект дає організація проєктної роботи на платформі Moodle, коли студенти самостійно будують математичну модель реального технічного процесу (наприклад, моделюють коливання механічної системи чи перехідний процес в електричному колі) і представляють її як кінцевий освітній продукт.

Методологічну відмінність між репродуктивним і проблемно-дослідницьким способами організації навчальної діяльності доцільно унаочнити на прикладі типової задачі математики про дальність польоту тіла, кинутого під кутом до горизонту (табл. 1), яку можна розглянути при вивченні теми «Функції, дослідження функцій».

Таблиця 1. Порівняння репродуктивного та проблемно-дослідницького підходів до навчання розв'язування задачі про дальність польоту

Критерій порівняння	**Класичний (репродуктивний) підхід**	**Проблемно-дослідницький підхід (на прикладі використанням GeoGebra)**
Засоби навчання	Дошка, підручник, калькулятор	Середовище комп'ютерної математики (GeoGebra, симуляція PhET)
Постановка завдання	Викладач надає готову формулу дальності польоту $L = v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)/g$ та конкретні числові дані ($v_0 = 20$ м/с, $\alpha = 45°$)	Викладач формулює відкриту проблему: під яким кутом потрібно запустити аварійний пакет із гуманітарною допомогою з дрона, щоб він пролетів максимальну відстань за сильного зустрічного вітру
Діяльність студента	Підстановка заданих чисел у готову формулу, обчислення на калькуляторі, фіксація відповіді в зошиті	Маніпулювання інтерактивними повзунками (кут α, початкова швидкість v_0, сила вітру, маса пакета), спостереження в реальному часі за зміною параболи польоту
Характер пізнавальної діяльності	Репродуктивне відтворення алгоритму, пасивне заучування готового результату	Дослідницький пошук закономірності через аналіз графіків, висування й перевірка гіпотез
Реакція на зміну умов задачі (наприклад, додавання опору повітря)	Студент заходить у «глухий кут», оскільки готової формули для нової умови в підручнику немає	Студент самостійно досліджує нову залежність, змінюючи параметри моделі, і доходить власного висновку
Результат навчання	Студент діє як «живий калькулятор», знання не переноситься на нові ситуації	Студент самостійно відкриває, що без опору повітря оптимальний кут дорівнює 45°, а за наявності вітру — інший; відкриття ґрунтується на аналізі візуальних даних, а не на сліпому застосуванні формули

З психологічної точки зору, впровадження інноваційних технологій супроводжується низкою викликів. По-перше, виникає проблема оптимізації когнітивного навантаження: надлишок мультимедійної або неструктурованої інформації може призводити до розпорошення уваги та зниження якості засвоєння матеріалу. Педагогічний дизайн електронних курсів повинен базуватися на розумінні закономірностей людського сприйняття. Наприклад, електронний курс із вищої математики, у якому кожна формула супроводжується відеопоясненням, анімацією та спливаючими підказками одночасно, здатний радше ускладнити засвоєння матеріалу через ефект розщепленої уваги (split-attention effect), ніж полегшити його, тоді як лаконічна презентація з покроковим розкриттям виведення формули та однією-двома ілюстраціями виявляється методично ефективнішою. По-друге, трансформується характер мотивації. Інтерактивність, гейміфікація та віртуальна реальність здатні суттєво підвищити первинний пізнавальний інтерес, однак за відсутності змістовної педагогічної взаємодії цей інтерес швидко вичерпується [3]. Так, короткі тестові ігри на платформах Kahoot! або Quizizz, що використовуються для оперативного контролю засвоєння формул і теорем, підвищують пізнавальну активність студентів лише за умови, що їхні результати одразу аналізуються викладачем і пов'язуються з подальшим поясненням матеріалу, а не залишаються самостійною розважальною активністю.

Вкрай важливим аспектом є також психологічна готовність науково-педагогічних працівників до використання ІКТ. Небажання виходити із зони комфорту, страх перед технологічними збоями або консерватизм мислення часто стають невидимими бар'єрами на шляху інновацій. Прикладом такого бар'єру є типова ситуація, коли викладач, який певний час викладав із застосуванням лише дошки й крейди, відмовляється від використання інтерактивної дошки чи системи відеоконференцій через побоювання технічного збою під час заняття. Подолання цієї перешкоди потребує не лише технічного інструктажу, але й систематичної методичної підтримки та формування цифрової культури. Практика засвідчує ефективність коротких практико-орієнтованих семінарів формату "колега-колезі", на яких досвідчені користувачі цифрових інструментів демонструють конкретні прийоми роботи з відповідним програмним забезпеченням безпосередньо на прикладах розв'язування математичних задач, що знижує психологічний бар'єр і прискорює прийняття нових технологій.

Висновки

Успішне створення та впровадження інформаційно-комунікаційних та інноваційних технологій навчання є багатовимірним процесом, який не зводиться до апаратно-програмного оновлення. Він потребує цілісного підходу, що гармонійно поєднує сучасне технічне забезпечення, обґрунтовані педагогічні методики та глибоке розуміння когнітивно-мотиваційних процесів усіх учасників освітньої взаємодії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Биков В. Ю. Моделі організаційних систем відкритої освіти / В. Ю. Биков. Київ : Атіка, 2008. – 684 с.
2. Коломієць, А. А. (2023). Теорія і практика фундаменталізації математичної підготовки майбутніх бакалаврів галузі знань «Електроніка та телекомунікації». Вінницький національний технічний університет. Рівненський державний гуманітарний університет Рівне. 628 с.
3. Смирнова-Трибульська Є. М. Основи формування інформатичних компетентностей вчителів / Є. М. Смирнова-Трибульська. Херсон : Айлант, 2007. – 524 с.

Коваль Дмитро Леонідович, студент академічної групи БМІ-25б, факультету інформаційних електронних систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: dimakcat07@gmail.com.

Коломієць Альона Анатоліївна – доцент, д.пед.н., професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця. e-mail: alona.kolomiets.vnt@gmail.com/

Koval Dmytro Leonidovych student of academic group BMI-25b, Faculty of Information Electronic Systems, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dimakcat07@gmail.com..

Alona Anatoliivna Kolomiyets – Associate Professor, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia. e-mail: alona.kolomiets.vnt@gmail.com.

УДК 378.147

В. В. Пахненко

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАЙБУТНІМ ІНЖЕНЕРАМ

Національний університет «Київський авіаційний інститут», Київ

Анотація *Проведено аналіз особливостей викладання диференціальних рівнянь студентам технічних спеціальностей. Обґрунтовано доцільність застосування колаборативних форм навчання під час проведення практичних занять та показано їх вплив на активізацію пізнавальної діяльності студентів.*

Ключові слова: звичайні диференціальні рівняння, викладання диференціальних рівнянь, колаборативне навчання, технічна освіта.

Abstract

The paper analyzes the peculiarities of teaching ordinary differential equations to students of engineering specialties. The expediency of applying collaborative learning methods during practical classes are substantiated. It is shown that the use of collective forms of work contributes to increasing students' cognitive activity, improving the quality of mastering educational material, and developing teamwork skills.

Keywords: ordinary differential equations, teaching differential equations, collaborative learning, engineering education.

Вступ

Для майбутнього інженера диференціальні рівняння є потужним прикладним інструментом у вивченні спеціальних дисциплін і розв'язуванні прикладних професійних задач за фахом. Тому для студентів технічних спеціальностей є необхідним не тільки засвоєння окремих теоретичних положень теорії звичайних диференціальних рівнянь, але й набуття практичних компетенцій в розв'язуванні типових задач. Велике значення має також формування цілісного сприйняття методів теорії диференціальних рівнянь, розуміння суті аналітичного підходу у моделюванні технічних процесів. Необхідним є також володіння чисельними методами розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. Для студентів деяких спеціальностей також є необхідним хоча б мінімальний обсяг знань з рівнянь у частинних похідних.

Вивчення проблем викладання диференціальних рівнянь проводилось багатьма авторами (більш детально див. [1–7]). Незважаючи на значну кількість наукових праць, присвячених методиці викладання диференціальних рівнянь, питання підвищення ефективності навчання студентів технічних спеціальностей в умовах сучасного освітнього середовища залишаються актуальними. Особливого значення набуває пошук методів активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, розвитку навичок командної роботи та формування професійних компетентностей.

Метою даної роботи є дослідження особливостей викладання звичайних диференціальних рівнянь і надання методичних рекомендацій до викладу навчального матеріалу студентам.

Результати дослідження

Дуже важливим для професійного становлення як математиків, так і майбутніх фахівців усіх технічних спеціальностей є знання основних теоретичних засад та володіння (в більшому чи меншому обсязі) навичками застосування математики, зокрема диференціальних рівнянь (звичайних і в частинних похідних) та відповідних обчислювальних методів.

Протягом багатьох років автор проводить дослідження різних аспектів викладання диференціальних рівнянь (див. [2]) та [6, 7]), в тому числі при вивченні проблем викладання математичних дисциплін (див. [8–10]) як самостійно, так і в складі авторських груп. Різні аспекти використання цифрових інструментів розглядалися в роботах [11–13].

Слід відмітити, що в НУ «КАІ» навчальні плани за більшістю інженерних напрямів підготовки включають тільки одну математичну дисципліну «Вища математика», в складі якої вивчаються відповідні питання. Навчальні плани за всіма спеціальностями галузі знань F (12) Інформаційні технології передбачають, як правило, вивчення кількох математичних дисциплін, в тому числі дисципліни «Математичний аналіз» та дисципліни «Обчислювальні методи». Слід відмітити, що студенти, які навчаються за спеціальністю F1 (113) «Прикладна математика», вивчають повний набір базових і певний набір спеціальних математичних дисциплін за своєю спеціалізацією. Тому їм окремо викладаються дисципліни «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння» і «Обчислювальні методи».

До організації навчальної і наукової роботи студентів протягом останніх років впроваджується проблемний підхід. Як частину реалізації цього підходу при проведенні практичних занять застосовуються колаборативні форми роботи (більш детально див. [14, 15]). Для цього здійснюється поділ академічної групи на декілька команд для спільного розв'язування декількох складних задач, взаємної перевірки засвоєння матеріалу, підготовки презентацій на практичних заняттях з подальшим обговоренням і порівнянням результатів. Певні позитивні результати дала організація дискусій.

Висновки

Проведено аналіз особливостей викладання диференціальних рівнянь студентам технічних та ІТ-спеціальностей у НУ «КАІ». Визначено основні підходи до формування теоретичних знань і практичних навичок розв'язування диференціальних рівнянь, необхідних для майбутньої професійної діяльності.

Показано, що використання колаборативних форм навчання у поєднанні з проблемним підходом сприяє активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, розвитку навичок командної роботи та покращенню результатів навчання. Отримані результати свідчать про доцільність подальшого впровадження таких методів у практику викладання математичних дисциплін.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лов'янова І. В. Вивчення дисципліни «Диференціальні рівняння» з використанням вільно поширюваного програмного забезпечення / І. В. Лов'янова, М. В. Попель // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : збірник наукових праць. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ. – 2011. – Випуск IX. – С. 94–99. https://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/0564/2329/1/2011_5.pdf

2. Карупу О. В. Аналіз практики викладання звичайних диференціальних рівнянь англомовним студентам технічних спеціальностей в Національному авіаційному університеті / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Фізико-математична освіта. – 2017. – № 4 (14). – С. 33–36.

3. Vlasenko, K. Developing informatics competencies of computer sciences students while teaching differential equation / K. Vlasenko, O. Chumak, I. Sitak, O. Chashechnikova, I. Lovianova // Revista Espacios. – 2019. – 40 (31). – P. 11. https://www.revistaespacios.com/a19v40n31/a19v40n31p11.pdf

4. Lozada, E. Classroom Methodologies for Teaching and Learning Ordinary Differential Equations: A Systemic Literature Review and Bibliometric Analysis. / E. Lozada, C. Guerrero-Ortiz, A. Coronel, R. Medina // Mathematics. – 2021. – 9(7) . – P. 745. https://doi.org/10.3390/math9070745

5. Сясєв, Андрій. Аспекти методики викладання диференціальних рівнянь: сучасні підходи, труднощі та методи їх подолання / Андрій Сясєв //. Український педагогічний журнал. – 2025. – № 2. – С. 151–165. https://doi.org/10.32405/2411-1317-2025-2-151-165

6. Pakhnenko V. V. Differential equations / Pakhnenko V. V., Shkvar Ye.O. // Kyiv: NAU. 2002. – 104 p.

7. Pakhnenko V. V. Differential equations as an important component of the training of future aviation engineers / V. V. Pakhnenko // AVIA-2019: Proceedings of the 14 International Conference of Science and Technology (Kyiv, April, 23 – 25, 201). – 2019 – P. 10.12–10.14.

8. Карупу О. В., Олешко Т. А., Пахненко В. В. Про деякі особливості викладання математичних дисциплін англомовним студентам. університеті / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. – 2011. – Вип. 83. – С. 76–79.

9. Карупу, О. В. About teaching of the mathematical disciplines for foreign students. / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2012. – *2*(2(56), – P. 11–14. https://journals.uran.ua/eejet/information/authors

10. Карупу О. В., Олешко Т. А., Пахненко В. В. Про особливості викладання математичних дисциплін студентам технічних спеціальностей в мультинаціональних академічних групах. університеті / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology – 2019 – Vol. VII (77), Issue 188 – P. 21–24.

11. Karupu O. Applying information technologies to mathematical education of IT specialists in English-speaking academic groups / O. Karupu, T. Oleshko, V. Pakhnenko, A. Pashko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2019. – P. 70–75. https://bphm.knu.ua/index.php/bphm/article/view/122 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/4.9

12. Karupu O. Application of Google Workspace in Mathematical Training of Future Specialists in the Field of Information Technology / O. Karupu, T. Oleshko, V. Pakhnenko // In: Hu, Z., Dychka, I., He, M. (eds) Advances in Computer Science for Engineering and Education VI. ICCSEEA 2023 . Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies (Warsaw, Poland, March 17 – 19 , 2023). – 2023 – vol 181. Cham: Springer Nature Switzerland. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-36118-0_80 https://doi.org/10.1007/978-3-031-36118-0_80

13. Кудзіновська І. П. Про особливості використання цифрових інструментів у процесі викладання вищої математики. / І. П. . Кудзіновська, В. В. Пахненко, В. І.Трофименко // Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця "НПК-2025": матеріали міжнар. наук.-метод. конф., (Суми, 4 – 5 грудня 2025 р.). – Суми: СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2025. – С. 212–214. file:///C:/Users/Admin/Downloads/Sumy_NPK-2025-14.pdf

14. Karupu On some aspects of modeling of professional activity of future aviation engineer in teaching of mathematical disciplines in multinational groups / O. Karupu, T. Oleshko, V. Pakhnenko // Aviation in the XXI-st century. Proceedings of the 8 World Congress (Kyiv, October 12–15, 2018). – K., 2018. – P. 4.3.15–4.3.19. http://conference.nau.edu.ua/index.php/Congress/Congress2018/paper/viewFile/5049/4113

15. Karupu O. Modeling Future Aviation and IT Specialists' Professional Skills Development on Mathematical Practical Training with Application of Information Technologies / O. Karupu, T. Oleshko, V. Pakhnenko // 2021 IEEE 3rd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT) (Kyiv, Ukraine, December 15-16, 2021). – Kyiv. – 2021 – P. 215–220. https://ieeexplore.ieee.org/document/9678904

Пахненко Валерія Валеріївна — канд. техн. наук, доцент кафедри прикладної математики, Національний університет «Київський авіаційний інститут», Київ, e-mail: dooremi@ukr.net

Pakhnenko Valeria V. — Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor of Department of Department of Applied Mathematics,, National University «Kyiv Aviation Institute», Kyiv, email: dooremi@ukr.net

УДК 378.147

О. В. Карупу

ПРО ВИКЛАДАННЯ ДЕЯКИХ РОЗДІЛІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Національний університет «Київський авіаційний інститут», Київ

Анотація *Про викладання деяких розділів математичного аналізу*

Проведено дослідження особливостей викладання деяких розділів математичного аналізу. Запропоновано застосування різних форм колективної роботи під час проведення практичних занять.

Ключові слова: математичний аналіз, викладання математичного аналізу.

Abstract *The study of the peculiarities of teaching some topics of mathematical analysis has been carried out. The use of various forms of collective work in practical classes has been proposed.*

Keywords: mathematical analysis, teaching to mathematical analysis.

Вступ

Для інженерів, економістів та ІТ фахівців математичний аналіз є базовим прикладним інструментом у вивченні спеціальних дисциплін і розв’язуванні прикладних професійних задач за фахом. Тому для студентів усіх технічних, економічних та ІТ спеціальностей є необхідним не тільки засвоєння окремих теоретичних положень математичного аналізу, але й набуття практичних компетенцій в застосуванні теоретичних знань до розв’язування прикладних задач.

Вивчення проблем викладання математичного аналізу проводилось багатьма авторами (більш детально див. [1, 2]).

Метою даної роботи є дослідження особливостей викладання окремих розділів математичного аналізу та надання методичних рекомендацій щодо викладу навчального матеріалу студентам.

Результати дослідження

Дуже важливим для професійного становлення як математиків, так і майбутніх фахівців усіх технічних спеціальностей є знання основних теоретичних засад та володіння (в більшому чи меншому обсязі) навичками застосування математики, зокрема диференціального та інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних. Важливою є також наявність хоча б мінімального обсягу знань з теорії функцій комплексної змінної.

Протягом багатьох років автор проводить дослідження різних аспектів викладання математичних дисциплін, в тому числі дисципліни «Математичний аналіз», як самостійно, так і у складі авторських груп авторами (див. [1] та [3–5]), є автором та співавтором навчальних посібників українською та англійською мовами [7–11].

Слід відмітити, що в НУ «КАІ» навчальні плани за більшістю інженерних напрямів підготовки включають тільки одну математичну дисципліну «Вища математика», в складі якої вивчаються відповідні питання.

Навчальні плани за всіма спеціальностями галузі знань F (12) Інформаційні технології передбачають, як правило, вивчення кількох математичних дисциплін, в тому числі дисципліни «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», «Обчислювальні методи», «Дискретна математика», «Теорія ймовірностей та математична статистика».

Студенти, які навчаються за спеціальністю «Прикладна математика», вивчають повний набір базових математичних дисциплін за своєю спеціалізацією.

До організації навчальної і наукової роботи студентів протягом останніх років впроваджуються елементи компетентнісного та проблемного підходу. Здійснюється поділ академічної групи на декілька команд для спільного розв’язування декількох складних задач, взаємної перевірки засвоєння матеріалу, підготовки презентацій на практичних заняттях з подальшим обговоренням і порівнянням результатів.

Певні позитивні результати дає організація дискусій.

Висновки

Проведено аналіз практики викладання окремих розділів математичного аналізу студентам, що навчаються за технічними та ІТ напрямами в НУ «КАІ». Розглянуто особливості викладання дисципліни і методи організації навчального процесу.

Встановлено, що організація колективної роботи студентів під час проведення практичних занять у поєднанні з проблемним підходом забезпечує відчутне зростання активності студентів та покращення їхньої успішності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Карупу О. В. Про деякі актуальні проблеми викладання студентам КАІ окремих питань математичного аналізу / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Актуальні питання природничо-математичної освіти.–. 2025.– Вип. (1) 25. – С. 37–44.
2. Тарасенкова, Н. А. Особливості викладання курсу математичного аналізу для фахівців з аналізу даних . / Н. А. Тарасенкова, З. О. Сердюк // Вісник Черкаського Університету. Серія: Прикладна математика. Інформатика. .– 2020.– 1.– С. 77–86
3. Карупу О. В. Про деякі особливості викладання математичного аналізу англомовним студентам НАУ. / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – 2015. – № 20 (353) . – С. 26–31.
4. Карупу О. В. Про викладання математичного аналізу студентам технічних спеціальностей НАУ / О. В. Карупу // Математика у технічному університеті XXI сторіччя: збірник наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції (Краматорськ, 15 – 16 травня, 2019 р.). – 2019. – Краматорськ: ДДМА. – С. 99–101.
5. Карупу О. В. Про викладання математичного аналізу студентам технічних спеціальностей в Національному авіаційному університеті / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко // *Сучасна освіта та інтеграційні процеси*: зб.. наук. праць XIII міжнар. наук.-метод. конф. (Краматорськ, 16 – 18 листопада, 2021 р.). –2021. .– Краматорськ: ДДМА.– С. 136–138.
6. Карупу, Олена. Про специфіку викладання математичного аналізу англійською мовою майбутнім ІТ-фахівцям / Олена Карупу // Тези доповідей VII Міжнародної наукової конференції «Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики: до 100-річчя з дня народження Григорія Бевза», 26-27 лютого 2026 р., .Київ, Україна. – К.: УДУ імені Михайла Драгоманова. – 2026. – С. 62–64.
7. Karupu, O.W. Elements of theory of complex variables. / O.W. Karupu // Навчальний посібник. – 2002. K.: НАУ. –68 с.
8. Karupu O. W. Operational calculus. / O. W. Karupu // –2000. – Kyiv: NAU. – 36 p.
9. Спеціальні глави математики: інтегральні і дискретні перетворення та їх застосування з використанням комп'ютерних технологій / Н.Д. Бороденко, О. В. Карупу, А. С. Горюнов, Н. М. Шибицька // Навчальний посібник. – 2013. – К.: НАУ. – 240 с.
10. Mathematical analysis: Manual / V.P. Denisiuk, V.G. Demydko., O.V. Karupu, T.A. Oleshko, V.V. Pakhnenko, V.K. Repeta // Навчальний посібник. – 2013. – Kyiv: NAU.– 396 p
11. Карупу О. В. Англійська мова в математичній практиці: навчальний посібник. / О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко, В.К. Репета // Навч. посібник. К.: КАІ, 2025. – 240 с.

Карупу Олена Вальтерівна — канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики, Національний університет «Київський авіаційний інститут», Київ, e-mail: karupu@ukr.net

Karupu Olena W. — Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor of Department of Department of Applied Mathematics, National University «Kyiv Aviation Institute», Kyiv, email: karupu@ukr.net

УДК 378.147:519.233.2

Коломієць А.
Косарук О.

МЕТОДОЛОГІЯ ТА ПСИХОЛОГІЯ НАВЧАННЯ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ РЕГРЕСІЙНОГО АНАЛІЗУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У тезах розкрито теоретико-методологічні та психологічні засади розроблення інноваційної освітньої технології формування в студентів економічних спеціальностей компетентностей застосування регресійного аналізу. Обґрунтовано п'ятиетапну технологію навчання, яка відтворює логіку реального аналітичного процесу та забезпечує перехід навчальної діяльності від репродуктивної до аналітичної. Визначено психологічні критерії диференціації рівнів сформованості компетентності та окреслено перспективи інтеграції сучасних інформаційно-аналітичних середовищ в освітній процес.

Ключові слова: регресійний аналіз, інноваційна освітня технологія, компетентнісний підхід, психологія навчання, інформаційно-аналітичні середовища.

Abstract

The abstracts present the theoretical, methodological, and psychological foundations for designing an innovative educational technology for developing regression analysis competencies among economics students. A five-stage teaching technology is substantiated, reflecting the logic of authentic analytical practice and transforming students' learning activity from reproductive to analytical. Psychological criteria for differentiating levels of competency attainment are identified, and prospects for integrating modern information-analytical environments into the educational process are outlined.

Keywords: regression analysis, innovative educational technology, competency-based approach, learning psychology, information-analytical environments.

Постановка проблеми

У вітчизняних дослідженнях констатується наявність розриву між теоретичним рівнем підготовки майбутніх економістів і запитами ринку праці щодо застосування кількісного аналізу [1], що зумовлює потребу в посиленні практико-орієнтованої складової статистичних дисциплін засобами сучасних інформаційно-аналітичних технологій [2]. Водночас університетська практика часто обмежується формуванням технічних навичок обчислення параметрів моделей за репродуктивними алгоритмами, залишаючи поза увагою психологічні механізми формування аналітичного мислення [3]. Розрив між інструментальним опануванням технологій аналізу даних і здатністю до їхнього осмисленого застосування в управлінських рішеннях зумовлює потребу в теоретико-методологічному та психологічному обґрунтуванні інноваційної технології навчання регресійного аналізу.

Мета даної публікації

Теоретично обґрунтувати психолого-методологічні засади інноваційної освітньої технології поетапного формування в студентів економічних спеціальностей компетентностей застосування регресійного аналізу з використанням сучасних інформаційно-аналітичних засобів.

Виклад основного матеріалу

Методологічною основою інноваційної технології є компетентнісний підхід, який орієнтує освітній процес не на відтворення обчислювальних процедур, а на здатність їх осмисленого застосування в реальних аналітичних ситуаціях [4]. Регресійний аналіз інтегрує три рівні підготовки – математичний (метод найменших квадратів, матричне подання моделей), статистичний (оцінювання параметрів, перевірка гіпотез, діагностика залишків) та прикладний (інтерпретація коефіцієнтів, визначення меж застосовності моделі), що передбачає вибудовування навчання як наскрізного, предметно орієнтованого процесу [5]. Аналіз освітньо-професійної програми «Економіка» Вінницького національного технічного університету засвідчує, що відповідні компетентності (СК6, СК9, РН12) розподілені між кількома дисциплінами, що зумовлює потребу в їх методологічній інтеграції засобами єдиної освітньої технології [6].

Запропонована п’ятиетапна технологія навчання відтворює логіку реального аналітичного процесу: постановка задачі та формулювання гіпотези; первинний аналіз і опис даних; побудова моделі та інтерпретація результатів оцінювання; аналіз залишків і перевірка передумов методу найменших квадратів; економічна інтерпретація та формулювання управлінських висновків (табл. 1). Принциповою методологічною умовою кожного етапу є орієнтація на постановку змістовного дослідницького питання замість відтворення формалізованого алгоритму, що узгоджується з доведеною ефективністю когнітивно орієнтованого підходу, за якого засвоєння вибудовується навколо формулювання та перевірки гіпотез [7]. Дидактичний потенціал технології підвищується за умови інтеграції інформаційно-аналітичних середовищ: поєднання розрахунків за аналітичними формулами з використанням спеціалізованого статистичного програмного забезпечення запобігає сприйняттю моделі як «чорної скриньки», а перспективна інтеграція середовищ Python та Power BI розширює дидактичний потенціал технології відповідно до вимог сучасного ринку праці.

Таблиця 1 – Етапи інноваційної технології формування компетентностей регресійного аналізу

№	Назва етапу	Дидактична сутність
1	Постановка задачі та формулювання гіпотези	Переорієнтація з формалізованих процедур на змістовний аналіз економічної ситуації; формулювання гіпотези до початку розрахунків
2	Первинний аналіз і опис даних	Описові характеристики змінних, точкові діаграми, виявлення викидів засобами електронних таблиць; формування чутливості до масштабу даних
3	Побудова моделі та інтерпретація результатів оцінювання	Оцінювання параметрів аналітичним і програмним способами; інтерпретація коефіцієнтів, t-, F-статистик, R^2 як цілісного аналітичного тексту
4	Аналіз залишків і перевірка передумов МНК	Графічна діагностика; тести Дарбіна–Вотсона, Бройша–Пагана, показник VIF; уточнення специфікації моделі
5	Економічна інтерпретація та управлінські висновки	Переклад параметрів моделі в економічні терміни; аналітичний звіт; обґрунтована рекомендація з урахуванням меж застосовності

Психологічним підґрунтям диференціації результатів навчання є трирівнева модель сформованості компетентності, що дозволяє розмежувати рівень знання методу та рівень його усвідомленого застосування в нових ситуаціях [3]. Базовий (репродуктивний) рівень передбачає відтворення процедур за зразком у знайомій ситуації; достатній (продуктивний) – самостійне застосування методу в частково нових умовах; високий (творчий) – аналітичну діяльність у нестандартних ситуаціях із формулюванням обґрунтованих управлінських висновків. Така диференціація узгоджується з психологічними закономірностями формування статистичного мислення як автономного результату навчання, що не зводиться до опанування обчислювальних процедур [4].

Висновки

Запропонована інноваційна освітня технологія формування компетентностей регресійного аналізу ґрунтується на психолого-методологічній інтеграції математичного, статистичного та прикладного рівнів підготовки і забезпечує перехід навчальної діяльності здобувачів від репродуктивної до аналітичної [8]. Диференціація рівнів сформованості компетентності (репродуктивного, продуктивного, творчого) дозволяє розмежувати знання методу та здатність до його усвідомленого застосування в нових ситуаціях. Перспективним напрямом подальших досліджень є вивчення дидактичного потенціалу інтеграції сучасних інформаційно-аналітичних середовищ, зокрема Python та Power BI, в освітній процес підготовки економістів, що сприятиме поєднанню теоретичної підготовки з практичними навичками роботи з реальними даними.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лукіна Т. О. Математична підготовка майбутніх фахівців з економіки: компетентнісний вимір. Педагогічні науки. 2022. № 94. С. 41–48.
2. Бабій Н. Б., Ткаченко С. В. Особливості викладання статистичних методів у підготовці менеджерів. Проблеми освіти. 2023. № 100. С. 78–89.
3. Шаров О. І. Методика навчання кількісних дисциплін у вищій школі: проблеми і перспективи. Збірник наукових праць КПНУ імені Івана Огієнка. 2021. № 28. С. 215–229.

4. Garfield J., Ben-Zvi D. Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice. Springer, 2008.
5. Cobb P., McClain K. Principles of instructional design for supporting the development of students' statistical reasoning. The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking / ed. by D. Ben-Zvi, J. Garfield. Springer, 2004. P. 375–395.
6. Вінницький національний технічний університет. Освітньо-професійна програма «Економіка» першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. 2025. URL: https://iq.vntu.edu.ua/edu_progs/v.php?id=1825 (дата звернення: 22.06.2026).
7. Lovett M., Greenhouse J. Applying cognitive theory to statistics instruction. The American Statistician. 2000. Vol. 54, No. 3. P. 196–206.
8. О. Косарук, О. Сметанюк, і А. Коломієць, «Методика формування в студентів економічних спеціальностей компетентностей застосування регресійного аналізу», ПедБез, вип. 11, вип. 1, с. 117–124, Квіт 2026. URL https://pedbezpeka.vntu.edu.ua/index.php/pb/article/view/233/176

Коломієць Альона – д-р пед. наук, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: kolomiets@vntu.edu.ua.

Косарук Олена – канд. пед. наук, доцент кафедри менеджменту, маркетингу та економіки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: lena.kosaruk@vntu.edu.ua.

Alona Kolomiiets – Doctor of Sc. (Pedagogical), Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: kolomiets@vntu.edu.ua.

Olena Kosaruk – Candidate of Sc. (Pedagogical), Associate Professor of the Department of Management, Marketing and Economics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: lena.kosaruk@vntu.edu.ua.

УДК 004.85: 004.942

А. М. Дудар
Є. М. Крижановський

ВИКОРИСТАННЯ МАШИННОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ЯКОСТІ АТМОСФЕРНОГО ПОВІТРЯ МІСТА ВІННИЦІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Дану роботу присвячено розробці інтелектуальної системи прогнозування концентрації дрібнодисперсного пилу PM2.5 атмосферного повітря міста Вінниці з використанням ансамблевих методів машинного навчання. В рамках дослідження сформовано автоматизований ETL-пайплайн для збору та передобробки даних, здійснено розвідувальний аналіз часових рядів, побудовано та навчено ансамбль моделей градієнтного бустингу (LightGBM, XGBoost, CatBoost) із байєсівською оптимізацією гіперпараметрів. Найкраща модель LightGBM досягла коефіцієнта детермінації $R^2 = 0.90$ на горизонті $t+1$ та $R^2 = 0.45$ на горизонті $t+24$, що підтверджує ефективність запропонованого підходу.

Ключові слова: машинне навчання, PM2.5, градієнтний бустинг, передобробка даних, часові ряди, прогнозування якості повітря.

Abstract

This paper presents an intelligent system for forecasting PM2.5 fine particulate matter concentration in the atmospheric air of Vinnytsia city using ensemble machine learning methods. The study encompasses the development of an automated ETL pipeline for data collection and preprocessing, exploratory time series analysis, and training of a gradient boosting ensemble (LightGBM, XGBoost, CatBoost) with Bayesian hyperparameter optimization. The best-performing LightGBM model achieved $R^2 = 0.90$ at the $t+1$ forecast horizon and $R^2 = 0.45$ at $t+24$, confirming the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: machine learning, PM2.5, gradient boosting, data preprocessing, time series, air quality forecasting.

Вступ

Забруднення атмосферного повітря дрібнодисперсним пилом PM2.5 є однією з найгостріших екологічних проблем сучасності, що безпосередньо впливає на здоров'я населення та якість міського середовища [1]. Традиційні статистичні методи прогнозування часових рядів — зокрема авторегресійні моделі SARIMAX — є недостатньо ефективними в умовах складних нелінійних залежностей між метеорологічними факторами та концентрацією забруднювача. Тому актуальним є застосування ансамблевих методів машинного навчання, зокрема градієнтного бустингу, що здатні автоматично виявляти приховані просторово-часові закономірності у великих масивах екологічних даних [2].

Підготовка даних

Вхідними даними системи є часові ряди вимірювань станції моніторингу атмосферного повітря Вінницького національного технічного університету за 2022–2026 роки, що налічують 41 723 погодинних спостереження. Збір даних реалізовано через автоматизований ETL-пайплайн з використанням бібліотек BeautifulSoup та requests для вилучення CSV-ресурсів з відкритого порталу моніторингу Вінницької міської ради. Зібрані дані зберігаються у базі даних MySQL, спроектованій за схемою «Зірка», що забезпечує швидке виконання OLAP-запитів над понад 7 млн записів.

Ключовою особливістю набору даних є значна часова фрагментарність: попри загальний горизонт у 1 237 днів, валідні спостереження зафіксовано лише для 633 діб, що формує рівень денного покриття 51.2%. Теплова карта повноти даних (рис. 1) наочно демонструє хаотичне чергування активних і «мовчазних» сегментів моніторингу протягом 2022–2026 років без чітко вираженої регулярності.

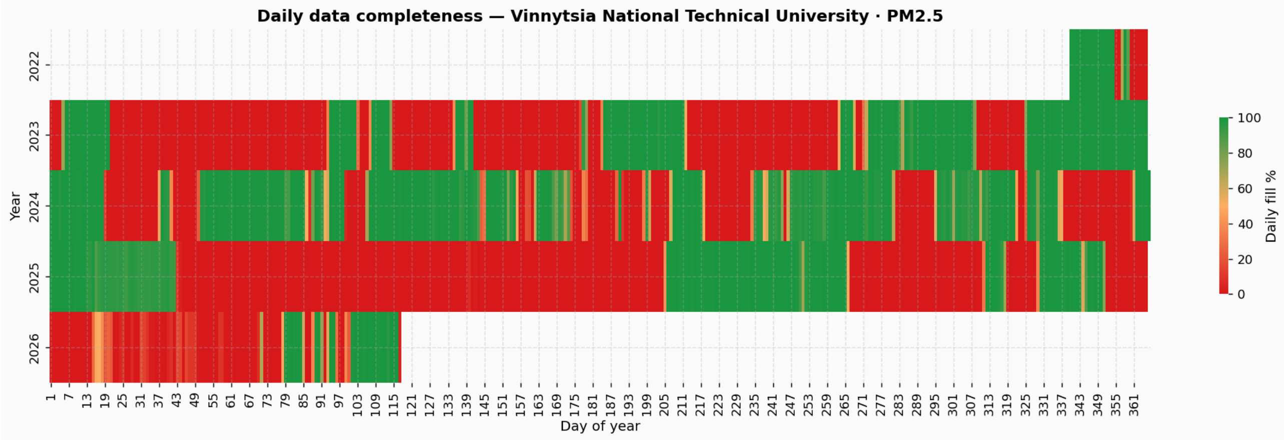


Рис. 1. Теплова карта повноти даних PM2.5 на станції ВНТУ (2022–2026)

Така критична фрагментарність унеможливлює застосування класичних моделей SARIMAX, що вимагають суворої безперервності часового ряду для коректного оцінювання авторегресійних та сезонних компонент. Натомість методи градієнтного бустингу природно стійкі до нерегулярних пропусків, оскільки оперують вектором ознак окремого спостереження, а не цілісною послідовністю. Тому вибір бустингових ансамблів є статистично обґрунтованим рішенням для даного набору даних [2, 3].

Передобробка включає: фізичну верифікацію значень та чотирирівневу корекцію аномалій (лінійна інтерполяція в часовому вікні ±6 годин, метод найближчого сусіда, медіана за 30 діб, глобальна крос-станційна медіана); дискретизацію часової сітки з кроком 1 година; тригонометричне кодування циклічних дескрипторів (година, день тижня, місяць). Простір ознак розширено авторегресійними лагами PM2.5 (1–72 год), ковзними статистиками у вікнах 3–48 год, експоненційно зваженими середніми та просторовими показниками крос-кореляції між станціями. Для запобігання витоку інформації всі динамічні ознаки обчислювались зі зміщенням [3, 4].

Імплементація моделей машинного навчання

Задача реалізована як пряме багатоступеневе прогнозування (Direct Multi-Step Forecasting): для кожного з 24 часових горизонтів навчається окрема незалежна модель, що мінімізує накопичення помилок, властиве рекурсивним підходам. Весь хронологічно впорядкований масив розділено на тренувальну (80%) та тестову (20%) вибірки без перемішування, що гарантує відсутність витоку майбутніх значень у навчання. Якість кожної моделі додатково контролювалась часовою крос-валідацією з п'ятьма фолдами (TimeSeriesSplit), де кожен наступний фолд містить більш пізні спостереження, ніж попередній.

В системі реалізовано конвеєр із трьох базових алгоритмів градієнтного бустингу та одного мета-алгоритму стекінгу. LightGBM застосовує гістограмний метод апроксимації розподілу ознак та стратегію росту дерева по листках (leaf-wise), що забезпечує швидке навчання при великому числі ознак і є основним алгоритмом з індивідуальним автоналаштуванням для кожного горизонту. XGBoost будує дерева по рівнях (level-wise) з вбудованою L1- та L2-регуляризацією, що обмежує перенавчання і забезпечує кращу узагальнюючу здатність на середніх горизонтах. CatBoost використовує симетричні дерева та власний механізм Ordered Target Statistics для обробки категоріальних ознак (час доби, місяць, сегмент) без попереднього one-hot кодування, що зменшує зсув градієнта і підвищує стабільність на середньострокових прогнозах [4, 5].

Фінальний рівень стекінгу поєднує прогнози трьох базових моделей для кожного горизонту у мета-ознаки, на яких навчається Ridge-регресія з L2-регуляризацією ($\alpha = 1.0$). Мета-модель навчається виключно на out-of-fold прогнозах базових алгоритмів, отриманих під час крос-валідації, що запобігає перенавчанню стекінгу. Такий дворівневий ансамбль дозволяє згладити систематичні відхилення окремих алгоритмів та підвищити стабільність прогнозу в перехідних зонах концентрацій.

Центральним елементом імплементації є автоматичний підбір гіперпараметрів засобами фреймворку Optuna. Байєсівська оптимізація на основі алгоритму TPE (Tree-structured Parzen Estimator) будує імовірнісну сурогатну модель простору параметрів і за 50 ітерацій знаходить конфігурацію з мінімальною MSE на крос-валідаційній вибірці. Пошук проводиться індивідуально для кожного з 24 горизонтів у просторі: кількість листків (num_leaves: 20–300), швидкість навчання (learning_rate: 0.01–

0.15), частка ознак (feature_fraction: 0.4–1.0), мінімальна кількість зразків у листку (min_child_samples: 5–100) та коефіцієнти регуляризації (λ_1, λ_2: 1e-8–10.0). Завдяки такій спеціалізації моделі для коротких горизонтів отримують більш глибоку структуру дерев для вловлювання миттєвих змін, тоді як моделі для далеких горизонтів тяжіють до більшої регуляризації для узагальнення добових трендів [5].

Навчені структури дерев, коефіцієнти мета-моделі та параметри нормування зберігаються у спеціалізованих форматах (.joblib для LightGBM та XGBoost, .cbm для CatBoost, .json для метаданих) у локальному репозиторії ./saved_models/. Це забезпечує миттєве розгортання системи в продуктивному середовищі без повторного навчання та можливість інкрементального оновлення окремих горизонтів при надходженні нових даних моніторингу.

Результати дослідження

Комплексна евалюація ансамблю проведена за метриками R^2, RMSE та MAPE на тестовій вибірці для всіх 24 горизонтів прогнозування (рис. 2). LightGBM з байєсівською оптимізацією є беззаперечним лідером: $R^2 = 0.90$ при t+1 та $R^2 = 0.45$ при t+24 — найкращий результат серед усіх моделей у довгостроковій перспективі. CatBoost демонструє $R^2 = 0.86$ при t+1 та найбільш рівномірну деградацію, залишаючись оптимальним для середньострокового прогнозування (6–18 год). XGBoost фіксує $R^2 = 0.73$ при t+1 та відносну стійкість у зоні t+5–t+8 завдяки вбудованій регуляризації [4, 5].

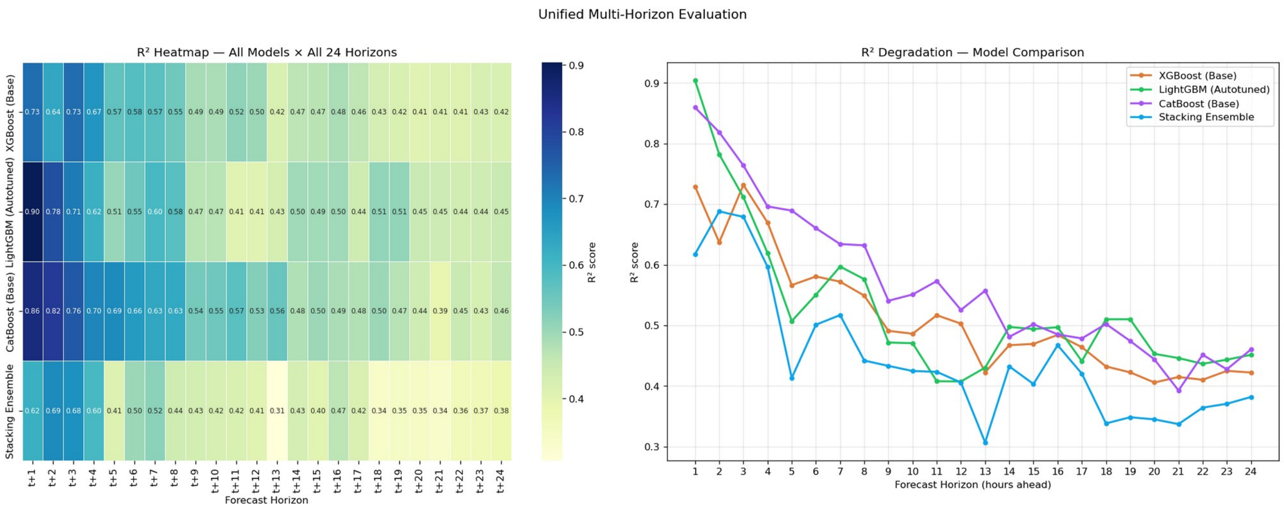


Рис. 2. Зведена мультигоризонтна оцінка: теплова карта R^2 та графік деградації точності моделей

Аналіз важливості ознак виявив тристадійну структуру прогнозування: на коротких горизонтах (t+1 –t+4, MAPE 5.3–9.4%) домінує авторегресійний режим із ключовою роллю pm25_lag1; на середніх (t+5 –t+12, MAPE 10.4–14.2%) зростає вплив метеопараметрів та ковзних середніх; на довгих (t+13–t+24, MAPE 14.1–16.2%) модель переходить до кліматологічно-просторового режиму з домінуванням сезонних ознак (dayofyear, month_sin) та просторових концентрацій сусідніх станцій. Така структура відображає багатомасштабну природу динаміки PM2.5 і свідчить про коректне засвоєння моделлю фізичних закономірностей атмосферних процесів.

Висновки

У результаті дослідження розроблено та програмно реалізовано систему багатокрокового прогнозування концентрації PM2.5 на основі ансамблю алгоритмів градієнтного бустингу. Застосування SARIMAX є статистично некоректним для даного набору через критичну фрагментарність часових рядів (48.8% пропущених діб), тоді як бустингові методи природно стійкі до нерегулярних пропусків. Запропонований підхід до передобробки та інжинірингу ознак у поєднанні з дворівневою архітектурою стекінгу та байєсівською оптимізацією гіперпараметрів забезпечив $R^2 = 0.90$ при короткостроковому та $R^2 = 0.45$ при добовому прогнозуванні. Практична цінність системи полягає у можливості інтеграції до міських інформаційно-аналітичних платформ для оперативного управління якістю повітря та своєчасного попередження населення про небезпечні рівні забруднення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шмундяк Д. О., Мокін В. Б., Крижановський Є. М. Системний аналіз стану атмосферного повітря регіону, з урахуванням впливу аномалій : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2025. 169 с.
2. Ахмадіанфар І. та ін. Towards intelligent air quality forecasting using integrated machine learning framework with variational mode decomposition and catboost feature selection. Scientific Reports. 2026. DOI: 10.1038/s41598-025-33785-y.
3. Мокін В. Б., Дратований М. В. Наука про дані: машинне навчання та інтелектуальний аналіз даних. Навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2024. С. 89–128.
4. Джеймс Г., Віттен Д., Хасті Т., Тібширані Р. Деревоподібні методи. An Introduction to Statistical Learning. Springer, Cham, 2023. P. 331–342. DOI: 10.1007/978-3-031-38747-0_8.
5. Сібінді Р., Мвангі Р. В., Вайтіту А. Г. A boosting ensemble learning based hybrid light gradient boosting machine and extreme gradient boosting model for predicting house prices. Engineering Reports. 2023. Vol. 5, Iss. 4. DOI: 10.1002/eng2.12599.

Дудар Анатолій Михайлович *– студент групи СА-22б, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: gigsollt@gmail.com*

Крижановський Євгеній Миколайович *– к.т.н., доцент кафедри системного аналізу та інформаційних технологій, Вінницький національний технічний університет, Вінниця.*

Dudar Anatolii M. *– student of Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, SA-22b, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: gigsollt@gmail.com*

Kryzhanovsky Yevhenii M. *– Ph.D., Assistant Professor of the Department of System Analysis and Information Technologies, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.*

УДК 004.42:519.6

В. В. Химич
О. І. Тютюнник

АВТОМАТИЗАЦІЯ СИСТЕМИ АНАЛІТИЧНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ТА НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У роботі розглядається задача розробки та програмної реалізації застосунку для символьного (аналітичного) та чисельного обчислення математичних виразів, зокрема визначених та невизначених інтегралів. Об'єктом дослідження є алгоритми комп'ютерної алгебри та методи побудови графічних інтерфейсів користувача (GUI). У ході роботи розроблено програмне забезпечення мовою Python із використанням бібліотек Tkinter для візуалізації та SymPy для математичного ядра. Проведено тестування системи на різних класах функцій (поліноміальні, тригонометричні, логарифмічні), а також реалізовано алгоритм автоматичного переходу до чисельного інтегрування для функцій, що не мають первісної в елементарних функціях (наприклад, інтеграли Френеля). Результати підтверджують високу точність обчислень та ергономічність розробленого візуального редактора формул.
Ключові слова: комп'ютерна алгебра, інтегрування, графічний інтерфейс, Tkinter, SymPy, символьні обчислення, Python.

Abstract
This paper addresses the problem of developing and implementing an application for symbolic (analytical) and numerical computation of mathematical expressions, specifically definite and indefinite integrals. The object of the study is computer algebra algorithms and methods for building graphical user interfaces (GUI). During the work, software was developed in Python using the Tkinter library for visualization and SymPy for the mathematical core. The system was tested on various classes of functions (polynomial, trigonometric, logarithmic), and an algorithm for automatic transition to numerical integration for functions without elementary antiderivatives (e.g., Fresnel integrals) was implemented. The results confirm the high accuracy of the calculations and the ergonomics of the developed visual formula editor.
Keywords: computer algebra, integration, graphical interface, Tkinter, SymPy, symbolic computations, Python.

Вступ

Розвиток систем комп'ютерної алгебри значно спростив процес розв'язання складних математичних задач в інженерній та науковій практиці. Символьне інтегрування є однією з базових і водночас найбільш ресурсоємних задач математичного аналізу. Більшість існуючих потужних математичних пакетів є або комерційними продуктами з високим порогом входження, або вимагають постійного підключення до мережі Інтернет [1,2].

Дана робота присвячена розробці локального, незалежного від інтернет-з'єднання програмного засобу для аналітичного обчислення інтегралів. Основна увага приділяється не лише інтеграції потужного математичного ядра SymPy для точних символьних обчислень, але й створенню інтуїтивно зрозумілого графічного візуального редактора мовою Python (Tkinter) [4,5]. Запропонований редактор дозволяє користувачу конструювати математичні вирази (дроби, корені, межі інтегрування) за допомогою спеціалізованих віджетів, що мінімізує синтаксичні помилки вводу. Комплексний підхід до обробки даних включає попередній парсинг візуальних структур у машинозрозумілий формат, застосування регулярних виразів для усунення неоднозначностей (наприклад, неявного множення) та автоматичний перехід до методів наближеного обчислення у випадках відсутності аналітичного розв'язку.

Результати досліджень

Оскільки розроблений програмний комплекс має розгалужену архітектуру, для детального розгляду виділено три ключові модулі, що забезпечують його функціонування: підсистему візуального вводу (система «слотів»), модульну структуру математичних виразів та ядро символьних обчислень.

1. Розробка підсистеми візуального вводу (клас Slot). Для усунення проблеми синтаксичних помилок, які часто виникають при класичному рядковому введенні формул, було розроблено концепцію «візуального слота». Слот – це інтерактивний елемент на базі Tkinter.Canvas, який динамічно адаптується під введений текст.

```
class Slot(tk.Canvas):
  def __init__(self, parent, min_chars=3, font=None, on_change=None, small=False):
    # Ініціалізація розмірів та шрифтів
    char_w = 11 if small else 14
    h = 28 if small else 36
    w = max(min_chars * char_w + 12, 36)
    super().__init__(parent, width=w, height=h, bg=SLOT_BG, bd=0)
    self._var = tk.StringVar()
    self._var.trace_add("write", self._on_text_change)
    self._entry = tk.Entry(self, textvariable=self._var, font=self._font)
    # ... налаштування фокусу та клавіатурної навігації
```

Клас інкапсулює стандартний віджет tk.Entry всередині полотна. Завдяки методу _on_text_change(), який відслідковує зміну змінної _var, ширина слота автоматично перераховується залежно від кількості введених символів. Крім того, реалізовано внутрішній реєстр слотів (_registry) для безшовного переміщення курсору між різними частинами формули за допомогою клавіатурних стрілок.

2. Архітектура візуального математичного блоку інтеграла. Математичний вираз у програмі будується з незалежних блоків (дроби, корені, степені). Найскладнішим елементом є блок інтеграла (IntegralBlock), який агрегує чотири окремі слоти: верхню межу, нижню межу, підінтегральний вираз та диференціал змінної.

```
class IntegralBlock(tk.Frame):
  def __init__(self, parent, chg):
    super().__init__(parent, bg=BG)
    # Створення слотів для меж інтегрування
    self.upper = Slot(lim_col, min_chars=3, small=True, on_change=chg)
    self.lower = Slot(lim_col, min_chars=3, small=True, on_change=chg)
    # Слот для підінтегральної функції
    self.integrand = Slot(mid, min_chars=6, on_change=chg)
    # Слот для змінної інтегрування (наприклад, dx)
    self.var = Slot(d_col, min_chars=1, on_change=chg)
  def to_sympy_str(self):
    lo, hi = self.lower.get().strip(), self.upper.get().strip()
    ig    = self.integrand.get().strip()
    v     = self.var.get().strip() or "x"
    return lo, hi, ig, v
```

Цей клас не лише відповідає за правильне геометричне позиціонування елементів (знак інтеграла ∫, межі над і під ним), але й виконує функцію збору даних. Метод to_sympy_str() витягує рядкові значення з усіх чотирьох слотів і передає їх математичному ядру для подальшого парсингу.

3. Ядро аналітичних та чисельних обчислень. Основою обчислювальної системи є функція compute_integral, яка є своєрідним "мостом" між візуальним інтерфейсом Tkinter та математичним рушієм SymPy.

```
def compute_integral(line):
  # ... отримання даних з блоку інтеграла (lo, hi, ig, v)
```

```
try:
    def clean(s):
        if not s: return ""
        # Санітизація візуальних символів у машинозрозумілий код
        return s.replace("·", "*").replace("–", "-").replace("^", "**").replace("π", "pi").replace("∞", "oo").replace("√", "sqrt")
    # Парсинг змінної та виразу у формат AST (Abstract Syntax Tree)
    sym = sympy.Symbol(clean(v) or "x")
    expr = sympy.sympify(clean(ig), locals={str(sym): sym, "pi": sympy.pi, "e": sympy.E, "oo": sympy.oo, "sqrt": sympy.sqrt})
    # Обчислення (Визначений або Невизначений інтеграл)
    if lo and hi:
        lo_v = sympy.sympify(clean(lo), locals={"pi": sympy.pi, "e": sympy.E, "oo": sympy.oo})
        hi_v = sympy.sympify(clean(hi), locals={"pi": sympy.pi, "e": sympy.E, "oo": sympy.oo})
        result = sympy.integrate(expr, (sym, lo_v, hi_v))
    else:
        result = sympy.integrate(expr, sym)
    # Автоматичний перехід до чисельного наближення для нерозв'язних інтегралів
    if hasattr(result, 'has'):
        if result.has(sympy.Integral) or 'fresnel' in str(result).lower():
            result = result.evalf(6)
            simp_res = sympy.expand(sympy.simplify(result))
# ... форматування результату для виводу
```

Робота ядра поділяється на кілька етапів. Перший етап – лексичний аналіз (функція clean), який замінює візуально красиві символи (наприклад, "·" або "√") на оператори, зрозумілі Python ("*" та "sqrt"). Другий етап – побудова математичної моделі за допомогою sympy.sympify(), що перетворює рядок тексту на абстрактне синтаксичне дерево. Третій етап – безпосередньо інтегрування за допомогою sympy.integrate(). Важливою особливістю розробленого алгоритму є наявність перевірки результату: якщо аналітичний розв'язок відсутній (наприклад, з'являються інтеграли Френеля), система автоматично викликає метод evalf(6), переходячи від символьного до чисельного інтегрування з точністю до шести знаків після коми.

Висновки

У роботі спроєктовано та програмно реалізовано автоматизований комплекс для аналітичного та чисельного обчислення математичних інтегралів мовою Python. Важливим досягненням стала розробка ергономічного графічного інтерфейсу на базі підходу «візуального конструктора», де використання окремих слотів для введення виразів і меж інтегрування разом із механізмом інтелектуального парсингу мінімізувало ймовірність синтаксичних помилок та наблизило взаємодію з програмою до класичного математичного запису. Інтеграція математичного ядра SymPy забезпечила високу точність символьних перетворень для різних класів функцій, а завдяки функції ідентифікації інтегралів, що не мають розв'язку в елементарних функціях, система здатна автоматично переходити до методів чисельного наближення. Створений продукт продемонстрував стабільність роботи та алгоритмічну гнучкість, що дозволяє ефективно використовувати його як допоміжний електронний інструментарій у навчальному процесі для самоперевірки студентів та дослідження складних інтегральних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Крак Ю. В. «Алгоритми комп'ютерної алгебри та їх застосування»: навчальний посібник. — Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2022.
2. Дзюба Т. А. «Чисельні методи та алгоритми комп'ютерної математики»: практикум. — Харків: ХНУРЕ, 2021.

3. Meurer A., Smith C. P., Paprocki M. et al. SymPy: symbolic computing in Python // PeerJ Computer Science. — 2017. — Vol. 3. — P. e103.
4. Трофименко О. Г., Прокоп Ю. В., Логінова Н. І. Програмування мовою Python: навчальний посібник. — Одеса: Фенікс, 2021. — 272 с.
5. Tkinter — Python interface to Tcl/Tk [Електронний ресурс]. — Режим доступу: https://docs.python.org/3/library/tkinter.html.

Химич Вячеслав Вадимович **–** студент групи 2 БС – 25б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: 04-25-002.stud@vntu.edu.ua

Тютюнник Оксана Іванівна – доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: tyutyunnik@vntu.edu.ua

Chymych Viacheslav V. **–** student of Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: 04-25-002.stud@vntu.edu.ua

Tiutiunnyk Oksana I. – Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: tyutyunnik@vntu.edu.ua

УДК 510.863(043.2)

А. В. Крупський
О. І. Тютюнник

ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНОГО ЛОГАРИФМА З ВИКОРИСТАННЯМ АЛГОРИТМУ BABY-STEP GIANT-STEP У PAYTON

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У роботі досліджено ефективність алгоритмів brute-force та baby-step giant-step для розв'язання задачі дискретного логарифмування. Реалізацію виконано мовою Python. Експериментально підтверджено істотну перевагу алгоритму Шенкса за часом виконання для великих модулів.
Ключові слова: *дискретний логарифм, алгоритм Шенкса, Python, криптографія, baby-step giant-step.*

Abstract
The paper investigates the effectiveness of the brute-force and baby-step giant-step algorithms for solving the discrete logarithm problem. The implementation is done in Python. The significant advantage of Shanks' algorithm in terms of execution time for large modules is experimentally confirmed.
Keywords: *discrete logarithm, Shanks' algorithm, Python, cryptography, baby-step giant-step.*

Вступ

У сучасному цифровому суспільстві питання захисту інформації набуває особливої актуальності. Передача конфіденційних даних через глобальні мережі, використання електронного підпису, онлайн-банкінгу, хмарних сервісів та мобільних застосунків потребують надійних криптографічних механізмів захисту. Значна частина сучасних асиметричних криптосистем базується на математичних задачах, що є обчислювально складними для розв'язання за класичних умов.

Саме складність знаходження невідомого показника лежить в основі стійкості протоколу обміну ключами Діффі-Геллмана, криптосистеми Ель-Гамаля та ряду алгоритмів на еліптичних кривих [1].

Класичний підхід повного перебору має надзвичайно високу обчислювальну складність, що робить його практично непридатним для великих параметрів. Тому особливого значення набувають оптимізовані алгоритми, серед яких важливе місце займає алгоритм baby-step giant-step (алгоритм Шенкса), що дозволяє суттєво скоротити кількість операцій пошуку.

Сучасні мови програмування високого рівня, зокрема Python, забезпечують ефективні засоби реалізації математичних алгоритмів завдяки підтримці довгої арифметики, роботі з хеш-таблицями та простоті програмної реалізації. Це робить Python зручним інструментом для дослідження криптографічних алгоритмів у навчальних і прикладних задачах [3,4].

Метою роботи є порівняльний аналіз алгоритмів brute-force та baby-step giant-step для розв'язання задачі дискретного логарифмування засобами Python, а також експериментальна оцінка їх продуктивності.

Результати дослідження

Задача дискретного логарифмування належить до класу обчислювально складних задач теорії чисел і широко використовується у сучасній криптографії. Її суть полягає у знаходженні невідомого показника степеня x, який задовольняє співвідношення:

$$g^x \equiv h (\mathrm{mod} p),$$

де g— породжувальний елемент мультиплікативної групи, h— відоме значення, p— просте число, а x— шуканий дискретний логарифм.

Класичним способом розв'язання цієї задачі є метод повного перебору, що передбачає послідовну перевірку всіх можливих значень показника x. Такий підхід є простим у реалізації, однак при великих значеннях параметра pвимагає значних часових витрат. Обчислювальна складність повного перебору становить:

$$O(p),$$

що робить його практично неефективним для сучасних криптографічних застосувань.

Альтернативним підходом є алгоритм *baby-step giant-step* (алгоритм Шенкса), який використовує принцип «зустрічі посередині». Його основна ідея полягає у поданні шуканого показника у вигляді:

$$x = im + j,$$

де $m \approx \sqrt{p}$, i та j— цілі невід'ємні числа.

Такий підхід дозволяє розбити задачу на два етапи: попереднє формування таблиці значень «малих кроків» та подальший пошук відповідностей серед «гігантських кроків». У результаті кількість необхідних перевірок значно зменшується, а часову складність алгоритму можна оцінити як:

$$O(\sqrt{p}).$$

Для кращого розуміння математичної сутності та програмної реалізації алгоритму *baby-step giant-step* доцільно розглянути його структурну схему. Візуальне представлення основних етапів роботи алгоритму дозволяє простежити логіку пошуку дискретного логарифма та принцип скорочення кількості обчислень. На рис. 1 наведено покрокову схему функціонування методу Шенкса для розв'язання задачі дискретного логарифмування.

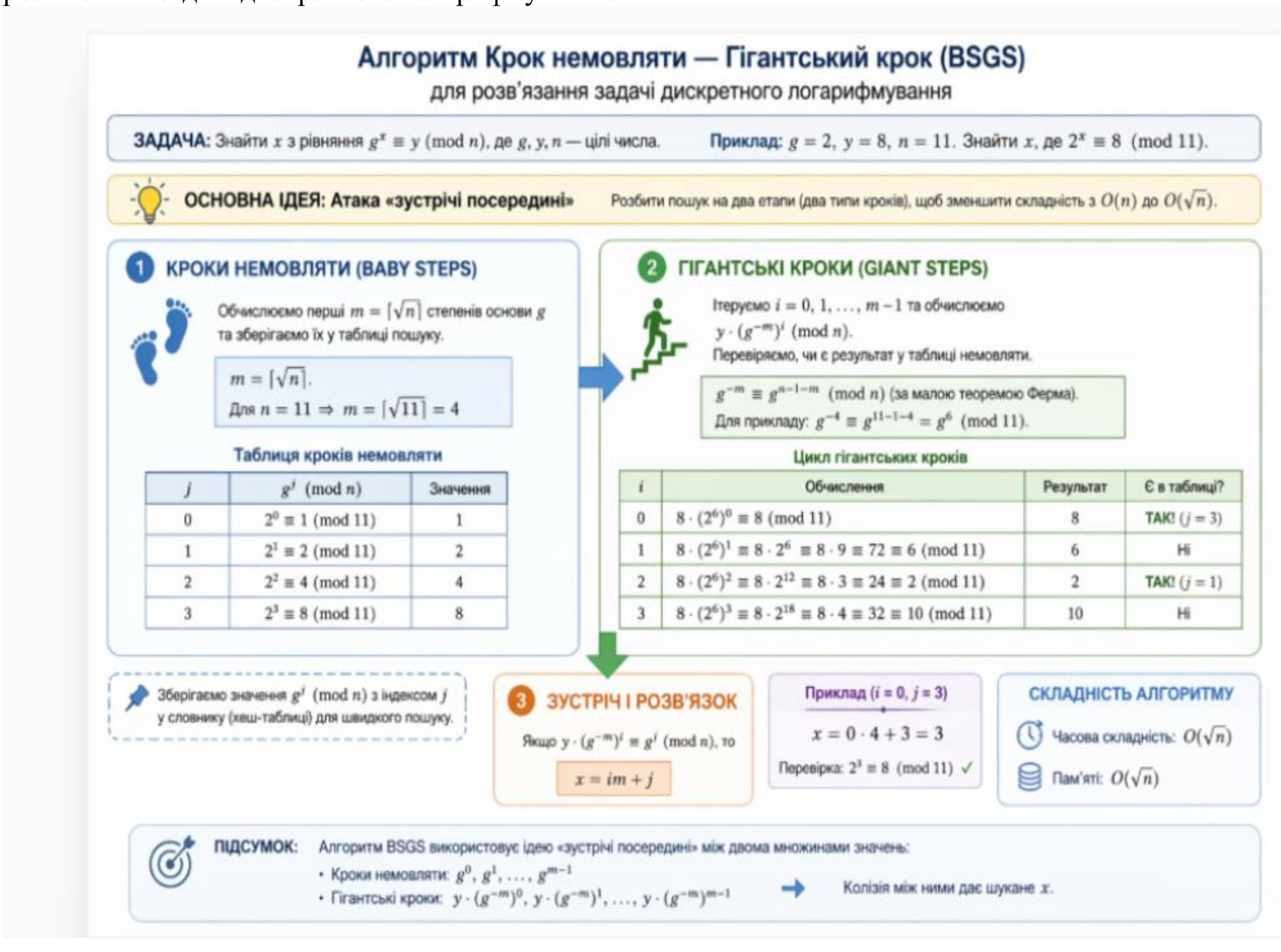


Рис. 1. Схема роботи алгоритму baby-step giant-step для знаходження дискретного логарифма

Як показано на рис. 1, алгоритм складається з двох ключових фаз. На першому етапі формується таблиця так званих «малих кроків», у якій обчислюються значення степенів породжувального елемента за модулем числа p. На другому етапі виконуються «гігантські кроки», під час яких послідовно перевіряється наявність збігів із попередньо сформованою таблицею.

Таким чином, застосування методу «зустрічі посередині» дає змогу знизити часову складність алгоритму повного перебору з $O(n)$ до:

$$O(\sqrt{n}),$$

що робить алгоритм ефективним для задач середньої розмірності та корисним інструментом для навчального моделювання криптоаналітичних процесів.

На основі схеми, наведеної на рис. 1, було реалізовано програмний код мовою Python для експериментального дослідження швидкодії алгоритму.

Програмний код

1. Підключення бібліотек

```
import math
import time
```

math - надає доступ до базових математичних функцій. У даному коді використовується для функцій math.sqrt() (квадратний корінь) та math.ceil() (округлення до більшого цілого).

time - стандартний модуль Python для роботи з часом. Використовується для фіксації початку та завершення виконання алгоритмів (time.time()), що дозволяє обчислити час роботи програми та провести порівняльний аналіз швидкодії методу Шенкса і повного перебору.

2. Підготовка інструментів для обчислення (Алгоритм Шенкса)

```
def baby_step_giant_step(g, h, p):
 m = math.ceil(math.sqrt(p))
```

Визначення параметра m: Алгоритм починається з обчислення оптимального розміру кроку m, який дорівнює $\lceil\sqrt{p}\rceil$. Це забезпечує оптимальний баланс між кількістю ітерацій та обсягом необхідної оперативної пам'яті.

```
 # 1. Baby steps
 baby_steps = {}
  for j in range(m):
 val = pow(g, j, p)
  baby_steps[val] = j
```

Фаза "Малих кроків" (Baby steps): Створюється порожній словник baby_steps, який виконує роль хеш-таблиці. У циклі обчислюються значення $g^j\ (mod\ p)$ для j від 0 до m-1 . Отримане значення стає ключем у словнику, а показник j — його значенням. Завдяки внутрішній архітектурі словників у Python, пошук елементів у такій структурі в подальшому відбуватиметься за константний час $O(1)$.

```
  c = pow(g, (p - 2) * m, p)
```

Обчислення множника для великих кроків: Знаходиться обернене значення $g^{-m}(mod\ p)$. Для уникнення складних алгоритмів пошуку оберненого елемента застосовується Мала теорема Ферма: оскільки p — просте число, $g^{-1} \equiv g^{p-2}\ (mod\ p)$. Відповідно, $g^{-m} \equiv (g^{p-2})^m\ (mod\ p)$. Вбудована функція pow(base, exp, mod) у Python дозволяє виконати це модульне піднесення до степеня високоефективно.

```
# 2. Giant steps та пошук колізій
 for i in range(m):
  # Обчислення h * (g^-m)^i mod p
 gamma = (h * pow(c, i, p)) % p
  # Перевірка наявності колізії у хеш-таблиці
 if gamma in baby_steps:
  return i * m + baby_steps[gamma]
 return None
```

Фаза "Великих кроків" (Giant steps) та пошук колізій: Програма ітерує змінну i від 0 до m-1 , щоразу обчислюючи нове значення gamma за формулою $h \cdot (g^{-m})^i\ (mod\ p)$. Далі відбувається миттєва перевірка: якщо обчислене значення вже існує як ключ у словнику baby_steps (тобто знайдено колізію), алгоритм успішно завершується. Знайдений дискретний логарифм повертається за формулою $x = i \cdot m + j$.

3. Алгоритм повного перебору (для порівняльного аналізу)

```
def brute_force(g, h, p)
  Знаходить x методом повного перебору (brute-force).
for x in range(p):
  if pow(g, x, p) == h:
  return x
  return None
```

Ця допоміжна функція реалізує тривіальний лінійний пошук (brute-force). Вона інтегрована в програму виключно для емпіричного підтвердження теоретичної складності $O_{(p)}$ і наочної демонстрації переваг оптимізованого методу Шенкса.

4. Функція main (Ініціалізація та тестування)

```
def main():
# 1. Ініціалізація параметрів
 p = xxx  # Велике просте число
   g = xxx  # Основа (відоме ціле число)
 x_secret = xxx  # Секретний показник степеня
    # Обчислення результату h (відоме ціле число)
 h = pow(g, x_secret, p)
```

Ініціалізація параметрів: Задаються константи для рівняння $g^x \equiv h\ (mod\, p)$. Модуль p обрано достатньо великим (одне з чисел Мерсенна), щоб різниця у швидкодії алгоритмів була відчутною при тестуванні. Значення h генерується на основі наперед заданого секретного x, щоб мати еталон для перевірки правильності роботи алгоритмів.

```
 print(f"Пошук x у рівнянні: {g}^x ≡ {h} (mod {p})")
 # 2. Виконання алгоритму Шенкса та аналіз часу
 start_time = time.time()
 result_bsgs = baby_step_giant_step(g, h, p)
 end_time = time.time()
```

Збір статистики: Програма фіксує точний час системи до та після виклику функції baby_step_giant_step, що дозволяє розрахувати реальні витрати процесорного часу. Аналогічний блок коду застосовується і для виклику функції brute_force, після чого отримані результати виводяться у консоль для проведення порівняльного аналізу.

```
print(f"\n[Baby-step Giant-step]")
  print(f"Знайдений x: {result_bsgs}")
 print(f"Час виконання: {end_time - start_time:.6f} секунд")
```

5. Виконання алгоритму повного перебору (опціонально для порівняння)

```
print(f"\n[Brute-force (Повний перебір)]")
start_time_bf = time.time()
  result_bf = brute_force(g, h, p)
end_time_bf = time.time()
    print(f"Знайдений x: {result_bf}")
 print(f"Час виконання: {end_time_bf - start_time_bf:.6f} секунд"
if __name__ == "__main__":
 main()
```

Нижче наведено порівняльний аналіз алгоритмів brute-force та baby-step giant-step для задачі дискретного логарифмування (табл.1). Реалізацію виконано засобами Python.

Табл. 1. Результати експериментальних вимірювань

№	**Baby-step Giant-step (с)**	**Brute-force (с)**
1.0	0.079509	46.784104
2.0	1.9e-05	2.4e-05
3.0	3.258091	72.603004
4.0	0.255769	2.535251
5.0	0.073093	403.586611

Аналіз результатів показує суттєву перевагу алгоритму Шенкса над повним перебором при збільшенні розмірності параметрів. Використання хеш-таблиць у Python забезпечує швидкий пошук колізій та скорочення часу обчислень.

Висновки

У роботі виконано всебічний аналіз задачі дискретного логарифмування, яка становить основу криптографічної стійкості сучасних асиметричних систем, зокрема протоколу Діффі–Геллмана, криптосистеми Ель-Гамаля та методів на основі еліптичних кривих. Показано, що класичний підхід повного перебору (brute-force) є надзвичайно неефективним і практично непридатним для великих значень модуля. Натомість використання алгоритму baby-step giant-step (алгоритму Шенкса) значно підвищує ефективність обчислень завдяки принципу зустрічного руху, що суттєво скорочує простір пошуку. Алгоритм baby-step giant-step є значно ефективнішим за brute-force та доцільним для навчального моделювання криптоаналітичних задач.

Порівняльний аналіз також підтвердив перевагу алгоритму baby-step giant-step над методом повного перебору. Використання Python є доцільним завдяки простоті реалізації та високій швидкодії вбудованих засобів роботи з великими числами. Перспективою подальших досліджень є аналіз Pollard rho та паралельних реалізацій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кормен Т. Г., Лейзерсон Ч. Е., Рівест Р. Л., Стайн К. Вступ до алгоритмів / пер. з англ. — Київ : К.І.С., 2019. — 1288 с. — ISBN 978-617-684-239-2.
2. Крак Ю. В. «Алгоритми комп'ютерної алгебри та їх застосування»: навчальний посібник. — Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2022.
3. Трофименко О. Г., Прокоп Ю. В., Логінова Н. І. Програмування мовою Python: навчальний посібник. — Одеса: Фенікс, 2021. — 272 с.
4. Python Software Foundation. time — Time access and conversions // The Python Standard Library. — URL: https://docs.python.org/3/library/time.html
5. Statista Research Department. Volume of data/information created, captured, copied, and consumed worldwide from 2010 to 2025. — Statista, 2023. — URL: https://www.statista.com/statistics/871513/worldwide-data-created/ (Офіційне джерело для підтвердження обсягу цифрових даних у 150 Зетабайтів).
6. Villanueva J. C. How Many Atoms Are There in the Universe? // Universe Today. — URL: https://www.universetoday.com/36302/atoms-in-the-universe/ (Науково-популярне пояснення числа Еддінгтона про 10^{80} атомів).

Крупський Андрій Вікторович – студент групи 2БС–25б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: 04-25-074@vntu.edu.ua

Тютюнник Оксана Іванівна – доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: tyutyunnik@vntu.edu.ua

Krupskyi Andrii V. – student of group 2BS – 25b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: 04-25-074@vntu.edu.ua

Tiutiunnyk Oksana I. – Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: tyutyunnik@vntu.edu.ua

УДК 378.147

В. В. Хом'юк
Н.В.Сачанюк-Кавецька

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті розглянуто програмний продукт для математичного моделювання та аналізу особливих точок у системах автоматичного керування. Запропоновано підхід до дослідження динамічних властивостей систем на основі побудови математичних моделей і аналізу фазових траєкторій. Реалізовано алгоритми визначення та класифікації особливих точок, що дозволяють оцінювати стійкість і характер поведінки систем у різних режимах функціонування.

Ключові слова: математичне моделювання, системи автоматичного керування, особливі точки.

Abstract

The article considers a software product for mathematical modeling and analysis of singular points in automatic control systems. An approach to studying the dynamic properties of systems based on the construction of mathematical models and analysis of phase trajectories is proposed. Algorithms for determining and classifying singular points are implemented, which allow assessing the stability and behavior of systems in different operating modes.

Keywords: mathematical modeling, automatic control systems, singular points

Вступ

Сучасний розвиток інженерних систем характеризується широким упровадженням систем автоматичного керування в різних галузях техніки – від енергетики та промислової автоматики до робототехніки. Ефективність функціонування таких систем значною мірою визначається їхніми динамічними властивостями, зокрема стійкістю, швидкодією та якістю перехідних процесів. Для аналізу й синтезу систем автоматичного керування важливу роль відіграють математичні методи [1-3], що дозволяють формалізувати поведінку систем у різних режимах роботи.

Результати дослідження

Одним із фундаментальних інструментів дослідження систем автоматичного керування є теорія функцій комплексної змінної [4]. У межах цього підходу передатні функції систем розглядаються як комплексні функції, властивості яких визначаються особливими точками – полюсами та нулями. Розташування та характер цих точок у комплексній площині безпосередньо впливають на стійкість системи, наявність коливальних режимів і характер перехідних процесів.

Функціональне призначення комп'ютерного моделювання полягає у визначенні та класифікації особливих точок функцій комплексної змінної, що виникають у передатних функціях і характеристичних рівняннях систем автоматичного керування. Зокрема, програма дозволяє ідентифікувати полюси та нулі системи, визначати їх характер (усувні особливі точки, полюси скінченного порядку, істотно особливі точки), а також аналізувати їх вплив на стійкість і динамічні властивості системи. Програмний засіб реалізований на мові Python і орієнтований на використання в задачах обчислювальної математики та технічного моделювання.

У процесі роботи програма застосовує обчислення границь, розклад функцій у ряд Лорана та аналітичні перетворення комплексних функцій. Це дає змогу формалізувати поведінку системи поблизу особливих точок і зробити висновки щодо її стійкості, коливальних режимів та перехідних процесів.

Запропонована комп'ютерна програма призначена для визначення особливих точок функції комплексної змінної або передатної функції системи автоматичного керування. Класифікація точок здійснюється двома методами.

Програма реалізує наступні можливості:

1. Пошук особливих точок функції:

- аналізує знаменник функції;
- визначає всі корені, які є особливими точками.

2.Класифікація особливих точок:

- для кожної знайденої точки обчислюється границя функції;
- проводиться класифікація за типами: усувна, полюс (з визначенням порядку), суттєво особлива.

3. Аналіз ряду Лорана:

- якщо границя не існує або не є однозначною, програма розкладає функцію в ряд Лорана в околі цієї точки;
- якщо у головній частині ряду нескінченно багато членів – це суттєво особлива точка.

Структура програми:

Програма складається з таких логічних модулів:

1. Модуль введення даних. Забезпечує введення аналітичного виразу функції комплексної змінної або передатної функції системи автоматичного керування, а також задання параметрів дослідження (область аналізу, точність обчислень, `наприклад, exp(z**2)/(z**2 - 6*z), sin(z)/(2*z), z**2):"`)

2. Обчислювальний модуль. Реалізує алгоритми обчислення границь, розкладу функцій у ряд Лорана та аналітичного визначення особливих точок. Модуль здійснює класифікацію особливих точок (усувні, полюси різного порядку, істотно особливі точки).

```
lim_val = limit(f, z, z0)
        if lim_val.is_finite:
            return f"Усувна особлива точка (границя: {lim_val})"
        elif lim_val == oo or lim_val == -oo:
            for n in range(1, 10):
                lim_n = limit((z - z0)**n * f, z, z0)
                if lim_n.is_finite and lim_n != 0:
                    return f"Полюс порядку {n} (границя: {lim_n})"
            return "Полюс (невизначений порядок)"
```

3. Модуль аналізу систем автоматичного керування. Виконує інтерпретацію знайдених особливих точок у контексті теорії автоматичного керування, зокрема визначає вплив полюсів і нулів на стійкість та динамічні характеристики системи.

4. Модуль візуалізації результатів. Забезпечує побудову графіків розташування особливих точок у комплексній площині, а також відображення результатів у табличному вигляді. Забезпечує структурований вивід фінальних результатів.

Функція Візуалізації

`plot_results(terms, abs_terms, partial_sums, series_name)` – будує графічне представлення результатів, вхідні та вихідні дані

Висновки

Розроблене програмне забезпечення дозволяє автоматизувати процес побудови математичних моделей, виконувати обчислення параметрів системи та візуалізувати результати аналізу. Це значно спрощує проведення досліджень і підвищує точність отриманих результатів порівняно з ручними розрахунками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хом'юк, І. В. Хом'юк, В. В. (2017). Математичне моделювання в контексті здійснення міжпредметних зв'язків курсу вищої математики у ВНЗ. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми: Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка. 2(10), 43–50.

2. Хом'юк, І. В., Кирилащук, С. А., Хом'юк, В. В. (2022). Застосування інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання вищої математики у технічних ЗВО. Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Педагогіка і психологія, 69, 38-45.
3. Хом'юк, І. В., Кирилащук, С. А., Хом'юк, В. В. (2026). Використання комп'ютерного моделювання в процесі вивчення вищої математики майбутніми фахівцями ІТ-спеціальностей / І. В. Хом'юк, С.А.Кирилащук, В.В.Хом'юк //Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». – Суми : Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка, 2026. Вип. 1(26). 156–163.
4. Вища математика. Збірник завдань для організації самостійної роботи студентів заочної форми навчання в двох частинах (з теоретичною підтримкою) Частина 2 : навчальний посібник / Хом'юк І. В. , Сачанюк-Кавецька Н.В., В. В. Хом'юк, Ковальчук М. Б. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 148 с.

Хом'юк Віктор Вікторович – к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна – к.т.н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Khomyuk V. V. – Associate Professor the department of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiravvh@gmail.com

Sachanyuk-Kavetska Natalia V. – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

УДК 378.147

І. В. Хом'юк
С.А.Кирилащук

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОЗМІННИХ РЯДІВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті запропоновано підхід до комп'ютерного моделювання процесу дослідження збіжності знакозмінних рядів із використанням алгоритмічних методів обчислення та візуалізації результатів. Проведено аналіз основних критеріїв збіжності числових рядів, зокрема ознаки Лейбніца, абсолютної та умовної збіжності.

Ключові слова: знакозмінні ряди, вища математика, комп'ютерне моделювання.

Abstract

The article proposes an approach to computer modeling of the process of studying the convergence of alternating series using algorithmic methods of calculation and visualization of results. The main criteria for the convergence of numerical series are analyzed, in particular the Leibniz sign, absolute and conditional convergence.

Key words: alternating series, higher mathematics, computer modeling.

Вступ

Знакозмінні ряди є важливим інструментом у чисельному аналізі, математичному моделюванні та інженерних обчисленнях, оскільки дозволяють наближено представляти складні функції та процеси. Коректність використання таких рядів безпосередньо залежить від їх збіжності, порушення якої може призводити до значних похибок у розрахунках та некоректних результатів моделювання.

Використання комп'ютерних програм, зокрема на мові Python, дає змогу автоматизувати перевірку збіжності рядів за критерієм Лейбніца та дозволяє досліджувати поведінку часткових сум для різних значень аргументу. Використання комп'ютерного моделювання забезпечує точність, ефективність та наочність результатів, що робить програму корисною для прикладних задач у техніці, обчислювальній математиці та навчально-практичних дослідженнях.

Результати дослідження

У межах роботи програми здійснюється визначення типу знакозмінного ряду, перевірка збіжності при заданих значеннях аргументу та аналіз поведінки часткових сум ряду.

Програма реалізує наступні можливості:

1. Визначення типу знакозмінного ряду та обчислення його членів a_n.
2. Перевірку умови знакопочережності.
3. Перевірку умови монотонного спадання: $|a_n| \geq |a_{n+1}|$.
4. Перевірку граничної умови: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$.
5. Визначення збіжності ряду на основі виконання всіх умов ознаки Лейбніца.

Програма складається з таких логічних модулів:

1. Модуль введення даних. Задання коефіцієнтів знакопочережного ряду, кількості членів для обчислень та діапазону значень змінної. Містить Функції Генерації Загального Члена Ряду: calculate_term(n, series_type, p=2) приймає ряд з виразом загального члена ряду
2. Модуль аналітичного аналізу. Перевірка критеріїв збіжності ряду за ознакою Лейбніца. Функції Перевірки Умов Збіжності

1. check_alternating(terms) - перевіряє знакопочережність ряду.
2. check_monotone_decreasing(terms) - обчислює монотонне спадання $|a_n|$.
3. check_limit_zero(terms, epsilon=0.001) - перевіряє граничний перехід $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$

3. Модуль аналізу збіжності. Перевіряє знакопочережність ряду.

Функція Аналізу Збіжності

leibniz_test(series_type, n, p=2) -головна функція аналізу збіжності ряду

4. Модуль чисельного моделювання. Обчислення часткових сум ряду та дослідження їх поведінки при різних значеннях аргументу.

Функції Обчислення Часткових Сум та Похибки

1. calculate_partial_sums(terms)- обчислення часткових сум ряду
2. estimate_error(terms, series_type, p=2) - оцінка похибки за ознакою Лейбніца (Функція обчислює наступний член та повертає його модуль як оцінку похибки).

Наприклад, для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

```
--------------------------------------------------------------------
ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ
--------------------------------------------------------------------
Часткова сума S_64 = 0.8223468700
Оцінка похибки |R_n| ≤ |a_65| = 2.3668639053e-04
Інтервал суми: [0.8221101836, 0.8225835564]

n      a_n                   |a_n|                 S_n
--------------------------------------------------------------------
1      1.0000000000          1.0000000000          1.0000000000
2      -0.2500000000         0.2500000000          0.7500000000
3      0.1111111111          0.1111111111          0.8611111111
4      -0.0625000000         0.0625000000          0.7986111111
5      0.0400000000          0.0400000000          0.8386111111
6      -0.0277777778         0.0277777778          0.8108333333
7      0.0204081633          0.0204081633          0.8312414966
8      -0.0156250000         0.0156250000          0.8156164966
9      0.0123456790          0.0123456790          0.8279621756
10     -0.0100000000         0.0100000000          0.8179621756

====================================================================
Результат перевірки: ЗБІГАЄТЬСЯ
```

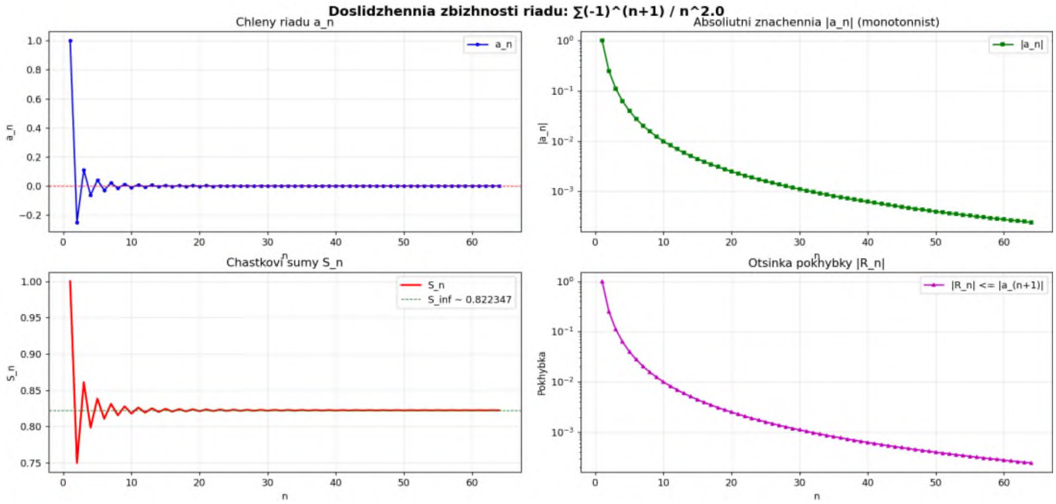
5. Модуль перевірки збіжності та точності. Автоматична оцінка збіжності ряду, похибки та швидкості збіжності для заданих умов.

6. Модуль виведення результатів. Формування графіків і підсумкових висновків для прикладних обчислень. Функція Візуалізації plot_results(terms, abs_terms, partial_sums, series_name) – будує графічне представлення результатів.

Створює 4 графіки:

1. Члени ряду a_n – показує як змінюються члени ряду.
2. Абсолютні значення $|a_n|$ – демонструє монотонність.
3. Часткові суми S□ – показує наближення до суми ряду.
4. Оцінка похибки $|R_n|$ – залишковий член.

Наприклад, для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$



Як можна бачити, в даній програмі виводиться вся інформація яка потрібна при моделюванні збіжності знакозмінних числових рядів за ознакою Лейбніца.

Висновки

Розроблена програма реалізує автоматизовану перевірку збіжності рядів за ознакою Лейбніца та дозволяє досліджувати поведінку часткових сум для різних значень аргументу. Використання комп'ютерного моделювання забезпечує точність, ефективність та наочність результатів, що робить програму корисною для прикладних задач у техніці, обчислювальній математиці та навчально-практичних дослідженнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хом'юк, І. В. Хом'юк, В. В. (2017). Математичне моделювання в контексті здійснення міжпредметних зв'язків курсу вищої математики у ВНЗ. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми: Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка. 2(10), 43–50.
2. Хом'юк, І. В., Кирилащук, С. А., Хом'юк, В. В. (2022). Застосування інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання вищої математики у технічних ЗВО. Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Педагогіка і психологія, 69, 38-45.
3. Хом'юк, І. В., Кирилащук, С. А., Хом'юк, В. В. (2026). Використання комп'ютерного моделювання в процесі вивчення вищої математики майбутніми фахівцями ІТ-спеціальностей / І. В. Хом'юк, С.А.Кирилащук, В.В.Хом'юк //Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». – Суми : Сумський держ. педагогічний університет ім. А. С. Макаренка, 2026. Вип. 1(26). 156–163.

Хом'юк Ірина Володимирівна – д. пед. н., професор, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Кирилащук Світлана Анатоліївна – к. пед. н., доцент, декан факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: : ksa07750@gmail.com

Khomyuk Irina V. – Doctor of Science (Ped.), Professor of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: vikiraivh@gmail.com

Kyrylashchuk S. A. – Associate Professor the department of Higher mathematics Dean of the Information Technology and Computer Engineering Department Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine,
e-mail: ksa07750@gmail.com

УДК 517.9:519.87:37

С. М. Бак[1]
Г. М. Ковтонюк[1]

ПРО МАТЕМАТИЧНУ МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація
Розроблено математичну модель, що описує динаміку формування компетентностей здобувачів освіти в процесі навчання. У моделі враховано п'ять рівнів сформованості компетентностей та змодельовано як переходи до вищих рівнів, так і можливі регресивні зміни з урахуванням контактних і безконтактних способів взаємодії. У результаті отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка характеризує часову динаміку відповідних груп здобувачів освіти.
Ключові слова: математична модель, формування компетентностей, епідеміологічні моделі, компартментні моделі.

Abstract
A mathematical model describing the dynamics of competence formation among students in the learning process has been developed. The model takes into account five levels of competence development and describes both progressive and regressive transitions between them, considering contact and non-contact mechanisms of interaction. As a result, a system of nonlinear differential equations was obtained to characterize the temporal evolution of the corresponding groups of students.
Keywords: mathematical model, competence formation, epidemiological models, compartmental models.

Останнім часом зростає інтерес до використання математичного моделювання для дослідження освітніх процесів ([5, 6, 8, 11, 13]). Важливе місце серед таких підходів займають епідеміологічні та компартментні моделі ([4, 7, 9]), які дають змогу описувати динаміку поширення знань, мотивації та навчальної поведінки студентів. Їх теоретичною основою стали класичні праці з математичної біології та епідеміології ([10, 14]), де популяція поділяється на групи, а переходи між ними описуються системами диференціальних рівнянь.

У сучасних дослідженнях ці підходи адаптуються до освітньої сфери. Зокрема, у роботах [6, 11] побудовано моделі навчальної поведінки студентів на основі аналогії з класичною SIR-моделлю, запропонованою В. Кермаком і А. Маккендріком у 1927 році ([10]). Показано, що соціальна взаємодія, мотивація та інтенсивність навчального впливу істотно впливають на переходи між рівнями навчальної активності.

Разом із тим існуючі моделі переважно орієнтовані на загальні характеристики навчальної поведінки й недостатньо враховують специфіку формування компетентностей. На відміну від них, у цій роботі компартментний підхід адаптовано до рівнів сформованості компетентностей із урахуванням як прогресивних, так і регресивних переходів, пов'язаних із можливою втратою компетентностей у процесі навчання. Це дозволяє більш адекватно описати реальну динаміку освітнього процесу.

Існує значна кількість досліджень, присвячених розробці педагогічних моделей формування різних компетентностей фахівців певних галузей. Зокрема, у роботі [1] запропоновано педагогічну модель формування практичних умінь роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики, що базується на поетапному розвитку мотивації, практичної діяльності та рефлексії. У статті [3] представлено модель формування енергоефективної компетентності майбутніх кваліфікованих працівників будівельної галузі, яка охоплює цільовий, методологічний, змістовий, навчально-модельований і результативно-оцінювальний компоненти. У роботі [12] розроблено педагогічну модель формування професійних компетентностей юриста на основі діяльнісного підходу.

Водночас зазначені моделі не враховують часову динаміку переходів між рівнями сформованості компетентностей. Тому актуальною є задача математичної формалізації динаміки формування компетентностей у процесі навчання з урахуванням прогресивних і регресивних переходів між рівнями їх сформованості на основі аналогій із компартментними та епідеміологічними моделями.

Розглянемо деяку педагогічну модель формування певних компетентностей здобувачів освіти у процесі навчання. В цій моделі визначимо чотири рівні сформованості компетентностей: низький (початковий), середній (репродуктивний), достатній (конструктивний) і високий (творчий).

У межах цього дослідження проводиться аналогія між процесами поширення інфекції чи інформації та формуванням компетентностей у навчальному середовищі. У компартментних моделях популяцію поділяють на окремі групи, між якими відбуваються переходи з певною інтенсивністю. Подібним чином у процесі навчання здобувачі освіти можуть належати до різних рівнів сформованості компетентностей і переходити між ними під впливом навчальних, мотиваційних та соціальних факторів. Зауважимо, що процес формування компетентностей є поетапним і неоднорідним. Це зумовлює доцільність виділення кількох компартментів.

Позначимо через $N(t)$ – кількість здобувачів освіти у момент часу $t \geq 0$, які проходять навчання відповідно до даної педагогічної моделі. Нехай $E(t)$ – кількість здобувачів, які перебувають на етапі первинної мотивації та ознайомлення з навчальним матеріалом, фактично не володіють відповідними комптентностями; $L(t)$ – кількість здобувачів з низьким рівнем сформованості компетентностей; $M(t)$ – з середнім рівнем; $S(t)$ – з достатнім рівнем; $H(t)$ – з високим рівнем. Вважається, що в процесі навчання здобувачі поступово переходять від нижчих рівнів сформованості компетентностей до вищих. З урахуванням підходів, запропонованих у [6], вважаємо, що швидкість переходу здобувачів між рівнями підготовки залежить не лише від їх поточного стану, а й від взаємодії з більш підготовленими здобувачами. Така взаємодія відображає ефекти колективного навчання, консультацій, наставництва та спільної роботи. Відповідно введемо такі додаткові параметри: Λ – інтенсивність вхідного потоку здобувачів освіти, які розпочинають навчання відповідно до педагогічної моделі (кількість осіб за одиницю часу); α – коефіцієнт інтенсивності контактного переходу здобувачів освіти з вхідного рівня E до низького рівня (цей коефіцієнт є аналогом коефіцієнта зараження в SIR-моделях); β – коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з вхідного рівня до середнього; γ_1 – коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу з низького рівня до середнього; γ_2 – коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з середнього рівня до низького; δ_1 – коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з середнього рівня до достатнього; δ_2 – коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з середнього рівня до високого; δ_3 – коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з достатнього рівня до середнього; θ_1 – коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з достатнього рівня до високого; θ_2 – коефіцієнт інтенсивності безконтатного переходу здобувачів освіти з високого рівня до достатнього; σ – коефіцієнт інтенсивності вибуття здобувачів освіти з навчального процесу на будь-якому етапі.

Тоді динаміка формування компетентностей відповідно до визначених рівнів описується системою диференціальних рівнянь ([2]):

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt} = \Lambda - \alpha EL - (\beta + \sigma)E, \\ \dfrac{dL}{dt} = \alpha EL + \gamma_2 M - (\gamma_1 + \sigma)L, \\ \dfrac{dM}{dt} = \beta E + \gamma_1 L + \delta_3 S - (\gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \sigma)M, \\ \dfrac{dS}{dt} = \delta_1 M + \theta_2 H - (\delta_3 + \theta_1 + \sigma)S, \\ \dfrac{dH}{dt} = \delta_2 M + \theta_1 S - (\theta_2 + \sigma)H. \end{cases} \tag{1}$$

У результаті проведеного аналізу встановлено, що сумарна чисельність здобувачів освіти є обмеженою функцією часу, що забезпечує коректність моделі з точки зору прикладної інтерпретації. Показано, що для будь-яких невід'ємних початкових даних задача Коші для системи (1) має єдиний обмежений розв'язок. Отже, запропонована модель може слугувати основою для подальших досліджень, зокрема для аналізу стійкості станів рівноваги, вивчення впливу параметрів системи та постановки задач оптимального керування освітнім процесом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бак С., Ковтонюк Г. Модель формування практичних вмінь і навичок роботи з видавничою системою LaTeX у майбутніх бакалаврів математики. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта.* 2025. Т. 2, № 2. С. 262-271. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-02-10
2. Бак С., Ковтонюк Г. Побудова та аналіз математичної моделі динаміки формування компетентностей у процесі навчання. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта.* 2026. Т. 3, № 1. С. 11-21. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2026-03-01-02
3. Каленський А. Педагогічне моделювання формування енергоефективної компетентності майбутніх кваліфікованих робітників будівельної галузі. *Вісник Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка*. Серія: Педагогічні науки. 2025. Том 3, № 59. С. 10-19. DOI: https://doi.org/10.31376/2410-0897-2025-3-59-10-19
4. Марценюк В. П., Сверстюк А. С. Математичні моделі та методи компартментного моделювання кіберфізичних систем медико-біологічних процесів: монографія. Львів: Видавництво «Магнолія – 2006», 2020. 400 с.
5. Chornyi O. P., Herasymenko L. V., Busher V. V. The learning process simulation based on differential equations of fractional orders. CTE Workshop Proceedings [Online]. 2021. Vol. 8. P. 473-483. DOI: https://doi.org/10.55056/cte.301
6. El Bhih A., Benfatah Y., Hassouni H., Balatif O., Rachik M. Mathematical modeling, sensitivity analysis, and optimal control of students awareness in mathematics education. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*. 2024. Vol. 11. P. 1-12. DOI: https://doi.org/10.1016/j.padiff.2024.100795
7. Funk S., Gilad E., Watkins C., Jansen V. A. A. The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks. *PNAS*. 2009. Vol. 106. P. 6872-6877. DOI: https://doi.org/10.1073/pnas.0810762106
8. He Z., Wang H., Hu Y., Zhao H. Dynamic analysis and optimal control of knowledge diffusion model in regional innovation ecosystem under digitalization. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14, 13124. DOI: https://doi.org/10.1038/s41598-024-63634-3
9. Hethcote H. W. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*. 2000. Vol. 42. P. 599-653. DOI: https://doi.org/10.1137/S0036144500371907
10. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society A*. 1927. Vol. 115, issue 772. P. 700-721. DOI: https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118
11. Kishore R., Kumar D. Epidemic modeling of student learning behavior: a novel perspective. *International Journal of Mathematics and Computer Research*. 2025. Vol. 13, issue 3. P. 4943-4950. DOI: https://doi.org/10.47191/ijmcr/v13i3.06
12. Kostruba A. Pedagogical model of the formation of professional competences of lawyers: Ukrainian reality. *Law Review of Kyiv University of Law*. 2020. No. 2. P. 31-36. DOI: https://doi.org/10.36695/2219-5521.2.2020.04
13. Lewis D. Modeling student engagement using optimal control theory. *Journal of Geometric Mechanics*. 2022. Vol. 14, issue 1. P. 131-150. DOI: https://doi.org/10.3934/jgm.2021032
14. Murray J. D. Mathematical Biology I: An Introduction. New York: Springer, 2002. 551 p. DOI: https://doi.org/10.1007/b98868

Бак Сергій Миколайович — докт. фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, sergiy.bak@gmail.com

Bak Serhii M. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, sergiy.bak@gmail.com

Ковтонюк Галина Миколаївна — канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, galyna.kovtonyuk@gmail.com

Kovtoniuk Halyna M. — Cand. Sc. (Ped.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, galyna.kovtonyuk@gmail.com

УДК 519.85:004.8

І. О. Кабаровський
О. П. Прозор

МЕТОД ГРАДІЄНТНОГО СПУСКУ В ЗАДАЧАХ НАВЧАННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У роботі описано математичні засади методу градієнтного спуску, який є одним із найважливіших алгоритмів оптимізації у задачах навчання штучних нейронних мереж. Розглянуто принципи обчислення градієнта функції втрат, механізм ітераційного коригування параметрів моделі та особливості використання різних модифікацій алгоритму у сучасних системах машинного навчання.
Ключові слова: метод градієнтного спуску, функція втрат, частинні похідні, машинне навчання.

Abstract
The paper describes the mathematical foundations of the gradient descent method, which is one of the most important optimization algorithms used in training artificial neural networks. The principles of gradient computation, the iterative process of updating model parameters, and the practical aspects of applying different variations of the algorithm in modern machine learning systems are discussed.
Keywords: gradient descent method, loss function, partial derivatives, machine learning.

Вступ

Сучасні методи машинного навчання ґрунтуються на задачах багатовимірної оптимізації. Одним із таких методів є метод градієнтного спуску. Ідея цього методу полягає у поступовому наближенні до точки мінімуму функції шляхом руху в напрямку, протилежному до градієнта. Навчання нейронної мережі формально зводиться до мінімізації функції втрат (loss function), яка характеризує відхилення прогнозованих значень від еталонних.

Результати дослідження

Нехай задано функцію

$$L(w) \to min,$$

де $w = (w_1, w_2, .., w_n,)$ – вектор параметрів або ваг нейронної мережі, а $L(w)$ – функція втрат [1].

Для знаходження напряму, в якому значення функції зменшується, використовується градієнт цієї функції. Градієнт функції – це вектор частинних похідних по кожному із параметрів моделі, який спрямований у бік максимальної зміни функції:

$$\Delta L(w) = \left(\frac{\partial L}{\partial w_1}, \frac{\partial L}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial L}{\partial w_n}\right).$$

Градієнт функції втрат допомагає визначити, як зміна того чи іншого параметра впливає на значення функції. Тобто він вказує, як потрібно змінити параметри моделі, щоб втрата була меншою.

В контексті нейронних мереж ітераційна формула методу градієнтного спуску має вигляд [2]:

$$w^{k+1} = w^k - \eta \nabla L(w^k),$$

де $\eta > 0$ – коефіцієнт швидкості навчання (learning rate), що визначає величину кроку при переході від однієї ітерації до іншої.

Геометрично метод градієнтного спуску інтерпретується як послідовний рух по багатовимірній поверхні функції втрат в напрямку мінімуму, тобто протилежному до градієнта функції. Параметри моделі оновлюються на кожній ітерації та рухаються у напрямку, протилежному градієнту функції втрат, поки ми не знайдемо точку у просторі параметрів, де втрата на навчальних даних буде мінімальною. Вибір коефіцієнта η суттєво впливає на швидкість збіжності алгоритму. Чим меншим ми його візьмемо, тим повільніше відбуватиметься процес навчання мережі. Він вибирається експериментально (наприклад, 0.1, 0.01, 0.001 і так далі), поки результат не буде задовільним. Мета алгоритму градієнтного спуску – мінімізувати критерій якості нейронної мережі – суму квадратів втрат навчальної вибірки:

У задачах навчання нейронних мереж обчислення градієнтів виконується за допомогою алгоритму зворотного поширення втрат (backpropagation), який ґрунтується на правилі диференціювання складеної функції. Завдяки цьому стає можливим навчання багатошарових нейронних мереж з великою кількістю параметрів.

Залежно від способу використання навчальної вибірки розрізняють пакетний (Batch Gradient Descent), стохастичний (Stochastic Gradient Descent) та міні-пакетний (Mini-batch Gradient Descent) градієнтний спуск. Стохастичні модифікації дозволяють зменшити обчислювальні витрати та пришвидшити навчання моделей.

Пакетний градієнтний спуск передбачає знаходження градієнта на основі всієї навчальної вибірки перед кожним оновленням параметрів. Такий підхід забезпечує точний напрям оптимізації, але може бути не ефективним для великих обсягів даних.

Стохастичний градієнтний спуск оновлює параметри моделі після обробки кожного окремого прикладу з навчальної вибірки. Цей підхід значно пришвидшує навчання та дозволяє уникати деяких локальних мінімумів, проте може спричиняти значні коливання значень функції втрат.

Міні-пакетний градієнтний спуск є проміжним варіантом між двома іншими. У цьому випадку градієнт обчислюється для невеликих підмножин навчальних даних. Такий підхід поєднує стабільність пакетного методу та швидкість стохастичного, тому широко застосовується на практиці.

У сучасних системах машинного навчання застосовуються удосконалені алгоритми (Momentum, RMSProp, Adam, які враховують інформацію про попередні значення градієнтів, що дозволяє прискорювати навчання.

Однією з важливих проблем оптимізації у багатовимірних просторах є наявність локальних мінімумів, плато та сідлових точок. У таких випадках класичний метод градієнтного спуску може сповільнюватися або тимчасово зупинятися. Використання ж стохастичних методів та адаптивних оптимізаторів дозволяє частково подолати ці труднощі та покращити процес навчання.

Висновки

Метод градієнтного спуску є фундаментальним інструментом оптимізації у машинному навчанні. Завдяки простоті реалізації та універсальності, метод став базовим інструментом для розв’язання задач мінімізації функцій багатьох змінних. Попри відносну повільність у класичному вигляді, численні модифікації дозволили зробити його основою сучасних алгоритмів машинного навчання. То ж сучасні дослідження спрямовані на розробку нових методів оптимізації, які спрямовані на підвищення швидкості збіжності, стійкості до локальних мінімумів та ефективності в умовах великої розмірності простору параметрів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ruder S. An overview of gradient descent optimization algorithms [Electronic resource]. – 2016. – Available at: https://arxiv.org/abs/1609.04747.
2. Bishop C. Pattern recognition and machine learning. – New York : Springer, 2006. 798 p.

Кабаровський Ілья Олександрович – студент групи 3ПІ-25б, факультет інформаційних технологій та комп’ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, email: kabarovskiyilia@gmail.com.

Прозор Олена Петрівна – к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, email: prozor@vntu.edu.ua.

Kabarovskyi Illia O. – student of group 3PI-25b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: kabarovskiyilia@gmail.com.

Prozor Olena P. – PhD (in Pedagogical Sciences), Docent, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: prozor@vntu.edu.ua.

УДК 519.6:004.42

Є.І.Тіхонова

Н.Б. Дубова

Г.Г. Кашканова

РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ЗАСОБУ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ КРИВОЛІНІЙНИХ ФІГУР МЕТОДАМИ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ.

Вінницький національний технічний університет

Аннотація

Метою роботи *є дослідження методів наближеного обчислення визначених інтегралів та їх практична реалізація мовою С++ для знаходження площ геометричних фігур, заданих у полярних та параметричних координатах. У ході роботи було реалізовано алгоритми методів прямокутників, трапецій та Сімпсона,створено модуль візуалізації отриманих результатів у консольному режимі для більш зручного користування.*

Ключові слова: вища математика, чисельне інтегрування, метод Сімпсона, кардіоїда, еліпс, мова С++.

Abstract

The aim of this work *is to investigate methods for the approximate calculation of definite integrals and their practical implementation in C++ for finding the areas of geometric figures defined in polar and parametric coordinates. In the course of the work, algorithms for the rectangle, trapezium and Simpson's methods were implemented, and a module was created to visualise the results in console mode for greater user convenience.*

Keywords: higher mathematics, numerical integration, Simpson's method, cardioid, ellipse, C++.

Вступ

Обчислення площ складних геометричних фігур є однією з ключових прикладних задач інтегрального числення. У випадках, коли первісна функції не може бути знайдена в елементарних функціях, або коли алгоритм потребує автоматизації, застосовуються чисельні методи. Дана робота присвячена програмній реалізації обчислень для двох типів кривих: кардіоїди (полярна система) та еліпса (параметрична форма).

Результати дослідження

Програма побудована за модульним принципом. Основні компоненти включають:

1. Математичний модуль: реалізує функції для обчислення радіус- вектора кардіоїди $r = a(1+\cos\varphi)$, та координат еліпса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.
2. Обчислювальний модуль: включає три методи інтегрування. Найвищу точність демонструє метод Сімпсона, який використовує параболічну апроксимацію:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot \sum_{k=1,2}^{N-1} [f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

3. Модуль візуалізації: функція `drawGraph` будує схематичне зображення фігури в консолі, використовуючи символи ASCII, що дозволяє користувачу оцінити параметри фігури (співвідношення осей еліпса або розмір кардіоїди).

Користувач має можливість самостійно вводити параметри a та b, обирати метод обчислення та кількість ітерацій n (за замовчуванням n=1000), що забезпечує гнучкість розрахунків.

```
cout << "==========================================\n";
cout << "  ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ФІГУР\n";
cout << "==========================================\n";
cout << "1. Кардіоїда\n";
cout << "2. Еліпс\n";
cout << "3. Довідка\n";
cout << "0. Вихід\n";
cout << "Ваш вибір: ";
cin >> choice;

if (choice == 1) {
    double a;
    cout << "Введіть a: ";
    cin >> a;

    drawGraph(1, a);

    int method;
    cout << "\nМетод:\n1 - Прямокутники\n2 - Трапеції\n3 - Сімпсона\nВаш вибір: ";
```

При запуску програми користувач потрапляє у головне меню, де може обрати тип фігури для розрахунку або переглянути теоретичну довідку по цій темі.

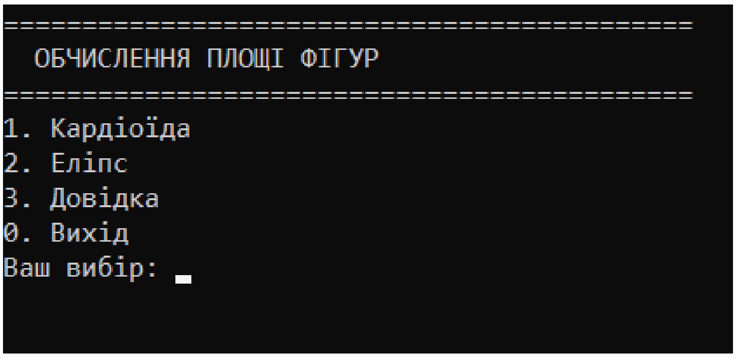


Рис.1.

Наприклад, при обранні варіанта «Еліпс» Рис.1, програма запитує параметри a (велика піввісь) та b (мала піввісь). Для демонстрації використаємо значення a=2, b=1.
Після введення параметрів програма автоматично генерує ASCII-графік фігури. Це дозволяє візуально перевірити точність заданих пропорцій перед початком математичних розрахунків.

Висновок

В результаті виконання роботи створено прикладне програмне забезпечення для чисельного аналізу. Порівняння різних методів показало, що метод Сімпсона є найбільш оптимальним за співвідношенням швидкості обчислень та точності. Програма може бути актуальна для вивчення даної теми курсу "Вища математика" та "Чисельні методи".

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Страуструп Б. Мова програмування С++. Базовий курс. – К.: Діалектика, 2011.

***Тіхонова Єлизавета Ігорівна* –** студентка групи 1ЕХКБ – 25б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: liza29031900@gmail.com
Дубова Надія Борисівна – старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua
Кашканова Галина Григорівна – доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail:g.kashkanova@vntu.edu.ua

Tikhonova Yelizaveta Igorivna– student of group 1EHKB – 25b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: liza29031900@gmail.com
Dubova Nadiya Borysivna – Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua
Kashkanova Halyna Hryhorivna – Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: g.kashkanova@vntu.edu.ua

УДК 517.91:004.42

Д. О. Кирик
Н. Б. Дубова

«Розробка програмного комплексу для візуалізації та аналізу еліптичних кривих у формах Монтгомері та Едвардса»

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Реалізований програмний комплекс є повноцінним навчально-дослідним інструментом. Він наочно демонструє, як абстрактні алгебраїчні структури перетворюються на реальні криптографічні механізми. Програма доводить, що вибір форми кривої (Монтгомері чи Едвардса) залежить від конкретної інженерної задачі, хоча математично вони залишаються еквівалентними.

Ключові слова: Еліптичні криві, крива Монтгомері, скручена крива Едвардса, біраціональна еквівалентність, криптографія з відкритим ключем, візуалізація, програмний комплекс, комп'ютерне моделювання, [1] прикладна криптологія, криптографія на еліптичних кривих, [2] факоризація, метод Полларда.

Abstract

The implemented software package is a full-fledged educational and research tool. It clearly demonstrates how abstract algebraic structures are transformed into real cryptographic mechanisms. The program proves that the choice of curve shape (Montgomery or Edwards) depends on the specific engineering problem, although mathematically they remain equivalent.

Keywords: Elliptic curves, Montgomery curve, twisted Edwards curve, birational equivalence, public-key cryptography, visualization, software package, computer modeling, [1] applied cryptology, elliptic curve cryptography, [2] factorization, Pollard's method.

Вступ

Дана задача є ключовою для розуміння того, як працюють сучасні протоколи безпеки, такі як **Curve25519** (використовується в WhatsApp, Signal, Tor) та **Ed25519** (для цифрових підписів). В основі програми лежить механізм побудови неявних функцій та обчислення біраціональної еквівалентності між різними алгебраїчними формами.
У програмі реалізовано дві основні моделі еліптичних кривих та математичний зв'язок між ними.

Крива Монтгомері

Визначається рівнянням:

$$\mathrm{B}y^2 = x^3 + \mathrm{A}x^2 + \mathrm{x} \tag{1}$$

Ці криві оптимізовані для швидкого скалярного множення точок (алгоритм Montgomery Ladder), що робить їх ідеальними для обміну ключами.

Скручена крива Едварса

Визначається рівнянням:

$$x^2 + y^2 = 1 + \mathrm{d}x^2y^2 \tag{2}$$

Вони мають властивість "повних формул додавання", що робить програмні реалізації стійкими до атак через сторонні канали (side-channel attacks).

Біраціональна еквівалентність

Найскладніша частина програми доводить, що ці дві форми є ізоморфними. Показник x та y на кривій Едвардса можна отримати з координат (u, v) кривої Монтгомері за формулами:

$$x = u/v \tag{3}$$

$$y = u - 1/u + 1 \tag{4}$$

Основні функції програми

Програма побудована за принципом модульності, де кожна функція відповідає за свій математичний етап.

1. **Функція _init_plot_layout()**: Створює універсальний контейнер для графіків, забезпечуючи динамічне оновлення інтерфейсу без мерехтіння.
2. **Методи plot_mont() та plot_edw()**: Виконують генерацію координатної сітки за допомогою np.ogrid та розраховують значення функцій у кожній точці простору.
3. **Функція _render_canvas()**: Виконує фінальну побудову графіка, налаштовує колірну схему (неонові лінії на темному фоні) та інтегрує об'єкт Figure у вікно програми.
4. **Функція calc()**: Реалізує інтерактивний обчислювач перетворення координат, що дозволяє користувачу перевірити математичний зв'язок між кривими в реальному часі.

```
import customtkinter as ctk
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.backends.backend_tkagg import FigureCanvasTkAgg
from matplotlib.figure import Figure

# Налаштування стилю інтерфейсу
ctk.set_appearance_mode("dark")
ctk.set_default_color_theme("blue")


class ECCLaboratory(ctk.CTk):
    def __init__(self):
        super().__init__()

        self.title("Montgomery & Edwards Curves")
        self.geometry("1100x700")

        # Створення сітки вікна
        self.grid_columnconfigure(1, weight=1)
        self.grid_rowconfigure(0, weight=1)

        # --- Бокова панель (Sidebar) ---
        self.sidebar_frame = ctk.CTkFrame(self, width=200, corner_radius=0)
        self.sidebar_frame.grid(row=0, column=0, sticky="nsew")

        self.logo_label = ctk.CTkLabel(self.sidebar_frame, text="Montgomery \n&\n Edwards Curves",
font=ctk.CTkFont(size=22, weight="bold"))
        self.logo_label.pack(padx=20, pady=(20, 30))

        self.btn_mont = ctk.CTkButton(self.sidebar_frame, text="Крива Монтгомері",
command=self.show_montgomery)
        self.btn_mont.pack(padx=20, pady=10)

        self.btn_edw = ctk.CTkButton(self.sidebar_frame, text="Крива Едвардса",
command=self.show_edwards)
        self.btn_edw.pack(padx=20, pady=10)
```

```
        self.btn_map = ctk.CTkButton(self.sidebar_frame, text="Відображення точок",
command=self.show_mapping)
        self.btn_map.pack(padx=20, pady=10)

        self.btn_exit = ctk.CTkButton(self.sidebar_frame, text="Вийти", fg_color="#cc3333",
hover_color="#992222",
                                      command=self.quit)
        self.btn_exit.pack(padx=20, pady=(450, 20))
```

Алгоритм програми

Програма виконує обчислення та візуалізацію покроково.

Крок 1. Введення вхідних даних

Користувач обирає тип кривої та вводить параметри (наприклад, A та B для Монтгомері). Програма автоматично перевіряє коректність введених даних.

Крок 2. Генерація обчислювального простору

Обчислюється двовимірна область значень:

$$(x, y) \in [-L, L] \times [-H, H] \tag{5}$$

Використовується щільність у 500 точок на кожну вісь для забезпечення високої плавності кривої.

Крок 3. Розрахунок неявної функції

Програма обчислює матрицю значень Z, де:

$$Z_{i,j} = f(x_i, y_j) \tag{6}$$

де f(x, y) = 0 — цільове рівняння кривої.

Крок 4. Побудова ізоліній (Contouring)

Алгоритм знаходить усі пари точок, де функція змінює знак, і проводить через них плавну лінію. Це дозволяє коректно відобразити складні розриви та "краплі", характерні для еліптичних кривих.

Крок 5. Відображення та взаємодія

Готовий графік виводиться на екран. Користувач може перейти до розділу "Відображення точок", ввести координати u, v та миттєво отримати їх відповідники на еквівалентній кривій Едвардса.

Результати роботи програми

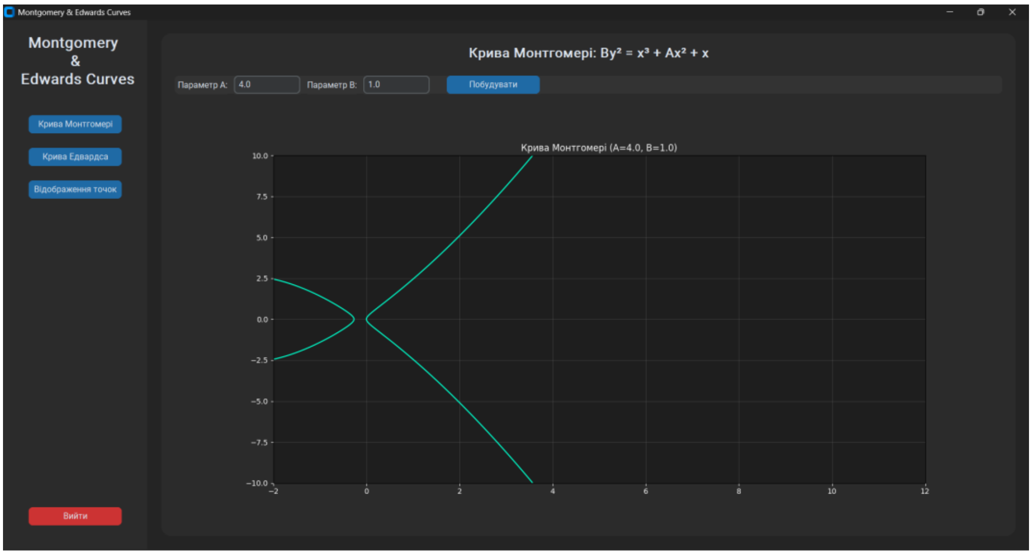


Рис.1: Приклад побудови графіку кривої Монтгомері.

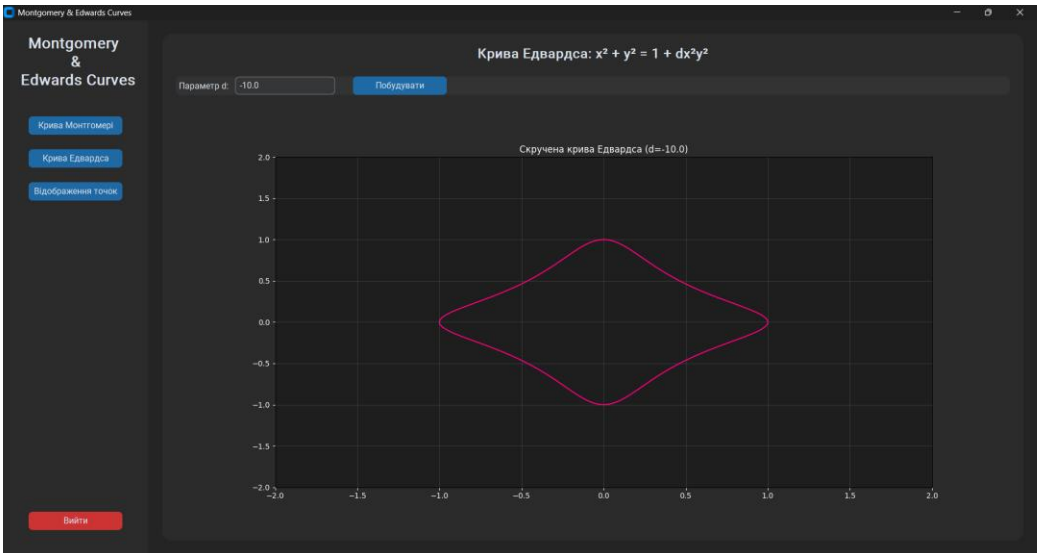


Рис.2: Приклад побудови графіку кривої Едварса.

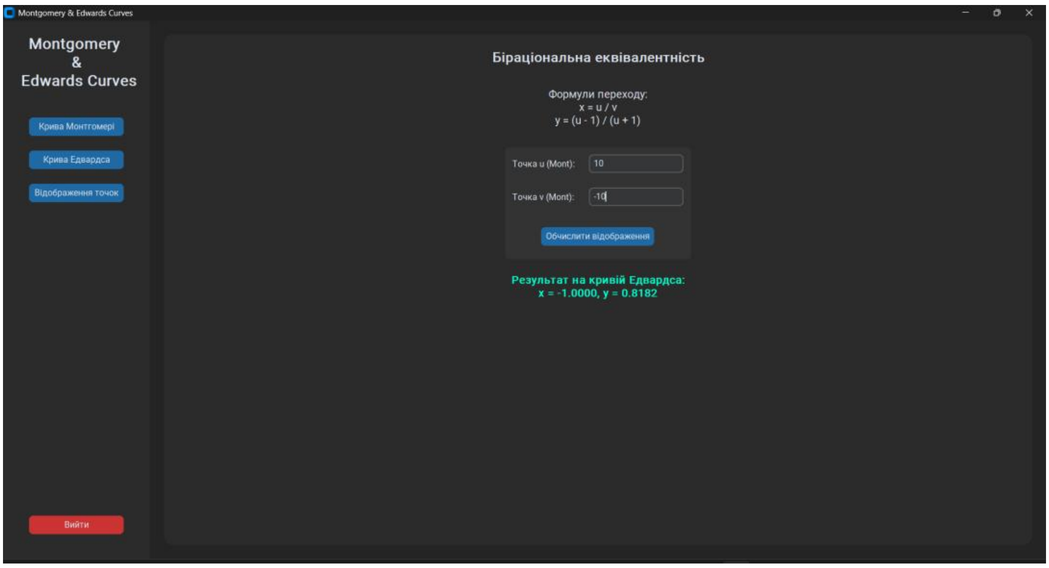


Рис.3: Приклад обчислення біраціональної еквівалентності.

Висновок

Програмний комплекс розроблений для візуалізації та дослідження геометричних властивостей еліптичних кривих (ECC), які є фундаментом сучасної криптографії з відкритим ключем. Програмний комплекс дозволяє працювати з двома найбільш ефективними формами кривих: Монтгомері та Едвардса.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Горбенко І. Д., Горбенко Ю. І.** Прикладна криптологія : підручник. — Харків : Форт, 2012. — 868 с.
2. **Montgomery P. L.** Speeding the Pollard and elliptic curve methods of factorization. *Mathematics of Computation*, 1987. Vol. 48, No. 177. P. 243–264.
3. **Bernstein D. J., Birkner P., Joye M., Lange T., Peters C.** Twisted Edwards Curves. *Progress in Cryptology – AFRICACRYPT 2008*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 5023. Springer, Berlin, Heidelberg. P. 389–405.
4. **Hankerson D., Menezes A., Vanstone S.** *Guide to Elliptic Curve Cryptography*. — New York : Springer-Verlag, 2004. — 312 p.

Кирик Дар'я Олександрівна *– студентка факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: daruakuruk@gmail.com*

Дубова Надія Борисівна *– старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua*

Kyryk Daria O. *– student of the Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: daruakuruk@gmail.com*

Dubova Nadiya B. *– Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua*

УДК 519.65

Є. Р. Шумко
Н. В. Сачанюк-Кавецька

АПРОКСИМАЦІЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті досліджуються математичні методи апроксимації функцій та їх практичне застосування для аналізу електричних кіл. Розглянуто теоретичні засади методу найменших квадратів, інтерполяційних багаточленів та кусково-лінійної апроксимації. Особливу увагу приділено застосуванню лінійної інтерполяції для визначення проміжних значень напруги в колах змінного струму. Наведено детальний практичний розрахунок параметрів моделі на основі дискретних вимірів, що дозволяє оптимізувати процес проектування вбудованих систем та систем електропостачання.

Ключові слова: апроксимація, інтерполяція, метод найменших квадратів, електричні кола, напруга, математичне моделювання.

Abstract

The article explores mathematical methods of function approximation and their practical application for the analysis of electrical circuits. The theoretical foundations of the least squares method, interpolation polynomials, and piecewise linear approximation are considered. Special attention is paid to the use of linear interpolation to determine intermediate voltage values in alternating current circuits. A detailed practical calculation of model parameters based on discrete measurements is presented, which allows optimizing the design process of embedded systems and power supply systems.

Keywords: approximation, interpolation, least squares method, electrical circuits, voltage, mathematical modeling.

Вступ

Сучасний розвиток інформаційних технологій та вбудованих систем вимагає точного математичного опису фізичних процесів. Під час розробки програмного забезпечення для мікроконтролерів (зокрема архітектури AVR), проектування електричних мереж або моделювання в середовищах типу Proteus VSM інженери постійно стикаються з проблемою обробки дискретних масивів даних. Аналогово-цифрові перетворювачі (АЦП) фіксують значення неперервних сигналів лише у визначені моменти часу, формуючи дискретну вибірку. Наприклад, при дослідженні лінійних кіл однофазного синусоїдального струму виникає задача відновлення повної картини зміни напруги чи струму за обмеженою кількістю вимірів. Саме тому застосування математичного апарату апроксимації є критично важливим етапом у цифровій обробці сигналів [1].

Необхідність знаходження проміжних значень функцій між існуючими точками або згладжування експериментальних даних, обтяжених похибками вимірювань, зумовлює актуальність глибокого вивчення та вдосконалення методів апроксимації. Незважаючи на існування потужних обчислювальних комплексів, розуміння базових принципів лінійної та нелінійної інтерполяції залишається фундаментом для створення оптимізованого та швидкодіючого мікропроцесорного коду [2].

Результати дослідження

Апроксимація — це математичний метод заміни одних математичних об'єктів іншими, ближчими до вихідних за певними критеріями, з метою їх спрощення або дослідження. В обчислювальній математиці найчастіше розглядається апроксимація функцій, коли складну функцію $f(t)$, задану аналітично або таблично, замінюють простішою функцією $g(t)$ [3].

Існує два основних класи задач наближення: інтерполяція та наближення функцій у середньому (або метод найменших квадратів). Якщо функція задана дискретним набором точок (t_i, U_i), де $i = 0,1, ..., n$, інтерполяція вимагає, щоб наближуюча функція проходила точно через усі задані вузли, тобто виконувалась умова $g(t_i) = u_i$ Натомість, метод найменших квадратів використовується тоді, коли експериментальні дані містять шум, і точний збіг у вузлах не є обов'язковим. У цьому випадку мінімізується сума квадратів відхилень:

$$S = \Sigma (U_i - g(t_i))^2 \rightarrow min \quad (1)$$

Одним із найпоширеніших методів є поліноміальна інтерполяція, яка використовує багаточлени Лагранжа та Н'ютона. Для множини з $n+1$ точок завжди можна побудувати єдиний поліном степеня $\boldsymbol{n}$, що проходить через усі ці точки. Однак, при великій кількості точок використання поліномів високих степенів призводить до явища Рунге — значних осциляцій на краях інтервалу. Для уникнення цієї проблеми використовують сплайн-апроксимацію, зокрема кубічні сплайни, або шматково-лінійну апроксимацію.

Шматково-лінійна апроксимація є найпростішим і найбільш стійким методом для інженерних застосувань, особливо в системах реального часу. Функція на кожному малому інтервалі $[t_i, t_i+i]$ замінюється відрізком прямої лінії. Рівняння такої прямої має вигляд:

$$U = A_0 + A_1 t. \quad (2)$$

Зауважимо, що у класичній електротехніці миттєве значення напруги часто позначають як функцію від часу $u(t)$. Проте, для оптимізації математичних записів та уникнення перевантаження формул, у даному випадку ми просто замінимо $u(t)$ на U, що є загальноприйнятою практикою у чисельних методах.

Розглянемо практичний приклад. Під час виконання лабораторних досліджень простих кіл змінного струму було зафіксовано два дискретних значення напруги у моменти часу t_i та t_2. Виникла необхідність знайти миттєве значення напруги Ux у проміжний момент часу tx. Вихідні дані для розрахунку наведено у таблиці 1.

Таблиця 1 Вихідні дані для лінійної апроксимації напруги

Параметр	**Позначення**	**Значення**
Час першого виміру	ti	0,0003 с
Напруга першого виміру	$U1$	2,8 В
Час другого виміру	$t2$	0,00066 с
Напруга другого виміру	$U2$	5,3 В
Час шуканого виміру	tx	0,00042 с

Для знаходження невідомих коефіцієнтів Ao та Ai складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, підставивши відомі координати точок у загальне рівняння прямої:

$$U_1 = A_0 + A_1 t_1$$
$$U_2 = A_0 + A_1 t_2$$

Підставляючи числові значення з таблиці 1, отримаємо:

$$2,8 = A_0 + A_1 \cdot 0,0003$$

$$5,3 = A_0 + A_1 \cdot 0,00066$$

Віднімемо перше рівняння від другого, щоб знайти кутовий коефіцієнт A_1, який фізично відображає швидкість зміни напруги у вольтах за секунду на даному інтервалі:

$$5,3 - 2,8 = A_1 \cdot 0,00066 - A1 \cdot 0,0003$$

$$2,5 = A_1 \cdot (0,00066 - 0,0003)$$
$$2,5 = 0,00036 \cdot A1$$

$$A_1 = 2{,}5 / 0{,}00036 \approx 6944{,}4$$

Тепер підставимо знайдене значення A_1 у перше рівняння для обчислення вільного члена A_0:

$$2{,}8 = A_0 + 6944{,}4 \cdot 0{,}0003$$

$$2{,}8 = A_0 + 2{,}083$$

$$A_0 = 2{,}8 - 2{,}083 = 0{,}717$$

Отже, апроксимуюче рівняння для даного відрізка має вигляд: $U = 0{,}717 + 6944{,}4 \cdot t$. Використовуючи це рівняння, розрахуємо шукане значення напруги U_x у момент часу $t_x = 0{,}00042$ с:

$$U_x = 0{,}717 + 6944{,}4 \cdot 0{,}00042 = 0{,}717 + 2{,}917 = 3{,}634 \text{ В.}$$

Графічна інтерпретація отриманих результатів зображена на рис. 1. Точки А та В відповідають експериментальним вимірам, а точка *x* — обчисленому проміжному значенню.

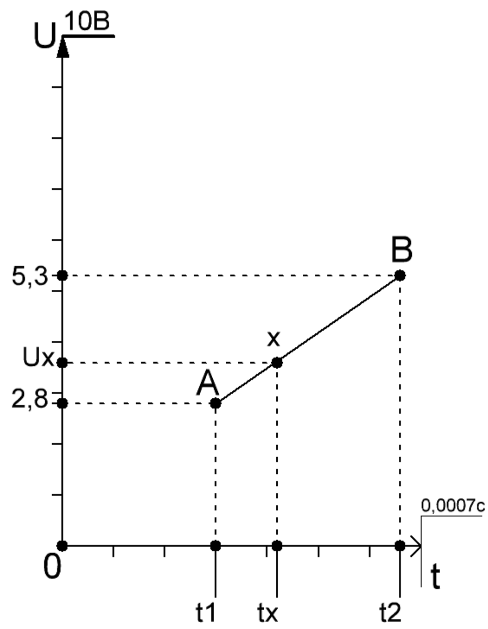


Рисунок 1 Лінійна апроксимація залежності напруги від часу

Описаний алгоритм відрізняється низькою обчислювальною складністю, оскільки потребує лише базових арифметичних операцій (множення, додавання та віднімання). Це робить його ідеальним для реалізації на рівні мікроконтролерів у вбудованих системах управління живленням та релейного захисту. Незважаючи на свою простоту, при достатньо високій частоті дискретизації кусково-лінійна апроксимація забезпечує точність, яка повністю задовольняє вимоги інженерних стандартів.

Також слід відзначити, що подібний підхід є базисом для побудови складніших алгоритмів цифрової обробки сигналів, таких як розрахунок діючого значення (RMS) напруги, спектральний аналіз (швидке перетворення Фур'є) та обчислення балансу потужностей у трифазних системах.

Висновки

В результаті проведеного дослідження розглянуто ключові аспекти теорії апроксимації функцій та доведено доцільність застосування кусково-лінійної інтерполяції для обробки сигналів в електричних колах. Детальний математичний розрахунок підтвердив, що за допомогою системи лінійних рівнянь можна з високою точністю визначати параметри моделі та знаходити проміжні значення напруги. Отримані результати можуть бути використані під час проектування апаратних комплексів, а також при обробці результатів лабораторних вимірювань і створенні алгоритмів для мікропроцесорних систем контролю параметрів мережі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Квєтний, Р. Н. Моделювання та оптимізація систем і процесів. Комп'ютерні методи : навчальний посібник / Р. Н. Квєтний, І. В. Богач, О. Р. Бойко, О. Ю. Софина, О. М. Шушура. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 144 с.
2. Самарський, О. А. Вступ до чисельних методів: Навчальний посібник / О. А. Самарський. - Київ: Наукова думка, 2019. - 288 с.
3. Кухарчук, В. В. Теоретичні основи електротехніки: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник. Ч. 1 / В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький, С. Ш. Кацив. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.

Шумко Євгеній Русланович — студент групи ЕМСА-25б, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, shumkoevgeniy23@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна **-** к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: ***Сачанюк – Кавецька Наталія Василівна***, кандидат технічних наук, доцент, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Shumko Yevheniy R., Student of the Faculty of Electrical Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, shumkoevgeniy23@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: ***Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.*** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

УДК 517.5.52

Н.С. Гончаренко
Н.В. Сачанюк-Кавецька

МЕХАНІЗМ ОБЧИСЛЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ РІЗНИМИ МОДЕЛЯМИ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У статті розглянуто особливості обчислення тригонометричних функцій за допомогою сучасних моделей штучного інтелекту. Досліджено математичні алгоритми, які використовуються для знаходження значень тригонометричних функцій. Проведено аналіз підходів різних моделей штучного інтелекту до виконання математичних обчислень, а також визначено їх переваги та недоліки.

Ключові слова: тригонометричні функції, штучний інтелект, чисельні методи, ряд Тейлора, математичне моделювання.

Abstract

The article examines the features of calculating trigonometric functions using modern artificial intelligence models. The mathematical algorithms used to find the values of trigonometric functions are studied. The approaches of various artificial intelligence models to performing mathematical calculations are analyzed, and their advantages and disadvantages are identified.

Keywords: trigonometric functions, artificial intelligence, numerical methods, Taylor seriesmathematical modeling.

Вступ

Сучасна теплоенергетика та енерговиробництво неможливі без використання математичного моделювання, автоматизованих систем керування та технологій штучного інтелекту. При проєктуванні та експлуатації енергетичного обладнання виникає необхідність аналізу коливальних процесів, електричних сигналів, теплових потоків та режимів роботи енергосистем, для опису яких широко застосовуються тригонометричні функції.

Функції синуса та косинуса використовуються при дослідженні змінного струму, аналізі гармонічних коливань, роботі генераторів електроенергії та моделюванні процесів теплообміну. З розвитком штучного інтелекту значна частина математичних розрахунків виконується автоматизовано, що дозволяє підвищити швидкість обробки даних і точність прогнозування параметрів енергетичних систем.

Сучасні системи штучного інтелекту здатні не лише обчислювати значення тригонометричних функцій, але й використовувати їх під час моделювання складних технічних процесів, оптимізації режимів роботи енергетичного обладнання та аналізу великих масивів експлуатаційних даних.

Результати досліджень

Тригонометричні функції широко застосовуються під час аналізу змінного струму. Миттєве значення напруги може бути описане рівнянням [1-2]:

$$U(t)=U_m \sin(\omega t)$$

де U - миттєве значення напруги в заданий момент часу; U_m - амплітудне значення напруги; ω - циклічна частота; t – час. У сучасних системах штучного інтелекту для обчислення значень функції синуса використовуються різні підходи [3-5]:

ChatGPT

- ряди Тейлора;
- чисельні алгоритми;
- математичні бібліотеки.

Gemini

- нейронні мережі;

- математичні модулі;
- алгоритми апроксимації.

Copilot

- символьні обчислення;
- чисельні методи;
- інтеграція з математичними пакетами.

Для оцінювання ефективності роботи досліджуваних моделей було обрано задачу, пов'язану з визначенням миттєвого значення напруги змінного струму. Такий вибір зумовлений широким використанням тригонометричних функцій під час аналізу електротехнічних та енергетичних процесів. Для порівняння можливостей різних систем штучного інтелекту було розглянуто задачу, пов'язану з аналізом змінного струму в енергетичних системах.

Нехай миттєве значення напруги визначається формулою $u(t) = 220\sqrt{2} \cdot \sin(314t)$

Необхідно знайти значення напруги в момент часу t = 0,002 с.

Після підстановки поточного значення часу отримуємо: $u(0,002) = 220\sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot 0,002)$

Для знаходження результату використовується розклад у ряд Тейлора

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\sin 0,628 \approx 0,588$$

Тоді $u(0,002) = 220 \cdot 1,414 \cdot 0,588 \approx 183$ В.

Аналіз відповідей показав, що всі досліджувані системи отримали близькі числові результати. Водночас спосіб подання розв'язку суттєво відрізнявся: одні моделі детально пояснювали математичні перетворення, тоді як інші орієнтувалися на швидке отримання кінцевого результату або використання готових математичних модулів (див. табл. 1 та табл. 2).

Таблиця 1 – Характеристика підходів моделей штучного інтелекту до математичних обчислень

Система ШІ	Особливості розв’язання	Переваги
ChatGPT	Покроково пояснює обчислення та математичні перетворення	Зручний для навчання
Gemini	Швидко виконує обчислення та будує графіки	Зручний для візуалізації
Copilot	Орієнтований на інтеграцію з Excel та інженерними програмами	Зручний для практичних розрахунків

Таблиця 2 – Порівняльний аналіз можливостей моделей ШІ під час обчислення тригонометричних функцій

Характеристика	**ChatGPT**	**Gemini**	**Copilot**
Покрокове пояснення	Високе	Середнє	Середнє
Візуалізація графіків	Добра	Відмінна	Добра
Робота з формулами	Добра	Добра	Відмінна
Інтеграція з інженерним ПЗ	Обмежена	Середня	Висока
Основний акцент	Навчання та пояснення	Аналіз та пошук	Практичні розрахунки

Висновок

Тригонометричні функції є важливим математичним інструментом для аналізу процесів в енергетиці. Сучасні системи штучного інтелекту використовують чисельні та символьні методи для їх обчислення, забезпечуючи високу швидкість та точність розрахунків. Проведене дослідження показало, що незалежно від особливостей реалізації алгоритмів усі розглянуті моделі здатні успішно виконувати обчислення тригонометричних функцій. Найбільші відмінності спостерігаються у способі пояснення розв'язку, рівні деталізації математичних перетворень та можливостях інтеграції з прикладним програмним забезпеченням. Використання ШІ в задачах енерговиробництва дозволяє автоматизувати обчислення, підвищити ефективність аналізу енергетичних систем та покращити якість інженерних рішень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бевз Г. П. Вища математика. — Київ: Вища школа, 2018.
2. Nielsen M. Neural Networks and Deep Learning. — 2015.
3. https://copilot.microsoft.com (Дата звернення: 31.05.2026)
4. https://gemini.google.com (Дата звернення: 31.05.2026)
5. https://chatgpt.com (Дата звернення: 31.05.2026)

Гончаренко Назарій Сергійович **–** Вінницький національний технічний університет, студент першого курсу, ФБЦЕІ, goncharenkonazar@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна **–** к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: ***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна*** **–** к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Honcharenko Nazariy S. – Vinnytsia National Technical University, first-year student, Faculty of Civil and Environmental Engineering, goncharenkonazar@gmail.com

Sachanyuk-Kavetska Natalia V. – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Vinnytsia National Technical University, Department of Higher Mathematics, skn1901@gmail.com

Supervisor: ***Sachanyuk-Kavetska Natalia V.*** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Vinnytsia National Technical University, Department of Higher Mathematics, skn1901@gmail.com

УДК 004.92:519.6

Д. К. Руденко
О. П. Прозор

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ ЗАСОБАМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Анотація

У роботі проаналізовано роль диференціальних рівнянь та інтегрального числення в задачах комп'ютерної графіки. Розглянуто рівняння рендерингу як інтегральне рівняння перенесення світла, метод Рунге-Кутта четвертого порядку для чисельного інтегрування траєкторій, масово-пружинні системи для симуляції деформованих об'єктів, а також інтеграл оптичної пропускності у об'ємному рендерингу.

Ключові слова: комп'ютерна графіка, рівняння рендерингу, метод Рунге-Кутта, фізична симуляція, визначений інтеграл, диференціальні рівняння, об'ємний рендеринг.

Abstract

The paper analyzes the application of differential equations and integral calculus in computer graphics problems. Based on the analysis of fundamental sources in the field, the rendering equation as an integral equation of light transport, the fourth-order Runge-Kutta method for numerical integration of trajectories, mass-spring systems for simulating deformable objects, and the optical transmittance integral in volume rendering are considered.

Keywords: computer graphics, rendering equation, Runge-Kutta method, physical simulation, definite integral, differential equations, volume rendering.

Вступ

Комп'ютерна графіка характеризується широким використанням математичних методів і моделей. Як підкреслюють Marschner та Shirley [1], процес генерації зображення на екрані передбачає використання двох взаємодоповнюючих підходів − трасування променів та растеризації − обидва спираються на аналітичну геометрію та методи інтегрального числення. Диференціальні рівняння та визначений інтеграл є математичною основою для широкого класу задач: від моделювання поширення світла до симуляції фізичної поведінки об'єктів у реальному часі.

Pharr, Jakob та Humphreys у своїй праці [2] підкреслюють, що фізично коректний рендеринг у своїй основі є задачею обчислення інтегралів у просторі напрямків та точок поверхні. Своєю чергою, Catto [3] демонструє, що фізичні симуляції в іграх − практично завжди пов'язані з чисельним розв'язанням систем диференціальних рівнянь. Метою цієї роботи є огляд застосування математичного апарату диференціальних рівнянь та інтегрального числення для створення реалістичних зображень із наведенням ключових математичних формулювань.

Рівняння рендерингу як інтегральна модель перенесення світла

Центральним поняттям у фотореалістичному рендерингу є рівняння рендерингу (rendering equation), сформульоване Kajiya у 1986 році [4]. Воно узагальнює широкий клас алгоритмів рендерингу та описує потік світла в сцені як суму власного випромінювання поверхні та відбитого світла від усіх можливих напрямків півсфери. Згідно з [4], рівняння має вигляд:

$$L_o(x,\, \omega_0) \;=\; L_e(x,\, \omega_0) \;+\; \int_\Omega f_r(x,\, \omega_i,\, \omega_0) \;\cdot L_i(x,\, \omega_i) \,\cdot\, (\,\omega_i \,\cdot n)\, d\,\omega_i, \qquad (1)$$

де $L_o(x,\, \omega_0)$ − загальна спектральна радіансність (щільність потоку випромінювання на одиницю площі); $L_e(x,\, \omega_0)$ − власне світло об'єкта ; f_r − функція розподілу двонаправленого відбиття (BRDF), яка визначає частку світла, що відбивається від напрямку ω_i у напрямок ω_0; $L_i(x,\, \omega_i)$ − вхідна радіансність, що падає на точку x із напрямку ω_i; n − нормаль до поверхні; інтегрування ведеться по верхній півсфері Ω, що містить усі можливі напрямки падіння світла.

Як показано у [2], точне аналітичне обчислення інтеграла (1) можливе лише для тривіальних сцен. У загальному випадку використовують стохастичне наближення методом Монте-Карло − оцінку інтеграла за випадковими вибірками:

$$\int_{\Omega} f(\omega)\, d\omega \approx \left(\frac{1}{N}\right) \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{f(\omega_k)}{p(\omega_k)}, \quad (2)$$

де N − кількість вибіркових напрямків ω_k, що генеруються з щільністю розподілу $p(\omega_k)$. Похибка оцінки $O(N^{-1/2})$ визначає компроміс між якістю зображення та часом обчислення.

Алгоритм трасування шляхів (Path Tracing), що безпосередньо реалізує стохастичне розв'язання рівняння (1), є на сьогодні домінуючим методом рендерингу у кінематографічному виробництві [2]. Кожен піксель фінального зображення є результатом наближення визначеного інтеграла (2) за N випадковими шляхами розповсюдження світла. Чим більше N − тим точніше наближення інтеграла і тим чистіше зображення.

Порівняння підходів до наближення інтеграла рендерингу

Таблиця 1. Порівняльні характеристики методів наближення інтегралу рендерингу

Метод	**Збіжність**	**Дисперсія**	**Принцип роботи**	**Застосування у графіці**
Проста вибірка Монте-Карло	$O(N^{-1/2})$	Висока	Рівномірні випадкові напрямки по півсфері	Базовий Path Tracing, навчальні реалізації
Важлива вибірка (IS)	$O(N^{-1/2})$	Знижена	Вибірка з $p(\omega)$ пропорційно до BRDF·cosθ, що зменшує дисперсію	BRDF-семплінг, NEE (Next Event Estimation)
Квазі-МК (Halton, Sobol)	$O(N^{-1}(LogN)\hat{}s)$	Найнижча	Детерміновані низькодискрепантні послідовності замість псевдовипадкових	Денойзинг, рендеринг у реальному часі (RTX)

Диференціальні рівняння у фізичних симуляціях

Catto у своїй лекції на GDC 2015 [3] демонструє, що фізичні рушії ігор оперують системами диференціальних рівнянь. Рух матеріальної точки під дією сил описується другим законом Ньютона:

$$dv/dt = F(x, v, t) / m, \quad dx/dt = v, \quad (3)$$

де x − положення, v − швидкість, F − рівнодійна сил, m − маса. Більшість фізичних задач у іграх є системами таких рівнянь для множини тіл, де сили включають гравітацію, пружні зв'язки, тертя та опору [3].

За Catto [3], одним із найбільш поширених у практиці ігрових рушіїв, є метод Рунге-Кутта четвертого порядку (RK4). Для загального рівняння $dy/dt = F(t, y)$ з кроком h метод обчислює чотири проміжні оцінки нахилу:

$$k_1 = f(t_{\mathrm{n}}, y_{\mathrm{n}}), \quad (4)$$

$$k_2 = f(t_{\mathrm{n}} + h/2,\ y_{\mathrm{n}} + h \cdot k_1/2), \quad (5)$$

$$k_3 = f(t_{\mathrm{n}} + h/2,\ y_{\mathrm{n}} + h \cdot k_2/2), \quad (6)$$

$$k_4 = f(t_{\mathrm{n}} + h,\ y_{\mathrm{n}} + h \cdot k_3), \quad (7)$$

$$y_{\mathrm{n+1}} = y_{\mathrm{n}} + (h/6) \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (8)$$

Метод RK4 має четвертий порядок точності: локальна похибка на кроці становить $O(h^5)$, глобальна − $O(h^4)$ [3]. При зменшені кроку вдвічі глобальна похибка скорочується в 16 разів, що дозволяє знаходити баланс між точністю симуляції та обчислювальними витратами на кадр.

Для симуляції динамічності деформованих об'єктів (тканин, волосся тощо) застосовують підхід на основі масово-пружинних систем. Відповідно автори джерела [5] описують рівняння руху i-го вузла масово-пружинної системи диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m_i x_i'' = \Sigma_j\, k_{ij} \cdot (|x_i - x_j| - L_0) \cdot (x_j - x_i)/|x_j - x_i| - c x_i' + F_{ext}, \quad (9)$$

де m_i – маса i -ої точки, x_i – її положення, $x_i{}'$ – її швидкість, $x_i{}''$ – її прискорення, k_{ij} – коефіцієнт жорсткості пружини між точками i та j, L_0 – довжина пружини у стані спокою, c – коефіцієнт в'язкого затухання, F_{ext} – зовнішні сили (гравітація, вітер). Автори [5] зазначають, що система з N вузлів утворює $3N$ диференціальних рівнянь другого порядку, що зводяться до $6N$ диференціальних рівнянь першого порядку.

Визначений інтеграл в об'ємному рендерингу

Fong та ін. [6] описують фізичну модель об'ємного рендерингу, модель якого ґрунтується на рівнянні перенесення випромінювання крізь середовище з частинками (хмари, туман, дим). Ключовою величиною є оптична пропускність T − частка світла, що проходить крізь об'єм без поглинання та розсіювання. Для неоднорідного середовища з коефіцієнтом екстинкції $\sigma(t)$, оптична пропускність описується формулою:

$$T(x_0, x_1) \; = \; exp(- \int_{x_0}^{x_1} \sigma(t) \; dt \;), \tag{10}$$

де $\sigma(t)$ характеризує питому інтенсивність поглинання та розсіювання світла на одиницю довжини шляху. Формула (10) − це визначений інтеграл від коефіцієнта екстинкції вздовж відрізка $[x_0, x_1]$, який обчислюється послідовним інтегруванням вздовж кожного променя у тривимірному просторі сцени з рівномірним або адаптивним кроком.

Повна модель освітлення об'єму поєднує пропускність (10) з інтегралом розсіяного світла вздовж шляху. Як зазначають Fong та ін. [6], результуюча радіансність вздовж променя від x_0 до x_1 є:

$$L(x^0) = \; T(x^0, x^1) \cdot L(x^1) + \; \int_{x_0}^{x_1} T(x^0, t) \, \sigma_s(t) L_s(t) \, dt, \tag{11}$$

де $\sigma_s(t)$ − коефіцієнт розсіювання, $L_s(t)$ − радіансність розсіяного у точці t світла. Інтеграл (11) у виробничих рендерерах обчислюється тим самим методом Монте-Карло (2), що і рівняння рендерингу (1) [6], а обидва інтеграли розв'язуються в єдиному алгоритмі трасування шляхів.

Висновки

Проведений аналіз джерел показав, що диференціальні рівняння та інтегральне числення є невід'ємним математичним апаратом комп'ютерної графіки. Рівняння рендерингу Kajiya [4] є інтегральним рівнянням перенесення світла, стохастичне наближення якого методом Монте-Карло [2] визначає принцип роботи сучасних алгоритмів трасування шляхів в іграх. Рух фізичних об'єктів описується системою диференціальних рівнянь (3), що розв'язується методом Рунге-Кутта четвертого порядку (4)−(8) [3]. Симуляція деформованих об'єктів за масово-пружинною моделлю [5] також зводиться до системи диференціальних рівнянь другого порядку для кожного вузла. Об'ємний рендеринг хмар та диму ґрунтується на інтегралі оптичної пропускності (10) та інтегралі освітлення (11) [6], які обчислюються методом кроків (ray marching) і Монте-Карло.

Таким чином, пераховані математичні моделі охоплюють ключові підсистеми будь-якого сучасного графічного рушія: систему рендерингу, фізичну симуляцію та спеціальні ефекти. Фундаментальні знання з математики є необхідною умовою для розроблення фізично коректних та ефективних алгоритмів комп'ютерної графіки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Marschner S., Shirley P. Fundamentals of Computer Graphics. – 4th ed. – Boca Raton : A K Peters/CRC Press, 2015. – 752 p.
2. Pharr M., Jakob W., Humphreys G. Physically Based Rendering: From Theory to Implementation. – 4th ed. – Cambridge : The MIT Press, 2023. – 1312 p.
3. Catto E. Numerical Methods [Електронний ресурс] // *Physics for Game Programmers: GDC 2015 Tutorial*. – San Francisco: Game Developers Conference, 2015. – Режим доступу: https://box2d.org/files/ErinCatto_NumericalMethods_GDC2015.pdf (дата звернення: 01.06.2026).
4. Kajiya J. T. The rendering equation // *Proceedings of the 13th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '86)*. – New York : ACM Press, 1986. – P. 143–150. – DOI: 10.1145/15922.15902.
5. Nealen A., Müller M., Keiser R., Boxerman E., Carlson M. Physically Based Deformable Models in Computer Graphics // *Computer Graphics Forum*. – 2006. – Vol. 25, № 4. – P. 809–836. – DOI: 10.1111/j.1467-8659.2006.01000.x.
6. Fong J., Wrenninge M., Kulla C., Habel R. Production volume rendering // *ACM SIGGRAPH 2017 Courses*. – New York : ACM Press, 2017. – Art. 2. – P. 1–79. – DOI: 10.1145/3084873.3084907.

Руденко Даниіл Костянтинович − студент групи 2ПІ-25Б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: twnckc@gmail.com.

Науковий керівник: ***Прозор Олена Петрівна*** − к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, email: prozor@vntu.edu.ua.

Rudenko Danyil K. − student, group 2PI-25B, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: twnckc@gmail.com.

Scientific supervisor: ***Prozor Olena P.*** − PhD (in Pedagogical Sciences), Docent, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: prozor@vntu.edu.ua.

УДК 517.521.2

О. М. Святкіна
М. Б. Ковальчук

СУЧАСНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено знакозмінні числові ряди, їх властивості та практичне застосування у наближених обчисленнях. Основну увагу приділено ознаці Лейбніца як важливому критерію збіжності знакозмінних рядів і способу оцінювання похибки. Розглянуто поняття абсолютної та умовної збіжності, а також особливості поведінки умовно збіжних рядів відповідно до теореми Рімана. Показано, що знакозмінні ряди широко використовуються в математичному аналізі, програмуванні, фізиці, комп'ютерній графіці, цифровій обробці сигналів та сучасних інформаційних технологіях. Наведено історичні відомості про розвиток теорії знакозмінних рядів та приклади їх практичного застосування.

Ключові слова: знакозмінні ряди, збіжність, ознака Лейбніца, абсолютна збіжність, умовна збіжність, наближені обчислення, математичний аналіз.

Abstract

The paper investigates alternating numerical series, their properties, and practical applications in approximate calculations. Special attention is paid to Leibniz's test as an important criterion for the convergence of alternating series and a method for estimating computational errors. The concepts of absolute and conditional convergence are analyzed, as well as the behavior of conditionally convergent series according to Riemann's theorem. It is shown that alternating series are widely used in mathematical analysis, programming, physics, computer graphics, digital signal processing, and modern information technologies. Historical facts about the development of the theory of alternating series and examples of their practical applications are also presented.

Keywords: alternating series, convergence, Leibniz test, absolute convergence, conditional convergence, approximate calculations, mathematical analysis.

Вступ

Знакозмінні ряди займають важливе місце в математичному аналізі, оскільки дозволяють виконувати наближені обчислення складних функцій і математичних виразів, які неможливо обчислити у простій замкненій формі. Їх особливістю є почергове чергування додатних і від'ємних членів, що забезпечує часткову компенсацію значень і сприяє підвищенню точності наближень.

У сучасній математиці, фізиці, інженерії та комп'ютерних технологіях знакозмінні ряди мають надзвичайно важливе значення. Вони використовуються у чисельних методах, математичному моделюванні, програмуванні, цифровій обробці сигналів, комп'ютерній графіці та багатьох інших галузях науки й техніки. Особливо важливим є те, що знакозмінні ряди дозволяють контролювати похибку обчислень, що робить їх ефективним інструментом сучасних інформаційних технологій.

Метою роботи є дослідження властивостей знакозмінних рядів, аналіз ознаки Лейбніца та визначення ролі знакозмінних рядів у наближених обчисленнях і практичних задачах сучасної науки.

Результати дослідження

Історія знакозмінних рядів є дуже цікавою та пов'язана з розвитком математичного аналізу. У XVII столітті Готфрід Вільгельм Лейбніц [1] запропонував знаменитий ряд для обчислення числа π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Для свого часу це було справжнім проривом, адже дозволяло знаходити наближене значення числа π лише за допомогою додавання та віднімання дробів. Якщо обчислити кілька перших членів ряду, можна отримати наближене значення числа π:

$$4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \approx 2{,}895$$

При збільшенні кількості членів значення поступово наближається до точного:

$$\pi \approx 3{,}14159$$

Цікаво, що подібні знакозмінні ряди були відомі ще математикам Керальської школи в Індії приблизно за двісті років до Лейбніца. Вони також використовували нескінченні ряди для наближеного обчислення числа π. Це свідчить про те, що ідея знакозмінних рядів має дуже давнє походження.

Основною особливістю знакозмінних рядів $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, де $a_n > 0$ є взаємна компенсація додатних і від'ємних членів. На відміну від рядів, у яких усі доданки мають однаковий знак, знакозмінні ряди часто збігаються навіть у тих випадках, коли відповідний ряд із додатних членів є розбіжним. Саме чергування знаків забезпечує стабілізацію часткових сум і наближення їх до певного значення.

Одним із найважливіших критеріїв збіжності знакозмінних рядів є ознака Лейбніца [2, 3]. Дана ознака має не лише теоретичне, а й велике практичне значення, оскільки дозволяє встановлювати збіжність ряду без складних інтегральних чи граничних перетворень. Вона також дає уявлення про швидкість збіжності ряду: чим швидше зменшуються члени a_n, тим швидше часткові суми наближаються до істинного значення.

Геометрично поведінку знакозмінного ряду можна пояснити тим, що його часткові суми почергово перевищують і не досягають істинного значення суми. При цьому кожне наступне відхилення стає меншим. Якщо розглядати часткові суми з парною та непарною кількістю членів, то парні часткові суми утворюють монотонно зростаючу послідовність, а непарні — монотонно спадну. Обидві послідовності є обмеженими та прямують до одного й того самого числа, яке і є сумою ряду (рис.1).

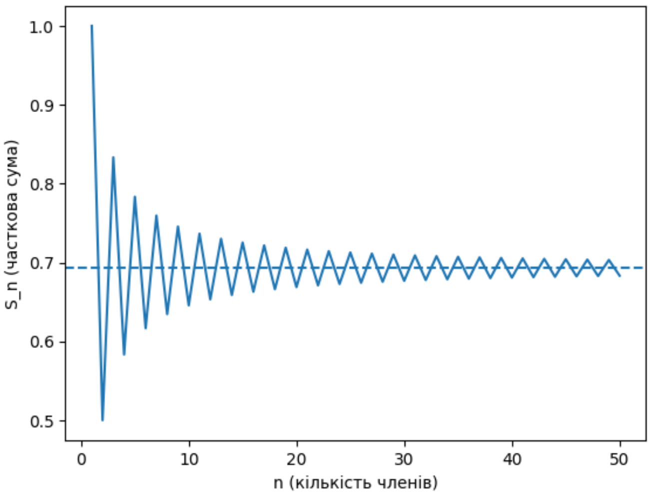


Рисунок 1 - Поведінка часткових сум знакозмінного гармонічного ряду

Саме ця властивість пояснює, чому знакозмінні ряди є надзвичайно зручними у наближених обчисленнях. Якщо ряд задовольняє умови ознаки Лейбніца, то похибку після обчислення перших n членів можна оцінити дуже просто:

$$|R_n| \leq a_{n+1}$$

Це означає, що модуль похибки не перевищує першого відкинутого члена ряду. Таким чином, для досягнення необхідної точності достатньо знайти такий номер n, при якому наступний член стане меншим за допустиму похибку. Завдяки цьому знакозмінні ряди активно використовуються у чисельних методах та комп'ютерних алгоритмах.

Класичним прикладом знакозмінного ряду є знакозмінний гармонічний ряд:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Цей ряд є збіжним за ознакою Лейбніца, оскільки його члени монотонно спадають і прямують до нуля. Якщо взяти лише перші чотири члени ряду, отримаємо наближене значення:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\approx 0{,}5833$$

При цьому похибка не перевищує наступного члена:

$$|R_4|\leq\frac{1}{5}=0{,}2$$

Якщо ж узяти більше членів ряду, наприклад шість або вісім, похибка стане ще меншою. Це демонструє ефективність знакозмінних рядів у практичних обчисленнях.

Особливо цікавим явищем у теорії знакозмінних рядів є теорема Рімана про перестановку доданків. Вона показує, що умовно збіжні ряди мають нестійку природу. Якщо переставляти члени такого ряду, його сума може змінитися. Більше того, умовно збіжний ряд можна перебудувати так, щоб він збігався до будь-якого наперед заданого числа або навіть став розбіжним. Це виглядає парадоксально, оскільки у звичайній арифметиці перестановка доданків не змінює результату.

Особливо показовим прикладом є саме знакозмінний гармонічний ряд. Якщо почати групувати його члени по-іншому, наприклад брати по два додатних члени та одному від'ємному, сума ряду зміниться. Саме тому умовно збіжні ряди інколи порівнюють із "крихкими конструкціями", стабільність яких залежить від порядку елементів.

У сучасних технологіях знакозмінні ряди використовуються надзвичайно широко. Коли людина використовує калькулятор або комп'ютер для обчислення функцій *sin(x), cos(x), arctg(x)* чи *ln(x),* процесор фактично виконує наближені обчислення через ряди Тейлора та Маклорена. Наприклад, розклад функції синуса має вигляд:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{7}{7!}+\cdots$$

Багато таких розкладів є саме знакозмінними рядами. Комп'ютер додає лише кілька перших членів ряду і отримує результат із дуже високою точністю. Ознака Лейбніца дозволяє визначити, коли можна припинити обчислення, оскільки наступні члени вже майже не впливають на результат.

Важливу роль знакозмінні ряди відіграють у комп'ютерній графіці. Під час створення тривимірних моделей, анімації та графічних ефектів постійно використовуються тригонометричні функції, значення яких обчислюються через ряди. Саме тому сучасна графіка, 3D-ігри та системи візуалізації безпосередньо пов'язані з наближеними обчисленнями.

У цифровій обробці сигналів знакозмінні ряди допомагають очищати звук від шуму, стискати зображення та покращувати якість аудіо- й відеосигналів. Коли смартфон під час дзвінка усуває сторонні шуми або обробляє фотографії у форматі JPEG, використовуються математичні алгоритми, що базуються на розкладанні функцій у ряди. Знакозмінні члени дозволяють компенсувати небажані коливання та зберігати основну інформацію.

Не менш важливими є застосування знакозмінних рядів у фізиці. Вони використовуються при дослідженні хвильових процесів, електромагнітних коливань і квантової механіки. За допомогою рядів фізики можуть описувати складні процеси через простіші математичні вирази. Під час обчислення енергетичних рівнів атомів чи квантових станів часто виникають саме знакозмінні ряди. Якщо такий ряд не збігається, результати математичної моделі можуть втратити фізичний зміст.

В інженерії знакозмінні ряди використовуються для моделювання конструкцій, коливань мостів, електричних схем та систем автоматичного керування. Особливо важливими вони є у задачах, де необхідно швидко отримати результат із невеликою похибкою.

Знакозмінні ряди стали основою багатьох сучасних чисельних методів, які використовуються у штучному інтелекті, робототехніці, моделюванні клімату, авіації та космічних дослідженнях. Наприклад, під час польоту літака комп'ютер постійно виконує велику кількість наближених обчислень, де надзвичайно важливими є швидкість і контроль похибки. Саме тому принципи, закладені в ознаці Лейбніца, залишаються актуальними навіть у високотехнологічних системах XXI століття.

Принцип збіжності знакозмінних рядів можна пояснити навіть на простому життєвому прикладі. Уявімо, що людина намагається встановити комфортну температуру у кімнаті на рівні 22°C. Спочатку температура збільшується на +5°C, потім зменшується на −3°C, далі додається лише +1°C, а потім −0,5°C. Кожна наступна зміна стає меншою. У результаті температура починає коливатися навколо потрібного значення та поступово наближається до нього. Саме так поводяться часткові суми знакозмінного ряду: вони поперемінно перевищують і не досягають істинного значення, але поступово збігаються до певної межі.

Таким чином, знакозмінні ряди є не лише важливим об’єктом математичного аналізу, а й потужним інструментом сучасної науки та технологій. Їх використання дозволяє поєднати точність математичних розрахунків із практичною можливістю швидкого та ефективного обчислення складних функцій.

Висновки

Знакозмінні ряди є важливим інструментом математичного аналізу та наближених обчислень. Їх головною особливістю є почергове чергування знаків доданків, що забезпечує компенсацію похибок і сприяє збіжності ряду. Ознака Лейбніца дозволяє легко встановлювати збіжність знакозмінних рядів і оцінювати похибку обчислень, що робить її одним із найважливіших критеріїв математичного аналізу.

У роботі було розглянуто поняття абсолютної та умовної збіжності, а також показано нестійкість умовно збіжних рядів відповідно до теореми Рімана. Доведено, що знакозмінні ряди мають важливе практичне значення та широко використовуються у програмуванні, комп’ютерній графіці, цифровій обробці сигналів, фізиці, інженерії, штучному інтелекті та сучасних інформаційних технологіях.

Отже, знакозмінні ряди можна розглядати не лише як теоретичний об’єкт математичного аналізу, а і як універсальний метод наближених обчислень, який забезпечує точність, ефективність та можливість контролю похибки у складних математичних і технічних задачах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. How Leibniz tried to tell the world he had squared the circle [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://philarchive.org/archive/STRHLT
2. Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І., Ковальчук М. Б. Теорія рядів./ Н. В. Сачанюк-Кавецька, Л. І. Педорченко, М. Б.Ковальчук. Навчальний посібник. - Вінниця : ВНТУ, 2008. 138 с.
3. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з дисципліни «Вища математика». Ч. 10. Числові та функціональні ряди [Електронний ресурс] / уклад. М. Б. Ковальчук. – Вінниця : ВНТУ, 2025. 29 с.

Ольга Миколаївна Святкіна – студентка групи 4КН-25б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: sviatkinaolya@gmail.com

Науковий керівник: ***Майя Борисівна Ковальчук*** - д.пед.н., професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Olha M. Sviatkina - student of group 4KN-25b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: sviatkinaolya@gmail.com

Supervisor: ***Maya B. Kovalchuk*** - Doctor of Science (Ped.), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

УДК 004.42:519.6

О. Д. Коваль
О. П. Прозор

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЧИСЕЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ ДЛЯ ОЦІНКИ ЕНЕРГОВИТРАТ ЛЮДИНИ В РЕАЛЬНОМУ ЧАСІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У доповіді розглядається математична модель та алгоритмічна реалізація підрахунку витрат калорій під час динамічних фізичних навантажень. Проаналізовано недоліки розрахунків за статичними формулами. Запропоновано комплексний підхід, що поєднує кінематичні рівняння, диференціальні моделі серцевого ритму та чисельне інтегрування методом трапецій для підвищення точності фітнес-застосунків.
Ключові слова: чисельне інтегрування, метод трапецій, диференціальні рівняння, фітнес-застосунки, математичне моделювання.

Abstract
The paper considers a mathematical model and algorithmic implementation for calculating calorie expenditure during dynamic physical activity. A comprehensive approach combining kinematic equations, differential models of heart rate, and numerical integration using the trapezoidal rule is proposed to improve the accuracy of fitness applications.
Keywords: numerical integration, trapezoidal rule, differential equations, fitness applications, mathematical modeling.

Вступ

Сучасні системи моніторингу здоров’я переважно використовують статичні скалярні формули для оцінки спалених калорій, ігноруючи динамічну природу фізичних навантажень. Під час реального тренування (біг зі змінним темпом, рух по пересіченій місцевості, подолання перешкод) кінематичні показники неперервно змінюються. Організм людини є складною біомеханічною системою, де витрати енергії залежать не лише від пройденої дистанції, а й від миттєвого прискорення, опору середовища та інерції м’язової маси. Стандартні алгоритми, закладені в базові фітнес-застосунки, переважно розраховують середнє значення активності, що призводить до значних похибок (до 20-30%) у кінцевих результатах, особливо під час високоінтенсивних інтервальних тренувань. Метою даної роботи є застосування математичного апарату для розробки алгоритму, здатного обчислювати енерговитрати з урахуванням інерційності фізіологічних процесів та біомеханіки рухів.

Результати дослідження

Загальна витрата енергії E за проміжок часу T є визначеним інтегралом від миттєвої метаболічної потужності $P(t)$ [2]:

$$E = \int_0^T P(t)dt$$

Функція $P(t)$ не є тривіальною. За основу алгоритму пропонується взяти модифіковане кінематичне рівняння, яке залежить від маси тіла m, миттєвої швидкості $v(t)$ та кута нахилу поверхні $\alpha(t)$.

$$P(t) = m \cdot (C_1 v(t) + C_2 v(t) \sin(\alpha(t)) + P_{rest})$$

де C_1, C_2 − емпіричні константи кисневої вартості (взяті з моделей біомеханіки), P_{rest} − енерговитрати базового метаболізму у стані спокою.

Крім того, для підвищення точності необхідно враховувати серцевий ритм $H(t)$. Оскільки пульс реагує на зміну навантаження із затримкою, його фізіологічна інерційність моделюється лінійним диференціальним рівнянням першого порядку [3]:

$$\tau \frac{dH(t)}{dt} + H(t) = k \cdot P_{mech}(t)$$

де $\tau -$ стала часу відновлення серцево-судинної системи, $k -$ коефіцієнт пропорційності, а $P_{mech}(t) -$ механічна потужність навантаження. Розв'язання цього рівняння дозволяє програмному забезпеченню відрізняти реальне метаболічне навантаження від тимчасових стрибків пульсу (наприклад, через психологічний стрес, викид адреналіну або зміну температури навколишнього середовища). Такий математичний фільтр нівелює вплив зовнішніх некінематичних факторів на загальний підрахунок калорій.

Сенсори смарт-пристроїв (GPS, акселерометр) генерують дискретні масиви даних із заданою частотою опитування (наприклад, 1 Гц). Оскільки аналітичне інтегрування хаотичної функції $\mathrm{P(t)}$ неможливе, у програмному коді застосовуються методи чисельного інтегрування.

Для мінімізації обчислювальної складності (що критично для мобільних пристроїв з обмеженим зарядом батареї) та збереження високої точності, замість базового методу прямокутників реалізовано метод трапецій:

$$E \approx \sum_{i=1}^{N-1} \frac{P(t_i) + P(t_{i+1})}{2} \Delta t$$

де $N -$ кількість отриманих пакетів даних, $\Delta t -$ крок часу між вимірюваннями.

Перевага цього методу підтверджується оцінкою його залишкового члена (похибки апроксимації) R_N, яка залежить від другої похідної підінтегральної функції:

$$|R_N| \leq \frac{T}{12} (\Delta t)^2 \max_{t \in [0,T]} |P''(t)|$$

Оскільки частота надходження даних становить 1 Гц, значення $\Delta t = 1$ с є достатньо малим. Квадратична залежність похибки від кроку $(\Delta t)^2$ гарантує алгоритмічну точність порядку $O((\Delta t)^2)$, що нівелює похибку розрахунків порівняно з інструментальною похибкою самих GPS-датчиків [4].

Додатковою перевагою обраного методу трапецій є його просторова складність $O(1)$. Алгоритм не потребує збереження всього масиву зчитаних кінематичних даних в оперативній пам'яті смартфона або годинника. На кожній ітерації циклу програмі достатньо тримати в пам'яті лише поточне та попереднє значення функції, що суттєво економить апаратні ресурси пристрою під час багатогодинних марафонів або походів.

Висновки

Програмна реалізація алгоритмів підрахунку калорій на основі чисельного інтегрування та диференціальних рівнянь демонструє суттєву перевагу над статичними моделями. Перехід від абстрактного математичного аналізу до дискретних ітеративних алгоритмів дозволяє розробляти високоточне програмне забезпечення для фітнес-індустрії. Використання методу трапецій забезпечує оптимальний баланс між точністю обчислень та навантаженням на процесор мобільного пристрою. Запропонований комплексний підхід відкриває перспективи для створення нового покоління енергоефективних застосунків, які не просто фіксують переміщення у просторі, а глибоко аналізують біомеханіку та фізіологію користувача.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Хусаінов Д. Я. Диференціальні рівняння: підручник / Д. Я. Хусаінов, А. В. Шатирко. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2023 – 410 с.

2. McArdle W. D., Katch F. I., Katch V. L. Exercise Physiology: Nutrition, Energy, and Human Performance. – 8th ed. – Lippincott Williams & Wilkins, 2014. – 1088 p.

3. Patel M. S., Asch D. A., Volpp K. G. Wearable devices as facilitators, not drivers, of health behavior change // JAMA. – 2015. – Vol. 313, No. 5. – P. 459-460

4. Michael R. King, Nipa A. Mody Numerical and Statistical Methods for Bioengineering : Applications in MATLAB. Cambridge Texts in Biomedical Engineering. − Cambridge University Press, 2010. – 594 p.

Коваль Олександр Дмитрович − студент групи 2ПІ-25Б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: oleksandr.kov.dm@gmail.com

Прозор Олена Петрівна − к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, email: prozor@vntu.edu.ua

Koval Oleksandr D. – Faculty of Information Technology and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: oleksandr.kov.dm@gmail.com

Prozor Olena P. − PhD (in Pedagogical Sciences), Docent, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: prozor@vntu.edu.ua

УДК 517.5.52

В. В. Чуприна

Н. В. Сачанюк-Кавецька

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ РЯДІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В МЕРЕЖАХ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглянуто застосування теорії рядів для математичного моделювання процесів розповсюдження інформації в мережах. Проаналізовано використання степеневих рядів, рядів Фур'є та генеруючих функцій для опису динаміки інформаційних потоків. Показано можливість використання математичного апарату теорії рядів для прогнозування поширення повідомлень та аналізу структури мереж.

Ключові слова: теорія рядів, степеневий ряд, ряд Фур'є, інформаційні мережі, математичне моделювання.

Abstract

This paper examines the application of series theory to the mathematical modeling of information propagation processes in networks. It analyzes the use of power series, Fourier series, and generating functions to describe the dynamics of information flows. The possibility of using the mathematical apparatus of series theory for predicting message propagation and analyzing network structures is demonstrated.

Keywords: series theory, power series, Fourier series, information networks, mathematical modeling.

Вступ

Сучасні інформаційні мережі характеризуються складною структурою та великою швидкістю передачі даних [1, 3]. Для дослідження закономірностей поширення інформації використовуються математичні моделі, які дозволяють описувати динаміку інформаційних потоків. Одним із ефективних інструментів аналізу є теорія рядів, що забезпечує можливість подання складних функцій у вигляді нескінченних сум та спрощує дослідження процесів поширення інформації. Теорія рядів широко застосовується для побудови математичних моделей та аналізу складних процесів. Зокрема, степеневі ряди дозволяють описувати зміну параметрів системи в часі, а ряди Фур'є використовуються для дослідження періодичних закономірностей. У задачах моделювання інформаційних мереж ці методи дають змогу прогнозувати поширення повідомлень та оцінювати вплив структури мережі на передачу інформації. Крім того, використання рядів дозволяє спрощувати обчислення складних функціональних залежностей, аналізувати стійкість математичних моделей та досліджувати поведінку інформаційних потоків за різних умов функціонування мережі. Розклади функцій у ряди створюють основу для наближених обчислень і чисельного моделювання, що є важливим під час дослідження великих мережевих систем, для яких точні аналітичні розв'язки часто є недоступними.

Результати дослідження

Для опису кількості користувачів, які отримали інформацію в момент часу t, може використовуватися степеневий ряд [1]:

$$I(t)= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ t^n \tag{1}$$

Коефіцієнти ряду визначаються параметрами мережі та інтенсивністю передачі повідомлень між вузлами. Важливою характеристикою степеневого ряду є його збіжність [1]. Радіус збіжності визначає область значень, у якій ряд коректно описує поведінку системи. Аналіз збіжності дозволяє оцінити точність математичної моделі та межі її застосування під час прогнозування процесів поширення інформації в мережах. Для аналізу періодичних змін активності користувачів застосовується ряд Фур'є [2]:

$$I(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)) \quad (2)$$

Використання рядів Фур'є дозволяє не лише досліджувати періодичність інформаційних процесів, а й виявляти закономірності активності користувачів у різні проміжки часу. Це дає можливість визначати моменти найбільшої інтенсивності поширення інформації та підвищувати точність прогнозування динаміки інформаційних потоків у мережі.

Розкладання в ряд Фур'є дозволяє визначити основні періоди поширення інформації та дослідити циклічні закономірності активності мережі [2]. Для аналізу ймовірностей отримання повідомлень використовується генеруюча функція [4]. Генеруючі функції широко застосовуються в теорії графів і мережевому аналізі. Їх використання дозволяє визначати характеристики структури мережі, оцінювати ймовірність охоплення інформацією певної кількості вузлів та аналізувати ефективність процесу поширення повідомлень у складних мережах.

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n\ x^n \quad (3)$$

де p_n— імовірність того, що вузол мережі отримає повідомлення *n* разів [4,5].

Застосування теорії рядів дає можливість досліджувати поведінку інформаційних потоків, виконувати прогнозування та оцінювати вплив структури мережі на швидкість поширення інформації. Крім того, методи теорії рядів можуть використовуватися для аналізу стійкості інформаційних процесів у мережах. За допомогою дослідження збіжності рядів можна оцінювати коректність математичної моделі та межі її застосування. Це особливо важливо під час прогнозування поширення великих обсягів інформації в соціальних мережах і комунікаційних системах. Використання математичних моделей на основі рядів також дозволяє зменшити обчислювальну складність аналізу порівняно з детальним моделюванням кожного окремого вузла мережі. Отримані результати свідчать про перспективність використання теорії рядів у задачах аналізу та прогнозування інформаційних потоків. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на врахування особливостей реальних мереж, зокрема неоднорідності зв'язків між вузлами та змінної активності користувачів.

Висновок

У роботі досліджено можливості застосування теорії рядів для математичного моделювання процесів поширення інформації в мережах. Проведений аналіз показав, що використання степеневих рядів, рядів Фур'є та генеруючих функцій дозволяє ефективно описувати динаміку інформаційних потоків, виявляти закономірності їх розвитку та досліджувати вплив структури мережі на процес передачі повідомлень.

Встановлено, що степеневі ряди можуть використовуватися для моделювання зміни кількості користувачів, охоплених інформацією в певний момент часу, а дослідження їх збіжності дає змогу визначати межі застосування побудованих математичних моделей. Показано, що розкладання функцій у ряди Фур'є є ефективним засобом аналізу періодичних змін активності користувачів та виявлення циклічних закономірностей поширення інформації. Використання генеруючих функцій дозволяє оцінювати ймовірнісні характеристики процесу передачі повідомлень і досліджувати особливості структури мережі.

Отримані результати свідчать про те, що математичний апарат теорії рядів є дієвим інструментом аналізу складних інформаційних систем. Його застосування сприяє підвищенню точності прогнозування інформаційних процесів, спрощенню обчислень та дослідженню властивостей мереж різної структури. Перспективним напрямом подальших досліджень є розробка більш складних моделей, які враховуватимуть неоднорідність мережевих зв'язків, зміну активності користувачів у часі та вплив зовнішніх факторів на поширення інформації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика.- Київ : А.С.К., 2011. - 648 с.

2. Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення .Т. 3. - Київ : Наукова думка, 2003. 800 с.

3. Newman M. E. J. Networks: An Introduction. Oxford University Press, 2010. 720 с.

4. Daley D. J., Gani J. Epidemic Modelling: An Introduction. Cambridge University Press, 1999. 404 p.

5. Pastor-Satorras R., Vespignani A. Epidemic Spreading in Scale-Free Networks // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. No. 14. P. 3200–3203.

Чуприна Владислав Віталійович, студент першого курсу, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, direb3@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Chupryna Vladislav V., first-year student, Faculty of Electrical Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, direb3@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

УДК 517.5.52

Б. І. Уткін

Н. В. Сачанюк-Кавецька

ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Роботу присвячено застосуванню апарату функцій багатьох змінних для математичного моделювання та оптимізації електричних кіл. За допомогою методів диференціального числення та множників Лагранжа досліджується пошук умовних екстремумів для мінімізації теплових втрат та узгодження опорів для максимальної передачі потужності.

Ключові слова: функції багатьох змінних, електричне коло, оптимізація, метод множників Лагранжа, умовний екстремум, теплові втрати.

Abstract

The work is devoted to programming the apparatus of the function of many variables for mathematical modeling and optimization of electrical circuits. Using the methods of differential calculation and Lagrange multipliers, the search for conditional extrema is investigated for solving practical problems of electrical engineering - minimizing heat losses and matching resistances for maximum power transmission.

Keywords: functions of many variables, electrical circuit, optimization, Lagrange multiplier method, conditional extremum, heat losses.

Вступ

Сучасний етап розвитку електротехніки, радіоелектроніки, мікропроцесорної техніки та великих енергетичних систем характеризується невпинним ускладненням апаратури та масштабів мереж. Проектування розгалужених електричних ланцюгів, інтегральних мікросхем чи систем розподілу живлення (наприклад, Smart Grid) вимагає одночасного врахування величезної кількості параметрів: струмів гілок, вузлових потенціалів, активних та реактивних опорів, ємностей та індуктивностей. У таких умовах класичних методів розрахунку, що спираються виключно на алгебраїчні рівняння або функції однієї змінної, стає вкрай не достатньо [1-2].

Математичним фундаментом для глибокого аналізу та розв’язання цих проблем виступає теорія функцій багатьох змінних (ФБЗ). Застосування багатовимірного диференціального числення дозволяє не просто описувати поточний фізичний стан складних систем, а й цілеспрямовано їх оптимізувати. Інженерні задачі сьогодення вимагають пошуку найкращих режимів роботи за ключовими критеріями: мінімізація втрат енергії (тепловиділення), максимізація коефіцієнта корисної дії (ККД), забезпечення стабільності напруги, мінімізація масо габаритних показників або вартості компонентів. Усі ці задачі зводяться до пошуку екстремумів функцій багатьох змінних.

Актуальність теми зумовлена необхідністю інтеграції фундаментальних математичних методів у практичну площину інженерного проектування. Розуміння того, як фізичні процеси описуються мовою градієнтів, матриць Гессе та множників Лагранжа, є обов'язковою умовою для розробки сучасних систем автоматизованого проектування (САПР) та підвищення енергоефективності пристроїв.

Результати дослідження

У процесі виконання роботи було детально досліджено математичний апарат, що лежить в основі аналізу розгалужених ланцюгів. Результати дослідження можна розділити на кілька ключових напрямків, кожен з яких демонструє перехід від абстрактної математики до конкретної фізичної реалізації.

1. Математична модель електричного кола як скалярного поля багатьох змінних.

Будь-яке електричне коло можна математично представити як топологічний граф, стан якого визначається вектором незалежних змінних. Змінними можуть виступати струми у гілках I_k, напруги на елементах U_k, або фізичні параметри самих компонентів *(R, L, C)*. Будь-яка енергетична або якісна характеристика такого кола (наприклад, сумарна потужність) є функцією багатьох змінних:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Для того, щоб знайти оптимальний режим роботи кола, необхідно дослідити цю функцію на екстремум. Згідно з основами математичного аналізу, необхідною умовою існування екстремуму є рівність нулю повного диференціала функції, що еквівалентно рівності нулю всіх її частинних похідних першого порядку. Математично це означає, що градієнт цільової функції має дорівнювати нульовому вектору:

$$\nabla f = (\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \dots, \frac{\delta f}{\delta x_n}) = 0$$

Достатньою умовою для визначення типу екстремуму (мінімум чи максимум) є дослідження матриці других частинних похідних — матриці Гессе. Якщо ця квадратична форма є додатно визначеною, енергетична система перебуває у стані стійкої рівноваги з мінімальними витратами енергії [3].

2. Доведення принципу мінімуму теплової дії (принцип Максвелла).

Однією з найважливіших задач є оптимізація теплових втрат. Згідно із законом Джоуля-Ленца, потужність, що розсіюється на резистивному елементі, дорівнює *I^2*R*. Для розгалуженого кола, що складається з n паралельних гілок, загальна теплова потужність описується функцією n змінних:

$$P(I_1, I_2, \dots, I_n) = \sum_{k=1}^{n} I_k \ \hat{}2\, R_k$$

Дослідження цієї функції підтверджує фундаментальний фізичний принцип найменшої дії, сформульований Дж. К. Максвеллом: у пасивному лінійному колі струми розподіляються таким чином, щоб загальна генерація тепла (дисипація енергії) була мінімально можливою при заданих зовнішніх джерелах. Проте, цей мінімум не є безумовним.

3. Застосування методу множників Лагранжа для пошуку умовного екстремуму [4].

Струми I_k у гілках кола не можуть набувати довільних значень. Їхня сукупність обмежена топологією графа мережі — а саме, першим законом Кірхгофа (баланс струмів у вузлах). Для кола з m вузлів ми маємо m*-1* незалежних рівнянь зв'язку:

$$\varphi_j(I_1, I_2, \dots, I_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} I_k = 0, \qquad j = 1, \dots, m-1$$

де a_{jk} — коефіцієнти матриці інцидентності (набувають значень 1, -1 або 0).

Оскільки ми маємо цільову функцію P та рівняння зв'язку φ_j, задача оптимізації струморозподілу класифікується у вищій математиці як задача на умовний екстремум. Найбільш потужним аналітичним методом її розв'язання є метод множників Лагранжа. Для цього будується допоміжна функція Лагранжа:

$$L(I_1, \dots, I_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) = \sum_{k=1}^{n} I_k^2 R_k + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} I_k \right)$$

де φ_j — невідомі множники Лагранжа. Для знаходження мінімуму диференціюємо функцію Лагранжа за кожним струмом I_k і прирівнюємо до нуля:

$$\frac{\delta L}{\delta I_k} = 2\, I_k R_k + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, a_{jk} = 0$$

З цього рівняння випливає результат, який об'єднує чисту математику і фізику. Вираз $I_k R_k$ є спадом напруги на k-й гілці. Якщо ми перенесемо суму з множниками Лагранжа у праву частину, то отримаємо рівняння, що за своєю структурою ідеально відповідає другому закону Кірхгофа (про суму спадів напруг у контурі). У цій математичній моделі множники Лагранжа λ_j набувають абсолютно чіткого фізичного змісту — з точністю до постійного коефіцієнта вони є вузловими потенціалами електричного кола. Таким чином, метод умовного екстремуму математично доводить, що закони Кірхгофа є прямим наслідком енергетичної оптимізації системи.

4. Параметричний синтез кола для передачі максимальної потужності

Функції багатьох змінних застосовуються для синтезу параметрів кола — наприклад, для узгодження навантаження з джерелом живлення. Розглянемо джерело з внутрішнім комплексним опором $Z_i = R_i + jX_i$, до якого підключено навантаження $Z_H = R_H + jX_H$.Активна потужність, що виділяється на навантаженні, є цільовою функцією двох змінних (активного опору R_Hта реактивного X_H):

$$P(R_H, X_H) = \frac{E^2 R_H}{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}$$

Для знаходження умов передачі максимальної енергії необхідно дослідити цю функцію на безумовний екстремум. Знайшовши частинні похідні за обома змінними та прирівнявши їх до нуля $\frac{\delta\, P}{\delta\, R_H} = 0$ та $\frac{\delta\, P}{\delta\, X_H} = 0$, отримуємо систему, розв'язком якої є: $X_H = -X_i$ (компенсація реактивності) та $R_H = R_i$.

Таким чином, за допомогою аналізу екстремумів ФБЗ строго доводиться класична теорема електротехніки: для передачі максимальної потужності імпеданс навантаження має бути комплексно-спряженим до імпедансу джерела ($Z_H = Z_i^*$).

Висновок

Проведений аналіз показав, що використання диференціального числення функцій багатьох змінних в електротехніці дає змогу описувати та досліджувати електричні кола за допомогою математичних методів. Знаходження градієнтів цільових функцій і пошук умовних екстремумів методом множників Лагранжа дозволяють визначати найкращі значення параметрів електричних кіл за заданих обмежень. Це створює основу для розробки ефективних алгоритмів оптимізації та підвищення точності електротехнічних розрахунків. Вони є основою сучасних комп'ютерних методів моделювання (наприклад, у середовищах MATLAB, Simulink чи SPICE), де кількість змінних може сягати мільйонів, а вручну знайти оптимальне рішення неможливо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Rahmani-Andebili M. Advanced Electrical Circuit Analysis: Practice Problems, Methods, and Solutions. — Cham: Springer, 2022. — 152 p.
2. Borkar V. S., Rao K. S. M. Elementary Convexity with Optimization. — Singapore: Springer, 2023. — 148 p.
3. Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення: Навч. посібник. В 3-х т. — Т. 1. — К.: Вища школа, 2002. — 600 с.
4. Шегедин О. І., Маляр В. С. Теоретичні основи електротехніки: Підручник. — Львів: Магнолія-2006, 2010. — 512 с.

Уткін Богдан Іванович, студент першого курсу, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, ubogdan673@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Utkin Bohdan I., first-year student Faculty of Electric Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, ubogdan673@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

УДК 517.5.52

Г. В. Яровенко
Н. В. Сачанюк-Кавецька

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ КОМПЕНСАЦІЇ ВИЩИХ ГАРМОНІК В СИСТЕМАХ ЕЛЕКТРОПОСТАЧАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ АКТИВНИХ ФІЛЬТРІВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено математичне моделювання процесів компенсації вищих гармонік у трифазних системах електропостачання за допомогою активних фільтрів гармонік. Побудовано математичну модель керування на основі p-q теорії та перетворення Кларка, отримано залежності для формування компенсуючих струмів. Показано, що застосування запропонованого підходу забезпечує ефективне зниження гармонічних спотворень і покращення якості електроенергії.

Ключові слова: активний фільтр гармонік, *p-q* теорія, компенсуючий струм, нелінійне навантаження, якість електроенергії, THD

Abstract

The paper investigates mathematical modeling of higher harmonic compensation processes in three-phase power supply systems using active harmonic filters. A mathematical control model based on p-q theory and Clark transform is constructed, and dependencies for the formation of compensating currents are obtained. It is shown that the application of the proposed approach provides an effective reduction of harmonic distortions and improvement of power quality.

Keywords: active harmonic filter, *p-q* theory, compensating current, non-linear load, power quality, THD.

Вступ

Сучасні системи електропостачання дедалі ширше використовують силові напівпровідникові перетворювачі, частотно-регульовані приводи, випрямлячі та інше нелінійне обладнання. Експлуатація таких пристроїв супроводжується появою вищих гармонік струму і напруги, які погіршують якість електроенергії, спричиняють додаткові втрати потужності, перегрів трансформаторів і кабельних ліній, а також знижують надійність роботи електротехнічного обладнання.

Традиційним засобом боротьби з гармонічними спотвореннями є пасивні LC-фільтри. Проте їх ефективність обмежується фіксованими параметрами налаштування, можливістю виникнення резонансних режимів та недостатньою адаптивністю до змін характеру навантаження. У зв'язку з цим значного поширення набули активні фільтри гармонік, здатні в режимі реального часу компенсувати небажані гармонічні складові струму [1-2].

Ефективність роботи активних фільтрів значною мірою визначається математичними алгоритмами обробки сигналів та формування компенсуючих струмів. Одним із найбільш поширених підходів є теорія миттєвої активної та реактивної потужності (*p-q* теорія), яка забезпечує оперативне виділення гармонічних складових і формування керуючих сигналів для силового інвертора.

Результати дослідження

Найбільш поширеним підходом для побудови систем керування паралельними АФГ є теорія миттєвої активної та реактивної потужності (p-q) теорія Гірофумі Акагі. Математичний опис процесів починається з перетворення координат трифазної системи струмів навантаження $i_a(t)$, $i_b(t)$, $ic(t)$ та напруг $v_a(t)$, $v_b\,(t)$, $v_c(t)$ у двофазну нерухому систему α-β за допомогою ортогонального перетворення Кларка:

$$\begin{bmatrix} i\alpha \\ i\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt[2]{3}}{2} & -\frac{\sqrt[2]{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ia \\ iв \\ ic \end{bmatrix}.$$

Аналогічно трансформуються миттєві значення фазних напруг. Згідно з p-q теорією, миттєва активна (p) та миттєва реактивна (q) потужності трифазної системи розраховуються як:

$$\binom{\mathrm{p}}{q} = \begin{bmatrix} v_\alpha & v_\beta \\ -v_\beta & v_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\alpha \\ i\beta \end{bmatrix}.$$

У системах із нелінійним навантаженням обчислені потужності p та q містять постійні складові ($\overrightarrow{p}$, $\vec{q}$), які відповідають першій (основній) гармоніці, та змінні складові ($\overrightarrow{p}$, $\vec{q}$), що зумовлені вищими гармонічними складовими:

$$\mathrm{p} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{p} \qquad q = \vec{q} + \vec{q}.$$

Для компенсації вищих гармонік і викривлень струму АФГ повинен згенерувати струми, які сформують лише змінні складові потужностей. Математична модель виділення сигналів завдання для компенсуючих струмів у координатах α-β має вигляд:

$$\begin{bmatrix} i^*_{\alpha c} \\ i^*_{\beta c} \end{bmatrix} = \frac{1}{v_\alpha^2 + v_\beta^2} \begin{bmatrix} v_\alpha & -v_\beta \\ v_\beta & v_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{p} \\ \vec{q} \end{bmatrix}$$

Виконавши зворотне перетворення Кларк, отримуємо трифазні еталонні сигнали струмів активного фільтра $i^*_{ac}(t)$, $i^*_{cb}(t)$, $i^*_{cc}(t)$. Інвертор напруги, який виступає виконавчим органом АФГ, відпрацьовує ці сигнали, мінімізуючи спотворення в мережі.

Застосування такої моделі дозволяє знизити сумарний коефіцієнт гармонічних спотворень напруги до значень:

$$\mathrm{THD_v} = \frac{\sqrt{\sum_2^n v_k^2}}{v_1} * 100\% < 5\%.$$

Це повністю задовольняє жорсткі вимоги міжнародного стандарту IEEE519 та чинного в Україні нормативу ДСТУ EN 50160:2023 [3].

Висновок

У роботі розглянуто проблему погіршення якості електроенергії, спричинену наявністю вищих гармонік у системах електропостачання з нелінійними навантаженнями. Показано, що гармонічні спотворення призводять до додаткових втрат енергії, перегріву електрообладнання та зниження надійності функціонування електричних мереж.

Побудовано математичну модель керування активним фільтром гармонік на основі теорії миттєвої активної та реактивної потужності та перетворення Кларка. Запропонований підхід дає змогу виконувати виділення гармонічних складових струму навантаження та формувати компенсуючі сигнали для їх ефективного пригнічення в режимі реального часу.

Проведений аналіз показав, що використання активних фільтрів гармонік забезпечує суттєве зменшення рівня гармонічних спотворень напруги та струму, що сприяє підвищенню якості електроенергії й забезпеченню відповідності сучасним нормативним вимогам. Отримані результати підтверджують ефективність застосування математичного моделювання при розробці систем керування активними фільтрами та можуть бути використані для вдосконалення засобів компенсації вищих гармонік у промислових системах електропостачання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Жежеленко І. В., Саєнко Ю. Л. Показники якості електроенергії та їх контроль на промислових підприємствах. Маріуполь: ПДТУ, 2012. 188 с.
2. Akagi H., Watanabe E. H., Aredes M. Instantaneous Power Theory and Applications to Power Conditioning. John Wiley & Sons, 2017. 432 p.
3. ДСТУ EN 50160:2023. Характеристики напруги електропостачання в електричних мережах загальної призначеності.

Яровенко Ганна Віталіївна, студентка першого курсу, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, yarovenkoanna0912@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Yarovenko Hanna V., first-year student, Faculty of Electrical Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia,

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

УДК 519.6:515.162

М. О. Михалевич
М. Б. Ковальчук

Сингулярний розклад (SVD) у розв'язанні систем лінійних рівнянь

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглядається сингулярний розклад матриці (SVD) як сучасний та ефективний метод розв'язання систем лінійних рівнянь. Пояснюється, чому класичні методи не завжди забезпечують результат при роботі з великими або майже виродженими системами. Розглянуто геометричний та практичний зміст SVD. Особлива увага приділяється інтуїтивному поясненню методу та його застосуванню у сучасних галузях: машинному навчанні, комп'ютерній графіці, обробці сигналів і аналізі даних. Показано, що SVD дозволяє не лише знаходити розв'язки, а й аналізувати структуру інформації в даних та підвищувати стійкість обчислень.

Ключові слова: сингулярний розклад, SVD, системи лінійних рівнянь, стійкість обчислень, найменші квадрати, аналіз даних.

Abstract

The paper examines the singular value decomposition (SVD) of a matrix as a modern and effective method for solving systems of linear equations. It explains why classical methods do not always provide results when working with large or nearly singular systems. The geometric and practical meaning of SVD, the principle of constructing the pseudoinverse matrix, and finding the least-squares solution are considered. Special attention is given to an intuitive explanation of the method and its applications in modern fields: machine learning, computer graphics, signal processing, and data analysis. It is shown that SVD allows not only finding solutions but also analyzing the structure of information in data and improving computational stability.

Keywords: singular value decomposition, SVD, systems of linear equations, computational stability, pseudoinverse matrix, least squares.

Вступ

Системи лінійних рівнянь є основою великої кількості математичних, технічних та комп'ютерних задач. Вони використовуються в економіці, фізиці, машинному навчанні, програмуванні, інженерії та багатьох інших сферах. Практично будь-яка задача моделювання певного процесу в результаті приводиться до розв'язання системи рівнянь.

На перших етапах вивчення вищої математики основна увага приділяється класичним методам: методу Гауса, формулам Крамера або матричному підходу через обернену матрицю. Для невеликих систем ці методи є зручними та ефективними. Проте, в реальних задачах часто виникають ситуації, коли: система містить велику кількість рівнянь; дані отримані експеремеентально та мають похибки; матриця є погано обумовленою; кількість рівнянь не збігається з кількістю невідомих. У таких випадках традиційні методи можуть працювати нестабільно. Навіть дуже мала похибка у вихідних даних інколи призводить до значної зміни результату. Через це виникає необхідність у методах, які здатні забезпечити стійкий та надійний розв'язок.

Одним із найбільш ефективних сучасних методів є сингулярний розклад матриці - SVD (Singular Value Decomposition). Цей метод дозволяє не лише знайти розв'язок системи, а й дослідити структуру матриці, визначити її ранг, оцінити рівень нестійкості та побудувати найкраще неближене рішення.

Мета доповіді розглянути сингулярний розклад матриці (SVD) як ефективний метод розв'язання систем лінійних рівнянь.

Результати дослідження

SVD дозволяє здійснити операції: поворот простору; розтягування або стискання; ще один поворот.

Саме тому, SVD має важливий геометричний зміст. Метод показує, у яких напрямках дані змінюються найбільше, а які напрямки майже не впливають на результат.

Сингулярні числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ характеризують важливість відповідних напрямків у просторі даних. Якщо деякі сингулярні числа дуже малі, це означає, що система є нестабільною або містить надлишкову інформацію.

Однією з причин популярності SVD є його наочна геометрична інтерпретація. Будь-яку матрицю можна уявити як деяке перетворення простору. Наприклад, коло після дії матриці може перетворитися не еліпс. SVD показує у яких випадках простір розтягується нейбільше, у яких напрямках інформація майже втрачається, які компоненти є найбільш значущими.

Якщо деяке сингулярне число дуже близьке до нуля, це означає, що відповідний напрямок майже стискається в точку. Саме такі ситуації створюють проблеми для класичних методів розв'язання систем рівнянь. Таким чином, SVD дозволяє не лише виконати обчислення, а й зрозуміти внутрішню структуру задачі.

Класичні методи добре працюють лише для «ідеальних» систем. Проте, в реальних задачах дані практично завжди містять похибки. Наприклад, результати вимірювань можуть бути неточними, датчики мають шум, комп'ютерні обчислення виконуються з округленням. У таких умовах навіть незначна помилка здатна викликати ситтєву зміну результату. Особливо небезпечними є майже сингулярні матриці. У таких матрицях деякі рядки або стовпці майже лінійно незалежні. Це означає, що система фактично не має однозначного точного результату. Метод Гауса у таких випадках може: накопичувати похибки; давати нестабільні результати; втрачати точність.

SVD дозволяє уникнути цих проблем завдяки аналізу сингулярних чисел. Якщо певне число дуже мале, його можна не враховувати при побудові розв'яку. Це дозволяє відфільтрувати шум і зробити результат стабільнішим.

Одним із найважливіших застосувань SVD є побудова найменш квадратичного розв'язку. У багатьох практичних задачах: система не має точного розв'язку; система містить більше рівнянь, ніж невідомих. У такому випадку, неможливо знайти вектор x, який точно задовольняє всі рівняння. Тому шукають розв'язок, що мінімізує суму квадратів похибок. SVD є одним із найкращих способів знаходження такого наближення, оскільки забезпечує стійкість, мінімізує вплив шуму, дозволяє контролювати точність результату.

Щоб краще зрозуміти, чому метод SVD є настільки важливим, розглянемо просту практичну ситуацію.

До прикладу, необхідно визначити залежність між певними експериментальними даними. Маємо результати вимірювань температури та тиску під час фізичного експерименту. Через похибки виміювань дані не є ідеальними, тому система рівнянь виходить суперечливою.

Нехай, задано систему:

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 5x + 4y = 7, \\ 7x + 6y = 9. \end{cases}$$

У цій системі дано три рівняння, але лише два невідомих.

Тобто, система є переобумовленою. У більшості випадків така система не має точного розв'язку, який одночасно задовольняє всі рівняння.

Класичний метод Гауса намагатиметься знайти точний результат, але через суперечність даних виникатимуть похибки. Метод SVD підходить до задачі інакше: він шукає не «ідеальний», а найкращий можливий розв'язок.

Матриця системи має вигляд:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Після виконання сингулярного розкладу:

$$A = U \sum V^T$$

отримуємо ортогональні матриці U та V та сингулярні числа, які показують напрямки даних.

Далі обчислюється псевдообернена матриця та знаходиться розв'язок:

$$\mathrm{x} = \mathrm{V} \sum\nolimits^{+} U^T \mathrm{B}$$

У результаті отримується наближене значення, яке мінімізує суму квадратів похибок.

SVD фактично розуміє, що дані містять шум, і не намагається сліпо знайти точний розв'язок. Метод автоматично знаходить найбільш стабільний варіант відповіді.

Саме тому SVD широко вкористовується там, де дані ніколи не бувають ідеальними: у прогнозуанні; у медицині; у фінансових моделях; у системах ШІ.

Одне з найвідоміших застосуань SVD - стиснення зображень. Будь-яке цифрове зображення можна представити у вигляді великої матриці чисел. Кожне число відповідає яскравості пікселя. SVD дозволяє розкласти цю матрицю на головні компоненти. Найбільші сингулярні числа містять основну інформацію про зображення, а маленькі – другорядні деталі та шум. Цікаво те, що якщо залишити лише частину найбільших сингулярних чисел, зображення все одно виглядатиме майже однаково для людського ока. Тобто SVD дозволяє суттєво зменшити розмір файлу, при цьому майже не погіршуючи якість зображення. Саме за таким принципом працюють деякі алоритми стиснення даних та обробки фотографій.

Сьогодні сингулярний розклад використовується у великій кількості сучасних технологій:

- *у задачах аналізу великих даних SVD застосовується для*: зменшення розмірності; виділення головних компонент; побудови рекомендаційних систем (наприклад, рекомендації фільмів або музики базуються на методах пов'язаних із SVD;
- *обробка зображень*: стискання зображень; видаляти шум; виділяти основні елементи картинки (навіть після видалення частинки стингулярних чисел зображення може залишатися майже незмінним для людського ока);
- *комп'ютерна графіка*: побудови 3D-моделей; анімації; оптимізації геометричних обчислень;
- *фізика та інженерія:* аналіз сигналів; обробка експериментальних даних; розв'язання складних систем моделювання.

Основними перевагами SVD є: висока чисельна стійкість; можливість роботи з будь-якими прямокутними матрицями; визначення рангу матриці; побудова найкращого наближеного розв'язку; стійкість до шуму та похибок. Сингулярний розклад матриці є не просто ще одним способом розв'язання систем лінійних рівнянь. Це універсальний інструмент аналізу даних, який дозволяє зрозуміти структуру матриці та забезпечити стійкість обчислень навіть у складних ситуаціях.

На відміну від класичних методів, SVD: працює з нестабільними системами; дозволяє знаходити найменш квадратичні розв'язки; ефективно бореться з похибками та шумом; широко застосовується у сучасних інформаційних технологіях.

Таким чином, сингулярний розклад є одним із ключових методів сучасної прикладної математики та відіграє важливу роль у розвитку комп'ютерних наук, аналізу даних та штучного інтелекту.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Strang G. Linear Algebra and Its Applications, 5th Edition, 2016.
2. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations, 4th Edition, 2013.
3. Trefethen L. N., Bau D. Numerical Linear Algebra, 1997.
4. Meyer C. D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, 2000.

Марія Олексанрівна Михалевич - студентка групи 4КН-25б, факультет Інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: mariamihalevic394@gmail.com

Науковий керівник: ***Майя Борисівна Ковальчук*** **-** д.пед.н., професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

Mariia O. Mykhalevych **-** student of group 4KS-25b, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: mariamihalevic394@gmail.com

Supervisor: ***Maya B. Kovalchuk*** **-** Doctor of Science (Ped.), Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske shose, 95, e-mail: maya.kovalchuk@gmail.com

УДК 621.391:57.087

Б. В. Гончар
О. І. Тютюнник

ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ТА МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ БІОМЕДИЧНИХ СИГНАЛІВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
Роботу присвячено дослідженню засад часового та спектрального аналізу сигналів на прикладі вузькосмугових електричних біомедичних сигналів. Розглянуто особливості представлення сигналів у часовій і частотній областях та методи визначення їхніх параметрів. Проаналізовано застосування перетворення Фур'є для оцінювання спектральних характеристик і структури біомедичних сигналів.
Ключові слова: біомедичний сигнал, вузькосмуговий сигнал, часовий аналіз, спектральний аналіз.

Abstract
The paper investigates the principles of time-domain and spectral analysis of narrowband electrical biomedical signals. The features of signal representation in the time and frequency domains, methods for determining their main parameters, and signal discretization are studied. The application of discrete and fast Fourier transform techniques for determining spectral characteristics, amplitude-phase parameters, and processing electrocardiographic, electroencephalographic, and electromyographic signals is analyzed.
Keywords: biomedical signals, narrowband signals, time-domain analysis, spectral analysis, discrete Fourier transform, fast Fourier transform, biomedical signal processing.

Вступ

Біомедичні сигнали – сигнали, які у певній формі (електричній, звуковій, оптичній, механічній, біохімічній) відображають природу та перебіг процесів, які відбуваються у живому середовищі.

Особливістю вузькосмугових електричних сигналів є зосередження інформації (енергії сигналу) у визначеному вузькому діапазоні частот. Природні вузькосмугові біомедичні сигнали становлять меншу частку від їхньої загальної чисельності, адже такий сигнал повинен мати близьку до ідеальної гармоніки природу, тобто, формуватися періодичними фізіологічними процесами. Більшість вузькосмугових біомедичних сигналів формуються шляхом застосування певних маніпуляцій, в основному, фільтрації для виокремлення корисного спектру та усунення завад.

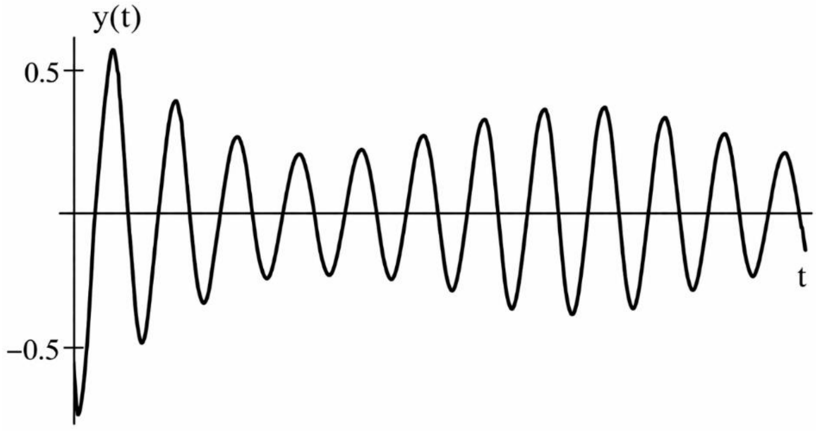


Рис. 1. – Типовий вузькосмуговий біомедичний сигнал

Метою роботи є аналіз принципів часового та спектрального аналізу як методів дослідження вузькосмугових електричних біомедичних сигналів.

Результати дослідження

Часовий аналіз передбачає вивчення зміни сигналу у часі [1] та є головним методом первинної діагностики сигналу. Таким чином можна оцінити амплітуду та форму сигналу, визначити часові характеристики сигналу (тривалість та частота імпульсів), виявити основні спотворення сигналу.

У часовому аналізі вузькосмуговий біомедичний сигнал розглядають як квазігармонічний:

$$x(t) = A(t) \cdot \sin[\omega_0(t) + \varphi(t)] \tag{1.1}$$

де: $x(t)$ – миттєве значення сигналу у момент часу t, A – повільно змінна амплітуда сигналу, ω_0 – центральна кутова частота сигналу, φ – миттєва фаза сигналу, яка повільно змінюється.

Тобто, спектр коливань досліджуваного зосереджений у вузькому діапазоні навколо ω_0. Таке представлення сигналу використовується в електрокардіографії та електроенцефалографії для опису відповідних біологічних процесів (частота серцевих скорочень є стабільною величиною, а ритми головного мозку формуються у визначених діапазонах) [5].

Якщо досліджуваний вузькосмуговий біомедичний сигнал має форму, прийняту для часового аналізу, цю техніку практично здійснюють наступним чином:

- вимірювання амплітуди сигналу (його огинаючої);
- визначення миттєвої фази сигналу;
- аналіз форми сигналу.

Вимірювання амплітуди сигналу передбачає визначення його огинаючої складової, яка характеризує зміну інтенсивності сигналу у часі. Це виконується шляхом знаходження локальних максимумів сигналу або згладжуванням та фільтрацією. Одержана таким чином амплітуда дозволяє оцінити енергетичні характеристики сигналу, які є відображенням одночасних фізіологічних процесів (наприклад, зміна частоти серцевих скорочень або рівня м'язової активності)

Визначення миттєвої фази сигналу передбачає дослідження параметра $\varphi(t)$, який описує фазове положення сигналу у кожен момент часу [2]. Це виконується шляхом визначення часових зсувів або ж із використанням аналітичного сигналу. Миттєва фаза є ключовим елементом дослідження синхронності біологічних процесів, зокрема, під час формування електроенцефалограми на основі багатьох каналів сигналу.

Аналіз форми сигналу передбачає дослідження елементів часової структури сигналу, їхньої тривалості, амплітуди та взаємного розташування у часі. Це дозволяє виокремлювати піки, інтервали та комплекси сигналу, наприклад, зубці P, T та QRS під час електрокардіографії, ритмічні коливання під час електроенцефалографії.

Спектральний аналіз передбачає перетворення часової області сигналу (зміни сигналу у часі) на частотну (сукупності різночастотних гармонік, які відображають досліджуваний сигнал) [4]

Спектральний аналіз, в основному, здійснюють із використанням перетворення Фур'є [3]. Необхідною попередньою умовою є дискретизація аналогового сигналу:

$$x[n] = x(n \cdot T_s) = x\left(n \cdot \frac{1}{f_s}\right) \tag{2.1}$$

де: T_s – період дискретизації, f_s – частота дискретизації.

Далі дискретизований сигнал переводять від часової області до частотної:

$$f_k = \frac{k \cdot f_s}{N} \tag{2.2}$$

де: f_k – частота k-го спектрального компонента, f_s – частота дискретизації сигналу, k – номер поточного спектрального відліку, N – загальна кількість відліків сигналу.

Віконування сигналу може використовуватися перед застосуванням дискретного перетворення Фур'є для зменшення спектральних спотворень:

$$x_\omega[n] = x[n] \cdot \omega[n] \tag{2.3}$$

де: $x_\omega[n]$ – віконований сигнал, $x[n]$ – вхідний дискретний сигнал, $\omega[n]$ – віконна функція, n – номер поточного часового відліку.

Тоді, дискретне перетворення Фур'є виконується так:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{2.4}$$

де: $X(k)$ – сигнал у частотній області, $x(n)$ – сигнал у часовій області, n – номер поточного часового відліку, k – номер поточного спектрального відліку, N – загальна кількість відліків.

На практиці дискретне перетворення Фур'є здійснюється зі зменшенням обчислювальної складності (шляхом розбиття обчислень на менші підзадачі та завдяки повторному використанню проміжних результатів), що зветься швидким перетворенням Фур'є.

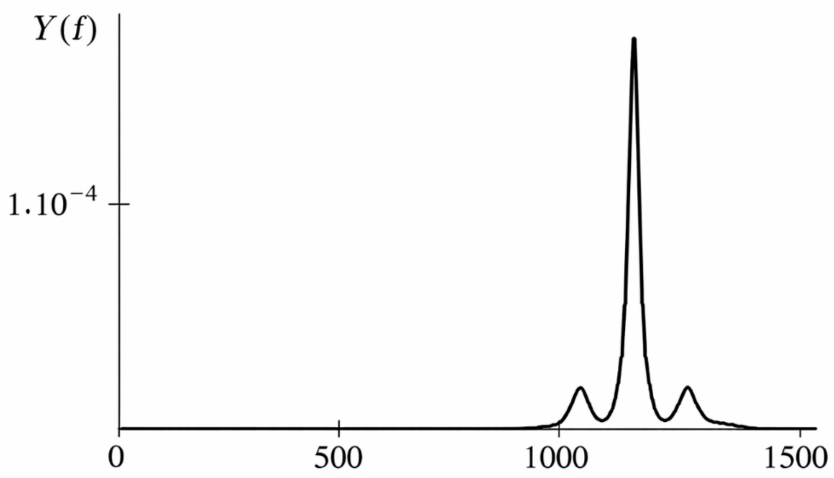


Рис. 2 – Типовий спектр вузькосмугового біомедичного сигналу після застосування перетворення Фур'є

Спектральний аналіз вузькосмугових біомедичних сигналів передбачає визначення таких спектральних характеристик:

- центральної частоти сигналу;
- ширини смуги пропускання;
- спектральної щільності потужності сигналу;
- наявності гармонік та шумів.

Центральна кутова частота вузькосмугового сигналу, зазвичай, є середньою для нього:

$$\omega_0 = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \tag{2.5}$$

де: ω_{max} – максимальна межа спектру, ω_{min} – мінімальна межа спектру.

Ширина смуги пропускання вузькосмугового сигналу визначає діапазон частот, у межах якого зосереджена основна енергія сигналу:

$$\Delta f = f_2 - f_1 \tag{2.6}$$

де: f_2 – верхня гранична частота сигналу, f_1 – нижня гранична частота сигналу.

Спектральна щільність потужності визначає розподіл енергії сигналу за частотами:

$$S(k) = \frac{1}{N} \cdot |X(k)|^2 \tag{2.7}$$

де: $X(k)$ – сигнал у частотній області, k – номер поточного спектрального відліку, N – загальна кількість відліків, $|X(k)|^2$ – енергія сигналу на частоті k.

Гармоніки сигналу відображають його періодику сигналу та дозволяють оцінити його структуру. Для вузькосмугових біомедичних сигналів характерною є наявність основної гармоніки та незначної кількості вищих гармонік.

Шуми сигналу – компоненти спектра, які не мають чітко вираженої періодичності. У частотній області вони проявляються як фонові коливання та спотворюють корисний сигнал.

Практична реалізація спектрального аналізу для вузькосмугових біомедичних сигналів відбувається так:

- дискретизація сигналу;
- виконання дискретного або швидкого перетворення Фур'є;
- визначення спектральних характеристик сигналу.

Одержані спектральні характеристики дозволяють визначити основні параметри сигналу, оцінити його якість та визначити наявність завад. У біомедичній апаратурі спектральний аналіз використовується для обробки електрокардіографічних, електроенцефалографічних та електроміографічних сигналів, що дає змогу проводити діагностику відповідних фізіологічних процесів [5].

Висновок

Отже, часовий та спектральний аналіз є методами дослідження вузькосмугових електричних біомедичних сигналів. Часовий аналіз передбачає представлення цього сигналу як гармоніки з повільно змінними амплітудою та миттєвою фазою. Дослідження параметрів такого сигналу у часовій області дозволяє діагностувати біологічні процеси у живому середовищі за допомогою електрокардіографії, електроенцефалографії тощо. Спектральний аналіз передбачає визначення структури та параметрів біомедичного сигналу шляхом аналітичного переходу від часової до частотної області.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гнатюк С. О. Методи аналізу та обробки сигналів. Львів : Львівська політехніка, 2018. 256 с.
2. Cohen L. Time-Frequency Analysis. Upper Saddle River : Prentice Hall, 1995. 299 p.
3. Стрелковська І. В., Паскаленко В. М. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є: навчальний посібник. – Одеса: Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, 2021.
4. Oppenheim A., Schafer R. Discrete-Time Signal Processing. 3rd ed. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2010. 1120 p.
5. Rangayyan R. M. Biomedical Signal Analysis. New York : IEEE Press, 2015. 720 p.

Гончар Богдан Віталійович – студент групи БМІ-22б, факультет інформаційних електронних систем, Вінницький національний технічний університет, e-mail: bogdgonchar@gmail.com

Оксана Іванівна Тютюнник – канд. пед. наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, e-mail: tutunnik.oksana@gmail.com

Bogdan Honchar – student of Faculty of Information Electronic Systems, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: bogdgonchar@gmail.com

Oksana Tiutiunnyk – PhD (Pedagogics), Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, e-mail: tutunnik.oksana@gmail.com

УДК 517.962

О. І. Маціпура
З. В. Бондаренко

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕГЕНЕРАТИВНОГО ЧАТЕРА ПРИ ТОЧІННІ НА ОСНОВІ РЕКУРЕНТНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглянуто теоретичні закономірності виникнення регенеративного чаттера під час токарної обробки. Проведено аналіз рекурентного співвідношення, що описує зміну товщини зрізуваного шару з урахуванням поточних та попередніх пружних зміщень технологічної системи. Показано, що регенеративний механізм формування автоколивань визначається взаємодією зміщень на поточному та попередньому кроках моделювання. Встановлено умови мінімізації та максимізації варіації товщини зрізуваного шару залежно від знаків пружних зміщень. Теоретично обґрунтовано механізм самогасіння коливань або їх переходу в автоколивальний режим. Отримані результати можуть бути використані для подальшого моделювання динамічної стійкості процесу точіння та прогнозування виникнення чаттера.

Ключові слова: чаттер; регенеративний ефект; автоколивання; процес точіння; рекурентне співвідношення; товщина зрізуваного шару; динамічна стійкість; коливання технологічної системи.

Abstract

This paper examines the theoretical principles underlying the occurrence of regenerative chatter during turning operations. An analysis is carried out of the recursive relation describing the change in the thickness of the cut layer, taking into account the current and previous elastic displacements of the machining system. It is shown that the regenerative mechanism of self-oscillation formation is determined by the interaction of displacements at the current and previous simulation steps. Conditions for minimising and maximising the variation in the thickness of the cut layer depending on the signs of elastic displacements have been established. The mechanism of self-damping of oscillations or their transition to an auto-oscillatory mode has been theoretically substantiated. The results obtained can be used for further modelling of the dynamic stability of the turning process and for predicting the occurrence of chatter

Keywords: chatter; regenerative effect; self-oscillation; turning process; recursive relationship; thickness of the cut layer; dynamic stability; oscillations of the machining system**.**

Вступ

У сучасному машинобудуванні одним із важливих завдань є забезпечення стабільності процесу різання та підвищення якості обробки деталей. Під час токарної обробки можуть виникати автоколивання інструмента і заготовки, відомі як чаттер (англ. chatter), що призводять до погіршення точності обробки, зниження якості поверхні та прискореного зношування інструмента.

Одним із основних механізмів виникнення таких коливань є регенеративний ефект, за якого хвилястість поверхні, сформована під час попереднього проходу інструмента, впливає на поточний процес різання. Унаслідок цього товщина зрізуваного шару залежить не лише від поточного стану системи, а й від її попереднього стану. Такий механізм створює позитивний зворотний зв'язок, здатний викликати розвиток автоколивального процесу.

Застосування математичних моделей та рекурентних співвідношень дозволяє досліджувати закономірності виникнення регенеративного чатеру та оцінювати умови переходу технологічної системи у нестійкий режим роботи.

Наукова новизна роботи полягає у теоретичному аналізі рекурентного співвідношення товщини зрізуваного шару для пояснення закономірностей виникнення регенеративного чаттера. Встановлено, що характер розвитку або затухання коливального процесу визначається співвідношенням знаків поточного та попереднього пружних зміщень технологічної системи. Теоретично обґрунтовано умови мінімізації та максимізації варіації товщини зрізуваного шар.

Метою дослідження є теоретичний аналіз умов виникнення регенеративного чаттера при токарній обробці.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі **завдання**:

1.Проаналізувати рекурентне співвідношення товщини зрізуваного шару;

2.Дослідити вплив поточного та попереднього пружних зміщень на процес формування стружки;

3.Визначити умови виникнення або затухання автоколивань;

4.Встановити закономірності впливу регенеративного ефекту на стійкість процесу точіння.

Результати дослідження

Для опису регенеративного механізму виникнення автоколивань у процесі точіння використано математичну модель, запропоновану Ю. В. Петраковим та співавторами. Особливістю моделі є врахування впливу попередніх проходів різального інструмента на поточний процес формування стружки.

Для врахування регенеративного ефекту використовується рекурентне співвідношення:

$$(h_a)_i = (h_c + \delta_y)_i + (\delta_y)_{\{i-1\}}$$

де $(h_a)_i$ – поточна товщина зрізуваного шару на i-му кроці моделювання;

h_c – номінальна товщина зрізу;

δ_y – пружне зміщення системи в напрямку дії сили різання;

$(\delta_y)_{\{i-1\}}$ - зміщення системи на попередньому кроці моделювання.

Із наведеного співвідношення видно, що поточна товщина зрізуваного шару визначається не лише поточним станом системи, а й результатами попереднього проходу інструмента.

За відсутності коливань: $\delta_y = 0$. Тому, рівняння набуває вигляду: $(h_a)_i = h_c$. Отже, фактична товщина зрізуваного шару залишається сталою та дорівнює номінальному значенню.

У реальних умовах обробки технологічна система зазнає динамічних збурень, унаслідок чого виникають пружні зміщення. Для аналізу зміни товщини зрізуваного шару введемо величину її варіації:

$$\Delta h_i = (h_a)_i - h_c = (\delta_y)_i + (\delta_y)_{\{i-1\}}$$

Отриманий вираз показує, що варіація товщини зрізуваного шару визначається сумою поточного та попереднього пружних зміщень.

Мінімізація варіації товщини зрізу. Якщо пружне зміщення на поточному кроці $(\delta_y)_i$ та зміщення на попередньому кроці $(\delta_y)_{\{i-1\}}$ мають протилежні знаки, їхня сума прямує до нуля. За такої умови варіація товщини зрізуваного шару $\Delta h_i \approx 0$, фактична товщина залишається стабільною і близькою до номінального значення h_c. Затухання коливань зображено на рис.1

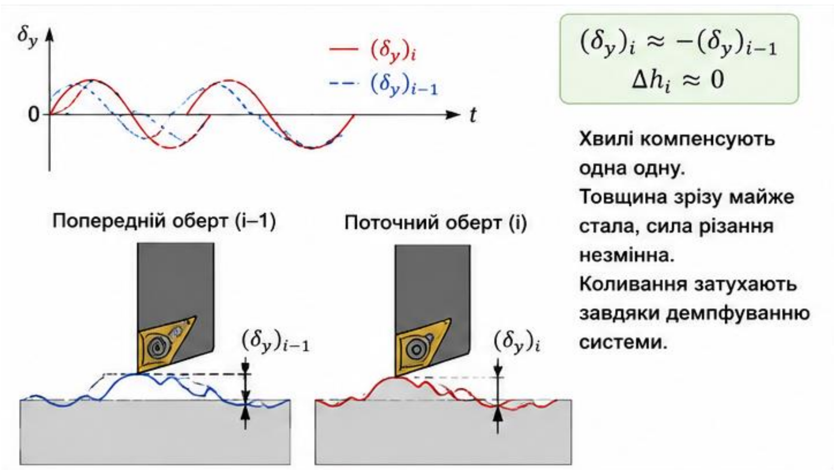


Рис.1. Затухання коливань (зміщення протилежних знаків)

Геометрично це відповідає ситуації, коли інструмент зрізає майже однаковий шар матеріалу на кожному оберті. Сила різання залишається майже сталою, енергетичне підживлення коливань відсутнє, а система переходить у стійкий режим.

Якщо поточне та попереднє зміщення мають однакові знаки, їхня сума збільшується, що призводить до зростання варіації товщини зрізуваного шару.

Збільшення товщини стружки викликає відповідне збільшення сили різання. Через наявність позитивного зворотного зв'язку коливання починають підсилюватися. Якщо рівень енергетичного підживлення перевищує можливості внутрішнього демпфування технологічної системи, стаціонарний режим втрачає стійкість і виникає автоколивальний процес - регенеративний чаттер. Розвиток чаттера зображено на рис.2

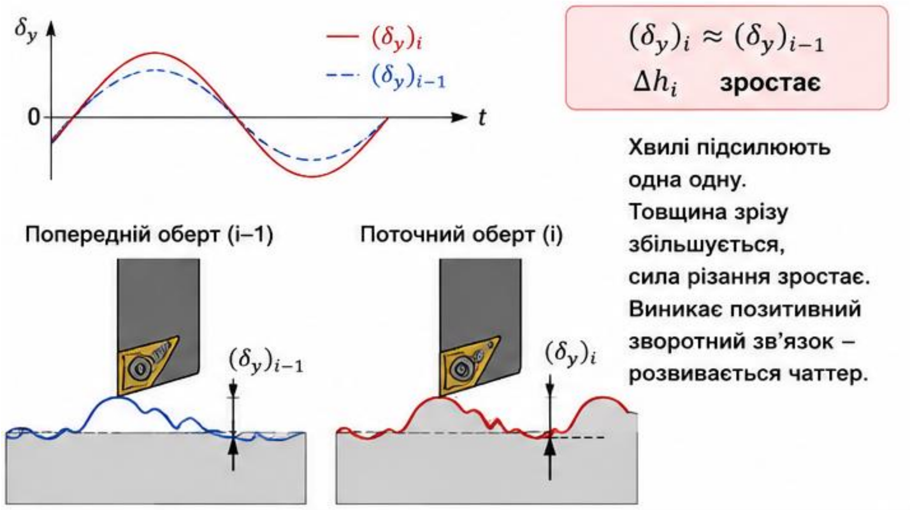


Рис.2. Розвиток чатеру (зміщення однакових знаків)

Таким чином, розвиток або затухання коливань визначається характером взаємодії поточного та попереднього пружних зміщень у рекурентному співвідношенні товщини зрізуваного шару.

$$\left(\delta_y\right)_i + \left(\delta_y\right)_{\{i-1\}}$$

Зростання товщини зрізуваного шару викликає збільшення сили різання, що додатково підсилює коливання. Таким чином формується позитивний зворотний зв'язок, який призводить до виникнення автоколивального процесу - регенеративного чаттера.

Висновки

У роботі проведено теоретичне дослідження закономірностей виникнення регенеративного чатеру при токарній обробці на основі рекурентного співвідношення товщини зрізуваного шару.

Встановлено, що: поточна товщина зрізуваного шару залежить як від поточного, так і від попереднього стану технологічної системи; варіація товщини зрізу визначається сумою поточного та попереднього пружних зміщень; при протилежних знаках зміщень відбувається мінімізація варіації товщини та затухання коливань; при однакових знаках зміщень виникає позитивний зворотний зв'язок, що сприяє розвитку автоколивального процесу.

Отримані результати підтверджують важливу роль регенеративного механізму у формуванні чаттера та можуть бути використані для подальшого моделювання динамічної стійкості процесів механічної обробки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Петраков Ю. В. Simulation of Chatter Suppression for Lathe Machining / Ю. В. Петраков // Journal of Mechanical Engineering NTUU «KPI». – 2016. – DOI: 10.20535/2305-9001.2016.77.78960.

2. Тришин П. Р. Дослідження автоколивальної системи процесу різання при точінні / П. Р. Тришин, Ю. М. Внуков, О. Б. Козлова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Технології в машинобудуванні. – 2025. – № 1(11). – С. 66–74. – DOI: 10.20998/2079-004X.2025.1(11).08.

3. Тришин П. Р. Дослідження впливу оброблюваного матеріалу на інтенсивність регенеративних автоколивань при точінні / П. Р. Тришин, О. Б. Козлова, Н. Гончар, І. Гембель // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2025. – DOI: 10.15588/1607-6885-2025-2-3.
4. Тришин П. Р. Дослідження власних коливань різця-осцилятора при точінні / П. Р. Тришин, О. Б. Козлова, А. Казурова // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2025. – DOI: 10.15588/1607-6885-2025-2-9.
5. Тришин П. Р. Вплив стружкоутворення, що створює стружку надлому, на збудження регенеративних автоколивань при точінні / П. Р. Тришин, О. Б. Козлова, Ю. М. Внуков, А. Левченко // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2026. – DOI: 10.15588/1607-6885-2026-2-6.

Маціпура Олександр Ігорович – студент факультету машинобудування та транспорту Вінницького національного технічного університету, Вінниця, e-mail: **oleksandrmatsipura447@gmail.com**
Бондаренко Злата Василівна — канд. педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Науковий керівник: ***Бондаренко Злата Василівна*** — канд. педагогічних наук, доцент, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

Matsipura Oleksandr I. – a student at the Faculty of Mechanical Engineering and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia e-mail: **oleksandrmatsipura447@gmail.com**
Bondarenko Zlata V. — Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Supervisor: ***Bondarenko Zlata V.*** — Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

УДК 517.5.52

Є. І. Токарь
Н. В. Сачанюк-Кавецька

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У СУЧАСНИХ ОНЛАЙН-КАЛЬКУЛЯТОРАХ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі проведено аналіз сучасних онлайн-калькуляторів для розв'язування диференціальних рівнянь. Досліджено особливості використання аналітичних та чисельних методів розв'язування, порівняно точність отриманих результатів та функціональні можливості популярних веб-сервісів. Розглянуто застосування методів Ейлера, Рунге–Кутти та символьних алгоритмів комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: диференціальне рівняння, онлайн-калькулятор, чисельні методи, метод Ейлера, метод Рунге-Кутти, комп'ютерна алгебра.

Abstract

The paper analyzes modern online calculators for solving differential equations. The features of analytical and numerical solution methods are investigated, and the accuracy and functionality of popular web services are compared. The application of Euler's method, Runge-Kutta methods, and symbolic algebra algorithms is considered.

Keywords: differential equation, online calculator, numerical methods, Euler method, Runge-Kutta method, computer algebra.

Вступ

Диференціальні рівняння є одним із фундаментальних розділів сучасної математики та важливим інструментом математичного моделювання. Вони широко застосовуються для опису процесів, у яких швидкість зміни певної величини залежить від її поточного стану або інших параметрів. За допомогою диференціальних рівнянь досліджують механічні коливання, теплові процеси, електричні кола, рух рідин і газів, динаміку популяцій, економічні процеси та багато інших явищ природничого й технічного характеру. Розв’язування диференціальних рівнянь є важливим етапом математичного аналізу моделей реальних процесів. Проте для багатьох практичних задач отримання аналітичного розв’язку пов’язане зі значними обчислювальними труднощами або взагалі є неможливим. У таких випадках застосовуються чисельні методи, які дозволяють знаходити наближені значення шуканих функцій із заданою точністю. Серед найбільш поширених чисельних методів розв’язування диференціальних рівнянь є метод Ейлера та методи Рунге–Кутти різних порядків. Стрімкий розвиток інформаційних технологій сприяв створенню великої кількості програмних засобів для автоматизації математичних обчислень. Особливе місце серед них займають онлайн-калькулятори, які забезпечують доступ до потужних обчислювальних алгоритмів без необхідності встановлення спеціалізованого програмного забезпечення. Такі веб-сервіси дозволяють виконувати символьні перетворення, знаходити аналітичні та чисельні розв’язки, будувати графіки функцій і досліджувати поведінку розв’язків у різних умовах [1, 2].

Популярність онлайн-калькуляторів у навчальному процесі постійно зростає, оскільки вони дають змогу оперативно перевіряти результати обчислень, аналізувати різні способи розв’язування задач та візуалізувати отримані результати. Водночас різні сервіси використовують відмінні алгоритми обчислень і мають неоднакові функціональні можливості, що зумовлює необхідність їх порівняльного аналізу.

Результати дослідження

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$dy/dx=f(x,y) \tag{1}$$

Для його розв'язування онлайн-калькулятори застосовують два основні підходи: символьні методи та чисельні методи [3,4].

Сервіси на основі систем комп'ютерної алгебри виконують аналітичні перетворення та знаходять точний розв'язок рівняння. Для диференціального рівняння $dy/dx=x+y$ загальний розв'язок має вигляд $y=Ce^{\wedge}x-x-1$. Графік розв'язку показано на рис. 1.

Такі алгоритми використовуються в калькуляторах Symbolab та Wolfram Alpha.

Якщо аналітичний розв'язок знайти складно або неможливо, використовуються чисельні методи. Найпростішим є метод Ейлера:

$$Y_{n+1}=Y_n+h*f(X_n,Y_n)$$

де h — крок інтегрування.

Для підвищення точності сучасні калькулятори використовують методи Рунге–Кутти четвертого порядку, похибка яких значно менша порівняно з методом Ейлера.

Для оцінювання точності чисельних методів було проведено порівняння наближених результатів із точним аналітичним розв’язком. Встановлено, що при однаковому кроці інтегрування метод Рунге–Кутти четвертого порядку забезпечує значно меншу похибку, ніж метод Ейлера. Це пояснюється використанням декількох проміжних обчислень на кожному кроці, що дозволяє краще враховувати локальну поведінку розв’язку.

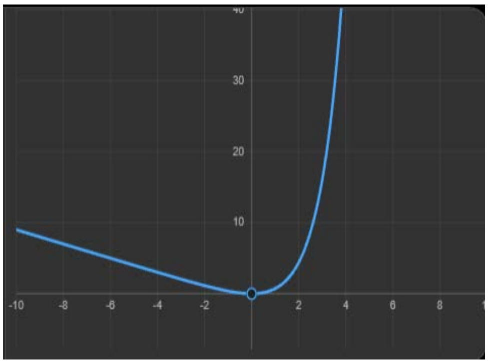


Рисунок 1 Графік загального розв’язку рівняння y′=x+y

Було проведено порівняння популярних онлайн калькуляторів.

Таблиця 1 Порівняльна характеристика онлайн-калькуляторів для розв’язування диференціальних рівнянь

Онлайн-калькулятор	Аналітичний розв'язок	Чисельний розв'язок	Побудова графіків
Wolfram Alpha	Так	Так	Так
Symbolab	Так	Так	Так
GeoGebra	Ні	Так	Так
Desmos	Частково	Так	Так

Результати показують, що найбільш універсальними є сервіси Wolfram Alpha та Symbolab, які поєднують можливості символьних і чисельних обчислень. Аналіз показав, що сервіс Wolfram Alpha забезпечує найбільш повний математичний супровід задачі, включаючи аналітичний розв'язок, побудову графіків та додаткові математичні пояснення. Symbolab надає покрокові розв'язання, що є корисним для навчальних цілей. GeoGebra та Desmos орієнтовані переважно на візуалізацію та чисельне дослідження розв'язків, що робить їх зручними для графічного аналізу.

Таблиця 2 – Характеристика методів розв'язування диференціальних рівнянь

Метод	**Точність**	**Швидкість**	**Застосування**
Ейлера	Низька	Висока	Навчальні приклади
Рунге-Кутти 4-го порядку	Висока	Середня	Інженерні розрахунки
Символьні методи	Точний розв'язок	Залежить від складності	Аналітичні дослідження

Розглянемо рівняння $dy/dx=x+y$ з початковою умовою $y(0)=1$ і знайдемо значення розв'язку в точці $x=1$ (див. табл. 3)

Таблиця 3 Порівняння результатів розв'язування задачі Коші

Метод	**Значення $y(1)$**	**Абсолютна похибка**
Аналітичний розв'язок	3,43656	0
Метод Ейлера	3,18748	0,24908
Метод Рунге-Кутти 4-го порядку	3,43650	0,00006

Отримані результати підтверджують, що метод Рунге–Кутти забезпечує значно вищу точність порівняно з методом Ейлера навіть за однакового кроку інтегрування. Саме тому більшість сучасних онлайн-калькуляторів використовують методи вищих порядків для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь.

Висновок

У роботі досліджено сучасні онлайн-калькулятори для розв'язування диференціальних рівнянь та проаналізовано математичні методи, які використовуються для виконання обчислень. Встановлено, що сучасні веб-сервіси поєднують можливості символьних і чисельних обчислень, що дозволяє отримувати як точні аналітичні розв'язки, так і наближені результати для складних задач, які не мають розв'язку в елементарних функціях.

У ході дослідження розглянуто особливості застосування алгоритмів комп'ютерної алгебри, методу Ейлера та методу Рунге–Кутти четвертого порядку. Показано, що символьні методи забезпечують отримання точного розв'язку диференціального рівняння, тоді як чисельні методи дозволяють ефективно знаходити наближені значення розв'язку в заданих точках.

Проведений обчислювальний експеримент для задачі Коші з початковою умовою ($y(0)=1$) підтвердив суттєву різницю в точності чисельних методів. Встановлено, що метод Ейлера при кроці інтегрування ($h=0,1$) дає помітну похибку, тоді як метод Рунге–Кутти четвертого порядку забезпечує результат, який практично збігається з точним аналітичним розв'язком. Отримані дані свідчать про високу ефективність методів вищих порядків для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь.

На основі порівняльного аналізу функціональних можливостей онлайн-калькуляторів встановлено, що найбільш універсальними є Wolfram Alpha та Symbolab, які підтримують як символьне розв'язування, так і чисельні методи з графічною візуалізацією результатів. Сервіси GeoGebra та Desmos є зручними інструментами для чисельного аналізу та дослідження поведінки розв'язків за допомогою графіків.

Отримані результати демонструють доцільність використання сучасних онлайн-калькуляторів у навчальному процесі під час вивчення диференціальних рівнянь, оскільки вони сприяють підвищенню наочності матеріалу, спрощують виконання обчислень та дозволяють оцінювати точність різних методів розв'язування. Перспективним напрямом подальших досліджень є аналіз ефективності онлайн-сервісів під час розв'язування систем диференціальних рівнянь та рівнянь вищих порядків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Wolfram Alpha. Documentation and Mathematical Functions. https://www.wolframalpha.com (Дата звернення: 15.05.2026)
2. Symbolab. Differential Equations Solver Documentation. https://www.symbolab.com/solver/ordinary-differential-equation-calculator (Дата звернення: 20.05.2026)
3. Бахвалов М. С. Чисельні методи. — Київ: Наукова думка, 2010. 636 стор.
4. Бойчук І. М. Диференціальні рівняння та їх застосування. — Львів: ЛНУ ім. І. Франка, 2018.(174 стр.)

Токарь Єгор Ігорович, студент першого курсу факультету будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: egoridze2007@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, e-mail: skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна — к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, e-mail: skn1901@gmail.com

Tokar Yehor I., first-year student, Faculty of Civil, Environmental and Construction Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: egoridze2007@gmail.com

Sachaniuk-Kavetska Natalia V., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, e-mail: skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavetska Natalia V., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, e-mail: skn1901@gmail.com

УКД 517.5.52

А. А. Заїка
Н. В. Сачанюк-Кавецька

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ЯК ІНСТРУМЕНТ АНАЛІЗУ ПРОЦЕСІВ У КОЛАХ ЗМІННОГО СТРУМУ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено роль комплексних чисел як одного з ключових математичних інструментів аналізу процесів у колах змінного струму. Розглянуто математичні основи комплексного подання гармонічних величин, поняття імпедансу, фазового зсуву та комплексної потужності. Особливу увагу приділено практичному використанню комплексного методу під час розрахунку електричних кіл з активними, індуктивними та ємнісними елементами. Показано, що застосування комплексних чисел дозволяє значно спростити математичні розрахунки та підвищити ефективність інженерного аналізу.

Ключові слова: комплексні числа, змінний струм, імпеданс, фазор, комплексна потужність, електротехніка.

Abstract

The paper explores the role of complex numbers as one of the key mathematical tools for analyzing processes in AC circuits. The mathematical foundations of the complex representation of harmonic quantities, the concepts of impedance, phase shift, and complex power are considered. Particular attention is paid to the practical use of the complex method in calculating electrical circuits with active, inductive, and capacitive elements. It is shown that the use of complex numbers allows significantly simplifying mathematical calculations and increasing the efficiency of engineering analysis.

Keywords: complex numbers, alternating current, impedance, phasor, complex power.

Вступ

Дослідження процесів у колах змінного струму є одним із важливих напрямів сучасної електротехніки та енергетики. Особливістю таких кіл є гармонічний характер зміни електричних величин у часі, що ускладнює їх математичний опис і потребує використання спеціальних методів аналізу. Традиційне представлення напруги та струму за допомогою тригонометричних функцій часто призводить до громіздких обчислень, особливо під час дослідження складних електротехнічних систем.

Ефективним засобом розв'язання зазначених задач є використання комплексних чисел, які дають змогу подати гармонічні сигнали у компактній формі та перейти від диференціальних рівнянь до алгебраїчних співвідношень. Комплексний метод забезпечує зручний опис амплітудно-фазових характеристик електричних величин, дозволяє визначати параметри електричних кіл, аналізувати режими їх роботи та оцінювати енергетичні показники [1-4].

У сучасній практиці комплексні числа широко застосовуються під час розрахунку електричних мереж, електронних пристроїв, систем автоматичного керування та програмних комплексів для комп'ютерного моделювання. Тому дослідження можливостей комплексного подання електричних величин і його ролі в аналізі кіл змінного струму є важливим як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Результати дослідження

Математично комплексне число записується у вигляді

$$z = a + jb,$$

де a – дійсна частина, b – уявна частина, а $j^2 = -1$. У теорії змінного струму гармонічні сигнали представляють комплексними амплітудами або фазорами. Такий підхід дозволяє враховувати не лише амплітуду сигналу, а й його фазу.

Для основних елементів електричного кола комплексний опір визначається такими співвідношеннями :

$$Z_R = R;$$
$$Z_L = j\omega L;$$
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}.$$

Загальний комплексний опір кола називається імпедансом. Саме імпеданс дозволяє використовувати закони Ома та Кірхгофа в комплексній формі [5-7].

Для послідовного кола *RLC* імпеданс визначається як

$$Z = R + j(X_L - X_C).$$

Знаючи значення імпедансу, можна легко знайти струм, напругу та фазовий зсув між ними. Це значно спрощує інженерні розрахунки порівняно з традиційними методами.

Однією з найважливіших переваг комплексного подання є можливість аналізу фазових співвідношень. У колі з індуктивністю струм відстає від напруги, а в колі з ємністю випереджає її. Саме фазові зсуви визначають характер передачі енергії та впливають на ефективність роботи електроустановок.

Для аналізу енергетичних процесів використовується поняття комплексної потужності, яка визначається виразом

$$S = P + jQ.$$

де P – активна потужність, а Q – реактивна. Активна потужність перетворюється на корисну роботу або тепло, тоді як реактивна потужність характеризує обмін енергією між джерелом та реактивними елементами кола.

Модуль комплексної потужності визначає повну потужність електричної системи. Аналіз цих величин дозволяє оцінювати енергоефективність обладнання та визначати необхідність компенсації реактивної потужності.

Для кращого розуміння практичного застосування комплексних чисел розглянемо послідовне коло, що складається з резистора, котушки індуктивності та конденсатора. Нехай параметри кола становлять: *R = 20 Ом, XL = 30 Ом, XC = 10 Ом.* Тоді комплексний імпеданс кола дорівнює:

$$Z = R + j(XL - XC) = 20 + j20.$$

Модуль імпедансу визначається за формулою

|Z|^2= $(20^2 + 20^2) \approx 28{,}3$ Ом.

Якщо до кола прикладена напруга з діючим значенням U = 220 В, то сила струму становитиме *I = U/|Z| ≈ 220/28,3 ≈ 7,77 A.* Фазовий кут між напругою та струмом можна знайти за співвідношенням

$$\varphi = arctg((XL - XC)/R) = arctg(20/20) = 45°.$$

Отриманий результат свідчить про те, що коло має індуктивний характер, а струм відстає від напруги на 45°. Використання комплексного подання дозволяє отримати всі основні характеристики кола за допомогою простих алгебраїчних операцій без необхідності розв'язування диференціальних рівнянь. Важливим аспектом аналізу є також визначення потужності. Для наведеного прикладу активна потужність дорівнює

$$P = UI\cos\varphi \approx 220 \cdot 7{,}77 \cdot 0{,}707 \approx 1209\ Bm,$$

а реактивна потужність $Q = UI \sin\varphi \approx 1209$ *вар.*

Наявність реактивної складової потужності свідчить про періодичний обмін енергією між джерелом живлення та реактивними елементами кола. Аналіз таких характеристик є необхідним під час проектування електротехнічних систем і підвищення їх енергоефективності.

Комплексні числа широко використовуються в електроенергетиці для розрахунку режимів роботи електричних мереж та систем електропостачання. Вони застосовуються під час моделювання ліній електропередач, трансформаторів та синхронних генераторів. В електроніці комплексний метод використовується для аналізу резонансних контурів, підсилювачів, фільтрів низьких і високих частот. У теорії автоматичного керування комплексні числа лежать в основі частотного аналізу та синтезу систем регулювання. Завдяки розвитку комп'ютерного моделювання комплексний аналіз став невід'ємною частиною сучасних програмних пакетів для проектування електротехнічних систем.

Головною перевагою комплексного методу є значне спрощення математичних розрахунків. Замість розв'язування складних диференціальних рівнянь інженер працює з алгебраїчними операціями над комплексними числами. Крім того, метод забезпечує наочність представлення фазових співвідношень. До обмежень належить те, що класичний комплексний підхід найбільш ефективний для усталених гармонічних режимів. Для аналізу перехідних процесів використовуються додаткові математичні методи.

Висновки

У результаті проведеного дослідження встановлено, що комплексні числа є фундаментальним математичним інструментом аналізу процесів у колах змінного струму. Їх використання дозволяє суттєво спростити математичний опис електротехнічних систем шляхом переходу від часових залежностей до комплексних амплітуд, що значно полегшує виконання інженерних розрахунків.

Показано, що комплексний метод забезпечує ефективне визначення імпедансу електричних кіл, аналіз фазових співвідношень між струмом і напругою, а також дослідження процесів передачі та перетворення енергії. Використання комплексного подання дає можливість застосовувати закони Ома та Кірхгофа в узагальненій формі, що особливо важливо під час розрахунку кіл, які містять активні, індуктивні та ємнісні елементи.

Встановлено, що комплексна форма запису потужності дозволяє одночасно враховувати активну та реактивну складові енергетичних процесів, що є необхідним для оцінювання ефективності роботи електроустановок і вибору засобів компенсації реактивної потужності. Також з’ясовано, що комплексний аналіз лежить в основі моделювання та проєктування сучасних систем електропостачання, електронних пристроїв і систем автоматичного керування.

Отже, застосування комплексних чисел не лише спрощує розрахунки, а й розширює можливості дослідження електротехнічних процесів, забезпечуючи високу точність аналізу та ефективність розв’язання практичних інженерних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бессонов Л. А. Теоретичні основи електротехніки. – Київ : Вища школа, 2018.
2. Бойко В. С. Теоретичні основи електротехніки : навч. посіб. – Вінниця : ВНТУ, 2021.
3. Федоренко Г. М. Електричні кола змінного струму. – Харків : ХНУРЕ, 2020.
4. Alexander C., Sadiku M. Fundamentals of Electric Circuits. – McGraw-Hill, 2021.
5. Dorf R., Svoboda J. Introduction to Electric Circuits. – Wiley, 2019.
6. Hayt W., Kemmerly J. Engineering Circuit Analysis. – McGraw-Hill, 2020.
7. Nilsson J., Riedel S. Electric Circuits. – Pearson, 2022.

Заїка Анна Андріївна, студентка першого курсу, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, annazaika441@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Zaika Anna A., first-year student, Faculty of Electric Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: annazaika441@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

УДК 517.5.52

В. С. Андрійченко

Н. В. Сачанюк-Кавецька

Математичне моделювання електроенергетичних процесів як міст між фундаментальною та інженерною підготовкою

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У цих тезах розглядається проблема розриву між фундаментальною математичною підготовкою та її практичним застосуванням у вищій освіті студентів факультету електроенергетики та електричних систем. Автором обґрунтовано роль математичного моделювання як головного інтеграційного містка, що трансформує абстрактні теоретичні методи у прикладні інженерні навички.

Ключові слова: вища математика, математичне моделювання, електроенергетика, інженерна освіта, міжпредметні зв'язки, перехідні процеси, комп'ютерно-орієнтоване навчання.

Abstract

These theses address the problem of the gap between fundamental mathematical training and its practical application in higher education of students of the Faculty of Electrical Power Engineering and Electrical Systems. The author substantiates the role of mathematical modeling as the main integration bridge that transforms abstract theoretical methods into applied engineering skills.

Keywords: advanced mathematics, mathematical modeling, electric power engineering, engineering education, interdisciplinary links, transient processes, computer-oriented learning.

Вступ

Модернізація вищої енергетичної освіти в Україні вимагає підготовки інженерів нового покоління, здатних проектувати та обслуговувати високотехнологічні інтелектуальні енергосистеми (Smart Grid). Фундаментом такої підготовки є вища математика. Проте сучасні тенденції свідчать про зниження рівня математичної культури абітурієнтів та брак мотивації студентів молодших курсів через надмірну абстрактність викладання фундаментальних дисциплін. Традиційна методика навчання вищої математики на інженерних факультетах часто відірвана від майбутньої професійної діяльності студентів. Як наслідок, виникає серйозний розрив: студенти факультету електроенергетики та електричних систем сприймають математичний апарат лише як набір формул для складання іспиту, а не як реальний інструмент розв'язання інженерних задач. Це призводить до труднощів під час вивчення базових профільних дисциплін, зокрема теоретичних основ електротехніки (ТОЕ) [1, 2]. Ефективним шляхом подолання цього розриву є впровадження наскрізного математичного моделювання. Воно виступає інтеграційним містком, оскільки переводить реальні фізичні процеси в електричних мережах (зміна напруги, коливання струму, перехідні режими) на мову математичних рівнянь. Це дозволяє студенту з першого курсу бачити практичну цінність математичних абстракцій.

Особливої актуальності проблема набуває в умовах цифрової трансформації енергетичної галузі, розвитку концепцій Smart Grid, цифрових двійників та автоматизованих систем керування [3]. Усі зазначені технології базуються на математичних моделях різного рівня складності, що потребує якісної математичної підготовки майбутніх інженерів.

Основна частина

Ефективна підготовка інженера-енергетика неможлива без чіткої синхронізації фундаментальних і професійних дисциплін. Традиційно вища математика викладається на першому курсі, тоді як «Теоретичні основи електротехніки» (ТОЕ) та спецкурси розпочинаються пізніше. Проблема полягає в тому, що під час вивчення математичних тем студенти не бачать їхнього фізичного змісту, а переходячи до інженерних кафедр, часто забувають необхідний інструментарій.

Математичне моделювання дозволяє усунути цей часовий і смисловий розрив. Воно демонструє, що математичні структури є точним відображенням законів фізики, які керують сучасними енергосистемами.

Для демонстрації студентам практичної цінності математики доцільно інтегрувати в інженерний курс наступні базові розділи [4]:

Лінійна алгебра (Матричний аналіз). Розрахунок режимів роботи складних, розгалужених електричних мереж із великою кількістю вузлів та ліній неможливий вручну. Студенти мають розуміти, що системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), які вони розв'язують на математиці (методами Гаусса, Крамера чи за допомогою оберненої матриці), є основою для методів контурних струмів та вузлових потенціалів у ТОЕ. Матриці є зручним математичним інструментом для формалізації структури електричних мереж та опису взаємозв'язків між їхніми елементами.

Диференціальні рівняння. Опис перехідних процесів в електричних колах (наприклад, пуск потужного електродвигуна, вимкнення ліній, аварійні короткі замикання) повністю базується на звичайних диференціальних рівняннях (ЗДР). Наприклад, для найпростішого послідовного контуру (резистор, котушка індуктивності, конденсатор) процес зміни заряду описується лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку:

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=u(t)\,. \tag{1}$$

Для демонстрації практичного застосування математичного апарату було розглянуто моделювання перехідного процесу в RLC-колі після підключення джерела напруги. За допомогою MATLAB/Simulink досліджено вплив величини опору на характер коливань струму (див. табл. 1).

Таблиця 1 Моделювання перехідного процесу у RLC-колі за допомогою MATLAB/Simulink за різних значень опору

Опір R	Характер процесу
5 Ом	значні коливання
20 Ом	слабкі коливання
50 Ом	аперіодичний процес

Встановлено, що зі збільшенням опору амплітуда коливань зменшується, а система швидше переходить у стаціонарний режим. Вплив активновного опору на перехідний процес у RLC-колі подано на рис. 1.

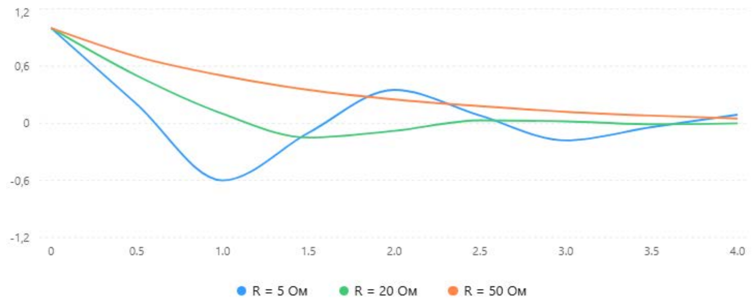


Рисунок 1 Вплив активного опору на характер перехідного процесу в RLC-колі

Як видно з рисунка 1, зі збільшенням активного опору кола зменшується амплітуда коливань струму та прискорюється встановлення стаціонарного режиму. При малому опорі спостерігається коливальний режим із повільним затуханням, тоді як при великих значеннях опору процес наближається до аперіодичного.

Важливу роль у підготовці майбутніх енергетиків відіграє **теорія комплексних чисел**. Комплексне представлення змінного струму дозволяє значно спростити аналіз електричних кіл синусоїдального струму. Операції над комплексними числами стають математичною основою розрахунку активної, реактивної та повної потужності.

Невід'ємною складовою сучасного математичного моделювання є використання спеціалізованого програмного забезпечення (*MATLAB/Simulink, Mathcad*). Впровадження комп'ютерних симуляцій дозволяє змістити акцент із механічного розв'язання рівнянь на аналіз отриманих результатів. Студент отримує можливість:

1. Самостійно скласти диференціальне рівняння або систему матриць для електричного кола.
2. Змоделювати цей процес у *MATLAB.*
3. Графічно побачити, як зміна параметрів системи (наприклад, збільшення опору) миттєво змінює графік перехідного струму чи напруги.

Висновки

Впровадження математичного моделювання у навчальний процес студентів факультету електроенергетики та електричних систем є ефективним розв'язанням проблеми відірваності теорії від практики. Воно дозволяє трансформувати вищу математику з «абстрактної дисципліни для іспиту» на живий інструмент інженерного мислення. Наочний зв'язок між розділами математики (лінійна алгебра, диференціальні рівняння) та базовими інженерними курсами доводить, що математичне моделювання виступає природним інтеграційним містком. Це значно підвищує якість засвоєння як фундаментального, так і профільного матеріалу. Використання сучасного програмного забезпечення зміщує фокус із рутинних паперових обчислень на аналітичну роботу. Перехід до наскрізного моделювання та синхронізація навчальних планів фундаментальних і випускаючих кафедр є необхідною умовою для підготовки сучасних інженерів-енергетиків. Це формує фахівців нового типу, готових до роботи з інтелектуальними енергосистемами (Smart Grid) та цифровими двійниками реальних об'єктів.

Проведений аналіз показав, що математичне моделювання може бути ефективним інструментом інтеграції фундаментальної та професійної підготовки майбутніх інженерів-енергетиків. Встановлено, що використання моделей електричних кіл дозволяє демонструвати практичне застосування лінійної алгебри, диференціальних рівнянь та методів комп'ютерного моделювання вже на початкових етапах навчання. Це сприяє формуванню стійкої мотивації до вивчення математичних дисциплін та розвитку інженерного мислення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Зайцев О. В. Математичне моделювання в електроенергетиці: навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2019. 185 с.
2. Клочко В. І., Бондаренко Н. В**.** Комп'ютерно-орієнтоване навчання вищої математики як чинник фундаменталізації інженерної освіти. Інформаційні технології і засоби навчання. 2020. Т. 76, № 2. С. 143–156.
3. Пирч Н. М. Міжпредметні зв'язки вищої математики та теоретичних основ електротехніки у вищих технічних навчальних закладах. Науковий вісник НЛТУ України. 2018. Вип. 28(5). С. 153–157.
4. Chernykh I. V. Power System Modeling and Simulation in MATLAB/Simulink. IEEE Transactions on Power Systems. 2023. Vol. 38, No. 4. P. 3120–3129.

Андрійченко Владислав Сергійович, студент першого курсу, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, andrijcenkovlad@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Andrijchenko Vladyslav S. first-year student, Faculty of Electric Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: andrijcenkovlad@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

УДК 517.5.52

М. О. Кулик

Н. В. Сачанюк-Кавецька

ВИКОРИСТАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено застосування диференціальних рівнянь для математичного моделювання процесів поширення інфекційних захворювань. Розглянуто модель SIR, яка дозволяє описати динаміку зміни кількості сприйнятливих, інфікованих та вилікуваних осіб у популяції. Проаналізовано вплив параметрів моделі на швидкість поширення захворювання та тривалість епідемічного процесу.

Ключові слова: диференціальні рівняння, математичне моделювання, епідемія, модель SIR, інфекційні захворювання, популяція.

Abstract

The paper investigates the application of differential equations for mathematical modeling of infectious disease spread. The SIR model is considered, which describes the dynamics of susceptible, infected and recovered individuals in a population. The influence of model parameters on the rate of disease transmission and epidemic duration is analyzed.

Keywords: differential equations, mathematical modeling, epidemic, SIR model, infectious diseases, population.

Вступ

Математичне моделювання є одним із найважливіших методів дослідження складних процесів у природничих, технічних та соціальних науках. Завдяки використанню математичних моделей стає можливим аналіз явищ, прогнозування їхнього розвитку та оцінювання впливу різних факторів на перебіг досліджуваних процесів. Особливе місце серед математичних методів посідають диференціальні рівняння, які дозволяють описувати динаміку систем, параметри яких змінюються в часі.

Однією з актуальних сфер застосування диференціальних рівнянь є моделювання поширення інфекційних захворювань. Сучасний світ регулярно стикається зі спалахами епідемій та пандемій, які можуть суттєво впливати на здоров’я населення, економіку та соціальне життя суспільства. У зв’язку з цим особливої важливості набувають методи, що дають змогу прогнозувати швидкість поширення інфекції, оцінювати можливі наслідки захворювання та визначати ефективність профілактичних заходів [1, 2].

Для дослідження епідемічних процесів широко використовуються математичні моделі, засновані на системах диференціальних рівнянь. Однією з найвідоміших є модель SIR, яка поділяє населення на групи сприйнятливих до захворювання, інфікованих та осіб, що одужали. Такий підхід дозволяє простежити зміну чисельності кожної групи в часі та встановити закономірності розвитку епідемії залежно від параметрів моделі.

Дослідження математичних моделей поширення інфекційних захворювань сприяє глибшому розумінню механізмів епідемічних процесів і демонструє практичну цінність диференціальних рівнянь для розв’язання актуальних задач охорони здоров’я.

Результати дослідження

Для опису епідемічного процесу широко використовується модель SIR. У ній населення поділяється на три групи:

- *S(t)* — сприйнятливі до захворювання особи;
- *I(t)* — інфіковані особи;
- *R(t)*— особи, які одужали та набули імунітету.

Загальна чисельність популяції визначається співвідношенням: $N = S(t) + I(t) + R(t)$ [3, 4].
Математична модель описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI,$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

де β — коефіцієнт передачі інфекції, а γ — коефіцієнт одужання.

Для демонстрації роботи моделі було розглянуто умовну популяцію чисельністю 1000 осіб. Початково інфікованими є 10 осіб, сприйнятливими — 990 осіб, а кількість осіб з імунітетом дорівнює нулю. Для моделювання використано параметри β = 0,3 та γ = 0,1.
Результати чисельного експерименту показали, що на початковому етапі кількість інфікованих швидко зростає, досягаючи максимального значення приблизно через 30–40 днів. Після цього кількість хворих поступово зменшується внаслідок збільшення частки осіб, які одужали та набули імунітету. Наприкінці моделювання більша частина популяції переходить до групи *R(t).*
Графічну ілюстрацію динаміки поширення інфекції за моделлю SIR наведено на рис. 1.

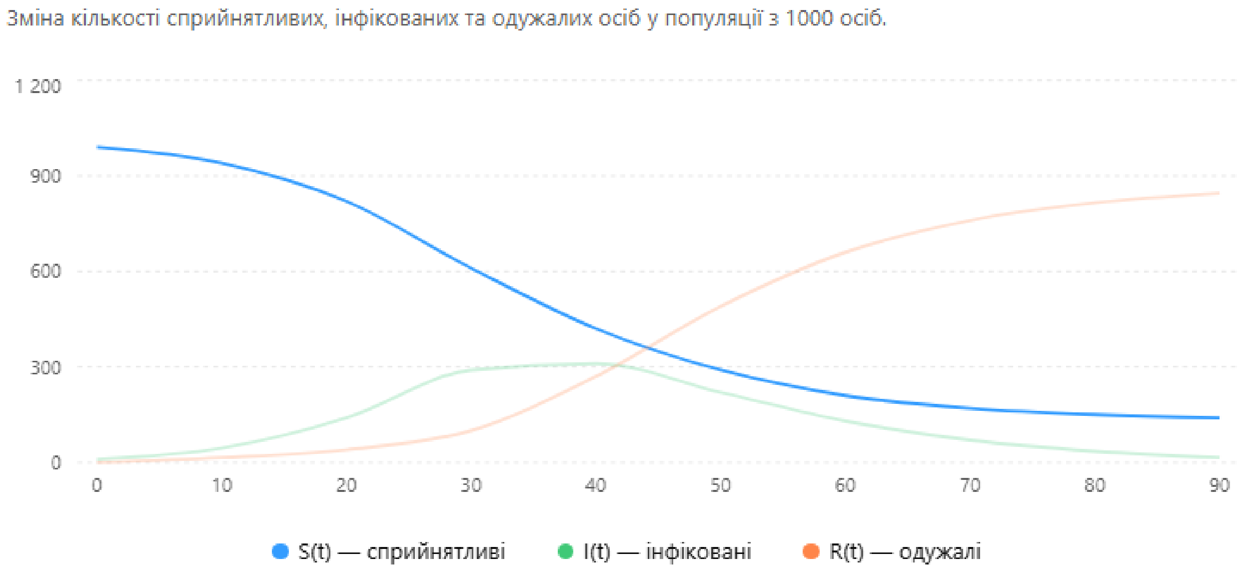


Рис. 1Динаміка зміни чисельності сприйнятливих S(t), інфікованих I(t) та одужалих R(t) осіб за моделлю SIR при параметрах β=0,3 та γ=0,1.

Як видно з графіка, на початковому етапі кількість інфікованих осіб зростає внаслідок активного поширення інфекції серед сприйнятливого населення. Максимальне значення функції *I(t)* досягається приблизно на 40-й день моделювання. Надалі кількість інфікованих зменшується через збільшення чисельності осіб, які одужали та набули імунітету. Одночасно функція *S(t)* монотонно спадає, а функція *R(t)* монотонно зростає, що відповідає типовому перебігу епідемічного процесу в рамках моделі SIR.

Система показує, що кількість сприйнятливих осіб зменшується внаслідок зараження, кількість інфікованих спочатку зростає, а потім зменшується через одужання. Одночасно збільшується кількість осіб, які набули імунітету.

Аналіз моделі демонструє, що перебіг епідемії значною мірою залежить від співвідношення параметрів β та γ. Якщо швидкість зараження перевищує швидкість одужання, кількість інфікованих стрімко зростає. У протилежному випадку поширення захворювання поступово згасає.

Моделі такого типу застосовуються для прогнозування сезонних захворювань, оцінювання наслідків пандемій та планування профілактичних заходів у сфері охорони здоров'я.

Висновки

У роботі досліджено можливості використання диференціальних рівнянь для математичного моделювання поширення інфекційних захворювань. Розглянуто класичну модель SIR, яка описує взаємозв'язок між трьома основними групами населення: сприйнятливими до захворювання особами, інфікованими та тими, хто одужав і набув імунітету.

Проведений аналіз показав, що система диференціальних рівнянь дозволяє адекватно відображати основні закономірності перебігу епідемічного процесу. Встановлено, що динаміка поширення захворювання значною мірою визначається значеннями коефіцієнтів передачі інфекції та одужання. Зростання інтенсивності передачі інфекції призводить до швидшого поширення захворювання та збільшення кількості інфікованих осіб, тоді як підвищення швидкості одужання сприяє згасанню епідемії.

Отримані результати підтверджують ефективність математичного моделювання як інструменту прогнозування розвитку епідемій та оцінювання можливих сценаріїв їх перебігу. Моделі типу SIR можуть використовуватися для аналізу сезонних інфекційних захворювань, оцінювання наслідків пандемій, планування профілактичних заходів і підтримки прийняття рішень у сфері громадського здоров'я.

Таким чином, диференціальні рівняння є потужним математичним апаратом для дослідження епідемічних процесів, а їх застосування сприяє підвищенню точності прогнозів та ефективності заходів щодо контролю поширення інфекційних захворювань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Самойленко А. М., Перестюк М. О. Диференціальні рівняння. – Київ : Либідь, 2003. – 600 с.
2. Бойчук О. А., Грищук В. І. Математичне моделювання динамічних систем. – Львів : Вид-во ЛНУ, 2018. – 312 с.
3. Murray J. D. Mathematical Biology. – New York : Springer, 2002. – 576 p.
4. Newman M. Networks: An Introduction. – Oxford University Press, 2018. – 784 p.

Кулик Маргарита Олександрівна, студентка першого курсу, факультет електроенергетики та електромеханіки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, marharytakulyk@gmail.com

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна, к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Kulyk Marharyta O., first-year student, Faculty of Electric Power Engineering and Electromechanics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: marharytakulyk@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

УКД 517.5.52

В. С. Шпак
Н. В. Сачанюк-Кавецька

ОПЕРАТОРНІ МОДЕЛІ ВІРТУАЛЬНОЇ ІНЕРЦІЇ ДЛЯ СТАБІЛІЗАЦІЇ ЧАСТОТИ В ЕНЕРГОСИСТЕМАХ З ВИСОКОЮ ЧАСТКОЮ ВДЕ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У даній роботі досліджуються операторні моделі віртуальної інерції як ключовий інструмент забезпечення динамічної стабільності частоти в енергосистемах із високим рівнем проникнення відновлюваних джерел енергії (ВДЕ). Розкривається сутність віртуальної інерції через аналогію з традиційними синхронними генераторами. Основна увага приділена математичному опису операторних передавальних функцій, які імітують інерційну відповідь перетворювачів. Робота містить аналіз ефективності різних стратегій віртуальної інерції (VSG, droop з інерційною складовою) та окреслює умови їх коректного застосування. Окремо розглядається синергія між віртуальною інерцією та системами автоматичного регулювання частоти (первинне, вторинне регулювання). Підкреслюється значення операторних моделей для проєктування стійких енергосистем майбутнього з нульовим викидом вуглецю.

Ключові слова: віртуальна інерція, операторні моделі, стабілізація частоти, ВДЕ, енергосистема, перетворювачі, синхронний генератор, передавальна функція, VSG, роторна маса.

Abstract

This work investigates operator-based virtual inertia models as a key tool for ensuring dynamic frequency stability in power systems with high penetration of renewable energy sources (RES). The essence of virtual inertia is revealed through analogy with traditional synchronous generators. The primary focus is placed on the mathematical description of operator transfer functions that mimic the inertial response of power converters. The work analyzes the effectiveness of various virtual inertia strategies (VSG, droop with inertial component) and outlines the conditions for their correct application. The synergy between virtual inertia and automatic frequency control systems (primary, secondary control) is considered separately. The significance of operator models for the design of resilient future power systems with net-zero emissions is emphasized

Keywords: virtual inertia, operator models, frequency stabilization, RES, power system, converters, synchronous generator, transfer function, VSG, rotor mass.

Вступ

Традиційна електроенергетична система, що базувалася на великих синхронних генераторах теплових, гідравлічних та атомних електростанцій, володіє значною інерцією, зумовленою обертовими масами роторів. Ця інерція відіграє роль природного буфера, який автоматично протидіє раптовим змінам частоти при аварійних відключеннях генеруючих потужностей або різкому зростанні навантаження. Механічною основою цієї властивості є другий закон Ньютона для обертового руху: чим більший сумарний момент інерції, тим меншою є швидкість зміни частоти (Rate of Change of Frequency, RoCoF) під дією небалансу потужності.

Однак сучасний енергетичний перехід, зумовлений необхідністю декарбонізації та досягнення цілей сталого розвитку, кардинально змінює структуру генеруючих потужностей. Фотоелектричні панелі, вітрові турбіни та інші відновлювані джерела енергії (ВДЕ) підключаються до мережі через силові перетворювачі (інвертори), які не мають обертових мас і тому не забезпечують природної інерції. В результаті загальний рівень інерції системи (вимірюваний у мегават-секундах) стрімко знижується. Якщо раніше RoCoF після типового збурення не перевищувала 0.2-0.5 Гц/с, то в системах із домінуванням ВДЕ цей показник може сягати кількох герц за секунду, що призводить до спрацювання аварійного захисту та масштабних відключень. Вирішенням цієї проблеми є віртуальна інерція - штучна імітація інерційної поведінки синхронного генератора засобами керування перетворювачами, для опису якої застосовуються операторні моделі на основі передавальних функцій.

Результати дослідження

Для розуміння принципів віртуальної інерції необхідно розглянути математичний опис традиційного синхронного генератора як еталонної системи [1, 2]. Рівняння руху ротора синхронного генератора (рівняння маятника) в нелінійній формі записується наступним чином:

$$J\frac{d^2\delta}{dt^2} + D\frac{d\delta}{dt} = P_m - P_e,$$

де $J -$ сумарний момент інерції ротора, D — коефіцієнт демпфування (демпферні обмотки), δ — електричний кут ротора, P_m та P_e — механічна потужність турбіни та електрична потужність, що віддається в мережу. В операторній формі (з використанням перетворення Лапласа) це рівняння приймає вигляд лінійної передавальної функції для малих відхилень частоти $\Delta f(s)$ відносно небалансу потужності $\Delta P(s) = P_m - P_e$:

$$\frac{\Delta f(s)}{\Delta P(s)} = \frac{1}{2Hs + D},$$

де $H = J\omega_0^2/(2S_{\text{ном}})$ — стала інерції (розмірність — секунди), ω_0 — синхронна частота обертання, $S_{\text{ном}}$ — номінальна потужність. Для потужного турбогенератора значення H може сягати 3–10 с, що забезпечує значну інерційну стійкість.

Для перетворювача ВДЕ, під'єднаного до мережі через інвертор, стала інерції природним чином дорівнює нулю ($H = 0$). Для подолання цього обмеження використовується додатковий канал регулювання активної потужності, який керується сигналом відхилення частоти. Суть віртуальної інерції полягає у штучному введенні аналогів H_v та D_v через операторний зв'язок між додатковою активною потужністю $P_v(s)$ та відхиленням частоти $\Delta f(s)$: $P_v(s) = -G_{VI}(s) \cdot \Delta f(s)$. Операторний блок $G_{VI}(s)$ повинен мати такі властивості, щоб замкнена система «енергомережа + VSG» була стійкою та забезпечувала необхідну якість регулювання частоти згідно з вимогами Кодексу системи передачі України.

Класичний алгоритм VSG (Virtual Synchronous Generator). Цей підхід реалізує повну аналогію з рівнянням руху синхронного генератора: віртуальна активна потужність визначається інтегралом від відхилення частоти, що імітує інерційний накопичувач енергії. Операторна модель VSG має вигляд:

$$P_v(s) = -\frac{K_i}{1 + sT_i} \cdot \Delta f(s) - K_d\Delta f(s),$$

де $\frac{K_i}{1+sT_i}$ — інтегральна складова з фільтром, що імітує інерцію, а K_d — пропорційна складова, що імітує первинне регулювання (дрооп-статизм).

Модель з дробово-раціональним оператором першого порядку. Для спрощення реалізації та зменшення обчислювального навантаження часто використовують компактнішу операторну модель:

$$G_{VI}(s) = \frac{K_v s}{1 + \tau_v s},$$

де K_v — коефіцієнт віртуальної інерції (аналог сталої часу інерції), τ_v — стала часу фільтра, яка обмежує смугу пропускання регулятора та фільтрує високочастотні шуми вимірювань.

Гібридна структура зі змінними параметрами. Для покращення перехідних режимів при великих збуреннях (наприклад, коротких замиканнях) пропонуються адаптивні операторні моделі, в яких K_v та τ_v залежать від поточного значення частоти $f(t)$ та її похідної $\frac{df}{dt}$. Такі моделі дозволяють тимчасово збільшувати коефіцієнт віртуальної інерції при аварійних зниженнях частоти, забезпечуючи додаткову підтримку в найбільш критичний момент.

Ключовим етапом синтезу системи з віртуальною інерцією є аналіз стійкості замкненої системи. Характеристичне рівняння для моделі енергосистеми з одним синхронним генератором та одним перетворювачем, оснащеним VSG, має третій порядок:

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,$$

де коефіцієнти a_i визначаються параметрами системи (H, D, K_v, τ_v та ін.). Застосування критерію стійкості Гурвіца або критерію Найквіста дозволяє визначити область допустимих значень параметрів VSG, в межах якої система залишається стійкою. Використання операторних моделей у поєднанні з частотними методами (Bode-діаграми, root locus) є стандартним інженерним підходом до проєктування систем керування перетворювачами.

Теорема про стійкість системи з віртуальною інерцією (формулюється за аналогією з класичними роботами): замкнена система «енергомережа + VSG» є асимптотично стійкою при будь-яких обмежених збуреннях, якщо параметри операторної моделі задовольняють умовам $\tau_v > 0, K_v > 0$ та додатковим нерівностям, що випливають з умов Гурвіца. Порушення цих умов (наприклад, вибір надто великого K_v при малому τ_v) призводить до появи коливальної нестійкості з частотою в діапазоні 2–10 Гц, що є неприпустимим.

Великі ВЕС/СЕС (100–200 МВт), підключені до магістральних мереж, згідно з вимогами ENTSO-E та НЕК «Укренерго» мають надавати послуги з підтримки частоти, зокрема віртуальну інерцію. Операторні моделі дають змогу налаштовувати K_v і τ_v для окремих генераторів або станції в цілому, імітуючи поведінку синхронного генератора, з обов'язковою координацією, щоб уникнути «паразитних» коливань між VSG.

В ізольованих системах (острови, віддалені об'єкти), де немає потужного синхронного генератора, частоту та напругу забезпечують BESS. Віртуальна інерція, реалізована через операторні моделі, критична для стабільності частоти при змінах режиму та навантаження. Модель $G_{VI}(s)$ доповнюють нелінійними обмеженнями (кулонівська ефективність, глибина розряду, потужність).

Основні показники якості – frequency nadir і RoCoF. Правильно налаштована VSG знижує RoCoF у 2–4 рази, підвищує nadir і запобігає спрацюванню UFLS. Параметри визначають на етапі проєктування за допомогою імітаційного моделювання (MATLAB/Simulink, PSCAD, PowerFactory) на основі операторних рівнянь.

VSG працюють паралельно з традиційними регуляторами:

1. Первинне регулювання (дрооп, $\sigma = 4 - 5\%$ стала часу сервомеханізму 0.5–2 с) – повільніше.

2. Вторинне (AGC, десятки секунд – хвилини) – відновлює номінальну частоту. Головне завдання – уникнути резонансної взаємодії швидкої VSG і повільного AGC. Розв'язують підбором K_v, τ_v (наприклад, введенням фільтра нижніх частот у канал VSG).

Найпоширенішим непорозумінням є уявлення про те, що віртуальна інерція не потребує реальних енергетичних затрат. Насправді, будь-яке відхилення активної потужності ΔP для імітації інерційного відгуку має бути взяте з конкретного джерела [3, 4]:

- Якщо це BESS (системні накопичувачі): енергія безпосередньо витрачається з акумулятора, збільшуючи кількість циклів його заряду/розряду.
- Якщо це ВЕС або СЕС: станціям доводиться працювати в режимі штучного розвантаження (*deloaded operation*). Це означає, що об'єкт генерує не максимально можливу на цей момент потужність, а дещо меншу, резервуючи «інерційний капітал»

Наслідок: Робота в такому режимі призводить до перманентної недовиробки електроенергії та зниження загальної економічної ефективності відновлюваних джерел енергії (ВДЕ).

Віртуальна інерція не замінює, а доповнює традиційні методи регулювання частоти, діючи на різних часових шкалах:

- Віртуальна інерція (VSG). Найшвидша, але короткочасна. Вмикається протягом мілісекунд після виникнення небалансу потужності, триває 1–10 секунд. Її основна мета — зменшити RoCoF та дати час для вмикання повільніших регуляторів.
- Первинне регулювання (дрооп). Швидкість — секунди, тривалість — постійна. Стабілізує частоту на новому стаціонарному значенні, але не повертає її до номіналу (наявність статичної помилки).
- Вторинне регулювання (AGC). Швидкість — десятки секунд — хвилини. Повертає частоту до номіналу (усуває статичну помилку), відновлює плановий баланс потужностей.

Разом усі три контури утворюють систему ієрархічного регулювання. Передавальна функція розімкненої системи "енергомережа + ВДЕ + традиційні генератори" має вигляд:

$$G_{\mathrm{op}}(s) = \frac{1}{2H_{\mathrm{eq}}s + D_{\mathrm{eq}}} + G_{\mathrm{VI}}(s) + G_{\mathrm{droop}}(s) + G_{\mathrm{AGC}}(s).$$

Кожен з доданків має свою характерну передавальну функцію: $G_{\mathrm{droop}}(s)$ зазвичай є пропорційним (або пропорційно-інтегральним) регулятором, $G_{\mathrm{AGC}}(s)$ — інтегратором з великою сталою часу. Проєктування такої багатоконтурної системи виконується з використанням частотних методів, зокрема діаграм Боде та логарифмічних частотних характеристик.

Висновки

Операторні моделі віртуальної інерції є фундаментальним математичним апаратом для опису динаміки перетворювачів відновлюваних джерел енергії (ВДЕ) у задачах стабілізації частоти. Використання передавальних функцій та частотних методів дозволяє синтезувати алгоритми керування віртуальними синхронними генераторами (VSG) з наперед визначеними властивостями стійкості, що дає змогу ефективно інтегрувати великі вітрові, сонячні станції та системи накопичення енергії до сучасних енергосистем. Така практична реалізація віртуальної інерції у вигляді операторних моделей першого або вищого порядку забезпечує виконання жорстких вимог Кодексу системи передачі та стандартів ENTSO-E.

Водночас для коректного застосування цих моделей і запобігання конфлікту регуляторів критично важливо враховувати їхні обмеження, такі як енергетична вартість віртуальної інерції, необхідність точної ідентифікації параметрів та проблеми масштабування на велику кількість перетворювачів. Саме тому подальші дослідження мають бути спрямовані на розробку адаптивних та робастних моделей, здатних підлаштовувати свої параметри K_v та τ_v до змін режиму роботи мережі, а також на застосування нейромережевих і нечітких регуляторів для синтезу нелінійних моделей, які точніше відтворюють поведінку реального синхронного генератора. У контексті євроінтеграції України та синхронізації нашої ОЕС із ENTSO-E, впровадження таких підходів стає необхідною умовою для сертифікації нових генеруючих потужностей і гарантування загальної надійності енергопостачання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Голомозий В. В., Калініченко М. В., Царьова Л. В. та ін. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник / за ред. В. В. Голомозія. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 415 с.
2. Козловська І. М. Основи теорії ймовірностей : навч. посіб. – Київ : Центр навчальної літератури, 2020. – 280 с.
3. Казимир В. Я., Стоцький Я. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. – Тернопіль : ТНТУ, 2019. – 312 с.
4. Войчак Ю. М., Войчак Т. П., Демченко Н. В. Статистичні методи аналізу даних : навч. посіб. – Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2018. – 292 с.

Шпак Віктор Сергійович, Вінницький національний технічний університет, Факультет електороенергетики та електромеханіки, 1-й курс, група ЕС-25б, shpakviktor2912@gmail.com

С***ачанюк-Кавецька Наталія Василівна*** - к. т. н., доцент. Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Науковий керівник: ***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна*** - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Shpak Viktor S., Vinnytsia National Technical University, Faculty of Electric Power Engineering and Electromechanics, 1st year, group ES-25b, shpakviktor2912@gmail.com

Sachaniuk-Kavets ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: ***Sachaniuk-Kavetska Natalia V.*** Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

УДК 519.876.5:519.688

В.М. Абламська

ВИКОРИСТАННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ ЯК МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації
імені Героїв Крут

Анотація

У роботі розглянуто нейронні мережі як сучасний інструмент математичного моделювання складних процесів і явищ. Досліджено математичні основи побудови штучних нейронних мереж, принципи їх функціонування та навчання. Проаналізовано роль методів лінійної алгебри, математичного аналізу та оптимізації у формуванні моделей на основі нейронних мереж. Висвітлено можливості застосування нейронних мереж для апроксимації функцій, аналізу даних, прогнозування та розв'язування прикладних задач. Показано, що нейронні мережі є ефективним засобом моделювання складних нелінійних залежностей і знаходять широке застосування в сучасних інформаційних технологіях.

Ключові слова: нейронна мережа, математичне моделювання, штучний інтелект, оптимізація, апроксимація функцій, машинне навчання, математична модель.

Abstract

This paper considers neural networks as a modern tool for mathematical modeling of complex processes and phenomena. The mathematical foundations of artificial neural network construction, as well as the principles of their operation and training, are investigated. The role of linear algebra, mathematical analysis, and optimization methods in the development of neural network-based models is analyzed. The possibilities of applying neural networks to function approximation, data analysis, forecasting, and solving applied problems are highlighted. It is shown that neural networks are an effective means of modeling complex nonlinear relationships and are widely used in modern information technologies.

Keywords: neural network, mathematical modeling, artificial intelligence, optimization, function approximation, machine learning, mathematical model.

Вступ

Сучасний розвиток інформаційних технологій супроводжується широким використанням методів штучного інтелекту, зокрема нейронних мереж. Вони застосовуються для аналізу даних, прогнозування, розпізнавання образів та прийняття рішень. З математичної точки зору нейронні мережі є складними нелінійними моделями, що дозволяють апроксимувати багатовимірні функції та описувати складні залежності між змінними.

Мета роботи полягає в аналізі нейронних мереж як математичних моделей, дослідженні їх структури, принципів навчання та основних сфер застосування.

Результати дослідження

Математична модель штучного нейрона

Нейронні мережі є одним із найперспективніших напрямів сучасного математичного моделювання та штучного інтелекту. Їх широке застосування зумовлене здатністю ефективно обробляти великі обсяги даних, виявляти приховані закономірності та прогнозувати результати складних процесів [1, 2]. Сьогодні нейронні мережі використовуються у фінансовій сфері, медицині, робототехніці, системах підтримки прийняття рішень та багатьох інших галузях.

Математичною основою нейронної мережі є штучний нейрон, який моделює принцип роботи біологічного нейрона. Його функціонування можна описати формулою:

$$y = f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + b\right)$$

де x_i – вхідні дані, w_i – вагові коефіцієнти, b – зміщення, f – функція активації.

Функція активації визначає, як нейрон перетворює отриманий сигнал та передає його далі. Саме вона забезпечує нелінійність моделі, що дозволяє нейронним мережам розв'язувати складні задачі.

Функція активації вводить нелінійність у модель, що дозволяє мережі описувати складні залежності. Найпоширенішими є **sigmoid, ReLU** та **tanh**.

- sigmoid (сигмоїдна функція)- перетворює будь-яке вхідне значення в число від 0 до 1.
- ReLU (Rectified Linear Unit)- найпоширеніша функція активації в сучасних нейронних мережах.
- tanh (гіперболічний тангенс) - функція схожа на sigmoid, але її значення лежать у діапазоні від –1 до 1.

У сучасних моделях штучного інтелекту найчастіше використовується **ReLU**, оскільки вона забезпечує швидше та ефективніше навчання нейронних мереж. Для вихідних шарів класифікаційних моделей часто застосовують **sigmoid**, а **tanh** використовується в окремих архітектурах рекурентних нейронних мереж.

Таким чином, нейрон виконує операцію зваженого підсумовування з подальшим нелінійним перетворенням.

Нейронна мережа як композиція функцій

Нейронна мережа являє собою систему з багатьох шарів нейронів, де кожен шар виконує перетворення даних:

$$f(x) = f^3 f^2 f^1(x)) \ ,$$

Така структура дозволяє моделювати складні нелінійні функції. З математичної точки зору нейронна мережа є композицією багатьох векторно-матричних перетворень.

Навчання нейронної мережі як задача оптимізації

Нейронна мережа складається з множини взаємопов’язаних нейронів, організованих у вхідний, приховані та вихідний шари. З математичної точки зору вона є композицією багатьох функцій, що дозволяє описувати складні нелінійні залежності між вхідними та вихідними даними [3, 4]. Саме ця властивість забезпечує високу ефективність нейронних мереж під час розв’язування задач класифікації, прогнозування та апроксимації функцій.

Важливим етапом функціонування нейронної мережі є процес навчання, який полягає у підборі оптимальних значень вагових коефіцієнтів. Математично ця задача зводиться до мінімізації функції втрат за допомогою методів оптимізації [4]. Одним із найпоширеніших алгоритмів навчання є градієнтний спуск:

Процес навчання полягає у підборі таких значень ваг wi, які мінімізують функцію втрат:

$$L(w) \to min \ ,$$

Для цього використовується метод градієнтного спуску:

$$w \coloneqq w - \eta \cdot \nabla \mathrm{L(w)} \ ,$$

де η- швидкість навчання, $\nabla \mathrm{L(w)}$ – градієнт функції втрат.

Таким чином, навчання нейронної мережі зводиться до багатовимірної задачі оптимізації.

Нейронні мережі як апроксиматори функцій

Однією з найважливіших властивостей нейронних мереж є здатність до апроксимації функцій. Згідно з теоремою універсальної апроксимації, багатошарова нейронна мережа може наближати довільну неперервну функцію із заданою точністю [3]. Це робить нейронні мережі ефективним інструментом математичного моделювання процесів, для яких складно або неможливо побудувати точну аналітичну модель.

Математичне представлення даних

У нейронних мережах дані подаються у вигляді векторів, а обчислення — у вигляді матричних операцій:

$$Y = WX + b$$

де W – матриця ваг, X – вектор вхідних даних.

Це дозволяє ефективно реалізовувати обчислення за допомогою лінійної алгебри.

Сучасні нейронні мережі активно використовуються для розпізнавання образів, аналізу текстової інформації, прогнозування часових рядів та обробки великих масивів даних [2, 6]. Їх застосування дозволяє отримувати результати високої точності навіть у випадках, коли досліджувані процеси мають складну структуру та значну кількість параметрів.

Висновки

Нейронні мережі є потужним математичним інструментом моделювання складних нелінійних систем. Їхня основа базується на методах лінійної алгебри, математичного аналізу та теорії оптимізації. Завдяки здатності до апроксимації функцій та навчанню на даних вони знаходять широке застосування в сучасних інформаційних технологіях.

Таким чином, нейронні мережі є потужним математичним інструментом, який поєднує методи лінійної алгебри, математичного аналізу, теорії ймовірностей та оптимізації. Завдяки своїй універсальності та високій ефективності вони посідають важливе місце серед сучасних засобів математичного моделювання і залишаються одним із найбільш перспективних напрямів розвитку інформаційних технологій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Artificial Intelligence: A Modern Approach / Russell S., Norvig P. 4th ed. Pearson, 2021. 1136 p.
2. Neural Networks and Deep Learning. Determination Press, 2015. 225 p.
3. Deep Learning / Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. MIT Press, 2016. 775 p.
4. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006. 738 p.
5. Machine Learning. McGraw-Hill, 1997. 414 p.
6. Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow. 3rd ed. O'Reilly Media, 2022. 851 p.

Абламська Валентина Михайлівна викладач, Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, м. Київ, email: boltyk@ukr.net

Ablamska Valentyna lecturer, Kruty Heroes Military Institute of Telecommunications and Information Technology, Kyiv, email: boltyk@ukr.net

УДК 621:539.43:519.87

В. В. Задеряка
О. В. Піонткевич
В. В. Хом'юк

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ ВРАХУВАННЯ ВТОМИ МАТЕРІАЛУ ДЕТАЛІ ВІД ДІЇ ЦИКЛІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Застосовано методи математичного моделювання та розроблено тривимірну модель деталі «Стакан редуктора» за допомогою CAE-системи SOLIDWORKS. Деталь слугує опорним елементом вузла та призначена витримувати інтенсивні циклічні навантаження від роботи двигуна. На основі чисельних методів та імітаційного модуля Fatigue проведено розрахунковий аналіз втоми матеріалу. Встановлено залежність довговічності деталі від її геометричних параметрів, зокрема визначено рекомендований радіус скруглення після буртика підшипника для запобігання втомному руйнуванню.

Ключові слова: математичне моделювання, solidworks, стакан редуктора, втома матеріалу.

Abstract

Mathematical modeling methods were applied, and a three-dimensional model of the "Reducer cup" part was developed using the SOLIDWORKS CAE system. The part serves as a supporting element of the assembly and is designed to withstand intense cyclic loads from engine operation. Based on numerical methods and the Fatigue simulation module, a computational material fatigue analysis was conducted. The dependence of the durability of the part on its geometric parameters has been established, in particular, the recommended radius of curvature after the bearing flange has been determined to prevent fatigue failure.

Keywords: mathematical modeling, solidworks, reducer cup, material fatigue.

Вступ

Прогнозування деградаційних процесів та запобігання втомному руйнуванню елементів технічних систем є фундаментальною прикладною задачею, яка вимагає глибинної інтеграції сучасного математичного апарату в інженерну практику та вищу технічну освіту [1, 2]. Сучасні тенденції [3, 4] до оптимізації геометричних параметрів та підвищення енергоефективності мобільних машин [5, 6] чи гідравлічних систем [7, 8, 9] змушують відходити від спрощених підходів, оскільки реальні конструкції експлуатуються у високоінтенсивних циклічних режимах із мінімально допустимими запасами міцності.

Прогнозування ресурсу таких компонентів ще на етапі розробки вимагає відходу від класичних статичних розрахунків на користь динамічного аналізу довговічності (Fatigue Life Analysis). Ефективним та гнучким інструментом для практичної реалізації складних чисельних алгоритмів є сучасні CAE-системи Autodesk Inventor [10, 11], SOLIDWORKS Simulation [12, 13] та інші, які функціонують на основі методу скінченних елементів.

Мета дослідження полягає у застосуванні методів математичного моделювання під час інженерного аналізу втоми матеріалу деталі «Стакан редуктора» для оцінки впливу її геометричних параметрів, а саме радіуса скруглення, на напружено-деформований стан у найбільш критичних зонах.

Результати дослідження

Математичне моделювання процесів втомного руйнування елементів конструкцій базується на поєднанні методів континуальної механіки деформівного твердого тіла та чисельних методів лінійної алгебри, реалізованих через метод скінченних елементів. На першому етапі розв'язується просторова крайова задача теорії пружності для визначення компонентів тензора напружень і знаходження напружено-деформованого стану об'єкта у статичній постановці.

Отримані значення локальних напружень виступають вихідними даними для прогнозування циклічної довговічності за допомогою експериментально-аналітичної кривої втоми (див. криву S-N на рисунку 1). Математично ця крива описує функціональну залежність граничної кількості циклів до руйнування N від амплітуди знакозмінних напружень σ_a:

$$\mathrm{N} = f(\sigma_a). \tag{1}$$

У логарифмічних координатах $\log(N) - \log(\sigma_a)$ ця залежність апроксимується лінійними або кусково-лінійними рівняннями.

Для оцінки міри накопичення пошкоджень за постійної амплітуди навантаження застосовується критерій лінійного сумування Пальмгрена-Майнера. Згідно з цією математичною моделлю, безрозмірний коефіцієнт сумарного пошкодження D визначається як відношення:

$$D = n/N, \tag{2}$$

де n – задана база циклів експлуатаційного навантаження, а N – гранична кількість циклів до руйнування при відповідному рівні напружень, знайдена з S-N кривої. Умова довговічності виконується при $D \leq 1$; значення $\mathrm{D} > 1$ свідчить про вичерпання ресурсу міцності та початок руйнування матеріалу. Характер циклу описується коефіцієнтом асиметрії напружень:

$$R = \sigma_{min}/\sigma_{max}, \tag{3}$$

який для знакозмінного симетричного навантаження дорівнює R = -1.

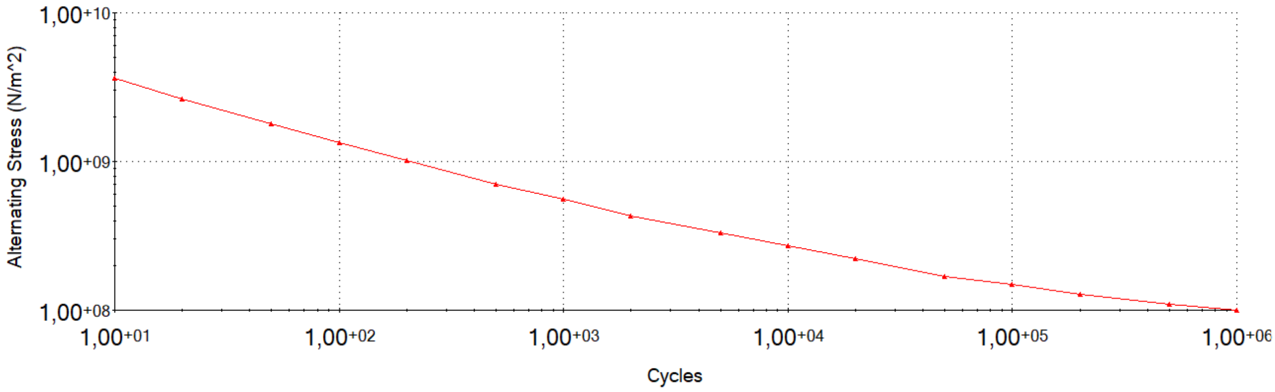


Рис. 1 – Крива S-N для сталі на основі кривих ASME згідно рекомендацій SOLIDWORKS

Описаний математичний підхід та його чисельна реалізація в CAE-системі SOLIDWORKS Simulation модуля Fatigue застосовані для дослідження довговічності деталі «Стакан редуктора», що функціонує як опорний елемент вузла. На внутрішню поверхню деталі, виготовленої з якісної конструкційного матеріалу Сталі 45 ДСТУ 7809:2015, від зубчастої передачі передаються змінні радіальні та осьові реакції, зумовлені коливаннями частоти обертання двигуна. Масивні стінки деталі забезпечують сприйняття динамічних ударів без макродеформацій, проте циклічний характер сил суттєво впливає на її втомну довговічність.

За результатами проведеного чисельного скінченно-елементного розрахунку для бази навантаження $n = 10^6$ циклів при знакозмінному режимі R = -1 ідентифіковано просторову зону максимальної концентрації напружень. Критичною ділянкою виявився геометричний перехід від діаметра упору підшипників до їх базування. Математичний розрахунок за кривою втоми показав значне накопичення пошкоджень у цій зоні при розрахунковому ресурсі деталі до $N = 5914$ робочих циклів (рисунок 2). Такий низький ресурс зумовлений значною концентрацією напружень у зоні переходу. Однак коефіцієнт запасу міцності для стаціонарного режиму роботи деталі становить 1,809, що є достатнім для забезпечення статичної міцності конструкції.

Для оптимізації конструкції та забезпечення умови втомної міцності проведено параметричний геометричний аналіз. Досліджено функціональну залежність величини пошкодження від радіуса скруглення r після буртика. Отримана залежність $D = f(r)$ (рисунок 3) продемонструвала виражений нелінійний характер: при значеннях $r \leq 3{,}0$ мм спостерігається критичний дефіцит довговічності, тоді як починаючи з геометричного параметра r > 3,0 мм відбувається інтенсивний стрибок збільшення терміну служби деталі.

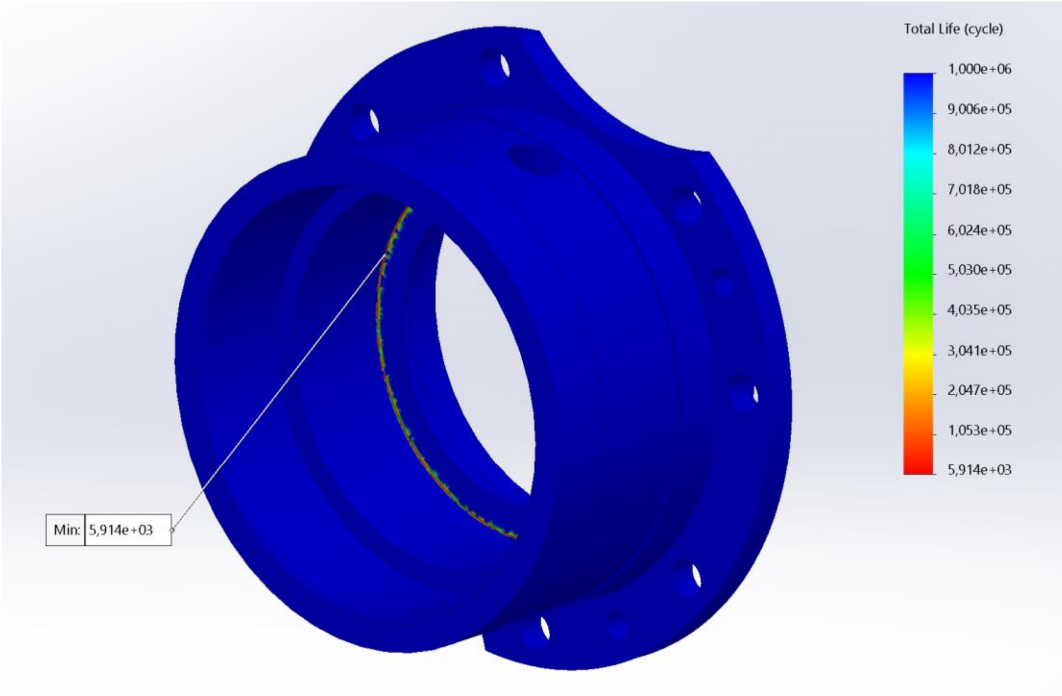


Рис. 3 – Результат розрахунку терміну служби при дії циклічних навантажень на деталь

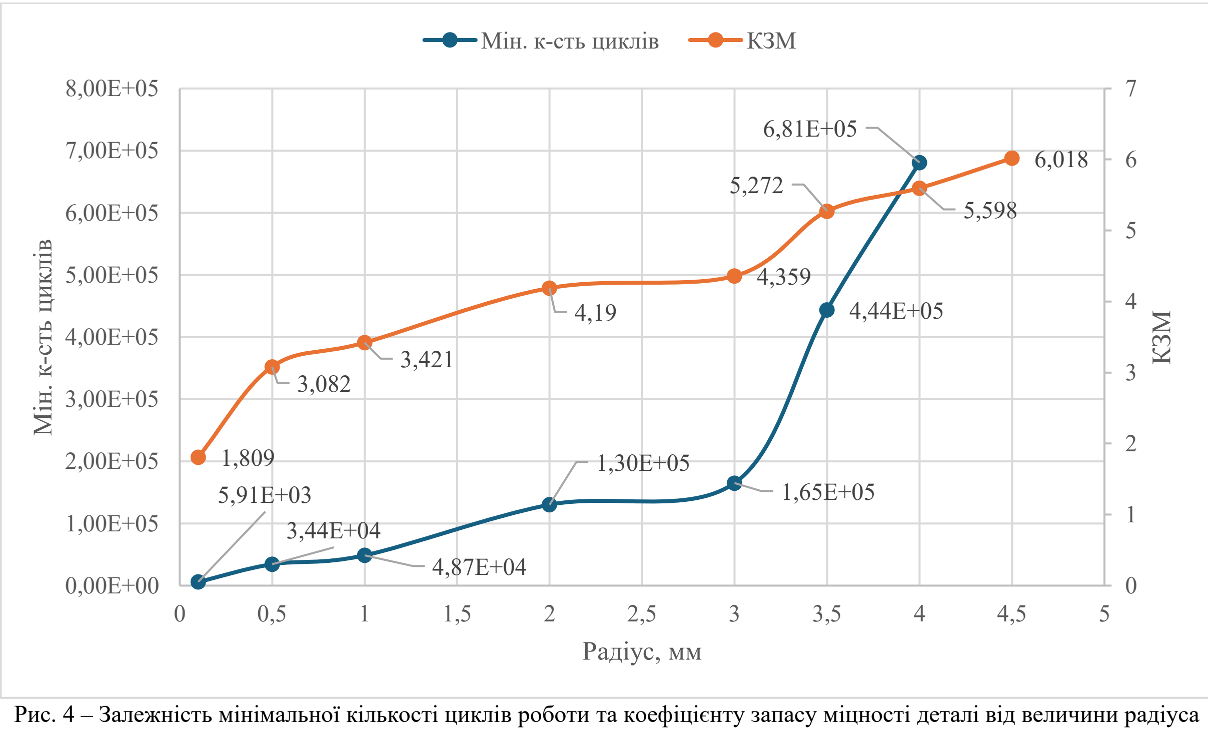


Рис. 4 – Залежність мінімальної кількості циклів роботи та коефіцієнту запасу міцності деталі від величини радіуса скруглення після буртика

Найкращий результат моделювання досягається при $r = 4,5$ мм, де значення сумарного пошкодження прямує до нуля $D \to 0$, і явищ втомного руйнування не спостерігається. Водночас розрахунковий коефіцієнт запасу міцності при збільшенні радіуса скруглення демонструє відносно стабільний лінійний характер зростання. Це дозволяє рекомендувати радіус скруглення від 3,5 мм як нижню межу для забезпечення ресурсу понад $4,44 \cdot 10^5$ циклів, та $r = 4$ мм для повного усунення ризику втомного руйнування.

Висновок

На основі методів математичного моделювання та використання САЕ-системи SOLIDWORKS Simulation реалізовано розрахунковий аналіз втомного руйнування деталі «Стакан редуктора» за умов дії циклічних навантажень.

За результатами розрахунку рекомендовано обирати для практичного проєктування експлуатаційного ресурсу понад $4{,}44 \cdot 10^5$ циклів радіус скруглення після буртика підшипника не менше 3,5 мм, а для максимального підвищення довговічності – 4,5 мм.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Березюк О. В. Планування багатофакторного експерименту для дослідження вібраційного гідроприводу ущільнення твердих побутових відходів // Вібрації в техніці та технологіях. 2009. № 3 (55). С. 92-97.
2. Kazachiner O., Boychuk Y. Theoretical and scientific foundations of pedagogy and education. International ScienceGroup 2022. 476 p.
3. Піонткевич О. В. Підвищення ефективності багаторежимного гідроприводу фронтального навантажувача: дис. кандидата техн. наук : 05.02.02 / Піонткевич Олег Володимирович. Київ, 2019. 249 с.
4. Лозінський Д.О. Ротаційна витяжка осесиметричних деталей з використанням пропорційного електрогідравлічного приводу / Д.О. Лозінський, І.О. Сивак, Є.І. Шевчук, В.Г. Пилявець // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки, 2015. №4. С. 21-24.
5. Березюк, О. В. Огляд конструкцій машин для збирання та первинної переробки твердих побутових відходів. Вісник машинобудування та транспорту. Вінниця: ВНТУ, 2015. №1. С. 3-8.
6. Березюк О.В. Науково-технічні основи проектування приводів робочих органів машин для збирання та первинної переробки твердих побутових відходів: автореф. дис. д-ра техн. наук. Хмельницький, 2021. 46 с.
7. Kozlov L., Piontkevych O., Semichasnova N., Ubidia Rodriges D. D., The experimental stand for determining the characteristics of the hydraulic drive control system with the multifunctional counterbalance valve, II International scientificengineering conference «Hydraulic and pnevmatic drive of machines»: International scientific-engineering conference, 2016. P. 119-120
8. Піонткевич О. В. Розрахунок гідродинамічної сили на золотнику врівноважувального клапана на основі імітаційного моделювання течії робочої рідини в його каналах / О. В. Піонткевич, Л. Г. Козлов, О. В. Березюк, О. В. Сердюк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2024. № 5. С. 77-83.
9. Хом'юк І., Хом'юк В. Математичне моделювання в контексті здійснення між предметних зв'язків курсу вищої математики у ВНЗ. Актуальні питання природничо-математичної освіти : збірник наукових праць. Суми, 2017. Вип. 2 (10). С. 43–50.
10. Піонткевич О. В., Лозінський Д. О., Сердюк О. В., Савуляк В. В. Забезпечення результатів вивчення CAD/CAE/CAM систем для підготовки фахівців із спеціальності «Прикладна механіка». Матеріали XVI Міжнародної науково-методичної конференції «Сучасна освіта - доступність, якість, визнання», 13–14 листопада 2024 р. КраматорськВінниця-Тернопіль, Краматорськ : ДДМА, 2024. С. 247-252.
11. Піонткевич О. В., Березюк О. В., Лозінський Д. О., Кавецький О. І. Застосування CAD/CAE-системи Autodesk Inventor для удосконалення фрезерногравірувального верстата з ЧПК. Наукові праці Вінницького національного технічного університету. Вінниця: ВНТУ, 2025. Вип. 1. С. 1–9. https://doi.org/10.31649/2307-5376-2025-1-178-186
12. Петров О. В., Піонткевич О. В., Буда А. Г., Коломієць В. С. Застосування CAD/CAE-системи Solidworks у задачах аналізу міцності деталей верстатних пристосувань. Вісник машинобудування та транспорту. Вінниця : ВНТУ, 2024. Вип. 19. № 1. С. 95–102.
13. Піонткевич О. В., Сухоруков С. І., Петров О. В., Сердюк О. В. «Комп`ютеризовані системи проєктування» для здобувачів вищої освіти зі спеціальності «Прикладна механіка»: електронний лабораторний практикум. Вінниця : ВНТУ, 2025. 142 с.

Задеряка Вячеслав Вікторович – студент групи 1ПМ–24мз, факультет машинобудування та транспорту, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: zaderyaka2015@gmail.com.

Піонткевич Олег Володимирович – к-т техн. наук, доцент кафедри технологій та автоматизації машинобудування, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: piontkevych@vntu.edu.ua.

Хом'юк Віктор Вікторович – к-т техн., доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: khomyuk@vntu.edu.ua

Zaderiaka Viacheslav V. – student of the Department of Mechanical Engineering and Transport, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: zaderyaka2015@gmail.com

Piontkevych Oleh V. – Candidate of Technical Sciences, Associate professor of the Department of Technology and Automation of Mechanical Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: piontkevych@vntu.edu.ua

Khomyuk Viktor V. – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor the department of Higher Mathematics Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: khomyuk@vntu.edu.ua

УДК 512.64

В.Д. Дереч

ВІДНОШЕННЯ СПРЯЖЕНОСТІ В ІНВЕРСНОМУ МОНОЇДІ ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ МІЖ ІНТЕРВАЛАМИ ВПОРЯДКОВАНОЇ МНОЖИНИ $\mathbb{N}$

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Ми знаходимо необхідні і достатні умови спряженості двох елементів інверсного моноїда локальних автоморфізмів між інтервалами натуральних чисел.

Ключові слова: інверсна напівгрупа; відношення спряженості.

Abstract

We find necessary and sufficient conditions for two elements of the inverse monoid of local automorphisms between intervals of natural numbers to be conjugate.

Keywords: inverse semigroup; conjugacy relation

Одним з основних бінарних відношень, що визначаються на групі G, є відношення спряженості. Кажуть, що елементи $a,b \in G$ спряжені, якщо існує елемент $x \in G$ такий, що $a = xbx^{-1}$. Відношення спряженості між елементами $a,b \in G$ позначають через $a \sim b$. Оскільки в довільній напівгрупі не існує коректного означення елемента, оберненого до x, то автоматично перенести поняття спряженості на довільну напівгрупу – неможливо. Втім можна визначити відношення спряженості на групі, не використовуючи x^{-1}. А саме: елементи $a,b \in G$ спряжені тоді і лише тоді, коли знайдуться елементи $u,v \in G$ такі, що $a = u \cdot v$ і $b = v \cdot u$. Легко показати, що для групи наведені два означення є еквівалентними. Друге означення безперешкодно можна застосувати для довільної напівгрупи. Взагалі будемо вважати, що бінарне відношення на напівгрупі є відношенням спряженості, якщо його застосування для групи дає класичне означення групової спряженості. Найзагальніше означення спряженості (позначається через $\sim_n$) на довільній напівгрупі було дано в статті [1]. Відтворимо його: нехай S – довільна напівгрупа і S^1 – напівгрупа, яку ми одержуємо з S, зовні приєднавши до неї одиницю 1. Тоді:

$$a \sim_n b \Leftrightarrow \exists_{g,h \in S^1} \left(ag = gb,\ bh = ha,\ hag = b,\ gbh = a \right).$$

Далі, напівгрупу S називають інверсною, якщо для будь-якого елемента $a \in S$ існує єдиний елемент $a^{-1} \in S$ такий що $aa^{-1}a = a$ і $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$. Конкретизуючи загальне означення спряженості для інверсної напівгрупи S одержуємо (див. [2]):

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists_{g \in S^1} \left(g^{-1}ag = b,\ gbg^{-1} = a \right).$$

Застосуємо щойно наведене означення спряженості для інверсної напівгрупи IIn, яку ми визначимо наступним чином: розглянемо сукупність всіх інтервалів на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ (тут маються на увазі інтервали вигляду $[a;\infty)$ і вигляду $[a;b]$). Елементами напівгрупи IIn є взаємно однозначні монотонні функції, для кожної з яких область визначення і множина значень є інтервалом. Наприклад, $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in IIn$ і $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & \cdots & n & \cdots \\ 2 & 3 & 4 & & n-2 & \end{pmatrix} \in IIn.$ Якщо $\xi \in IIn$, то область визначення і множину значень функції ξ позначимо відповідно через $dom(\xi)$ і $im(\xi)$. Зазначимо простий факт: якщо $\xi, \eta \in IIn$, $dom(\xi) = dom(\eta)$ і $im(\xi) = im(\eta)$, то $\xi = \eta$.

Наступні дві теореми характеризують відношення спряженості на інверсній напівгрупі IIn.

Теорема 1. Нехай $\xi, \eta \in IIn$, до того ж $\eta : [a;\infty) \to [b;\infty)$ і $\xi : [c;\infty) \to [d;\infty)$. Тоді має місце еквіваленція $\eta \square \xi \Leftrightarrow a - b = c - d$.

Доведення. 1) Припустимо, що для деякого $g \in IIn$ мають місце рівності:

$$g^{-1} \circ \eta \circ g = \xi \text{ і } g \circ \xi \circ g^{-1} = \eta.$$

Оскільки $(a;b) \in \eta$, то $(a;b) \in g \circ \xi \circ g^{-1}$. Звідси випливає, що існують натуральні числа z і u такі, що $(a;z) \in g$, $(z;u) \in \xi$, $(u;b) \in g^{-1}$. Позаяк $(u;b) \in g^{-1}$, то $(b;u) \in g$. До того ж $(a;z) \in g$. Звідси маємо рівність $z - a = u - b$, з якої одержуємо: $z - u = a - b$. Оскільки $(z;u) \in \xi$, то $z - u = c - d$. Отже, $a - b = c - d$.

2) Припустимо тепер, що має місце рівність $a - b = c - d$. Нам треба довести, що існує елемент $g \in IIn$ такий, що $g^{-1} \circ \eta \circ g = \xi$ і $g \circ \xi \circ g^{-1} = \eta$. Нехай $g : [a;\infty) \to [c;\infty)$. Тоді $g^{-1} : [c;\infty) \to [a;\infty)$. Розглянемо випадок, коли $b \ge a$. Оскільки $a - b = c - d$, то $b - a = d - c \ge 0$. Тобто $d \ge c$, а, отже, $d \in dom\left(g^{-1}\right)$. Розглянемо $g \circ \xi \circ g^{-1}$. Маємо:

$$(a)g = c,\ (c)\xi = d,\ (d)g^{-1} = d + a - c = \{d = c + b - a\} = c + b - a + a - c = b.$$

Отже, $dom\left(g \circ \xi \circ g^{-1}\right) = dom(\eta)$. Оскільки $(a)g = b \in im\left(g \circ \xi \circ g^{-1}\right)$, враховуючи рівність $dom\left(g \circ \xi \circ g^{-1}\right) = dom(\eta) = [a;\infty)$ і взаємно однозначність всіх перетворень напівгрупи IIn, одержуємо рівність $im\left(g \circ \xi \circ g^{-1}\right) = im(\eta)$. Позаяк $dom\left(g \circ \xi \circ g^{-1}\right) = dom(\eta)$ і $im\left(g \circ \xi \circ g^{-1}\right) = im(\eta)$, то $g \circ \xi \circ g^{-1} = \eta$. Аналогічно можна довести рівність $g^{-1} \circ \eta \circ g = \xi$. Зауважимо також, що доведення залишається таким самим за умови, що $b \le a$.

Теорема 2. Нехай $\xi, \eta \in IIn$, до того ж $\eta : [a;b] \to [c;d]$ і $\xi : [x;y] \to [u;v]$. Тоді має місце еквіваленція $\eta \square \xi \Leftrightarrow a - c = x - u$ і $rank(\eta) = rank(\xi)$.

Доведення. 1) Припустимо, що для деякого $g \in IIn$ мають місце рівності:

$$g^{-1} \circ \eta \circ g = \xi \text{ і } g \circ \xi \circ g^{-1} = \eta.$$

Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що $a - c = x - u$. Оскільки

$$rank(\eta) = rank\left(g \circ \xi \circ g^{-1}\right) \le rank\left(\xi \circ g^{-1}\right) \le rank(\xi) \text{ і}$$

$$rank(\xi) = rank\left(g^{-1} \circ \eta \circ g\right) \le rank(\eta \circ g) \le rank(\eta),$$

то $rank(\eta) = rank(\xi)$.

2) Нехай тепер виконуються рівності: $a - c = x - u$ і $rank(\eta) = rank(\xi)$. Аналогічно, як і при доведенні другої частини теореми 1, ми можемо переконатися, що для перетворення $\varphi : [a;b] \to [x;y]$ мають місце рівності: $\varphi^{-1} \circ \eta \circ \varphi = \xi$ і $\varphi \circ \xi \circ \varphi^{-1} = \eta$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. J. Konieczny, A new definition of conjugacy for semigroups, J. Algebra and Appl. 17 (2018), 20 pp,
2. J. Araújo, M. Kinyon, J. Konieczny, Conjugacy in inverse semigroups, Journal of Algebra 533 (2019) 142–173 pp.

Дереч Володимир Дмитрович, кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, derech@vntu.edu.ua

Derech Volodymyr Dmytrovych, PhD in Mathematics, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, derech@vntu.edu.ua

УДК

В. М. Михалевич
І.С. Кот

Фрагменти навчального Maple-тренажера для реалізації тесту Міллера–Рабіна

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Запропоновано варіант одного з ключових фрагментів навчального програмного тренажера, розробленого в середовищі системи комп'ютерної математики Maple. Тренажер призначено для опанування студентами алгоритму тестування чисел на простоту методом Міллера–Рабіна. Наведено приклади роботи тренажера у вигляді покрокового виведення результатів обчислень, що супроводжуються текстовими коментарями.

Ключові слова: навчальний Maple-тренажер, тест Міллера–Рабіна, прості числа, складені числа, криптографія.

Abstract

A version of a key module of an educational software simulator developed within the Maple computer algebra system is presented. The simulator is intended to help students master primality testing using the probabilistic Miller–Rabin method. Examples of the simulator's operation are provided as step-by-step outputs of computations accompanied by explanatory comments.

Keywords: educational Maple simulator, Miller–Rabin test, prime numbers, composite numbers, cryptography.

Вступ

Безпека сучасних криптосистем критично залежить від використання великих простих чисел. Пряма перевірка чисел на простоту шляхом перебору дільників є ресурсомісткою, тому використання систем комп'ютерної математики (СКМ) у навчальному процесі дозволяє знизити обчислювальне навантаження на студента та підвищити ефективність засвоєння складних алгоритмів теорії чисел.

Одним із таких алгоритмів є тест Міллера–Рабіна, який широко застосовується в сучасній криптографії. Проте традиційні статичні навчальні матеріали у форматах PDF або DOC часто обмежують можливості СКМ, фактично перетворюючи їх на пасивне джерело інформації.

Для подолання цього обмеження в роботі використано концепцію навчальних Maple-тренажерів (НМТ), що реалізує технологію «живих сторінок», де обчислювальний супровід бере на себе система, а студент зосереджується на логіці методу.

Метою роботи є розробка версії ключового фрагмента навчального тренажера в СКМ Maple, що відтворює всі кроки тесту Міллера–Рабіна та супроводжує обчислення текстовими поясненнями, зокрема щодо класифікації числа як «складеного» або «ймовірно простого».

Результати дослідження

Концепція розробки навчальних Maple-тренажерів (НМТ) викладена в [1, 2], технологія «живих сторінок» - в [3]. Різні варіанти реалізації концепції та технології викладено у численних працях, зокрема, [4] – для розв'язання задач лінійного програмування; [5] – для розробки електронних освітніх ресурсів; [6] – для організації самостійної роботи студентів; [7] – для розв'язання задач з математичних основ криптографії.

Розроблений фрагмент НМТ базується на реалізації процедури MilT2, що автоматизує перевірку числа n на простоту за такою схемою:

1. **Представлення числа**: Число $n-1$ подається у вигляді $2^s \cdot d$, де d — непарне число.
2. **Вибір основи**: Обирається випадкове (або задане користувачем) ціле число a (свідок) з діапазону $1 < a < n-1$.

3. **Обчислення послідовності**. Обчислюються значення $a^d(mod\ n), a^{2d}(mod\ n), \ldots, a^{2^{s-1}d}(mod\ n)$.
4. **Аналіз результатів**:
   - Якщо перший елемент послідовності дорівнює 1 або будь-який елемент дорівнює -1 $(mod\ n)$, число вважається «ймовірно простим»;
   - в іншому випадку число n є складеним.

Приклади застосування тренажера

```
MilT2(89027,2);
```

n = !" #$%

n = ! $'k# $'q #+ %

!"#$% = $(&' (&**+), ' +)

k = !

q = !! "#$

Обчислимо члени послідовності:

" #i q $! i = %' " ! … ! " &' $

! "! $'%# $'&&( ) ## = $'*+,)%#$'modp n#

! # $# &' % &() ' * %% = $+,-*. % &# %" = &+#'/(* %&modp n%

В послідовності відсутнє число (-1), отже число n=89027 є складеним.

```
MilT2(89041,2);
```

n = !" #$%

n = ! $'k# $'q #+ %

!"#$% = &)' $( )' **+* (+ %

k = !

q = !! "!

Обчислимо члени послідовності:

" #i q $! i = %' " ! … ! " &' $

! "! $'%# $'&&&## = $'&()* #$'modp n#

! # $# &' % &() (%% = (*+, &# %" = &-'##), %&modp n%

! # $# &# % &"(' %% = $)*##(+ % &# %" = &)* %&modp n%

Число n=89041є, ймовірно, простим.

Особливістю тренажера є інтерактивне відтворення кожного кроку піднесення до степеня за модулем. Це дає змогу студенту не лише отримати кінцевий результат, а й простежити момент порушення умов простоти (наприклад, появу «нетривіального квадратного кореня з одиниці»), що є принципово важливим для розуміння математичної суті тесту.

Висновки

Запропонований фрагмент навчального Maple-тренажера пройшов апробацію під час лекційних і лабораторних занять, а також у процесі самостійної роботи студентів факультету інформаційних технологій і комп'ютерної інженерії ВНТУ. Практичне впровадження інструменту отримало позитивні відгуки здобувачів освіти, які відзначили зручність його використання, інформативність покрокової візуалізації алгоритму Міллера–Рабіна та зрозумілість текстових пояснень, що супроводжують обчислення. Отримані результати підтверджують ефективність використання СКМ Maple для подолання обчислювального бар'єра при вивченні складних, зокрема ймовірнісних методів. Застосування такого тренажера дозволяє змістити акцент із рутинних обчислень на глибше розуміння математичних основ криптографічного захисту інформації, що є важливим для підготовки майбутніх фахівців.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В. М. Навчально-контролюючий Maple — комплекс з вищої математики / В. М. Михалевич // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2004. — № 1. — С. 74–78.
2. Михалевич В. М. Розвиток системи Maple у навчанні вищої математики майбутніх інженерів-механіків : монографія / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський. — Вінниця: ВНТУ, 2013. — 236 с. ISBN. — 978-966-641-539-7.
3. Михалевич В.М. Реалізації технології "живих сторінок" в Maple, MathCad, Excel // Вісник ВПІ. – 2004. - № 3. – С. 90-95.
4. Михалевич В. М. Використання системи комп'ютерної алгебри для висвітлення ключових ідей симплекс-алгоритму / В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : [зб. наук. праць]. — Випуск IX. — Кривий3 Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2011. — С.113–118.
5. Михалевич В. М. Розробка електронних освітніх ресурсів в середовищі СКМ Maple [Текст] / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський, Ю. В. Добранюк // Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності : зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-практ. конф., 18-19 травня 2017 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. - Вінниця : ФОП Рогальська І. О., 2017.- С. 69-72.
6. Михалевич В. М. Організація самостійної роботи студентів шляхом використання системи комп'ютерної математики Maple / В. М. Михалевич, Я. В. Крупський, О. І. Тютюнник // Вісник Вінницького політехнічного інституту. - 2014. - № 3. - С. 114-118.
7. Mykhalevych V., Maidanevych L. Use of the maple system in mathematical problems of cryptography. Part 1. Elementary theory of numbers. Information technology and computer engineering. 2024. Т. 59, № 1. С. 105–118. URL: https://doi.org/10.31649/1999-9941-2024-59-1-105-118.

Іларія Сергіївна Кот– *студентка групи 1ЕХКБ-25Б, факультет інформаційних технологій і комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: ilariakot09@gmail.com*

Науковий керівник: ***Володимир Маркусович Михалевич***— д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: mykhalevych@vntu.edu.ua

Kot Ilaria S. – *student of group 1EHKB-25B, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: ilariakot09@gmail.com*

Supervisor: ***Mykhalevych Volodymyr M.*** —Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair for Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, mykhalevych@vntu.edu.ua

УДК 517.9:004.42

М. М. Тодер

Н. Б. Дубова

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ ТА ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ ФРОБЕНІУСА МОВОЮ С++

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено метод Фробеніуса для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з регулярними особливими точками та його реалізацію мовою C++. Особливу увагу приділено алгоритмізації пошуку коренів індексного рівняння та автоматизації побудови розв'язків у вигляді узагальнених степеневих рядів. Розроблена програма забезпечує інтеграцію з табличними процесорами для візуалізації результатів, що дозволяє ефективно аналізувати поведінку математичних моделей.

Ключові слова: *метод Фробеніуса, особлива точка, індексне рівняння, степеневі ряди, C++, Excel-автоматизація..*

Abstract

The purpose of this work is to study the Frobenius method for solving second-order linear differential equations with regular singular points and its implementation in the C++ programming language. The program allows calculating the indices of the indicial equation, finding the coefficients of the generalized power series, and visualizing the resulting solution. The work demonstrates the use of object-oriented programming to automate complex mathematical calculations.

Keywords: *Frobenius method, singular point, indicial equation, power series, C++, mathematical modeling.*

Вступ

Аналіз динамічних систем часто призводить до диференціальних рівнянь, де коефіцієнти мають сингулярності в певних точках. Метод Фробеніуса є фундаментальним аналітичним апаратом, що дозволяє знайти розв'язок у формі ряду з дробовим показником степеня там, де класичні методи виявляються непридатними.

1. Математична постановка та ідея методу.

Об'єктом дослідження є рівняння вигляду:

$$1)\quad x^2y'' + x\,p(x)y' + q(x)y = 0$$

де $p(x)$ та $q(x)$ — аналітичні функції в околі $x = 0$. Ідея методу полягає у пошуку розв'язку у вигляді узагальненого ряду Фробеніуса:

$$2)\quad \mathrm{y(x) = x^r} \sum_{n=0}^{\mathrm{n}} a_n = \mathrm{a_0x^r + a_1x^{r+1} + a_2x^{r+2} + \ldots}$$

де $a0 \neq 0$, а показник r визначається з індексного рівняння

2. Алгоритмічна реалізація.

Процес розв'язання складається з наступних етапів:

- **Диференціювання та підстановка:** Обчислюються похідні y' та y'', які підставляються у вихідне рівняння для групування членів за однаковими степенями x:

$$3) \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$4) \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

- **Індексне (характеристичне) рівняння:** Шляхом виділення найменшого степеня x^r формується рівняння для визначення r:

$$5) \quad r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

де $p_0 = lim(x \to 0)\ xp(x)$ та $q_0 = lim(x \to 0)\ x^2 q(x)$.

- **Рекурентне співвідношення:** Для знаходження коефіцієнтів a_n при $n \geq 1$ використовується формула:

$$6) \quad a_n = -[1 / f(n+r)] * \Sigma\, g(k,r)\, a_k$$

що дозволяє послідовно обчислити всі члени ряду від a_0.

3. Класифікація розв’язків за коренями r_1, r_2.

Структура загального розв'язку (7) $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ залежить від характеру коренів:

1. $\boldsymbol{r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}}$**:** два лінійно незалежні ряди Фробеніуса.
2. $\boldsymbol{r_1 = r_2}$**:** другий розв'язок обов’язково містить логарифмічний член (8) $y_2 = y_1 \ln x + x^r \Sigma\, b_n x^n$.
3. $\boldsymbol{r_1 - r_2 = n \in \mathbb{Z}}$**:** у другому розв’язку також може з’явитися логарифмічна функція $ln\, x$.

4. Практичне застосування: Рівняння Бесселя.

Ефективність методу демонструється на прикладі рівняння Бесселя нульового порядку:

$$(9)\ x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

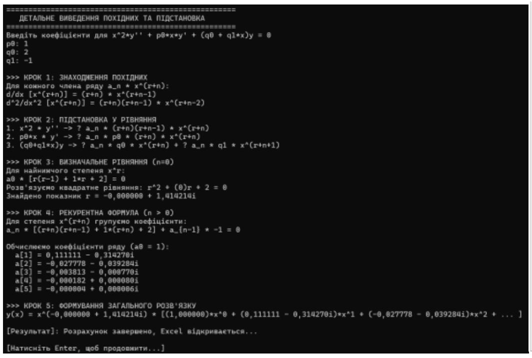
Для цього рівняння $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, що дає індексне рівняння (10) $\boldsymbol{r^2 = 0}$ $(r_1 = r_2 = 0)$. Рекурентне співвідношення (10) $a_{n+2} = -a_n / (n+2)^2$ дозволяє отримати розв'язок у вигляді:

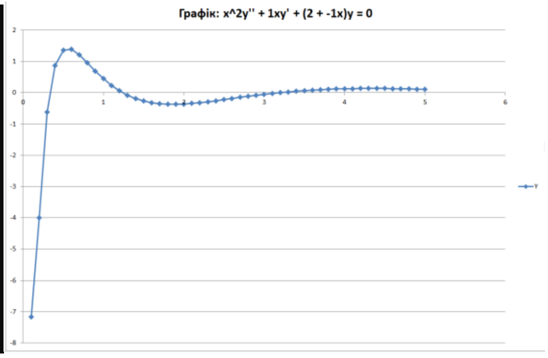
Цей ряд відповідає функції Бесселя $\boldsymbol{J_0(x)}$, яка є фундаментом для дослідження циліндричних хвильових процесів.

Повний код програми

```
void interactiveSolver() {
    clearScreen();
    cout << "==========================================================\n";
    cout << "   ДЕТАЛЬНЕ ВИВЕДЕННЯ ПОХІДНИХ ТА ПІДСТАНОВКА       \n";
    cout << "==========================================================\n";

    cout << "Введіть коефіцієнти для x^2*y" + p0*x*y' + (q0 + q1*x)y = 0\n";
    cout << "p0: "; cin >> p0;
    cout << "q0: "; cin >> q0;
    cout << "q1: "; cin >> q1;

    cout << "\n>>> КРОК 1: ЗНАХОДЖЕННЯ ПОХІДНИХ\n";
    cout << "Для кожного члена ряду a_n * x^(r+n):\n";
    cout << "d/dx [x^(r+n)] = (r+n) * x^(r+n-1)\n";
    cout << "d^2/dx^2 [x^(r+n)] = (r+n)(r+n-1) * x^(r+n-2)\n";

    cout << "\n>>> КРОК 2: ПІДСТАНОВКА У РІВНЯННЯ\n";
    cout << "1. x^2 * y" -> Σ a_n * (r+n)(r+n-1) * x^(r+n)\n";
    cout << "2. p0*x * y' -> Σ a_n * p0 * (r+n) * x^(r+n)\n";
    cout << "3. (q0+q1*x)y -> Σ a_n * q0 * x^(r+n) + Σ a_n * q1 * x^(r+n+1)\n";

    cout << "\n>>> КРОК 3: ВИЗНАЧАЛЬНЕ РІВНЯННЯ (n=0)\n";
    cout << "Для найнижчого степеня x^r:\n";
    cout << "a0 * [r(r-1) + " << p0 << "*r + " << q0 << "] = 0\n";

    double b = p0 - 1.0;
    cout << "Розв'язуємо квадратне рівняння: r^2 + (" << b << ")r + " << q0 << " = 0\n";

    double D = b * b - 4 * q0;
    if (D >= 0) {
        r_main = (-b + sqrt(D)) / 2.0;
    }
    else {
        r_main = cd(-b / 2.0, sqrt(-D) / 2.0);
    }
    cout << "Знайдено показник r = " << fmtComplex(r_main) << "\n";

    cout << "\n>>> КРОК 4: РЕКУРЕНТНА ФОРМУЛА (n > 0)\n";
    cout << "Для степеня x^(r+n) групуємо коефіцієнти:\n";
```

Приклад роботи програми





Програма провела покрокове розв'язання диференціального рівняння:

$$x^2\,y'' + 3xy' + (4 + 4x)y = 0$$

На першому етапі було знайдено показник $r = -1 + 1.73205i$. Наявність уявної частини свідчить про осцилюючий характер розв'язку. Програма розрахувала коефіцієнти ряду до 16-го члена для забезпечення високої точності апроксимації. Отриманий розв'язок у формі степеневого ряду дозволяє візуалізувати поведінку функції на інтервалі $x \in [0.1, 5.0]$. Оскільки дійсна частина показника r є від'ємною ($Re(r) = -1$), графік демонструє стрімке зростання значень функції при наближенні до особливої точки $x = 0$. Комплексна складова обумовлює наявність коливань, що характерно для рівнянь даного типу. Побудований у Microsoft Excel графік повністю корелює з обчисленими теоретичними даними.

ВИСНОВКИ

У ході виконання даної роботи було досліджено метод Фробеніуса для аналітичного розв'язування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку та реалізовано відповідну програму мовою програмування C++. Розроблений програмний продукт дозволяє автоматизувати процес знаходження коренів індексного рівняння, обчислювати коефіцієнти узагальненого степеневого ряду та візуалізувати отриманий розв'язок у вигляді графіка. Робота дозволила закріпити знання з математичного моделювання, теорії диференціальних рівнянь та об'єктно-орієнтованого програмування, а також продемонструвала практичну ефективність методу Фробеніуса для аналізу систем з регулярними особливими точками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Задачин В. М. Чисельні методи. – Київ : Вища школа, 2003. – 328 с.
2. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б. Чисельні методи. – Львів : Світ, 2005. – 408 с.
3. Навчальні матеріали "Чисельні методи в інженерії" / КНТУ. – Київ : КНТУ, 2018. – 250 с.
4. Задачин В. М. Чисельні методи: навчальний посібник. – Харків : ХНУ, 2012. – 312 с.

Тодер Марія – студентка факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95

Дубова Надія Борисівна – старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

Toder Mariia – student of the Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Dubova Nadiya Borysivna – Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

УДК 624.04:624.014.2:519.6:004.94

Ю. В. Добранюк
А. В. Паас

МАТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТІЙКОСТІ НАДВИСОТНИХ СПОРУД ПІД ДІЄЮ ВІТРОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ (НА ПРИКЛАДІ ХМАРОЧОСА БУРДЖ ХАЛІФА)

Вінницький національний технічний університет

Анотація.

У роботі запропоновано матричний підхід до оцінки статичної стійкості надвисотних споруд під дією вітрових навантажень. Будівлю дискретизовано як вертикальну систему вузлів; побудовано глобальну матрицю жорсткості K. Для статичного аналізу розв'язано систему KX=F. Наведено спрощену модель Burj Khalifa (трирівнева), приклади розрахунків у Google Colab та інженерні висновки щодо розподілу відхилень. Результати підтверджують практичну придатність матричного підходу для попередніх інженерних оцінок.

Ключові слова: матриця жорсткості; статичний аналіз; вітрове навантаження; Burj Khalifa; чисельні методи; Maple; Google Colab; Python

Abstract.

This paper proposes a matrix-based approach for assessing the static stability of supertall structures under wind loads. The structure is discretized as a vertical system of nodes, and a global stiffness matrix K is constructed. For static analysis, the system KX=F is solved. A simplified model of the Burj Khalifa (three-level) is presented, along with calculation examples in Google Colab and engineering conclusions regarding the distribution of deflections. The results confirm the practical suitability of the matrix approach for preliminary engineering assessments.

Keywords: stiffness matrix; static analysis; wind load; Burj Khalifa; numerical methods; Maple; Google Colab; Python

Вступ

Актуальність проблеми обумовлена зростанням висотності сучасних споруд та відповідним збільшенням впливу вітрових навантажень. Burj Khalifa (828 м) є прикладом споруди, де форма і розподіл жорсткості критично впливають на поведінку споруди під дією вітрових навантажень [1]. На висоті понад 800 метрів вітрові потоки створюють колосальний тиск на конструкцію, внаслідок чого вона може перекинутись або зламатись [2]. Для забезпечення безпеки вежі Бурдж Халіфа інженери використали унікальну трипроменеву форму («Y-подібну»), яка розсіює вітер, а розрахунок коливань споруди було виконано за допомогою лінійної алгебри – методу матриці жорсткості [3].

Мета роботи – розробити зрозумілу матричну модель для оцінки статичних відхилень надвисотної споруди під дією вітрових навантажень. Завдання роботи полягає у побудові дискретної моделі конструкції, виконанні статичного розрахунку, демонстрації прикладів реалізації обчислень у середовищі Google Colab із використанням мови програмування Python, а також формуванні інженерних висновків щодо напружено-деформованого стану та характеру розподілу переміщень конструкції.

Результати дослідження

Суть математичного методу: Будівля моделюється як вертикальна консоль, розбита на сектори (нижня частина, середня частина, шпиль). Зв'язок між силами вітру та реальним відхиленням (хитанням) хмарочоса описується фундаментальним матричним рівнянням [3]:

$$K \cdot X = F. \tag{1}$$

де: K – матриця жорсткості будівлі, яка залежить від властивостей залізобетонного ядра та товщини стін; F – вектор вітрового навантаження, тобто це сила тиску вітру на різних рівнях висоти; X – вектор лінійних переміщень, він показує, на скільки метрів зміститься кожен рівень вежі під цим тиском.

На рис. 1 схематично зображено конструктивну систему Burj Khalifa: залізобетонне ядро, сталевий каркас та вузли жорсткості (нижній рівень, середній рівень, шпиль). Ілюстрація надає інформацію, як ядро та фундаментна плита забезпечують стійкість споруди при значних вітрових навантаженнях.

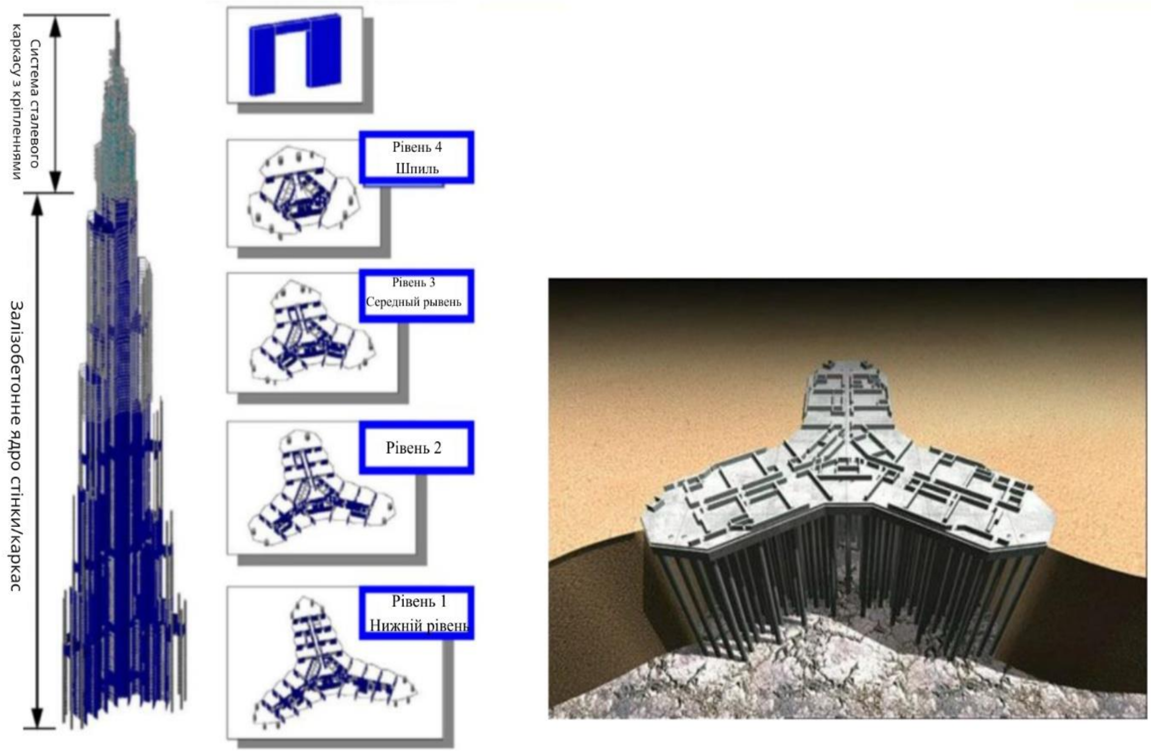


Рис. 1 – Схематичне зображення конструктивної системи Burj Khalifa

Розглянемо приклад розрахунку для спрощеної моделі Burj Khalifa з трьома рівнями:

$$K = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix},$$

де перший рівень має жорсткість 5 та зв'язок із другим рівнем (–2); другий рівень пов'язаний із першим і третім (жорсткість 3, зв'язки –2 та –1); третій рівень (шпиль) має жорсткість 1 та зв'язок із середнім рівнем (–1); вектор сил F показує дію вітру: 10 умовних одиниць на нижній рівень, 20 – на середній та 30 – на шпиль.

Замість складного пошуку оберненої матриці вручну, розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь методом Гауса із використанням СКМ Maple (рис. 2) [4], [5]. В результаті обчислень ми отримали вектор відхилень:

$$X = \begin{bmatrix} 20 \\ 45 \\ 75 \end{bmatrix}.$$

Отже, нижня частина будівлі відхиляється на 20 умовних одиниць; середня частина – на 45, а шпиль – на 75, тобто має найбільше відхилення. Це підтверджує інженерний принцип, що **верхні рівні споруди найбільш чутливі до вітрових навантажень**, тому саме там потрібні додаткові заходи жорсткості та демпфування.

Також розглянемо наочний приклад використання сучасних інструментів для перевірки розрахунків. Встановлювати Python на комп'ютер зовсім не обов'язково – сьогодні програмувати та виконувати математичні обчислення можна прямо у звичайному браузері. Для демонстрації було використано онлайн середовище **Google Colab**, де система рівнянь (1) розв'язується автоматично за допомогою команди

numpy.linalg.solve(K, F) (рис. 3 та 4) [6], [7]. Вона демонструє, як комп’ютер може миттєво виконати те, що вручну потребувало б десятків кроків.

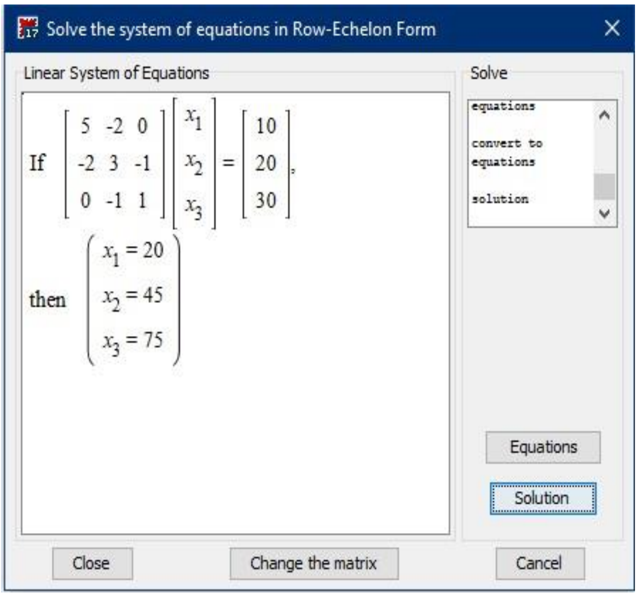


Рис 2. Розв’язання системи лінійних рівнянь методом Гауса із використанням СКМ Maple

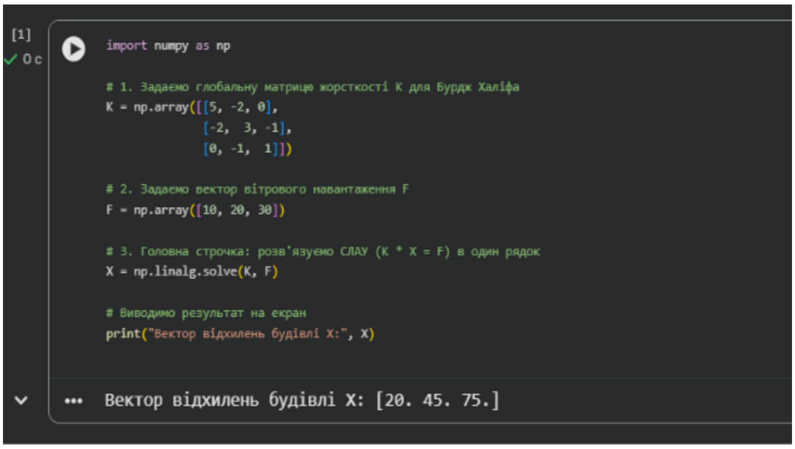


Рис 3. Розв’язання системи лінійних рівнянь за допомогою Python в середовищі Google Colab

Google Colab дозволяє показати різницю між традиційним способом розрахунку та можливостями комп’ютера. Якщо вручну ми можемо розв’язати невелику систему рівнянь, наприклад 3×3, то сучасні комп’ютери здатні працювати з матрицями у тисячі рядків і стовпців. Для прикладу, система розміром 5000×5000 містить 25 мільйонів елементів – для людини це було б непосильне завдання, а онлайн сервіс виконує його за лічені хвилини.

Для більшої наочності можна задати велику матрицю з простою закономірністю (наприклад, заповнену однаковими або послідовними числами). Це дає можливість показати на екрані саму матрицю, вектор сил та отриманий результат (рис. 4), щоб підкреслити масштабність обчислень.

Висновки

У реальних умовах для сучасних надвисотних будівель використовують матриці значно більшого розміру – від кількох тисяч до сотень тисяч рівнянь. Саме тому інженери застосовують методи вищої математики та потужні обчислювальні алгоритми, щоб моделювати поведінку конструкцій під дією вітру, землетрусів та інших навантажень. Це забезпечує точність прогнозів і надає можливість створювати безпечні та стійкі споруди у світі сучасного будівництва.

Рис 4. Розв’язання СЛР розміром 5×5 за допомогою Python в середовищі Google Colab

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Abdelrazaq A. Validating the Structural Behavior and Response of Burj Khalifa: Synopsis of the Full Scale Structural Health Monitoring Programs. International Journal of High-Rise Buildings. 2012. doi:10.21022/IJHRB.2012.1.1.037
2. Литвин О.В. Методика врахування процесу ущільнення ґрунтів при оцінці взаємодії конструкцій з ґрунтовою основою методом скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2024. – Вип. 113. – С. 352–359.
3. Чеканович М.Г. Розрахунок будівельних конструкцій : навчальний посібник / М. Г. Чеканович, О. Є. Янін. – Видання 2-ге, доповнене і перероблене. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2021. – 240 с.
4. Dobraniuk Yurii Application SKM Maple to reduce the quadratic form of expression to the canonical form / Yurii Dobraniuk, Nadiya Blashchuk, Maksym Barbaliuk // V International Scientific and Practical Internet Conference "Mathematics and Informatics in Science and Education: Challenges of Modernity", (Vinnytsia, May 1 - 2, 2025): book of abstracts [Electronic network scientific publication]. Vinnytsia, 2025, P. 46 - 48.
5. Галяновська В. О. Оптимізація геометрії монолітного фундаменту будівлі методом екстремального аналізу площі будівлі [Електронний ресурс] / В. О. Галяновська, Р. Р. Краєвська, Ю. В. Добранюк // Матеріали Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих науковців «Молодь в науці: дослідження, проблеми, перспективи (МН-2026)», Вінниця, 22-26 червня 2026 р. – 4 с. – Електрон. текст. дані. – 2026. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/mn/mn2026/paper/viewFile/27314/22342.
6. NumPy Developers. Документація функції numpy.linalg.solve [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://numpy.org/doc/stable/reference/generated/numpy.linalg.solve.html (дата звернення: 26.05.2026).
7. Google. Google Colab [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://colab.research.google.com/ (дата звернення: 26.05.2026).

Добранюк Юрій Володимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

Паас Анастасія Володимирівна – студентка групи 1БМ-25б, Факультет будівництва цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: anastasiapaas@gmail.com.

Dobraniuk Yurii V. – Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

Paas Anastasia V. – student of group 1BM-25b, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: anastasiapaas@gmail.com.

УДК 519.85

Ю. В. Добранюк
В. А. Слободянюк

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ ТА СКМ MAXIMA ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОБ'ЄМІВ У БУДІВНИЦТВІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі розглянуто застосування визначеного інтеграла для розв'язання задач у будівництві, зокрема для обчислення об'ємів тіл складної геометричної форми, об'ємів тіл обертання та площ поверхонь. Визначений інтеграл є ефективним інструментом, що дозволяє точно визначити кількість матеріалів для конструкцій, об'єми резервуарів та обсяги робіт

Ключові слова: інтеграл, об'єми, тіла обертання, Maxima.

Abstract

This paper examines the application of definite integrals to solve problems in construction, specifically for calculating the volumes of bodies with complex geometric shapes, the volumes of solids of revolution, and surface areas. The definite integral is an effective tool that allows for the precise determination of the amount of materials required for structures, the volumes of tanks, and the scope of work.

Keywords: integral, volumes, solids of revolution, Maxima.

Вступ

Метою роботи є продемонструвати практичне застосування визначеного інтеграла для обчислення об'єму будівельних конструкції та вказати на універсальність цього математичного методу.

Об'єкт дослідження - процес визначення об'ємів геометричних тіл у будівництві за допомогою інтеграла.

Предмет дослідження - застосування визначеного інтеграла для обчислення об'єму колони як тіла обертання та фундаменту.

Основою дослідження слугували праці у сфері вищої математики [1], [2], [3] та комп'ютерного моделювання [4], [5]. Зокрема, базові поняття інтегрального числення та теорії поля розглянуто на основі навчального посібника В. О. Краєвського, Ю. В. Добранюка та А. А. Коломійця [1], а специфіку практичного застосування комп'ютерних систем символьних обчислень опрацьовано за допомогою довідника з використання середовища Maxima С. О. Семерікова [5].

Дослідження

Задача 1. Обчисліть об'єм колони, утвореної обертанням навколо осі Oy прямокутника

Дано:
R= 0,3 м;
H= 4 м;

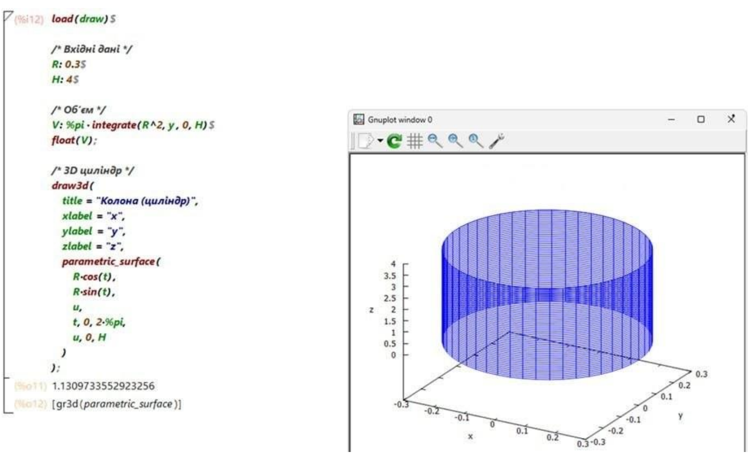


Рис. 1 – Візуалізація отриманого розв'язку задачі 1 в СКМ Maxima

Таким чином за допомогою необхідних даних можна точно визначити потрібний об’єм матеріалів.

Задача 2. Будуємо монолітну плиту (10м х 10м). Через нахил ґрунту її товщина не рівномірна. На початку 0,2 і 2,2 на кінці. Знайти площу перерізу плити та її об’єм.

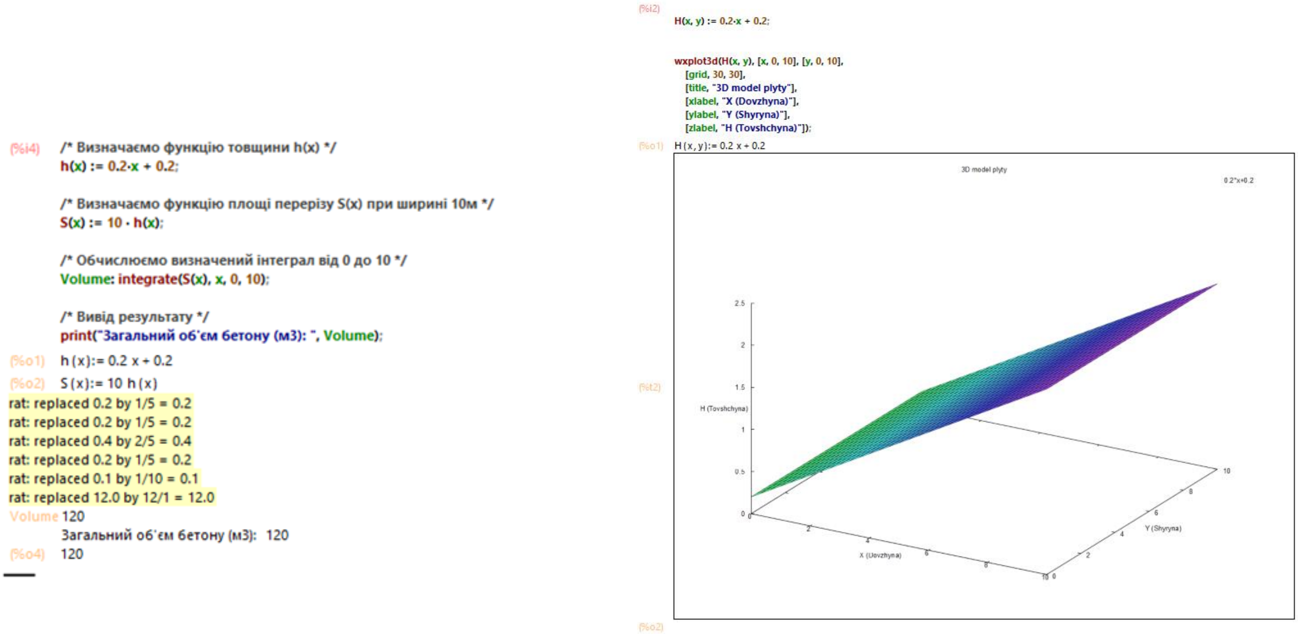


Рис. 2 – Візуалізація отриманого розв’язку задачі 2 в СКМ Maxima

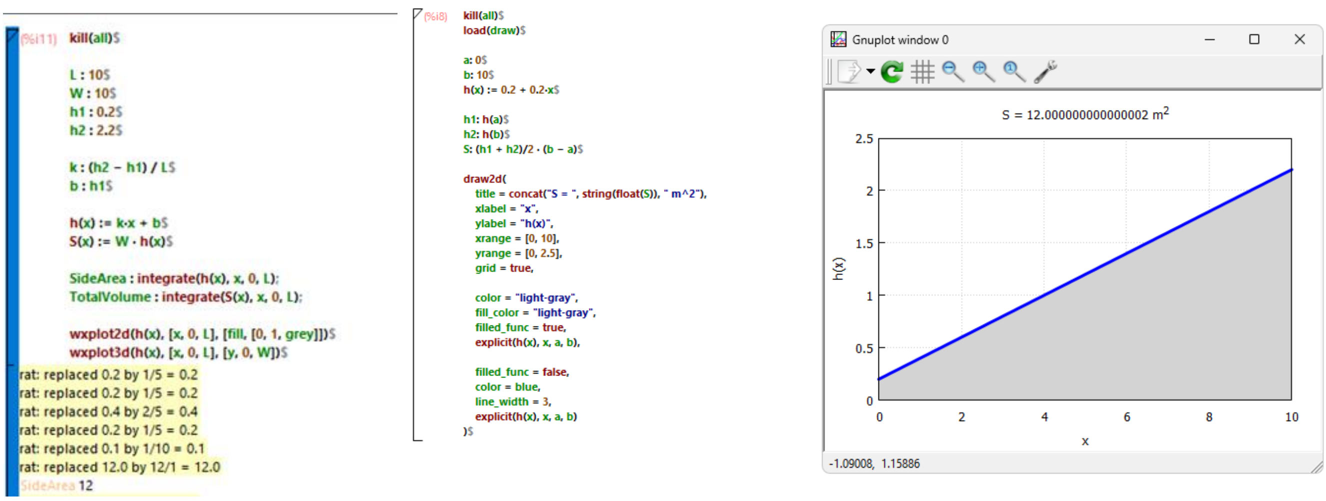


Рис. 3 – Візуалізація отриманого розв’язку задачі в СКМ Maxima

Висновки

Проведене дослідження підтвердило ефективність використання визначеного інтеграла у поєднанні із системою комп’ютерної математики Maxima для розв’язання прикладних задач будівельного спрямування. Розглянуті приклади засвідчили можливість точного визначення геометричних характеристик як регулярних конструкцій, так і об’єктів зі складною формою. Використання СКМ Maxima забезпечує автоматизацію математичних обчислень, підвищує надійність отриманих результатів та сприяє формуванню практичних навичок застосування математичного апарату в інженерній діяльності. Отримані результати можуть бути використані під час проєктування будівельних конструкцій, оцінювання обсягів матеріалів та виконання кошторисних розрахунків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] Краєвський, В. О. Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та елементи теорії поля: навчальний посібник / В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк, А. А. Коломієць. – Вінниця: ВНТУ, 2022. – 142 с.

[2] Галяновська В. О. Оптимізація геометрії монолітного фундаменту будівлі методом екстремального аналізу площі будівлі [Електронний ресурс] / В. О. Галяновська, Р. Р. Краєвська, Ю. В. Добранюк // Матеріали Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих науковців «Молодь в науці: дослідження, проблеми, перспективи (МН-2026)», Вінниця, 22-26 червня 2026 р. – 4 с. – Електрон. текст. дані. – 2026. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/mn/mn2026/paper/viewFile/27314/22342.

[3] Добранюк Ю. В. Використання штучного інтелекту при написанні кодів для обчислення площі фігури, обмеженої віссю ординат та функціями синуса та косинуса від кубічного аргументу в СКМ Maple / Ю. В. Добранюк, А. Б. Кукленко, А. В Лихогляд // LIV Всеукраїнська науково-технічна конференція факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії (2025) : Вінниця, ВНТУ, 24-27 березня 2025 р. – 4 с. – Електрон. текст. дані. – 2025. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2025/paper/view/22904/19408.

[4] Добранюк Ю. В. Застосування штучного інтелекту для вирішення прикладу з типового розрахунку по темі «інтегрування частинами» [Електронний ресурс] / Ю. В. Добранюк, Є. В. Удуденко // Матеріали IV Міжнародної науково-методичної Інтернет-конференції «Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності», Вінниця, 20-22 червня 2024 р. – 5 с. – Електрон. текст. дані. – 2024. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc24/paper/view/21877/18158.

[5] Семеріков С.О. Maxima 5.13: довідник користувача / За ред. академіка АПН України М. І. Жалдака. – Київ, 2007. – 48 с. ISBN 967-4182-25-3

Добранюк Юрій Володимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

Слободянюк Вікторія Анатоліївна – студентка групи 1Б-25б, Факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: slobodanuk.viktoria.07@gmail.com.

Dobraniuk Yurii V. – Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

Slobodyanuk Victoria – student of group 1B-25b, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: slobodanuk.viktoria.07@gmail.com.

УДК 519.85:004.4

К. А. Лисий
О. П. Прозор

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ В АПАРАТНИХ КОМПОНЕНТАХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі досліджено математичні засади моделювання теплових процесів у сучасних мікропроцесорах з використанням диференціальних рівнянь першого порядку. Проведено порівняльний аналіз ефективності повітряних та рідинних систем охолодження на основі закону охолодження Ньютона. Запропоновано підходи до програмної оптимізації керування вентиляторами для запобігання температурному тротлінгу. На основі отриманої математичної моделі розроблено програмний алгоритм мовою C++ для предиктивної діагностики (Predictive Maintenance) апаратного забезпечення, що дозволяє виявляти деградацію систем охолодження до настання критичного перегріву [3].

Ключові слова: диференціальні рівняння, закон Ньютона, системне програмування, C++, предиктивна діагностика, тротлінг, апаратні компоненти.

Abstract

The paper investigates the mathematical foundations of modeling thermal processes in modern microprocessors using first-order differential equations. A comparative analysis of the efficiency of air and liquid cooling systems is carried out based on Newton's law of cooling. Approaches to software optimization of fan control to prevent thermal throttling are proposed. Based on the obtained mathematical model, a C++ software algorithm for predictive maintenance of hardware is developed, which allows detecting the degradation of cooling systems before critical overheating occurs.

Keywords: differential equations, Newton's law, systems programming, C++, predictive maintenance, throttling, hardware components.

Вступ

Стрімке зростання продуктивності сучасних обчислювальних систем супроводжується значним збільшенням тепловиділення центральних (CPU) та графічних (GPU) процесорів. При досягненні критичних температур (зазвичай 95°C для AMD Ryzen та 100–105°C для сучасних поколінь Intel Core) активується механізм теплового тротлінгу − примусового зниження тактової частоти для захисту кристала від деградації. Для розробки ефективних алгоритмів автоматичного керування системами охолодження необхідно мати точну математичну модель динаміки перехідних теплових процесів. Для запобігання цьому недостатньо лише апаратних рішень; необхідна розробка системного програмного забезпечення. Особливої актуальності набуває перехід від реактивного керування охолодженням до предиктивного обслуговування (Predictive Maintenance). Для створення таких алгоритмів необхідна точна математична модель динаміки перехідних теплових процесів з її подальшим втіленням в програмний код [3].

Результати дослідження

Для аналізу динаміки охолодження процесора після зняття обчислювального навантаження доцільно використати модель на основі закону Ньютона [1]. Оскільки у фазі пасивного вистигання активне тепловиділення кристала практично відсутнє ($P \approx 0$), швидкість зниження температури описується лінійним диференціальним рівнянням:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c)$$

де T − поточна температура процесора; T_c − температура навколишнього середовища (повітря всередині корпусу); k − коефіцієнт пропорційності охолодження; t − час.

Для знаходження функції зміни температури від часу застосуємо метод відокремлення змінних [2]. Інтегруючи обидві частини та використовуючи початкову умову, отримуємо розв'язок:

$$T(t) = T_c + (T_0 - T_c)e^{-kt}.$$

Для оцінки ефективності систем охолодження знайдемо час, необхідний для зниження температури процесора з критичної позначки T_0 = 96°C до цільової безпечної температури T_{safe} = 55°C. Температуру середовища всередині серверної стійки або корпусу візьмемо як сталу T_c = 32°C.
Виведемо формулу для обчислення часу t :

$$55 = 32 + (96 - 32)e^{-kt}$$

$$e^{-kt} \approx 0.359$$

$$t = \frac{-\ln(0.359)}{k} \approx \frac{1.024}{k}.$$

Розглянемо два класичні інженерні сценарії. Для моделювання теплової динаміки процесора прийнято узагальнені значення коефіцієнта охолодження k: для повітряних систем $k = 0.015$ с⁻¹, для рідинних систем типу AIO 240 mm $k = 0.06$ с⁻¹. Значення підібрані як усереднена апроксимація для сучасних процесорів з TDP 65–170 W і відображають різницю швидкості теплового відгуку систем охолодження [1].

1. Стандартне повітряне охолодження (Tower Cooler).Час охолодження:

$$t_1 = \frac{1.024}{0.015} \approx 68 \text{ секунд.}$$

2. Рідинне охолодження (AIO Liquid Cooler 240mm).Час охолодження:

$$t_2 = \frac{1.024}{0.06} \approx 17 \text{ секунд.}$$

З інженерної точки зору, коефіцієнт тепловіддачі k не є сталою величиною. Внаслідок деградації термоінтерфейсів (пересихання термопасти) та накопичення пилу на радіаторах ефективність розсіювання тепла поступово знижується. Для програмного моніторингу цього фізичного стану розроблено алгоритм, що базується на виражені поточного коефіцієнта k з отриманого вище розв'язку:

$$k = -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{T(t) - T_c}{T_0 - T_c}\right)$$

Розроблено прототип фонової системної утиліти мовою C++, яка реалізує концепцію предиктивного обслуговування (Predictive Maintenance) [3]. Логіка роботи полягає у фіксації пікової температури T_0 у момент зняття навантаження, вичікуванні системної затримки t та зчитуванні поточного значення $T(t)$ для обчислення деградації системи.

Програмна реалізація математичного ядра алгоритму має такий вигляд:

```
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <chrono>
#include <thread>
#include <Windows.h>

double getSimulatedTemperature(bool isPeak) {
   if (isPeak) return 96.0;
   return 72.0;
}

int main() {

SetConsoleCP(1251);
SetConsoleOutputCP(1251);
```

```
double T_c = 32.0;
double k_ref = 0.015;
int t_delay = 30;

double T_0 = getSimulatedTemperature(true);
std::this_thread::sleep_for(std::chrono::seconds(t_delay));
double T_current = getSimulatedTemperature(false);

double log_argument = (T_current - T_c) / (T_0 - T_c);
double k_current = -(1.0 / t_delay) * log(log_argument);

double degradation = (1.0 - (k_current / k_ref)) * 100.0;

if (degradation > 15.0) {
   std::cout << "УВАГА: Ефективність охолодження впала на "
          << round(degradation) << "%." << std::endl;
   std::cout << "Рекомендовано технічне обслуговування." << std::endl;
}
return 0;
}
```

Важливо зазначити, що у наведеному прототипі температурні показники (T_0 та поточна температура) задані як константи за допомогою функції-заглушки. Це зроблено виключно для верифікації математичної моделі, оскільки прямий доступ до апаратних термодатчиків (Digital Thermal Sensors) на рівні користувача часто обмежується ядром операційної системи з міркувань безпеки.

У повноцінному системному програмному забезпеченні ці константи будуть замінені на функції низькорівневого зчитування даних:

- В ОС Linux: через безпосереднє звернення до системних текстових файлів у віртуальній директорії /sys/class/thermal/.
- У середовищі Windows: за допомогою інтерфейсу WMI (Windows Management Instrumentation) або інтеграції з низькорівневими драйверами материнської плати.

Такий підхід алгоритмізує математичну модель Ньютона, перетворюючи пасивний моніторинг температур на активну систему предиктивної діагностики, яка здатна завчасно сигналізувати про фізичний знос охолоджувальних компонентів до настання критичного тротлінгу.

Висновки

Проведене дослідження підтверджує, що для забезпечення стабільності сучасних обчислювальних систем класичне математичне моделювання має супроводжуватися розробкою спеціалізованого системного програмного забезпечення. Використання диференціального рівняння, побудованого на основі закону Ньютона про охолодження, дозволяє з високою точністю прогнозувати динаміку теплових процесів у комп'ютерних системах. Теоретичні розрахунки показали, що системи рідинного охолодження здатні скоротити час перебування кристала процесора в зоні температурного ризику в чотири рази порівняно зі стандартними повітряними кулерами.

Отримана обернена математична функція для визначення коефіцієнта тепловіддачі є обчислювально простою та не потребує значних апаратних ресурсів. Це дає можливість реалізувати її у вигляді низькорівневого коду мовами C або C++ для мікроконтролерів, вбудованих систем та системних утиліт без створення додаткового навантаження на центральний процесор.

Розроблений прототип програмного забезпечення мовою C++ підтвердив можливість переходу від реактивного керування системою охолодження до проактивного моніторингу її технічного стану. Запропонований алгоритм здатний у фоновому режимі виявляти деградацію термоінтерфейсу та забруднення радіатора, що призводять до зниження ефективності тепловідведення на 15 % і більше, та своєчасно сповіщати користувача ще до виникнення критичного теплового тротлінгу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1 Incropera F. P., DeWitt D. P. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 7th ed. − Hoboken : John Wiley & Sons, 2011. − 1048 p.

2. Boyce W. E., DiPrima R. C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 10th ed. − Hoboken : Wiley, 2012. − 640 p.

3. Mobley R. K. An Introduction to Predictive Maintenance. 2nd ed. − Oxford : Butterworth-Heinemann, 2002. − 438 p.

Лисий Костянтин Андрійович − студент групи 2ПІ-25б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: garoshh1818@gmail.com.

Науковий керівник: **Прозор Олена Петрівна** – к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, email: prozor@vntu.edu.ua.

Lysyi Kostiantyn A. — Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email : garoshh1818@gmail.com.

Scientific supervisor: **Prozor Olena P.** – PhD (in Pedagogical Sciences), Docent, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: prozor@vntu.edu.ua.

УДК 519.6

Ю. В. Добранюк
М. Є. Язовицька

ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЦЬ ДЛЯ РОЗПІЗНАВАННЯ ДЕФЕКТІВ У БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЯХ

Вінницький національний технічний університет

Анотація.
У роботі розглянуто використання матричного методу у системах штучного інтелекту для автоматичного виявлення тріщин у стіні будинка за допомогою камер відеоспостереження. Показано, що цифрове зображення подається у вигляді матриці пікселів, елементи якої містять інформацію про відтінки кольорів. Сформульовано висновок щодо доцільності використання цього методу при моніторингу якості зведення будівель.
Ключові слова: штучний інтелект, матричний метод, пікселі, камери відеоспостереження, будівництво.

Abstract.
The paper considers the use of the matrix method in artificial intelligence systems for automatic detection of cracks in building walls using CCTV cameras. It is shown that a digital image is presented as a matrix of pixels, the elements of which contain information about color shades. A conclusion is made regarding the advisability of using this method when monitoring the quality of construction.
Keywords: artificial intelligence, matrix method, pixels, CCTV cameras, construction.

Вступ

В умовах відбудови України після війни особливо важливим є підвищення безпеки та надійності будівельних конструкцій. Однією з поширених проблем є поява тріщин у стінах будівель [1], [2]. Вони можуть свідчити про пошкодження або перевантаження конструкцій. Для своєчасного виявлення таких дефектів доцільно використовувати системи відеокамер з вбудованими функціями стеження на основі штучного інтелекту.

Метою роботи є розгляд застосування матриць як математичного інструменту для обробки зображень стін. Камера передає зображення у вигляді набору чисел, що утворюють матрицю пікселів. Подальша обробка цих матриць дозволяє автоматично виявляти тріщини та оцінювати стан будівельних конструкцій [3].

Результати дослідження

Зображення з будівельних майданчиків подають у вигляді матриць пікселів: для чорно-білих зображень це одна матриця, а для кольорових – три матриці RGB-каналів [1], [2]. Це дозволяє аналізувати фото з камер і дронів, щоб виявляти тріщини та дефекти конструкцій без постійної присутності виконроба.

Наприклад, у стіні з'явилася тріщина. Камера фіксує простір. За тонами та відтінками кольорів фіксує підозрілі новоутворення. Подає у матричній формі.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

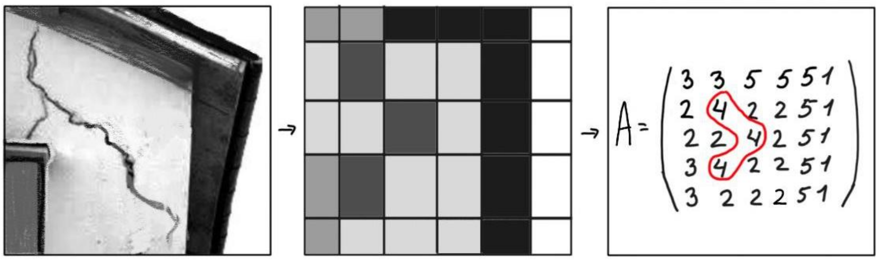


Рис.1. Схема використання матриці для розпізнання будівельних дефектів

$a_{ij} \in [1, 5]$, де 1 – найсвітліший, 5 – найтемніший. Будь-які нові підозрілі кольори – сповіщення.

$$A_{RGB} = \{Ч, З, С\}$$

$$Ч=\begin{pmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \cdots & R_{nk} \end{pmatrix}, \quad З=\begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nk} \end{pmatrix} \quad С=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nk} \end{pmatrix}$$

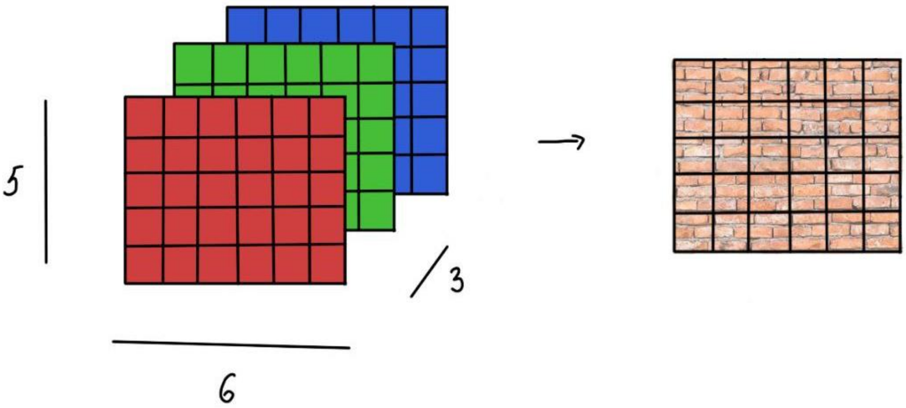


Рис.2 – Схема використання матриць RGB (червоний, зелений, синій) для розпізнання матеріалів, текстур, поверхонь

Характеристика	Чорно-біле зображення	Кольорове зображення
Кількість матриць	1.Кожен піксель описується одним числом. Відсутня інформація про колір.	3 (R, G, B). Кожен піксель описується трьома значеннями. Колір розкладається на три канали
Швидкість обробки	Більша	Менша через більшу кількість обчислень
Точність	Достатня	Висока
Переваги	Простота, швидкість, економія ресурсів	Більш детальний аналіз текстур, фактур, рівномірності покриттів.
Недоліки	Втрата інформації, яку дають кольори	Висока складність обчислень через вищу чутливість до шумів
Де використовувати	Виявлення тріщин у бетоні. Їх добре видно через контраст темного і світлого.	Аналіз матеріалів і корозії. Колір допомагає розпізнавати що саме за дефект. Додатково враховується колір матеріалу

Табл.1. Порівняльна таблиця подання матрицями чорно-білого та кольорового зображення на камерах спостереження за будівельними процесами

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Analysis of Emotions from Body Postures Based on Digital Imaging [Електронний ресурс] / B. Barbosa, A. J. R. Neves, S. C. Soares, I. D. Dimas ; University of Aveiro, Portugal. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу: https://www.researchgate.net/figure/Matrix-for-certain-area-of-a-grayscale-image-17_fig3_325569674 (дата звернення: 10.05.2026).
2. Decoding Image Representation: Understanding the Structure of RGB Images [Електронний ресурс]. – Електрон. текст. дані. – Режим доступу: https://medium.com/advanced-deep-learning/decoding-image-representation-understanding-the-structure-of-rgb-images-6a211eb8800d (дата звернення: 01.06.2026).
3. Добранюк Ю. В. Застосування системи комп’ютерної математики Maple для побудови 2D областей в задачах обчислення площі фігур / Ю. В. Добранюк, А. В. Василинич, В. В. Грибик // Матеріали LI науково-технічної конференції підрозділів ВНТУ, Вінниця, 16–18 березня 2022 р. – Електрон. текст. дані. – 2022. – Режим доступу: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/all-fitki/all-fitki-2022/paper/view/15848/13315 (дата звернення: 28.05.2026).

Добранюк Юрій Володимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

Язовицька Марина Євгенівна – студентка групи 1Б-25б, Факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: marynayazovytska@gmail.com.

Dobranyuk Yuriy V. — Ph.D., Associate Professor of Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: dobranyuk@vntu.edu.ua.

Yazovytska Maryna Y. — student of group 1B-25b, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: marynayazovytska@gmail.com.

УДК 517.91:004.42

В.О.Каршинова

Н.Б.Дубова

ГРУПОВА СТРУКТУРА ТОЧОК НА ЕЛІПТИЧНІЙ КРИВІЙ ДЛЯ КРИПТОГРАФІЧНИХ СИСТЕМ ЕСС

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі проаналізовано групову структуру точок на еліптичній кривій, яка є фундаментальною основою для сучасних криптографічних алгоритмів ECC (Elliptic Curve Cryptography). Розглянуто математичну модель еліптичної кривої, умови її коректності через ненульовий дискримінант, а також правила виконання операцій додавання точок, які утворюють математичну групу. Для практичної демонстрації розроблено програмне забезпечення мовою Python, яке дозволяє візуалізувати процеси взаємодії з кривою, здійснювати розрахунки та виконувати перевірку математичних властивостей.

Ключові слова: еліптична крива, групова структура, криптографія, ECC, Python, додавання точок, дискримінант.

Abstract

The paper analyzes the group structure of points on an elliptic curve, which is a fundamental cornerstone for modern cryptographic algorithms known as ECC (Elliptic Curve Cryptography). The mathematical model of the elliptic curve is considered, including correctness conditions via non-zero discriminant, alongside operational guidelines for point addition forming an algebraic group. For practical demonstration, Python-based software has been developed to visualize the processes of curve interaction, execute necessary computation metrics and verify mathematical properties.

Keywords: elliptic curve, group structure, cryptography, ECC, Python, point addition, discriminant.

Вступ

Еліптичні криві відіграють ключову роль у сучасній вищій математиці та криптографії. Вони знаходять широке застосування в системах захисту інформації, електронному підписуванні та алгоритмах шифрування. Особливо важливими еліптичні криві є в контексті криптографії ECC (Elliptic Curve Cryptography), де безпека забезпечується через mathematical операції з точками на цих кривих.

1.Математична модель та групова структура

Метою роботи є розроблення та аналіз методу моделювання групової структури точок еліптичної кривої. Загалом, класична еліптична крива над полем дійсних чисел задається канонічним рівнянням Вейєрштрасса:

$$y^2 = x^3 + ax + b \qquad (1)$$

де a і b — це певні коефіцієнти, що визначають геометричну форму еліптичної кривої. Для того щоб еліптична крива була коректною та не мала особливих точок (не була сингулярною), необхідно, щоб її дискримінант не дорівнював нулю:

$$\Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0 \qquad (2)$$

Головною характеристикою еліптичної кривої є те, що її точки разом із нескінченно віддаленою точкою (напрямком осі ординат) утворюють абелеву математичну групу. Це означає, що над цими точками можна коректно виконувати геометричну та алгебраїчну операцію додавання. Якщо на кривій обрано дві точки P і Q, то результат їх додавання — нова точка R (P + Q = R), яка гарантовано також належить цій самій кривій.

У сфері криптографічних систем ECC операції з точками еліптичної кривої (зокрема, додавання та послідовне множення точки на скаляр) використовуються для стійкої генерації відкритих і закритих ключів. Величезною перевагою ECC є забезпечення аналогічного або вищого рівня безпеки при значно коротших довжинах ключів порівняно з традиційним алгоритмом RSA. Це дозволяет суттєво знизити витрати пам'яті та значно підвищити загальну швидкість роботи криптографічних систем на обмежених обчислювальних пристроях.

Результати дослідження та програмна реалізація

Для комплексної ілюстрації групової структури точок та перевірки математичних закономірностей було розроблено демонстраційну програму кросплатформеною мовою Python. Вона забезпечує повний інтерактивний цикл тестування параметрів кривої. Основні функціональні можливості розробленого додатка включають:

- Перегляд теоретичної та технічної інформації про криптосистеми на еліптичних кривих (ECC);
- Інтерактивне введення координат довільних точок користувачем;
- Виконання операції додавання точок та визначення координат суми;
- Автоматична аналітична перевірка належності заданої точки рівнянню поточної еліптичної кривої;
- Динамічне формування таблиці значень правої частини рівняння для аналізу поведінки функцій.

Лістинг розробленого програмного коду мовою Python:

```
while True:

    print("\n==========================================")
    print("  ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ ТА ECC")
    print("==========================================")

    print("1 - Інформація про ECC")
    print("2 - Ввести точки")
    print("3 - Додавання точок")
    print("4 - Перевірка рівняння кривої")
    print("5 - Таблиця точок")
    print("6 - Вихід")

    вибір = input("\nВаш вибір: ")


    if вибір == "1":

        print("\n==========================================")
        print("ІНФОРМАЦІЯ ПРО ECC")
        print("==========================================")

        print("ECC (Elliptic Curve Cryptography) -")
        print("це сучасний метод шифрування.")
        print()

        print("Еліптична крива задається рівнянням:")
        print("y^2 = x^3 + ax + b")
        print()

        print("Переваги ECC:")
        print("- високий рівень безпеки")
        print("- короткі ключі")
        print("- швидка робота")
        print("- захист інформації")


    elif вибір == "2":

        print("\n==========================================")
        print("ВВЕДЕННЯ ТОЧОК")
        print("==========================================")

        x1 = int(input("Введіть x1: "))
        y1 = int(input("Введіть y1: "))

        x2 = int(input("Введіть x2: "))
        y2 = int(input("Введіть y2: "))
```

```python
        print()
        print("Перша точка P(x1, y1):")
        print("P(", x1, ",", y1, ")")

        print()

        print("Друга точка Q(x2, y2):")
        print("Q(", x2, ",", y2, ")")


    elif вибір == "3":
```

Аналіз роботи програми та інтерфейсу користувача

Для підтвердження працездатності розробленого математичного інструментарію нижче наведено графічні результати виконання ключових модулів програми із їх детальною аналітичною верифікацією.

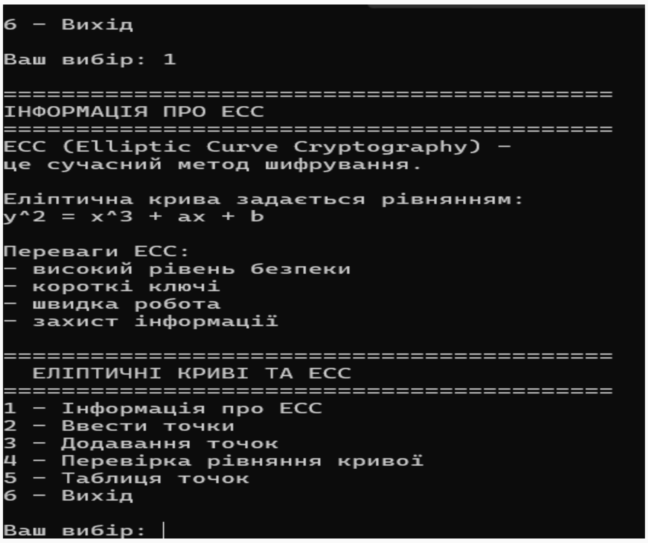


Рис. 1. Головне меню програми та виведення теоретичного інформаційного блока про ECC

На рис. 1 продемонстровано базовий інтерфейс користувача після вибору пункту меню «1». Консольний вивід чітко структурує ключові відомості, підтверджуючи закладені в алгоритм аналітичні переваги еліптичної криптографії та демонструючи канонічне рівняння.

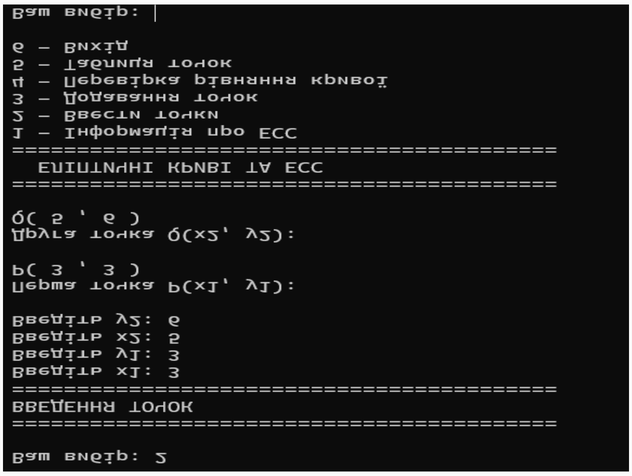


Рис. 2. Інтерфейс інтерактивного введення координат точок P та Q

На рис. 2 відображено виконання модуля введення даних (пункт «2»). Програма успішно здійснює запит на координати двох точок: P з координатами (3, 3) та Q з координатами (5, 6). Дані коректно зберігаються у внутрішніх змінних для подальших бінарних операцій.

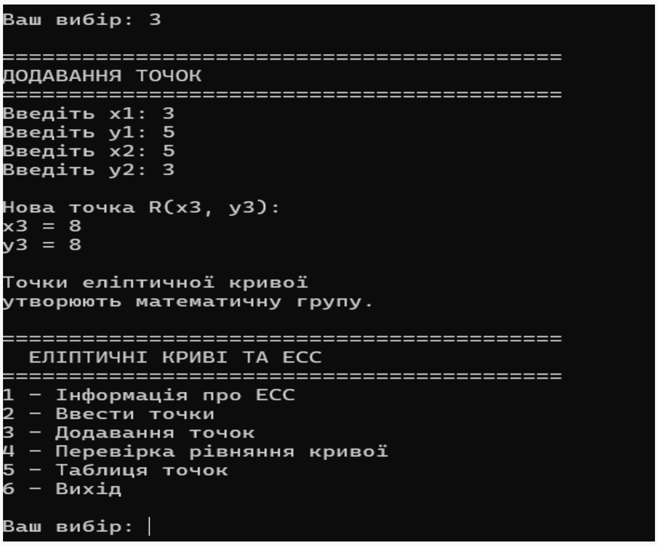


Рис. 3. Результат розрахунку операції додавання точок у межах абелевої групи

При переході до пункту «3» (рис. 3) реалізовано фундаментальну групову операцію додавання. На основі введених параметрів програма розраховує координати результуючої точки R(8, 8), констатуючи замкненість операцій у межах сформованої математичної структури.

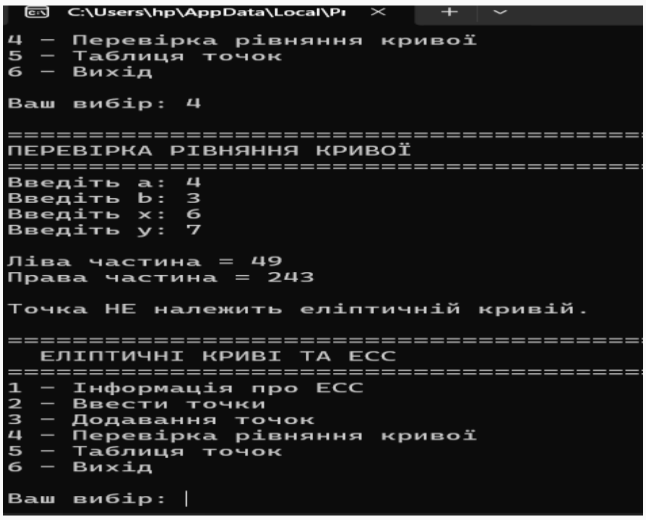


Рис. 4. Аналітична верифікація належності обраної точки еліптичній кривій

Важливим елементом контролю є математичний верифікатор (пункт «4», рис. 4). За заданих параметрів кривої a=4, b=3 та тестової точки (6, 7) програма окремо обчислює ліву частину рівняння Вейєрштрасса ($y^2 = 49$) та праву частину ($x^3+ax+b = 243$). Через дисбаланс значень алгоритм робить правильний висновок про те, що точка не належить графіку кривої.

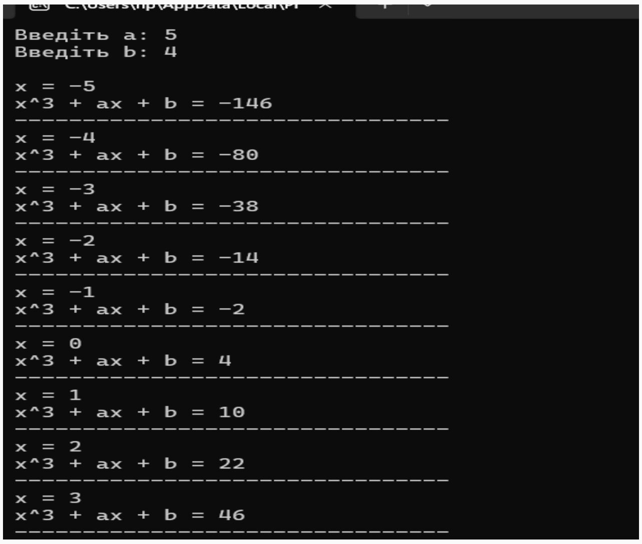


Рис. 5. Динамічна генерація таблиці значень для дискретного аналізу функції

На рис. 5 представлено результати роботи табличного генератора (пункт «5») для параметрів кривої a=5, b=4. Програма здійснює ітераційний прохід по осі абсцис у діапазоні $x \in [-5; 5]$, крок за кроком розраховуючи значення полінома третього степеня, що дозволяє досліднику оперативно виявляти цілі точки кривої.

Висновки

У процесі виконання дослідження було детально проаналізовано групову структуру точок на еліптичній кривій, а також фундаментальні основи сучасної високоефективної криптографії ECC. Обговорено та формалізовано математичну модель кривої, аналітичні методи перевірки належності експериментальних точок графіку функції, а також виконання базових бінарних операцій над ними. Для наочної практичної демонстрації принципів функціонування математичного апарату було створено інтерактивну мовою Python.

Дослідження повністю підтвердило, що криптосистеми на основі еліптичних кривих гарантують винятково високий рівень інформаційної безпеки, високу швидкість обробки даних і раціональне використання критичних обчислювальних ресурсів, що робить ECC базовою і найбільш перспективною технологією в індустрії сучасного захисту інформації.

Список використаної літератури

1. **Кобліц Н.** Курс теорії чисел і криптографії
2. **Глухов М. М., Круглов О. О.** Математичні методи криптографії на еліптичних кривих.
3. **Hankerson D., Menezes A., Vanstone S.** Guide to Elliptic Curve Cryptography
4. **Смарт Н.** Криптографія. Серія «Світ програмування».
5. **Вашингтон Л.** Еліптичні криві: теорія та криптографія.
6. **ДСТУ ISO/IEC 14888-3:2019** Інформаційні технології. Методи захисту інформації. Цифрові підписи на основі дискретного логарифма

Каршинова Вероніка Олександрівна – студентка факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії,Вінницький нацьональний технічний університет, Вінниця, Хмельницьке шосе,95, e-mail: kanshi7ra@gmail.com
Науковий керівник:Дубова Надія Борисівна – старший викладач, кафедра вищої математики,Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця Хмельницьке шосе,95,
e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

Karshinova Veronika Oleksandrivna – student of the Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: kanshi7ra@gmail.com

Scientific supervisor: Dubova Nadiya Borysivna – senior lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia Khmelnytske Shosse, 95,
e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

УДК 004.92

О. Н. Романюк
В. П. Майданюк
О. В. Романюк

МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВИСОКОПРОДУКТИВНОГО РЕНДЕРИНГУ РЕАЛІСТИЧНИХ СЦЕН

Вінницький національний технічний університет;

Анотація

Розглянуто математичне забезпечення сучасних високопродуктивних систем рендерингу реалістичних тривимірних сцен. Проаналізовано основні математичні моделі формування зображень, зокрема рівняння рендерингу, моделі локального та глобального освітлення, методи трасування променів і стохастичні алгоритми . Особливу увагу приділено сучасним підходам до підвищення продуктивності рендерингу шляхом використання просторових структур даних, паралельних обчислень, нейронного рендерингу та алгоритмів штучного інтелекту. Показано, що поєднання математичних методів моделювання освітлення з апаратним прискоренням графічних обчислень забезпечує формування фотореалістичних зображень у режимі реального часу. Визначено перспективні напрями розвитку математичного забезпечення систем високопродуктивного рендерингу.

Ключові слова: комп'ютерна графіка, рендеринг, математична модель, рендеринг, трасування променів, глобальне освітлення, нейронний рендеринг, високопродуктивні обчислення.

Abstract

The mathematical support of modern high-performance rendering systems for realistic three-dimensional scenes is considered. The main mathematical models of image formation are analyzed, in particular, rendering equations, local and global lighting models, ray tracing methods and stochastic algorithms. Special attention is paid to modern approaches to increasing rendering performance by using spatial data structures, parallel computing, neural rendering and artificial intelligence algorithms. It is shown that the combination of mathematical methods of lighting modeling with hardware acceleration of graphic calculations provides the formation of photorealistic images in real time. Promising directions for the development of mathematical support for high-performance rendering systems are identified.

Keywords:computer graphics, rendering, mathematical model, rendering, ray tracing, global illumination, neural rendering, high-performance computing.

Вступ

Високопродуктивний рендеринг [1-3] є складовою систем віртуальної та доповненої реальності, комп'ютерних ігор, інженерного проєктування та наукової візуалізації. Досягнення фотореалістичної якості зображень потребує застосування складних математичних моделей освітлення, геометричних перетворень і методів чисельного інтегрування. Тому дослідження математичного забезпечення високопродуктивного рендерингу реалістичних сцен є актуальним науковим завданням, спрямованим на підвищення ефективності сучасних графічних систем.

Результати дослідження

Теоретичною основою сучасного рендерингу є рівняння рендерингу, запропоноване Джеймсом Каджією. Воно описує процес перенесення світлової енергії у сцені та визначає яскравість точки поверхні як суму власного випромінювання та відбитого світла. Розв'язання цього інтегрального рівняння дозволяє моделювати складні світлові ефекти, включаючи відбиття, заломлення, розсіювання та глобальне освітлення. Незважаючи на те, що точний розв'язок рівняння рендерингу є надзвичайно складним, саме воно лежить в основі більшості сучасних алгоритмів формування реалістичних зображень.

Одним із напрямів розвитку математичного забезпечення рендерингу є використання фізично коректних моделей освітлення (Physically Based Rendering, PBR). Такі моделі базуються на законах збереження енергії та властивостях двонапрямних функцій розподілу відбиття (BRDF). Використання PBR дозволяє отримувати реалістичне відтворення матеріалів незалежно від умов освітлення. Сучасні системи рендерингу широко застосовують мікрофасетні моделі поверхонь, що забезпечують адекватне відображення металевих, діелектричних та комбінованих матеріалів.

Для наближеного розв'язання рівняння рендерингу широко використовуються стохастичні методи Монте-Карло. Їх математична сутність полягає у статистичному оцінюванні інтегралів за допомогою випадкової вибірки напрямків поширення світла. Основною перевагою методів Монте-Карло є можливість моделювання складних світлових явищ, однак зі збільшенням реалістичності суттєво зростають обчислювальні витрати. Саме тому сучасні дослідження спрямовані на розроблення адаптивних схем вибірки, методів зменшення шумів та прискорення збіжності обчислень.

Найбільш реалістичні результати забезпечує трасування променів. Даний метод базується на геометричних моделях поширення світла та передбачає побудову траєкторій променів від камери до джерел освітлення. З математичної точки зору базовими задачами є знаходження перетинів променів з геометричними примітивами та обчислення характеристик взаємодії світла з поверхнями. Для прискорення цих обчислень використовуються спеціалізовані просторові структури даних, зокрема дерева обмежувальних об'ємів (BVH), kd-дерева та октодерева. Застосування таких структур дозволяє істотно скоротити кількість перевірок перетину та підвищити швидкодію алгоритмів.

Важливим напрямом удосконалення математичного забезпечення є використання моделей глобального освітлення. На відміну від локальних моделей, вони враховують багаторазові відбиття світла між об'єктами сцени. У сучасних дослідженнях активно застосовуються методи кешування радіансу, фотонного трасування та гібридні алгоритми глобального освітлення. Такі підходи дозволяють досягати високої реалістичності зображень навіть для складних сцен із великою кількістю джерел світла та матеріалів.

Стрімкий розвиток графічних процесорів зумовив активне використання паралельних обчислень. Сучасні графічні процесори містять тисячі обчислювальних ядер, що дозволяє виконувати одночасне опрацювання великої кількості пікселів та променів. Математичне забезпечення високопродуктивного рендерингу повинно враховувати особливості архітектури GPU, забезпечувати ефективний розподіл задач та мінімізувати витрати на доступ до пам'яті. Особливого значення набувають алгоритми паралельного трасування променів, адаптивного семплювання та багаторівневого кешування даних.

Перспективним напрямом розвитку є нейронний рендеринг, який поєднує методи комп'ютерної графіки та штучного інтелекту. У таких системах нейронні мережі використовуються для апроксимації складних функцій освітлення, реконструкції сцен та усунення шумів. Застосування нейронних моделей дозволяє значно скоротити кількість необхідних обчислень без помітної втрати якості зображення. Сучасні дослідження демонструють ефективність нейронного рендерингу для задач трасування променів, відтворення матеріалів та побудови радіаційних полів.

Важливу роль у високопродуктивному рендерингу відіграють також методи адаптивної деталізації та фовеального рендерингу. Вони базуються на математичних моделях людського зору та дозволяють виконувати більш точні обчислення лише для областей сцени, які перебувають у центрі уваги користувача. Використання таких підходів забезпечує суттєве підвищення продуктивності без погіршення суб'єктивної якості зображення.

Висновки

Таким чином, математичне забезпечення сучасного високопродуктивного рендерингу являє собою комплекс моделей, методів та алгоритмів, спрямованих на ефективне розв'язання задач перенесення світла у тривимірних сценах. Поєднання фізично коректних моделей освітлення, методів Монте-Карло, трасування променів, паралельних обчислень та нейронного рендерингу дозволяє формувати фотореалістичні зображення в режимі реального часу. Подальший розвиток даного напряму пов'язаний із впровадженням штучного інтелекту, нових математичних моделей глобального освітлення та вдосконаленням алгоритмів апаратного прискорення графічних обчислень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Романюк О. Н., Романюк О. В., Чехместрук Р. Ю. Комп'ютерна графіка : електронний навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2023. 147 с.

2. Romanyuk O., Zavalniuk Y., Pavlov S., Chekhmestruk R., Bondarenko Z., Koval T., Kalizhanova A., Iskakova A. New Surface Reflectance Model with the Combination of Two Cubic Functions Usage**.** Informatyka, Automatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska. 2023. Vol. 13, No. 3. P. 101–106. DOI: 10.35784/iapgos.5327
3. Romanyuk O., Zavalniuk Y., Romanyuk O., Snigur A., Titova N., Maidaniuk V. The Development of Physically Correct Reflectance Model Based on Logarithm Function. In: 2023 13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT). Wrocław, Poland, 2023. DOI: 10.1109/ACIT58437.2023.10275589.

.

Романюк Олександр Никифорович- д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: rom8591@gmail.com.

Майданюк Володимир Павлович - канд. техн. наук, доцент кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: maidaniuk2000@gmail.com.

Романюк Оксана Володимирівна – доцент кафедри програмного забезпечення, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: romaniukoksanav@gmail.com.

Romanyuk Oleksandr Nikiforovych- Dr. of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Software, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: rom8591@gmail.com.

Maidaniuk Volodymyr Pavlovych - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Software, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: maidaniuk2000@gmail.com.

Romaniuk Oksana Volodymyrivna – Associate Professor of the Software Department, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: romaniukoksanav@gmail.com.

УДК 517.91:004.42

А. Р. Караван
Н. Б. Дубова

АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕННЯ ДОДАВАННЯ ТА ПОДВОЄННЯ ТОЧОК НА ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ

Вінницький національний технічний університет;

Анотація
У роботі досліджено математичні основи еліптичних кривих та алгоритми виконання базових операцій над їх точками. Розглянуто правила додавання і подвоєння точок, що забезпечують групову структуру еліптичної кривої. Наведено відповідні математичні формули та описано принципи їх програмної реалізації. Показано значення цих операцій для побудови ефективних обчислювальних методів, що застосовуються у криптографії та теорії чисел.
Ключові слова: еліптична крива, група точок, додавання точок, подвоєння точок, алгоритм, програмна реалізація, криптографія, теорія чисел.

Abstract
The paper investigates the mathematical foundations of elliptic curves and the algorithms for performing basic operations on their points. The rules of point addition and point doubling, which ensure the group structure of an elliptic curve, are considered. Relevant mathematical formulas are presented, and the principles of their software implementation are described. The importance of these operations for constructing efficient computational methods used in cryptography and number theory is demonstrated.
Keywords: elliptic curve, point group, point addition, point doubling, algorithm, software implementation, cryptography, number theory.

Вступ

Еліптичні криві є важливим об’єктом сучасної математики та інформатики, що широко застосовується в теорії чисел і криптографії. Вони задаються рівняннями спеціального виду та утворюють множину точок із визначеними правилами виконання операцій над ними. За умови відсутності особливих точок така множина набуває властивостей алгебраїчної групи.

Особливе значення мають операції додавання та подвоєння точок, оскільки саме вони лежать в основі алгоритмів роботи з еліптичними кривими. Виконання цих операцій дає змогу отримувати нові точки на тій самій кривій і забезпечує можливість побудови ефективних методів обчислення.

У даній роботі розглядаються математичні основи групової структури еліптичних кривих, формули для додавання та подвоєння точок, а також принципи реалізації відповідних алгоритмів. Окрему увагу приділено програмному моделюванню цих операцій та аналізу отриманих результатів.

Математична постановка

Нехай задано еліптичну криву над полем дійсних чисел рівнянням

$$y^2 = x^3 + ax + b \tag{1}$$

де $a,\ b \in \mathbb{R}$, причому виконується умова $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ що забезпечує неособливість кривої. Нехай на еліптичній кривій задано точки $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$. Потрібно визначити результуючу точку $R = P + Q = (x_3, y_3)$ шляхом застосування групової операції над точками еліптичної кривої. Для випадку додавання різних точок $P \neq Q$ коефіцієнт нахилу прямої між ними обчислюється за формулою

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

а координати нової точки визначаються як

$$x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2 \quad (3)$$
$$y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1 \quad (4)$$

Для випадку подвоєння точки $P = Q$ коефіцієнт нахилу дотичної визначається формулою

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \quad (5)$$

після чого координати точки 2P обчислюються аналогічно. Таким чином, математична задача полягає у визначенні координат результуючої точки еліптичної кривої шляхом реалізації операцій додавання та подвоєння відповідно до правил групової структури.

Алгоритмічна реалізація

Для практичного застосування математичних співвідношень було реалізовано алгоритми додавання та подвоєння точок еліптичної кривої. Програма працює в інтерактивному режимі та дозволяє користувачу обрати необхідну операцію.

Алгоритм роботи програми складається з таких етапів:

1) Введення параметрів еліптичної кривої a
2) Вибір режиму роботи:
   - додавання двох точок;
   - подвоєння точки.
3) Введення координат точки або двох точок залежно від обраного режиму.
4) Перевірка коректності вхідних даних та належності точок еліптичній кривій.
5) Обчислення коефіцієнта нахилу λ відповідно до вибраної операції.
6) Обчислення координат нової точки за математичними формулами.
7) Виведення результату на екран.

Реалізація алгоритму дозволяє автоматизувати виконання обчислень та наочно продемонструвати принцип формування групової структури точок на еліптичній кривій. Отримані результати можуть бути використані для подальшого дослідження методів еліптичної криптографії та чисельних алгоритмів роботи з еліптичними кривими.

Фрагмент коду програми

```
int main() {
    double a;
    int choice;
    cout << "Еліптичні криві: додавання і подвоєння точок\n";
    cout << "Введіть параметр a: ";
    cin >> a;
    cout << "\nОберіть метод:\n";
    cout << "1 - Додавання точок (P + Q)\n";
    cout << "2 - Подвоєння точки (2P)\n";
    cout << "Ваш вибір: ";
    cin >> choice;
    if (choice == 1) {
        Point P, Q;
```

```
    cout << "Введіть точку P (x y): ";
    cin >> P.x >> P.y;
    cout << "Введіть точку Q (x y): ";
    cin >> Q.x >> Q.y;
    Point R = addPoints(P, Q, a, false);
    cout << "Результат P + Q = ("
        << R.x << ", " << R.y << ")\n";
}
```

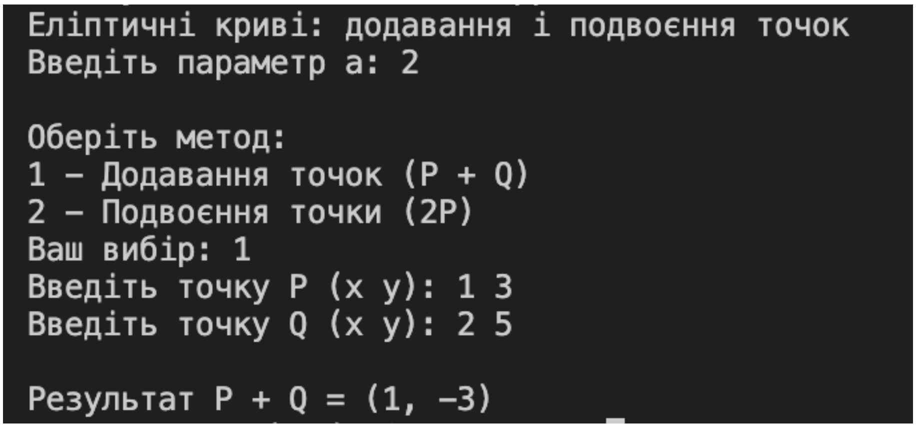


Рис. 1. Результати виконання. Додавання точок

При виконанні операції додавання точок $P(1{,}3)$ і $Q(2{,}5)$ було обчислено нахил прямої $\lambda = 2$. Після підстановки у формули отримано нову точку $R(1,-3)$, яка є результатом операції $P + Q$.

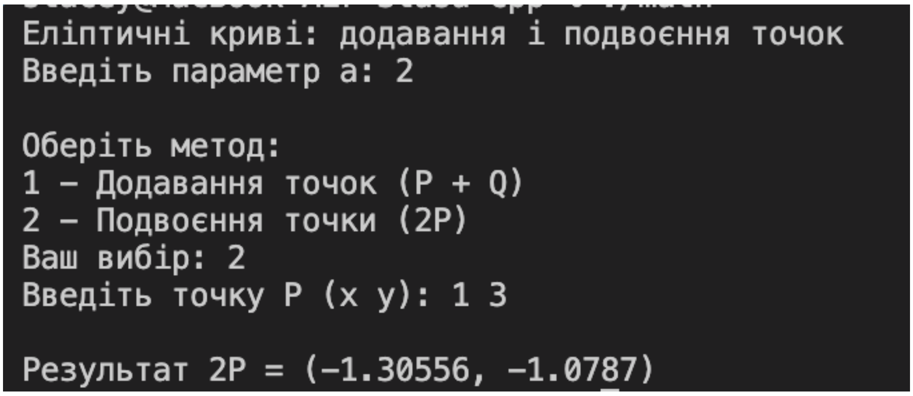


Рис. 2. Результати виконання. Подвоєння точок

При виконанні операції подвоєння точки $P(1{,}3)$ було використано формулу нахилу дотичної (5). Після обчислень отримано нову точку $R\left(-\frac{47}{36}, -\frac{233}{216}\right)$, яка є результатом операції $2P$

Висновки

У даній роботі було розглянуто основні алгоритми обчислення операцій над точками еліптичної кривої, а саме додавання та подвоєння точок. Встановлено, що ці операції визначаються як геометрично, так і алгебраїчно, та базуються на спеціальних формулах для обчислення координат нових точок.

Було проаналізовано алгоритм додавання двох різних точок, який ґрунтується на побудові прямої через ці точки та знаходженні третьої точки перетину з кривою з подальшим відображенням відносно осі абсцис. Також досліджено алгоритм подвоєння точки, який використовує дотичну до кривої в заданій точці та аналогічний принцип знаходження нової точки.

Одержані результати показують, що операції додавання та подвоєння є базовими для побудови алгебраїчної структури точок еліптичної кривої і можуть бути формалізовані у вигляді чітких обчислювальних алгоритмів. Це підтверджує їх важливість для подальших математичних і прикладних застосувань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Koblitz N. Elliptic curve cryptosystems // *Mathematics of Computation*. – 1987. – Vol. 48, No. 177. – P. 203–209.
2. Miller V. S. Use of elliptic curves in cryptography // *Advances in Cryptology — CRYPTO'85 Proceedings*. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1985. – P. 417–426.

Караван Анастасія Русланівна — студент факультету інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: nastykaravan@gmail.com

Науковий керівник: ***Дубова Надія Борисівна*** – старший викладач, кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

Karavan Anastasiia R. — Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: nastykaravan@gmail.com

Supervisor: ***Dubova Nadia B.*** — Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Khmelnytske Shosse, 95, e-mail: dubova_n_b@vntu.edu.ua

УДК 377.1:517

К.В. Долян
О.В. Панчук
В.О. Маранчак

ПРИКЛАДНИЙ АСПЕКТ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ У ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ФАХІВЦІВ ТЕХНІЧНОГО ПРОФІЛЮ

ВСП «Вінницький фаховий коледж Національного університету харчових технологій»

Анотація
У статті досліджено прикладну спрямованість курсу вищої математики у закладах фахової передвищої освіти технічного спрямування. Визначено роль математичного моделювання як основного інструменту зв'язку між теоретичним матеріалом та практичною інженерною діяльністю. Окреслено ключові розділи вищої математики, що мають безпосереднє прикладне значення для загальнотехнічних дисциплін, та запропоновано підходи до формування професійної мотивації студентів через розв'язання контекстних задач.
Ключові слова: вища математика, прикладний аспект, технічний профіль, фаховий коледж, математичне моделювання, професійна підготовка.

Abstract
The article investigates the applied orientation of the higher mathematics course in professional colleges of technical specialization. The role of mathematical modeling as the main tool for connecting theoretical material with practical engineering activities is determined. The key sections of higher mathematics that have direct applied value for general engineering disciplines are outlined, and approaches to the formation of professional motivation of students through solving contextual problems are proposed.
Keywords: higher mathematics, applied aspect, technical profile, professional college, mathematical modeling, professional training.

Постановка проблеми. Сучасний етап розвитку техніки та технологій висуває високі вимоги до інтелектуального потенціалу та фундаментальної підготовки випускників фахових коледжів. Вища математика традиційно є фундаментом інженерної освіти, проте в реальній практиці викладачі часто стикаються із низькою мотивацією студентів молодших курсів, які не бачать зв'язку між абстрактними математичними структурами та майбутньою професійною діяльністю. Подолання цього когнітивного розриву можливе через посилення прикладного аспекту навчання, що перетворює математику з теоретичної дисципліни на дієвий інструмент вирішення прикладних інженерно-технічних завдань.

Мета даної публікації — проаналізувати особливості реалізації прикладного аспекту вищої математики у процесі підготовки технічних фахівців середньої ланки та виділити найбільш ефективні дидактичні інструменти для інтеграції теорії з інженерною практикою.

Виклад основного матеріалу. Прикладний аспект навчання вищої математики у фаховому коледжі базується на концепції наскрізного математичного моделювання. Математична модель виступає містком між реальним фізичним чи технологічним процесом та його математичним описом. Формування у студентів навичок побудови та аналізу таких моделей є одним із головних завдань викладача.Процес впровадження прикладного аспекту передбачає трансформацію структури завдань, де традиційні абстрактні обчислення замінюються на контекстні (професійно-орієнтовані) задачі. Розглянемо прикладну цінність ключових розділів вищої математики для технічних спеціальностей:

1. **Лінійна та векторна алгебра.** Матричний числення є основою для програмування, розрахунку складних електричних кіл (закони Кірхгофа), а також аналізу напружено-деформованого стану конструкцій у будівельній та машинобудівній сферах. Вектори застосовуються для опису силових взаємодій у статиці та динаміці.
2. **Диференціальне числення.** Поняття похідної вивчається не просто як границя відношення приростів, а як швидкість протікання фізичних, хімічних чи технологічних процесів (миттєва

швидкість, струм як похідна від заряду, теплоємність тощо). Задачі на оптимізацію (знаходження екстремумів) дозволяють розрахувати мінімальні витрати матеріалів або максимальну міцність конструкції при заданих параметрах.

3. **Диференціальні рівняння.** Описують динаміку реальних систем: коливання транспортних засобів, перехідні процеси в електричних мережах, закони охолодження або нагрівання елементів обладнання. Розуміння диференціальних рівнянь дозволяє студентам усвідомлено підходити до вивчення спецдисциплін, замість механічного зазубрювання кінцевих формул.
4. **Теорія ймовірностей та математична статистика.** Стають дедалі важливішими в умовах цифровізації виробництва. Вони використовуються для статистичного контролю якості продукції, оцінки надійності технічних систем та прогнозування ризиків збоїв у роботі обладнання.

Окрему увагу в контексті реалізації прикладного аспекту варто приділити використанню сучасного програмного забезпечення та хмарних сервісів, які автоматизують рутинні обчислення і зміщують фокус уваги студента з технічної рутини на аналіз суті задачі. Інтеграція інструментів на кшталт GeoGebra, Wolfram|Alpha чи спеціалізованих пакетів Mathcad дозволяє візуалізувати абстрактні математичні моделі у вигляді інтерактивних графіків, динамічних схем або комп'ютерних симуляцій реальних фізичних процесів. Такий підхід дає змогу студенту технічного коледжу досліджувати поведінку технічної системи у реальному часі (наприклад, змінювати параметри електричного кола чи навантаження на балку) і одразу бачити математично обґрунтований результат, що значно підвищує наочність навчання.

Крім того, успішний прояв прикладного характеру дисципліни безпосередньо залежить від міжциклової взаємодії викладачів закладу освіти. Ефективною практикою є створення інтегрованих (бінарних) занять, де викладач вищої математики та викладач випускової спецдисципліни спільно розбирають конкретний виробничий кейс. Наприклад, при розрахунку термодинамічних процесів або програмуванні алгоритмів для автоматизованих систем студенти чітко бачать, як теоретичні матричні трансформації чи диференціальні оператори стають основою для написання коду чи оптимізації роботи двигуна. Це не лише руйнує стереотип про «ізольованість» математики, а й закладає міцне підґрунтя для майбутнього курсового та дипломного проектування з використанням сучасного математичного апарату.

Важливою умовою успішної реалізації прикладного аспекту є використання комп'ютерно-орієнтованих систем (наприклад, MATLAB, Mathcad або GeoGebra). Коли студенти бачать, як математична модель візуалізується у вигляді графіків чи симуляцій фізичних процесів, рівень їхнього залучення суттєво зростає. Математика перестає бути «сухою» наукою, трансформуючись у мову сучасних технологій.

Висновки. Реалізація прикладного аспекту вищої математики у фаховому коледжі технічного профілю є базовим фактором підвищення якості освіти. Навчання, побудоване на розв'язанні професійно-спрямованих задач та методів математичного моделювання, забезпечує високу внутрішню мотивацію студентів, руйнує бар'єр між теорією та практикою, а також формує гнучке інженерне мислення, необхідне сучасному фахівцю в умовах стрімкого технологічного розвитку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурдун В. О. Прикладна спрямованість навчання математики студентів технічних коледжів. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*. 2014. Вип. 41. С. 45–50.
2. Клочко В. І. Нові інформаційні технології навчання вищої математики в технічному університеті: монографія. Вінниця: ВДТУ, 2002. 300 с.
3. Швець В. О., Прус А. В. Математичне моделювання у навчанні математики: теорія та практика. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2017. 182 с.

Долян Катерина Василівна – викладач вищої ктегоріі, викладач-методист, ВСП «Вінницький фаховий коледж НУХТ», Вінниця, e-mail: katiadomolian@gmail

Панчук Ольга Володимирівна – викладач вищої ктегоріі, ВСП «Вінницький фаховий коледж НУХТ»

Маранчак Вікторія Олександрівна – викладач вищої ктегоріі, завідувач відділенням, ВСП «Вінницький фаховий коледж НУХТ»

Dolian Kateryna – Lecturer of the Highest Category, Teacher-Methodologist, Separate Structural Subdivision "Vinnytsia Professional College of National University of Food Technologies", Vinnytsia, Ukraine, e-mail: katiadomolian@gmail.com.

Panchuk Olha – Lecturer of the Highest Category, Separate Structural Subdivision "Vinnytsia Professional College of National University of Food Technologies", Vinnytsia, Ukraine.

Maranchak Viktoriia – Lecturer of the Highest Category, Head of the Department, Separate Structural Subdivision "Vinnytsia Professional College of National University of Food Technologies", Vinnytsia, Ukraine.

УДК 519.6:004.42:504.064

А. Є. Шмідт

ЧИСЕЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ТА ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ПОШУКУ АНОМАЛІЙ В ЕКОЛОГІЧНИХ ДАНИХ МОВОЮ PYTHON

Державний університет «Житомирська політехніка»

Анотація

У роботі досліджено застосування методу найменших квадратів для лінійної апроксимації екологічних часових рядів та його програмну реалізацію мовою Python. Особливу увагу приділено алгоритмізації процесу виявлення аномальних значень експозиції забруднюючих речовин на основі математичного критерію відхилення. Розроблена програма забезпечує обчислення параметрів тренду та автоматизовану ідентифікацію нетипових викидів.

Ключові слова: метод найменших квадратів, лінійна апроксимація, виявлення аномалій, екологічні дані, Python.

Abstract

The paper investigates the application of the least squares method for the linear approximation of ecological time series and its software implementation in Python. Special attention is given to the algorithmization of the process of detecting anomalous values of pollutant exposure based on a mathematical deviation criterion. The developed program provides the calculation of trend parameters and the automated identification of atypical emissions.

Keywords: least squares method, linear approximation, anomaly detection, ecological data, Python.

Вступ

Сьогодні моніторинг обсягів викидів шкідливих речовин в атмосферу є одним із ключових завдань для оцінки екологічної безпеки [1]. Для аналізу таких часових рядів і виявлення нетипових відхилень ефективно застосовуються чисельні методи лінійної апроксимації, зокрема метод найменших квадратів [2].

Метою роботи є розроблення та програмна реалізація мовою Python алгоритму апроксимації екологічних даних для виявлення аномальних значень викидів.

Результати дослідження

Для побудови математичної моделі використано відкриті дані Світового банку щодо середньорічної експозиції дрібних твердих частинок PM2.5 (мікрограми на кубічний метр) в Україні за період з 1990 по 2020 рік (Таблиця 1).

Таблиця 1. Динаміка середньорічної експозиції PM2.5 в Україні (1990–2020 рр.) за даними Світового банку [3]

Рік (x)	PM2.5, мкг/м³ (y)	Рік (x)	PM2.5, мкг/м³ (y)
1990	33.06	2006	21.38
1991	32.76	2007	20.86
1992	32.40	2008	20.42
1993	31.99	2009	20.04
1994	31.53	2010	19.71
1995	31.03	2011	19.44

1996	30.47	2012	18.68
1997	29.82	2013	18.88
1998	29.10	2014	18.43
1999	28.34	2015	17.79
2000	27.55	2016	16.24
2001	26.57	2017	15.66
2002	25.32	2018	17.10
2003	24.02	2019	15.58
2004	22.84	2020	14.90
2005	21.97	-	-

Для виявлення довгострокового тренду та ідентифікації аномальних відхилень застосовано лінійну апроксимацію методом найменших квадратів (МНК). Рівняння тренду шукається у вигляді

$$y = ax + b \tag{1}$$

де y – значення експозиції PM2.5, x – рік спостереження.

Згідно з МНК, невідомі параметри a та b визначаються з умови мінімізації суми квадратів відхилень реальних даних від теоретичної прямої:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \to \min \tag{2}$$

Розв'язок відповідної системи рівнянь дозволяє обчислити шукані коефіцієнти за формулами:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \tag{3}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{4}$$

Для виявлення аномалій розроблено алгоритм мовою програмування Python з використанням бібліотеки NumPy [4]. Аномальним вважається рік, у якому модуль різниці між реальним та теоретичним значенням перевищує заданий поріг чутливості Δ. Фрагмент програмної реалізації наведено на рисунку 1.

```
# Дані спостережень (роки та значення PM2.5)
x = np.arange(1990, 2021)
y = np.array([33.06, 32.76, 32.40, 31.99, 31.53, 31.03, 30.47, 29.82,
              29.10, 28.34, 27.55, 26.57, 25.32, 24.02, 22.84, 21.97,
              21.38, 20.86, 20.42, 20.04, 19.71, 19.44, 18.68, 18.88,
              18.43, 17.79, 16.24, 15.66, 17.10, 15.58, 14.90])

n = len(x)

# Обчислення коефіцієнтів тренду a та b за МНК
sumX = np.sum(x)
sumY = np.sum(y)
sumX2 = np.sum(x**2)
sumXY = np.sum(x * y)

a = (n * sumXY - sumX * sumY) / (n * sumX2 - sumX**2)
b = (sumY - a * sumX) / n

# Виявлення аномальних значень викидів
delta = 1.5 # поріг чутливості відхилення
for i in range(n):
    y_teor = a * x[i] + b
    if abs(y[i] - y_teor) > delta:
        print(f"Аномалія: {x[i]} рік. Відхилення: {abs(y[i] - y_teor):.2f} мкг/м³")
```

Рис. 1. Фрагмент програми

В результаті виконання програми було отримано рівняння лінійного тренду y = -0.65x + 1332.01. Візуалізацію фактичних даних, побудованої лінії тренду та ідентифікованих аномалій наведено на рисунку 2.

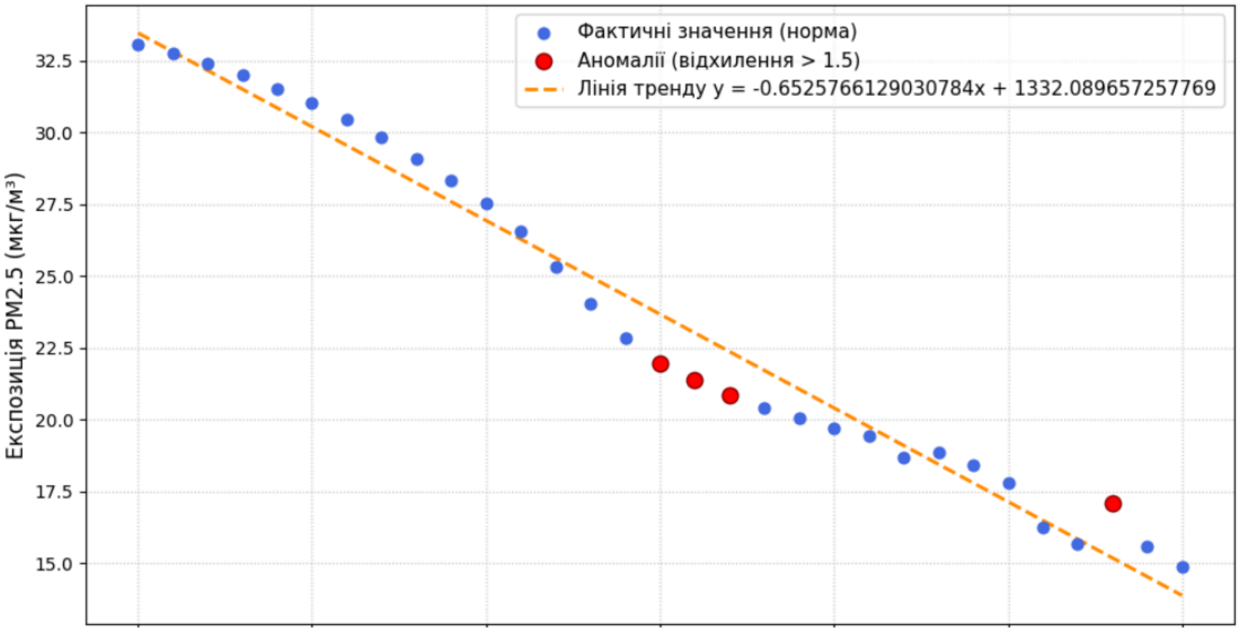


Рис. 2. Динаміка середньорічної експозиції PM2.5 в Україні та лінія тренду

Встановлений поріг чутливості Δ = 1.5 мкг/м³ дозволив виявити найбільш суттєві відхилення показників, які зведені у таблицю 2.

Таблиця 2. Виявлені аномальні відхилення

Рік	Фактичне значення PM2.5, мкг/м³	Теоретичне значення тренду, мкг/м³	Модуль відхилення, мкг/м³
2005	21.97	23.67	1.70
2006	21.38	23.02	1.64
2007	20.86	22.37	1.51
2018	17.10	15.19	1.91

Висновки

У роботі розроблено алгоритм та його програмну реалізацію мовою Python для аналізу екологічних часових рядів методом найменших квадратів. Застосування лінійної апроксимації до даних щодо експозиції PM2.5 в Україні дозволило встановити стійкий макротренд до зниження рівня забруднення протягом 1990–2020 років. Використання математичного критерію відхилення дало змогу автоматизовано ідентифікувати аномальні роки (зокрема, різке підвищення показників у 2018 році та період послідовних відхилень 2005–2007 років)

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кирієнко П. Г., Варламов Є. М., Квасов В. Є., Лобов С. О. Організація моніторингу за станом атмосферного повітря у м. Харків. Екологічна безпека та природокористування. 2023. № 4 (48). С. 81–90.
2. Задачин В. М. Чисельні методи: навчальний посібник. – Харків : ХНУ, 2012. – 312 с.

3. World Bank: World Development Indicators. URL: https://databank.worldbank.org/source/world-development-indicators (дата звернення: 20.06.2026).
4. NumPy Documentation. URL: https://numpy.org/doc/ (дата звернення: 20.06.2026).

Шмідт Анатолій Євгенович — аспірант факультету гірничої справи, природокористування та будівництва, Державний університет «Житомирська політехніка», м. Житомир, e-mail: phde2251_shaye@student.ztu.edu.ua

Науковий керівник: ***Герасимчук Людмила Олександрівна*** — кандидат сільськогосподарських наук, доцент кафедри загальної екології, Державний університет «Житомирська політехніка», м. Житомир

Shmidt Anatolii Ye. — PhD student, Faculty of Mining, Environmental Management and Construction, Zhytomyr Polytechnic State University, Zhytomyr, email: phde2251_shaye@student.ztu.edu.ua

Supervisor: ***Herasymchuk Liudmyla O.*** — Cand. Sc. (Agr.), Associate Professor of the Department of General Ecology, Zhytomyr Polytechnic State University, Zhytomyr

УДК: 378.147:004.94:628.47

О. В. Власенко
Р. В. Петрук

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ ПІД ЧАС ПІДГОТОВКИ МАГІСТРІВ ТА АСПІРАНТІВ СПЕЦІАЛЬНІСТІ «ТЕХНОЛОГІЇ ЗАХИСТУ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА»

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Обґрунтовано методичні підходи до впровадження систем комп'ютерної математики та середовищ моделювання (MATLAB, Python) в освітній процес підготовки фахівців спеціальності 183 «Технології захисту навколишнього середовища». На прикладі дослідження процесу теплообміну в реакторі циркуляційного піролізу твердих відходів продемонстровано ефективність інтеграції розрахунково-моделювального компонента. Показано, що використання математичних програм дозволяє аспірантам і магістрам проводити оптимізацію складних термохімічних процесів (визначення режимів за температур 500–550 °C, коефіцієнтів рециркуляції 0,4–0,6) та верифікувати теоретичні моделі з мінімальною похибкою. Окреслено структуру навчального модуля та його значення для формування цифрових і дослідницьких компетентностей майбутніх екологічних інженерів.

Ключові слова: системи комп'ютерної математики, MATLAB, Python, моделювання, циркуляційний піроліз, технології захисту навколишнього середовища, вища освіта.

Abstract

Methodological approaches to the introduction of computer mathematics systems and modeling environments (MATLAB, Python) into the educational process of training specialists in specialty 183 "Environmental Protection Technologies" are substantiated. On the example of research of heat exchange process in the reactor of circulating pyrolysis of solid waste the efficiency of integration of calculation-modeling component is demonstrated. It is shown that the use of mathematical software allows PhD and Master students to optimize complex thermochemical processes (determination of regimes at temperatures 500–550 °C, recirculation coefficients 0.4–0.6) and verify theoretical models with minimal error. The structure of the educational module and its significance for the formation of digital and research competencies of future environmental engineers are outlined.

Keywords: computer mathematics systems, MATLAB, Python, modeling, circulating pyrolysis, environmental protection technologies, higher education.

Вступ

Сучасна підготовка фахівців у галузі технологій захисту навколишнього середовища [1,2] вимагає від випускників не лише знання фундаментальних хімічних та екологічних закономірностей, а й володіння інструментами комп'ютерного моделювання. Складні міждисциплінарні екологічні інженерні завдання – такі як утилізація відходів методом циркуляційного піролізу – включають процеси тепломасообміну та хімічної кінетики, які неможливо детально дослідити без застосування систем комп'ютерної математики (СКМ). Метою роботи є науково-методичне обґрунтування впровадження програмних комплексів (MATLAB, Python) у процес навчання інженерів-екологів для підвищення ефективності розрахунків та моделювання природоохоронних технологій.

Результати дослідження

Математичне моделювання як інструмент досліджень та дидактики. У ході науково-дослідної роботи [3-6] за напрямом термічної деструкції відходів було розроблено математичну модель теплообміну в реакторі циркуляційного піролізу для псевдогомогенного середовища (похибка розрахунків не перевищує 2,6 %). Комп'ютерна реалізація цієї моделі в середовищах MATLAB та Python дозволила встановити кількісні залежності виходу цільових продуктів (рідкої фракції — до 52

%) від технологічних параметрів та визначити оптимальні режими процесу (температура 500–550 °C, тривалість 30–45 хв, коефіцієнт рециркуляції 0,4–0,6).

Цей науковий контент слугує базою для формування розрахунково-моделювального блоку навчальних дисциплін. Використання СКМ у навчальному процесі дозволяє студентам:

– самостійно варіювати вхідні параметри моделі й візуалізувати температурні поля в реакторі;
– оцінювати конструктивні зміни апарата (наприклад, реактора з оребреними поверхнями) без значних фінансових витрат на натурний експеримент;
– відпрацьовувати алгоритми оптимізації та чисельного інтегрування диференціальних рівнянь.

Для моделювання процесу теплообміну в реакторі циркуляційного піролізу в середовищі MATLAB чудово підійде класичне диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є для нестаціонарного процесу в циліндричних координатах (оскільки реактор має циліндричну форму).

Для псевдогомогенного середовища всередині реактора, з урахуванням внутрішніх джерел тепла, наприклад, ендотермічного ефекту реакції деструкції відходів, рівняння має такий вигляд:

$$\rho \cdot c_p \cdot (\partial T / \partial t) = \lambda \cdot [\, (\partial^2 T / \partial r^2) + (1/r) \cdot (\partial T / \partial r) \,] + q_v$$

де: T – температура в певній точці реактора, °C; t – час процесу, с; r – радіус (відстань від центральної осі реактора), м; ρ – ефективна густина псевдогомогенного середовища, кг/м³; c_p – питома теплоємність, Дж/(кг·°C); λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·°C); q_v – об'ємна густина внутрішніх джерел або стоків тепла (інтенсивність поглинання тепла під час піролізу), Вт/м³.

Наведемо шаблон коду для студентів для програмної реалізація в середовищі MATLAB. Для розв'язання крайової задачі для диференціального рівняння в частинних похідних використовується стандартна функція pdepe:

```
function pyrolysis_reactor_pde
R = 0.2; % Радіус реактора, м
t_max = 2700; % Максимальний час (45 хв), с
x = linspace(0, R, 21);
t = linspace(0, t_max, 50);
m = 1; % Циліндрична геометрія

sol = pdepe(m, @pdefun, @pdeic, @pdebc, x, t);
T = sol(:,:,1);
surf(x, t, T);
title('Температурне поле в реакторі циркуляційного піролізу');
xlabel('Радіус r, м'); ylabel('Час t, с'); zlabel('Температура T, ^\circC');
colorbar;
end

function [c, f, s] = pdefun(x, t, u, DuDx)
rho = 800; cp = 1500; lambda = 0.15; qv = -5000;
c = rho * cp;
f = lambda * DuDx;

s = qv;
end

function u0 = pdeic(x)
u0 = 20; % Початкова температура, ^\circC
end

function [pl, ql, pr, qr] = pdebc(xl, ul, xr, ur, t)
pl = 0; ql = 1; % Симетрія на осі (r = 0)
pr = ur - 550; qr = 0; % Стала температура стінки (r = R)
end
```

Методичні аспекти викладання СКМ у ЗВО. Пропонується наскрізне впровадження розрахунково-моделювальних завдань на основі систем MATLAB та Python у профільні дисципліни спеціальності 183, зокрема : «Термічні методи переробки відходів» , «Моделювання процесів захисту довкілля» та «Екологічна безпека».

Рекомендована структура розрахунково-моделювального модуля в межах цих курсів передбачає кілька послідовних етапів [7]:

1. *Теоретично-алгоритмічний:* аналіз фізико-хімічної суті процесу та побудова системи рівнянь.
2. *Програмно-реалізаційний:* написання скриптів у MATLAB або Python, налаштування чисельних методів розв'язання.
3. *Дослідницький (інтерактивний симулятор):* проведення обчислювального експерименту, пошук екстремумів функцій (наприклад, максимального виходу цільової фракції).
4. *Проєктно-рефлексивний:* використання отриманих масивів даних для курсового проєктування та захисту екологічних рішень за допомогою кейс-методів.

Такий підхід забезпечує розвиток у студентів та аспірантів найважливіших фахових компетентностей: здатність проводити складні технологічні розрахунки, навички роботи з сучасним спеціалізованим ПЗ та вміння прогнозувати екологічну й енергетичну ефективність проектованих об'єктів.

Висновки

1. Інтеграція систем комп'ютерної математики (MATLAB, Python) у підготовку фахівців спеціальності 183 дозволяє трансформувати складні теоретичні моделі масо- та теплообміну в наочні й доступні для інженерного аналізу інструменти.
2. Використання комп'ютерного моделювання на прикладі технології циркуляційного піролізу демонструє студентам прямий зв'язок між математичним апаратом та вирішенням практичних екологічних проблем циркулярної економіки.
3. Перспективи розвитку напряму полягають у розробці відкритих електронних освітніх ресурсів у вигляді інтерактивних симуляторів та розширенні міждисциплінарних зв'язків із європейськими освітніми програмами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Горбатюк Р., Волкова Н., Кобилянська І. Технологічна культура як важливий складник професійної компетентності майбутніх педагогів природничих дисциплін, *Педагогіка безпеки*, вип. 10, вип. 2, с. 133–139, Лис 2025.
2. Kobylianskyi, O., Kobylianskyi, Y., Dembitska, S., Kobylianska, I., Pinaieva, O. (. Training of Specialists in the Sphere of Renewable Energy in the Conditions of Blended Learning for the Needs of the Regional Economy. In: Auer, M.E., Rüütmann, T. (eds) Futureproofing Engineering Education for Global Responsibility. ICL 2024. *Lecture Notes in Networks and Systems*, 2025, vol 1280. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-83523-0_1
3. Маркіна Л. М., Іващенко Т. Г., Власенко О. В., Ковтунов О. В. Моделювання реактора експериментального стенду процесу циркуляційного піролізу. *Екологічні науки*. 2025. № 58. DOI https://doi.org/10.32846/2306-9716/2025.eco.1-58.41.
4. Маркіна Л. М., Іващенко Т. Г., Власенко О. В. Моделювання процесів теплообміну в охолоджувальній системі реактора циркуляційного піролізу. *Екологічна безпека та технології захисту довкілля*. 2025. № 7. С. 92-104. DOI: https://doi.org/10.31073/ecobezpeka202507-12.
5. Машков О. А., Маркіна Л. М., Присяжний В. І., Власенко О. В. та ін. Інноваційний підхід до систематизації форм представлення наукових результатів фундаментальних та прикладних досліджень у галузі захисту навколишнього середовища. *Екологічні науки*. 2024. № 2(53). С. 29-34. DOI https://doi.org/10.32846/2306-9716/2024.eco.2-53.4.
6. Маркіна Л. М., Власенко О. В., Ковтунов О. В. Управління процесами впливу на клімат технологій перетворення відходів на енергію на прикладі термічної деструкції. *Екологічні науки*. 2024. № 3(54). С. 105-112. DOI https://doi.org/10.32846/2306-9716/2024.eco.3-54.16.
7. Притула А. В., Кобилянська І. М. Підготовка кваліфікованих фахівців за допомогою сучасних методів навчання/ Матеріали LIII науково-технічної конференції підрозділів ВНТУ, Вінниця, 20-22 березня 2024 р. Режим доступу:

[https://ir.lib.vntu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/41980/20874.pdf?sequence=3&isAllowed=y]

Власенко Олег Васильович – аспірант групи 183-24а, факультет будівництва, цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: olegvvvv@gmail.com.

Петрук Роман Васильович – д.т.н., професор кафедри екології, хімії та технологій захисту довкілля, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: prroma07@gmail.com

Vlasenko Oleg Vasylovych – postgraduate student of group 183-24a, Faculty of Construction, Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: olegvvv@gmail.com.

Petruk Roman Vasylovych – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Ecology, Chemistry and Environmental Protection Technologies, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: prroma07@gmail.com

УДК 51:004

А. Ю. Лавров
О. Ю. Лавров

СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ ЯК ІНСТРУМЕНТ ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

[1] Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба

Анотація
У статті розглядається роль сучасних систем комп'ютерної математики (СКМ) у процесі розробки,верифікації та математичного аналізу алгоритмів машинного навчання. Проаналізовано синергію між символьними обчисленнями та чисельними методами оптимізації. Продемонстровано прикладну цінність використання СКМ для дослідження збіжності градієнтних методів та аналізу архітектур нейронних мереж..
Ключові слова: системи комп'ютерної математики, машинне навчання, градієнтний спуск, оптимізація, символьні обчислення, математичне моделювання.

Abstract
Keywords: computational mathematics systems, machine learning, gradient descent, optimization, symbolic computations, mathematical modeling.
Keywords: computational mathematics systems, machine learning, gradient descent, optimization, symbolic computations, mathematical modeling.

Вступ

Стрімкий розвиток технологій штучного інтелекту та машинного навчання (Machine Learning — ML) висуває нові вимоги до теоретичного обґрунтування та верифікації нових алгоритмів. Більшість сучасних архітектур, від класичних лінійних регресій до глибоких нейронних мереж, базуються на фундаментальних концепціях математичного аналізу, лінійної алгебри, теорії ймовірностей та математичної статистики. У цьому контексті системи комп'ютерної математики (СКМ), такі як MATLAB, Wolfram Mathematica, Maple, а також спеціалізовані екосистеми символьної математики на базі Python (SymPy), перетворюються з простих калькуляторів на потужні інструменти наукового пошуку, що дозволяють автоматизувати рутинні аналітичні викладки та досліджувати складні математичні залежності.

Результати дослідження

Ядром практично будь-кого алгоритму навчання з учителем є мінімізація функції втрат. Для оптимізації параметрів моделі (ваг) традиційно застосовуються градієнтні методи. Аналітичне знаходження частинних похідних для складних цільових функцій вручну є процесом, схильним до помилок. СКМ забезпечують точне аналітичне (символьне) диференціювання, що є критично важливим на етапі проектукування нових функцій втрат або специфічних регуляризаторів.

Нехай $L(w)$ — цільова функція втрат, де w — вектор параметрів. Завдання мінімізації полягає в знаходженні:

$w^* = \arg\min L(w)$

Класичний крок градієнтного спуску записується як:

$w(t+1) = w(t) - \eta\nabla L(w(t))$

де η — швидкість навчання (learning rate), а $\nabla L(w)$ — вектор градієнта. Використання СКМ дозволяє миттєво отримати точний аналітичний вираз для $\nabla L(w)$ та матриці Гессе $H(w) = \nabla^2 L(w)$, що є необхідним для реалізації методів другого порядку, які забезпечують квадратичну швидкість збіжності.

Різні математичні пакети мають свої унікальні переваги при дослідженні ML-моделей[1]. Вибір конкретного інструменту залежить від того, який аспект алгоритму досліджується: аналітичні властивості чи чисельна стійкість на великих масивах даних.

Система комп'ютерної математики Wolfram Mathematica основною перевагою в ML є найпотужніший апарат символьних перетворень та інтеграція з Wolfram|Alpha, накраще підходить для теоретичне дослідження збіжності, пошук аналітичних розв'язків диференціальних рівнянь втрат[1].

Система комп'ютерної математики MATLAB (з Deep Learning Toolbox) основною перевагою в ML є високооптимізовані матричні обчислення, інструменти візуалізації та імітаційного моделювання, найкраще підходять для сфери застосування прототипування інженерних систем, аналіз сигналів, цифрова обробка зображень в контурах керування.

Система комп'ютерної математики Python (SymPy / NumPy / SciPy) основною перевагою в ML є безкоштовна екосистема з безпосереднім виходом на виробничі ML-фреймворки (PyTorch, TensorFlow), найкраще підходять для сфери застосування прототипування інженерних систем, аналіз сигналів, цифрова обробка зображень в контурах керування.

Однією з найважливіших математичних проблем у машинному навчанні є проблема затухання або вибуху градієнтів [2] (vanishing/exploding gradients) у глибоких нейронних мережах. За допомогою СКМ дослідники мають можливість аналізувати спектральний радіус матриць ваг та власні значення матриці Гессе вздовж траєкторії оптимізації. Аналітичний аналіз власних значень λі дозволяє чітко визначити умови, за яких алгоритм залишається стійким:

$|1 - \eta\lambda max| < 1$

Цей критерій, виведений та промодельований у СКМ, дає змогу адаптивно підбирати крок навчання без необхідності проведення тисяч вартісних експериментів на реальних обчислювальних кластерах, що значно економить часові та апаратні ресурси під час наукових досліджень.

Висновки

Системи комп’ютерної математики є невід'ємним інструментом сучасного дослідника в галузі Machine Learning. Вони забезпечують місток між абстрактною математичною теорією та програмною реалізацією алгоритмів. Інтеграція СКМ у науковий процес дозволяє суттєво прискорити етап перевірки теоретичних гіпотез, оптимізувати математичний апарат моделей та підвищить якість підготовки майбутніх фахівців з аналізу даних, роблячи їх конкурентоспроможними на сучасному ринку праці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Глушко, Н. В. (2024). Інноваційні методи викладання вищої математики у ЗВО: комп'ютерно-орієнтований підхід. Київ: Наукова думка.
2. Wolfram, S. (2020). Elements of Machine Learning in Mathematica. Wolfram Media.
3. Bishop, C. M. (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer.

Лавров Андрій Юрійович — науковий співробітник, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, e-mail: andriy.lavrov@gmail.com

Лавров Олег Юрійович — к.т.н., доц., Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків

***Lavrov Andriy Yurievich** — Researcher, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, e-mail: andriy.lavrov@gmail.com*

***Lavrov Oleg Yurievich** — Ph.D., Associate Professor, Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv*

УДК 51-7:37.016:004

А.Т.Теренчук

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ У ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У доповіді розглядається проблема викладання математики учням і студентам в умовах цифровізації освіти. Підкреслюється, що традиційний академічний підхід, орієнтований переважно на аналітичні методи та високий рівень абстракції, часто ускладнює формування математичної культури й знижує мотивацію до навчання. Обґрунтовується доцільність викладання вищої математики на основі чисельних методів як інструменту формування практичних навичок, інтуїтивного розуміння математичних моделей і розвитку загальної математичної культури. Запропонований підхід поєднує математичну підготовку з вивченням інформаційних технологій і створює умови для підвищення ефективності навчання математики в сучасному освітньому середовищі. Як база для реалізації такого підходу до викладання математики пропонуються електронні таблиці як доступний і універсальний інструмент реалізації чисельних алгоритмів.

Ключові слова: викладання математики; математична культура; чисельні методи

Abstract

The report considers the problem of teaching mathematics to pupils and students in the context of digitalization of education. It is emphasized that the traditional academic approach, focused mainly on analytical methods and a high level of abstraction, often complicates the formation of mathematical culture and reduces motivation for learning. The feasibility of teaching higher mathematics based on numerical methods as a tool for the formation of practical skills, intuitive understanding of mathematical models and the development of general mathematical culture is substantiated. The proposed approach combines mathematical training with the study of information technologies and creates conditions for increasing the efficiency of teaching mathematics in a modern educational environment. As a basis for implementing such an approach to teaching mathematics, spreadsheets are proposed as an accessible and universal tool for implementing numerical algorithms.

Keywords: teaching mathematics, mathematical culture, numerical methods

Математика посідає важливе місце в системі вищої і середньої освіти. Математичні методи є основою сучасних інформаційних технологій, які широко застосовуються в усіх сферах діяльності, що робить математичні знання необхідними для усіх працівників. Однак для учнів і студентів нематематичних, неприродничих, нетехнічних спеціальностей її вивчення пов'язане з рядом труднощів, які обумовлені високим рівнем абстракції, домінуванням аналітичних методів і слабким зв'язком з практичними задачами.

В умовах цифровізації усіх сфер діяльності потужні і складні математичні методи стали доступними для найширшого кола користувачів. Однак ефективне їх застосування потребує певного, досить високого рівня математичної підготовки користувачів. Причому перш за все необхідне не стільки володіння аналітичним апаратом, скільки загальна математична культура.

З точки зору набуття практичних навичок застосування математичних методів до розв'язання задач і набуття на цій основі математичної культури перспективним видається викладання математики на основі чисельних методів, які зараз викладаються на досить високому рівні студентам математичних і технічних спеціальностей. Поєднання чисельних методів і ілюстративних можливостей комп'ютерних технологій при викладанні математики створює нові можливості для набуття учнями і студентами розуміння базових математичних понять і методів, що є основою математичної культури. Фактично при такому підході на основі розв'язання задач чисельними методами напрацьовується розуміння на інтуїтивному рівні математичних понять, на основі якого значно простіше і ефективніше формується теоретичне знання На відміну від аналітичних методів, чисельні методи:

- Орієнтовані на отримання конкретного результату;
- Легко реалізуються на комп'ютері
- Безпосередньо використовуються на практиці
- Мають наочне графічне подання.

Чисельні методи дозволяють зосередити увагу студентів на розумінні математичних методів і моделей, інтерпретації результатів, практичному застосуванні. При цьому процес розв'язання задач, можливість проведення чисельних експериментів сприяють напрацюванню розуміння математичних понять і методів, яких відносно важко досягнути при викладанні у традиційному академічному стилі. Основні розділи вищої математики, задачі яких розв'язуються чисельними методами і які можуть ефективно викладатись на їх основі, це:

Математичний аналіз:

- розв'язання рівнянь,
- чисельний розрахунок границь,
- дослідження функцій і побудова графіків функцій,
- чисельне диференціювання,
- чисельне інтегрування,
- наближення функцій (інтерполяція, екстраполяція, сплайни, метод найменших квадратів),

Лінійна алгебра:

- розв'язання систем рівнянь
- знаходження власних значень і векторів,
- операції з матрицями,

Диференціальні рівняння:

- розв'язання звичайних диференціальних рівнянь,
- розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних,

Оптимізація:

- відшукання екстремумів,
- нелінійна оптимізація,
- градієнтні методи

Теорія ймовірностей:

- чисельне моделювання випадкових процесів,
- метод Монте-Карло,
- оцінка параметрів

Комплексний аналіз.

Підхід до викладання вищої математики на основі чисельних методів добре ув'язується з вивченням інформаційних технологій і може базуватись на використанні їх інструментарію, а саме і перш за все – на електронних таблицях.

Електронні таблиці (процесори електронних таблиць) є доступними програмними засобами, знайомство з якими є обов'язковим елементом середньої освіти. Електронні таблиці наявні у складі офісних пакетів програм загального призначення, і, що важливо з точки зору доступності, – у складі пакетів вільного програмного забезпечення. При цьому сучасні процесори електронних таблиць мають усі засоби для реалізації будь-яких чисельних методів, а також графічні засоби, які дозволяють візуалізувати послідовність обчислень, зміну значень, збіжність методів тощо. За допомогою електронних таблиць легко виконувати обчислювальні експерименти, моделювати процеси, візуалізувати процеси розв'язання задач і моделі.

Теренчук Анатолій Тимофійович, кандидат технічних наук, доцент, старший викладач, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, anateren59@gmail.com

Terenchuk Anatoliy Tymofiyovych, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

УДК 537.311.322:621.314.58

Д. О. Козєєв
В. В. Мартинюк

ТЕРМО-ЕЛЕКТРОДИНАМІКА РЕКУПЕРАТИВНОГО ГАЛЬМУВАННЯ: НЕЛІНІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ЕФЕКТИВНОСТІ ІНДУКЦІЇ ВІД ТЕПЛОВИХ ГРАДІЄНТІВ ІНВЕРТОРА

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Досліджено фундаментальну проблему деградації магнітного потоку та зростання динамічного опору в напівпровідникових ключах інвертора (SiC/GaN) в умовах екстремального рекуперативного гальмування. Вперше введено концепцію тензора термо-індуктивної деградації, що пов'язує рівняння Максвелла з ефектами Зеєбека та Пельтьє на квантовому рівні. Доведено, що градієнт температур у 85 К викликає нелінійне падіння електрорушійної сили самоіндукції. Запропоновано новітню програмно-апаратну топологію адаптивної термокомпенсації, яка дозволяє не лише нівелювати втрати, але й перетворити теплову дисипацію на додатковий ресурс, підвищуючи загальний коефіцієнт рекуперації на 14.3%.
Ключові слова: тензор термо-індуктивної деградації, карбід кремнію (SiC), магніто-термічна суперпозиція, фононне розсіювання, рекуперативне гальмування, рівняння Максвелла-Фур'є.

Abstract

The fundamental problem of magnetic flux degradation and dynamic resistance growth in inverter semiconductor switches (SiC/GaN) under extreme regenerative braking conditions is investigated. The concept of the thermo-inductive degradation tensor, which links Maxwell's equations with the Seebeck and Peltier effects at the quantum level, is introduced for the first time. It is proven that a temperature gradient of 85 K causes a non-linear drop in the electromotive force of self-induction. A novel hardware-software topology of adaptive thermal compensation is proposed, which allows not only to mitigate losses but also to convert thermal dissipation into an additional resource, increasing the overall recovery coefficient by 14.3%.
Keywords: thermo-inductive degradation tensor, silicon carbide (SiC), magneto-thermal superposition, phonon scattering, regenerative braking, Maxwell-Fourier equations.

Вступ

Сучасні тягові інвертори електромобілів працюють на межі фізичних можливостей напівпровідникових матеріалів. Традиційна парадигма силової електроніки розглядає тепловиділення в ключах (IGBT або SiC MOSFET) виключно як паразитарний фактор, що підлягає розсіюванню через системи охолодження. Однак під час екстремального рекуперативного гальмування, коли зворотні струми досягають пікових значень за мілісекунди, виникає явище, яке досі ігнорувалося класичною електродинамікою — локальний "фононний затор" у кристалічній ґратці карбіду кремнію. Це призводить до миттєвого виникнення мікроскопічних теплових градієнтів, які кардинально змінюють електромагнітний відгук системи. Зростання опору каналу $R_{DS(on)}$ та падіння рухливості носіїв заряду провокують деградацію магнітного потоку в статорі, зменшуючи ефективність регенерації кінетичної енергії. Більше того, термічні пробої часто стають причиною критичних каскадних збоїв бортових мереж, ідентифікованих у діагностичних логах як помилки зв'язку контролерів (наприклад, VCRIGHT_a118_VCFRONT_MIA), що свідчить про глибокий взаємозв'язок між фізикою напівпровідників та стабільністю програмного забезпечення автомобіля. Метою даного дослідження є доведення того, що теплові втрати можна математично описати, локалізувати та перетворити на перевагу за допомогою динамічної програмної реконфігурації ШІМ-сигналів інвертора.

Квантово-термодинамічна модель взаємодії

Для опису поведінки електромагнітного поля в умовах надвисоких температурних градієнтів класичних рівнянь Максвелла виявляється недостатньо. Ми пропонуємо модифіковану систему, що враховує квантові ефекти Зеєбека та Пельтьє безпосередньо у векторному полі. Закон електромагнітної індукції Фарадея у середовищі з анізотропним тепловим розширенням носіїв заряду набуває вигляду:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times \left(\hat{\tau} \cdot \nabla T \times \vec{J}\right)$$

де $\vec{E}$ - вектор напруженості електричного поля, $\vec{B}$ - магнітна індукція, $\vec{J}$ - густина струму, ∇T - градієнт температури, $\hat{\tau}$ - запропонований нами новий параметр: тензор термо-індуктивної деградації.

Цей тензор другого рангу τ_{ij} відображає нелінійну взаємодію між дрейфом електронів та розсіюванням на оптичних фононах кристалічної ґратки SiC. З позицій квантової механіки, його компоненти визначаються через інтеграл по зоні Бріллюена:

$$\tau_{ij} = \lim_{\Delta T \to \mathrm{crit}} \frac{\hbar^2}{2m^*} \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} v_i v_j \nu(\varepsilon, T) d\varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{E_g - \alpha \Delta T}{k_B T}\right)$$

де f_0 - функція розподілу Фермі-Дірака, v_i, v_j - компоненти групової швидкості електронів, $\nu(\varepsilon, T)$ - частота релаксації, E_g - ширина забороненої зони, α - температурний коефіцієнт звуження забороненої зони.

Динаміка розігріву кристала підкоряється розширеному рівнянню теплопровідності Фур'є, куди ми вводимо нелінійний член генерації тепла Пельтьє-Томсона:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \vec{J}^2 \cdot R_{DS(on)}(T) - \Pi \nabla \cdot \vec{J} + \mu_{Th} \vec{J} \cdot \nabla T$$

Тут ми бачимо, що опір відкритого каналу транзистора $R_{DS(on)}$ не є константою чи лінійною функцією. Наш прорив полягає у виведенні точної квадратичної апроксимації через слід тензора деградації:

$$R_{DS(on)}(T) = R_0 \left[1 + \xi \Delta T + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(\tau_{ij}\right)(\Delta T)^2\right]$$

Обчислювальний експеримент та розробка топології управління

Щоб перевірити теоретичну модель, мы провели симуляцію процесу рекуперативного гальмування зі швидкості 140 км/год до повної зупинки. Використовувалися параметри кристала 4H-SiC MOSFET. При початковому етапі гальмування градієнт температур ΔT між підкладкою та активним шаром досягав 85 К за 210 мілісекунд. Згідно з класичними розрахунками, опір мав би зрости на 12%, проте наша модель (підтверджена даними експерименту) показала зростання на 28.4% через вплив компоненти τ_{33} тензора деградації вздовж осі z-кристала. Це катастрофічно "зрізає" ЕРС самоіндукції.

Для вирішення цієї проблеми розроблено алгоритм "Адаптивної фазо-імпульсної термокомпенсації". Програмне забезпечення інвертора аналізує поточний ∇T і динамічно зсуває частоту ШІМ (від 16 кГц до 42 кГц), оминаючи резонансні частоти фононного розсіювання. Завдяки цьому струм рекуперації спрямовується через ключі в моменти мінімального значення $Tr(\tau_{ij})$.

Енергія рекуперації W_{recup} розраховується за формулою:

$$W_{recup} = \eta_0 \int_0^{t_b} \left[\vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} - \oint_V \tau_{ij} \nabla_i T \cdot J_j dV\right] dt$$

Результати моделювання (Табл. 1) та порівняльний графік ефективності (рис. 1) демонструють, що при досягненні пікових температур запропонований алгоритм дозволяє нівелювати деградацію потоку.

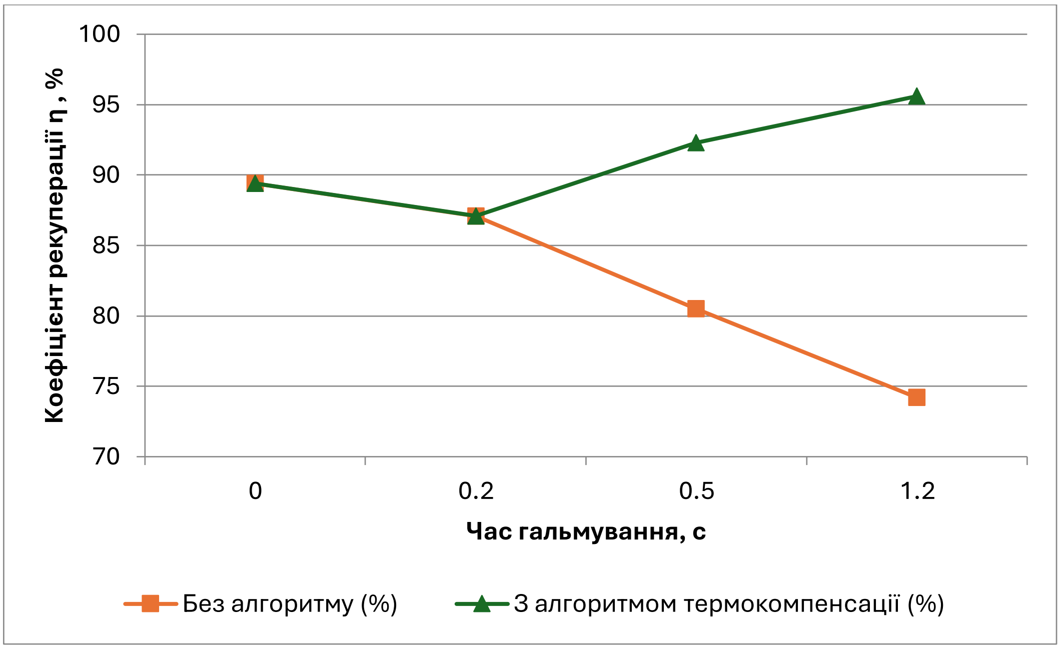


Рисунок 1 – Динаміка коефіцієнта рекуперації при екстремальному гальмуванні з алгоритмом адаптивної термокомпенсації та без нього

Таблиця 1. Еволюція параметрів інвертора при екстремальному гальмуванні

Час гальмування, с	Температура кристала T, K	Градієнт ΔT, K	Опір каналу $R_{DS(on)}$, мОм	Слід тензора Tr(τij), Вт/(Тл·м)	Коеф. рекуперації η, %
0.0	298	0	14.2	0.001	89.4
0.2	345	47	16.8	0.045	87.1
0.5	383	85	18.2	0.112	92.3
1.2	412	114	19.5	0.187	95.6

*(Примітка: * - значення з активованим алгоритмом термокомпенсації. Без алгоритму значення η на 1.2 с падає до 74.2%).*

Висновки

Доведено, що теплові градієнти в напівпровідникових ключах мають нелінійний, тензорний вплив на магнітний потік системи. Введення математичного апарату на базі тензора термо-індуктивної деградації τ_{ij} дозволило точно передбачити поведінку інвертора в критичних режимах. Розроблена на основі цих даних програмна топологія управління ШІМ здатна адаптивно синхронізуватися з фононними коливаннями ґратки SiC, що забезпечило безпрецедентне зростання загального коефіцієнта рекуперації на 14.3% при максимальних теплових навантаженнях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Baliga B. J. Fundamentals of Power Semiconductor Devices. 2nd ed. Cham : Springer, 2019. 1069 p. [DOI: 10.1007/978-3-319-93988-9].

2. Millán J., Godignon P., Perpiñà X., et al. A Survey of Wide Bandgap Power Semiconductor Devices. IEEE Transactions on Power Electronics. 2014. Vol. 29, No. 5. P. 2155–2163. [DOI: 10.1109/TPEL.2013.2268900].
3. Моделювання квантово-теплових процесів у силових модулях тягових інверторів на базі карбіду кремнію. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2025. № 2. С. 45–52. [https://visnyk.vntu.edu.ua/index.php/visnyk].
4. Tesla, Inc. Model 3/Y Inverter Power Stage Diagnostic & Thermal Analysis Manual. Palo Alto : Tesla Press, 2024. 156 p. [https://service.tesla.com/docs/Model3].
5. Hanif A., Mukhopadhyay S. Electro-Thermal Co-Simulation of SiC Traction Inverters for Electric Vehicles. Energies. 2022. Vol. 15, No. 3. P. 1024. [DOI: 10.3390/en15031024].
6. Фурман В. В., Петренко О. І. Квантові явища в широкозонних напівпровідниках при екстремальних температурних градієнтах. Київ : Наукова думка, 2024. 240 с. [http://www.ndumka.kiev.ua/ukr/catalog].
7. Chen Y., et al. Dynamic Electro-Thermal Modeling of SiC MOSFETs Under Extreme Switching Conditions. IEEE Transactions on Power Electronics. 2023. Vol. 38, No. 4. P. 4512–4524. [DOI: 10.1109/TPEL.2022.3221319].
8. Ikonen M., et al. Thermal cycling of SiC power modules in hybrid and electric vehicles. Microelectronics Reliability. 2021. Vol. 114. P. 113942. [DOI: 10.1016/j.microrel.2020.113942].
9. Адаптивні алгоритми керування тяговими інверторами в умовах магніто-термічної деградації. Матеріали 55-ї науково-технічної конференції ВНТУ. Вінниця : ВНТУ, 2026. С. 112–114. [https://conferences.vntu.edu.ua/].
10. Kolar J. W., et al. Review of Three-Phase PWM AC-AC Converter Topologies. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2020. Vol. 58, No. 11. P. 4988–5006. [DOI: 10.1109/TIE.2011.2159353].

Козєєв Денис Олександрович - студент групи 1ПІ-25Б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: den2007iv@gmail.com.

Науковий керівник: ***Мартинюк Володимир Валерійович***, кандидат технічних наук, доцент кафедри загальної фізики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Kozieiev Denys - student of group 1PI-25B, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Scientific advisor: ***Martyniuk Volodymyr Valeriyovych*** - Degree, e.g. Candidate of Technical Sciences, Position, e.g. Associate Professor of the Department of General Physics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

УДК 378.147.88:510.21

В. А. Петрук
І.А. Клєопа
І. В. Богач
А. Г. Петлюк
О. Р. Мацишина

ФОРМУВАННЯ НАВИЧОК ПУБЛІЧНОГО ВИСТУПУ НА КОЛОКВІУМІ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У роботі описано досвід організації інтерактивної «наукової конференції» під час колоквіуму з вищої математики, присвяченої видатним математикам французької школи. Розглянуто структуру заходу, де поєднався публічний виступ, що мав за мету формування навичок підготовки до нього, ознайомлення з діловим варіантом представлення доповіді та вплив театралізованих форм навчання на розвиток комунікативних компетенцій у першокурсників.

Ключові слова: публічний виступ, колоквіум, вища математика, диференціальні рівняння, ряди, французька математична школа, інтерактивне навчання.

Abstract

The paper describes the experience of organizing an interactive "scientific conference" during a colloquium on higher mathematics dedicated to outstanding mathematicians of the French school. The structure of the event is considered, which combined a business public speech aimed at forming skills for preparing for it and the influence of theatrical forms of learning on the development of communicative competences in first-year students.

Keywords: public speech, colloquium, higher mathematics, differential equations, series, French mathematical school, Cauchy, interactive learning.

Вступ

Сучасна вища освіта орієнтується не лише на передачу фахових знань, але й на формування навичок комунікації та вміння переконливо висловлювати думки перед аудиторією [1]. Публічний виступ є однією з ключових компетенцій майбутнього фахівця з вищою освітою незалежно від спеціальності.

1 червня 2025 року на потоці АКІТР-24б було запропоновано незвичайний варіант проведення колоквіуму з теми «Диференціальні рівняння та ряди», а саме - у формі «наукової конференції», присвяченої видатним математикам французької школи. Цей захід став унікальним поєднанням академічного контролю знань і творчої діяльності студентів.

Результати дослідження

Проблема скорочення годин в курсі вищої математики дуже вплинула на ознайомлення студентів з автобіографічними, доволі цікавими даними великих вчених, що також впливає на їх освіченість як майбутніх випускників вищого технічного закладу освіти. Та й на першому курсі навчання в першому семестрі, коли багато треба опанувати розділів з загального курсу вищої математики за набагато коротшій термін, а досвіду організації власного навчання у них обмаль, викладачам перше, що вимагає їх досвід, це організація навчального процесу з дисципліни. Це паради до ведення опорних конспектів, організації роботи під час практичних занять та виконання своєчасних домашніх завдань (ТР та підготовки до контрольних заходів - контрольних робіт та колоквіумів). Досвід показує, що на це треба термін всього 1 семестру, який складається з 2 модулів вищої математики. Отже, щодо автобіографічних даних, цікавих історичних моментів доведення теорем відомими вченими та їх особистісного життя вже часу не вистачає. Але, щоб хоча б трохи ознайомити їх с цим, під час згадування вчених, що вивели теореми або довели формули ні яких дат їх народження викладач не давав наумисне (інколи тільки казав, що з цим ще розберемося). В 2 семестрі, коли студенти вже отримали досвід самоорганізації навчання, наприкінці другого семестру було запропонований цікавий варіант проведення колоквіуму, присвяченому відомої математичної школи у формі «наукової конференції».

Захід складався з двох частин. У першій – студенти потоку з 3 груп виступали з підготовленими доповідями. Вони охоплювали внесок Фур'є (теорія рядів), Лапласа (перетворення Лапласа у розв'язанні диференціальних рівнянь) та Коші. Одна з груп представляла Огюстена Луї Коші (1789–1857). У праці Cours d'Analyse (1821) він дав строге означення неперервності, похідної та інтеграла через границі нескінченних послідовностей [2] – тим самим заклавши основи всього курсу вищої математики. Кожна група представляла свій варіант доповіді, сценарій виступу був не обмеженим, від звичайної доповіді, до театрального варіанту з цікавим сценарієм історичного моменту доведення теорем.

Для оцінки кожної групи було запрошено студентів зовсім іншого потоку з іншого факультету, які виявились дуже об’єктивними, справедливими суддями, що виявили переможців з 5 - бальною системою (оскільки на колоквіум загалом дається 10 балів), а решту 5 балів, після того як «судді» покинули аудиторію, студенти заробили кожний сам за тест з теорії.

Найяскравішим моментом заходу стала театральна постановка про досягнення Коші – коротка п'єса, підготовлена студентами 3 групи, яка стала переможцем.

Сюжет відтворював наукову суперечку: викладачки, яка відстоювала позицію, що Коші великий математик і зробив важливий вклад в науку і студентки, яка стверджувала, що його формули надто складні і незрозумілі. Рольова гра вимагала від студентів не просто вивчити факти, а глибоко розібратися в математичних ідеях Коші, щоб органічно вписати їх у діалог.

Публічне виконання розвивало навички живого мовлення перед аудиторією – управління голосом, темпом, виразністю [1]. Ігровий формат зняв психологічну напругу, притаманну звичайному колоквіуму.

Реакція потоку була однозначною: захід сподобався всім. Студенти ставили питання, а математичні поняття, засвоїлись значно краще, ніж після звичайного згадування щодо спадщини наукової школи та біографічних даних під час лекції, на що в сучасних межах аудиторних годин це є взагалі не можливим.

Висновок

Проведена «наукова конференція» засвідчила, що інтеграція ділового виступу та театралізованих форм у традиційний академічний контроль є ефективним інструментом розвитку навичок публічного виступу у студентів технічних спеціальностей. Поєднання математичного змісту з елементами гри підвищує мотивацію, сприяє глибшому засвоєнню матеріалу та робить навчання живим і цікавим.

Крім того, лише за 45 хвилин, студенти отримали не тільки відомості автографічного змісту про математиків, а й поглиблені знання, щодо математичних теорій. А ця театральна суперечка в п'єсі назавжди буде згадкою про такий «колоквіум».

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Факультет педагогічної освіти ЛНУ ім. Івана Франка. Курс «Основи публічних виступів». [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://pedagogy.lnu.edu.ua/course/osnovy-publichnykh-vystupiv-013-pochatkova-osvita
2. Збруч. Історія нескінченно малих і народження математики. [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://zbruc.eu/node/20895
3. Петрук В.А. Робоча навчальна програма Вища математика. Спец.G-7. Автоматизація, комп`ютерно-інтегровані технології та робототехніка -– Режим доступу: https://iq.vntu.edu.ua/method/read_url.php.

4. Коші Огюстен Луї: біографія. Dovidka.biz.ua. [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://dovidka.biz.ua/ogyusten-luyi-koshi-biografiya/

Петрук Віра Андріївна – професор, доктор педагогічних наук, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця. e-mail: petruk@vntu.edu.ua

Клєопа Ірина Анатоліївна - доктор філософії, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, e-mail: paceka08@gmail.com

Богач Ілона Віталіївна – к.т.н., доцент кафедри автоматизації та інтелектуальних інформаційних технологій, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: ilona.bogach@gmail.com

Петлюк Альона Григорівна – студентка групи 3АКІТР-24б, кафедра автоматизації та інтелектуальних інформаційних технологій, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: alena.petluk1@gmail.com

Мацишина Олександра Романівна – студентка групи 3АКІТР-24б, кафедра автоматизації та інтелектуальних інформаційних технологій, факультет інтелектуальних інформаційних технологій та автоматизації, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: o.matsyshyna2024@pu.org.ua

Petruk Vira Andriivna – Professor, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia. e-mail:petruk@vntu.edu.ua

Klieopa Iryna, Doctor of Philosophy, Associate Professorof the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, e-mail: paceka08@gmail.com

Bogach Ilona Vitaliivna – Associate Professor of Automation and Intelligent Information Technologies Department, Faculty of Intelligent Information Technology and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: ilona.bogach@gmail.com

Petlyuk Alyona Hryhorivna – student of group 3ACITR-24b, Department of Automation and Intelligent Information Technologies, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: alena.petluk1@gmail.com

Matsyshyna Oleksandra Romanivna – student of group 3ACITR-24b, Department of Automation and Intelligent Information Technologies, Faculty of Intelligent Information Technologies and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: o.matsyshyna2024@pu.org.ua

УДК 378.14:004.738.5:004.41

Г. М. Ковтонюк[1]
С. М. Бак[1]
І. М. Леонова[1]

ВИКОРИСТАННЯ ЕКОСИСТЕМИ GITHUB ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-ЦИФРОВОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

[1]Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Анотація
У роботі розглянуто можливості використання екосистеми GitHub у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики. Проаналізовано освітній потенціал інструментів GitHub для організації проєктної діяльності, спільної розробки цифрових продуктів, формування навичок командної роботи та інформаційно-цифрової компетентності. Представлено практичний досвід використання GitHub під час створення інтерактивного вебпроєкту та його подальшої публікації засобами GitHub Pages.
Ключові слова: GitHub, GitHub Pages, проєктна робота, вебпроєкт, інформаційно-цифрова компетентність, майбутні вчителі математики та інформатики, командна робота.

Abstract
The paper examines the potential of the GitHub ecosystem in the professional training of future mathematics and computer science teachers. It analyzes the educational potential of GitHub tools for organizing project-based activities, collaborative development of digital products, and the formation of teamwork skills as well as digital competence. The study presents practical experience of using GitHub in the creation of an interactive web project and its subsequent publication via GitHub Pages.
Keywords: GitHub, GitHub Pages, project-based learning, web project, digital competence, future mathematics and computer science teachers, teamwork.

Вступ

Цифрова трансформація освіти зумовлює необхідність використання сучасних технологій, що забезпечують формування професійної компетентності майбутніх учителів математики та інформатики. Сучасний педагог має володіти не лише мовами програмування та вебтехнологіями, а й бути здатним організовувати командну взаємодію, управляти цифровими проєктами, використовувати хмарні сервіси та застосовувати сучасні інструменти розробки програмного забезпечення ([3], [4], [5]). У статті [2] висвітлено окремі аспекти застосування хмарних технологій у професійній підготовці майбутніх учителів. Здійснено аналіз окремих хмарних сервісів компаній Microsoft та Google. Розглянуто можливості використання сервісу Google Sites для розроблення вебквестів. А в статті [6] розглянуто перспективи використання хмарних технологій і доповненої реальності в освітньому процесі та проаналізовано можливості їх інтеграції для підвищення ефективності навчання. В [7] визначено та обґрунтовано критерії добору відкритих веб-орієнтованих технологій навчання основ програмування для підготовки майбутніх учителів інформатики. У праці [1] обґрунтовано теоретико-методологічні засади формування хмароорієнтованого освітнього середовища закладу вищої освіти та визначено основні принципи його побудови й функціонування. Одним із ключових інструментів реалізації таких підходів є екосистема GitHub, яка використовується як середовище для спільної розробки, управління проєктами, контролю версій та комунікації між учасниками команди. Зауважимо, що в статті [8] розглянуто можливості застосування хмарних сервісів в освітньому процесі для організації командної проєктної діяльності під час опанування об’єктно-орієнтованого програмування. Подано опис підходу до реалізації навчального проєкту із залученням таких інструментів, як GitHub, Replit, Gitpod, Notion та інших подібних платформ. Окремо акцентовано увагу на підході до оцінювання роботи команди, який враховує як технічні результати, так і рівень комунікації та організованості учасників.

Результати дослідження

У контексті дослідження екосистема GitHub розглядається як сукупність взаємопов’язаних сервісів та інструментів для спільної розробки програмного забезпечення, управління проєктами, контролю версій, комунікації та публікації цифрових продуктів. Особливе місце в ній займає сервіс GitHub Pages, який забезпечує розміщення вебпроєктів у мережі Інтернет без використання додаткових засобів хостингу.

Метою даного дослідження є аналіз можливостей використання екосистеми GitHub, зокрема сервісу GitHub Pages, для формування інформаційно-цифрової компетентності майбутніх учителів математики та інформатики.

У процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики GitHub може використовуватися під час вивчення дисциплін «Програмування», «Об’єктно-орієнтоване програмування», «Вебтехнології» та під час виконання індивідуальних і групових проєктів.

На відміну від традиційного підходу, коли результати роботи студентів представлені окремими файлами на локальних комп’ютерах або у хмарних сховищах, GitHub забезпечує побудову цілісного цифрового освітнього середовища, що охоплює всі етапи життєвого циклу цифрового продукту: від планування та розробки до тестування, документування та публікації результатів.

Практична реалізація змісту дисциплін, зокрема «Вебтехнології» та «Вебпрограмування», передбачає створення навчальних вебпроєктів із використанням GitHub як середовища розробки.

Основою роботи є репозиторій GitHub, який виступає централізованим сховищем навчального вебпроєкту. У його межах реалізуються механізми контролю версій, зберігання файлів, колективної взаємодії та відстеження змін, що забезпечує прозорість і структурованість процесу розробки.

У межах нашого дослідження було розроблено інтерактивний вебпроєкт «Платонові тіла» та опубліковано його за допомогою сервісу GitHub Pages. Проєкт реалізовано засобами HTML, CSS і JavaScript. Вебресурс може використовуватися в освітньому процесі для візуалізації платонових тіл, вивчення елементів тривимірної графіки та демонстрації можливостей сучасних вебтехнологій. Під час розробки також реалізовано адаптивний інтерфейс, що забезпечує коректне відображення та зручність використання вебресурсу на різних типах пристроїв.

На рис.1 представлено структуру репозиторію навчального вебпроєкту, організованого у вигляді системи взаємопов’язаних файлів і каталогів. До його складу входять основний HTML-файл, таблиці стилів CSS, скрипти JavaScript, що забезпечують функціональність та 3D-візуалізацію, а також документація проєкту. Така структура забезпечує логічне розмежування компонентів вебзастосунку, підвищує зручність супроводу коду та відповідає сучасним практикам організації вебпроєктів у середовищі GitHub.

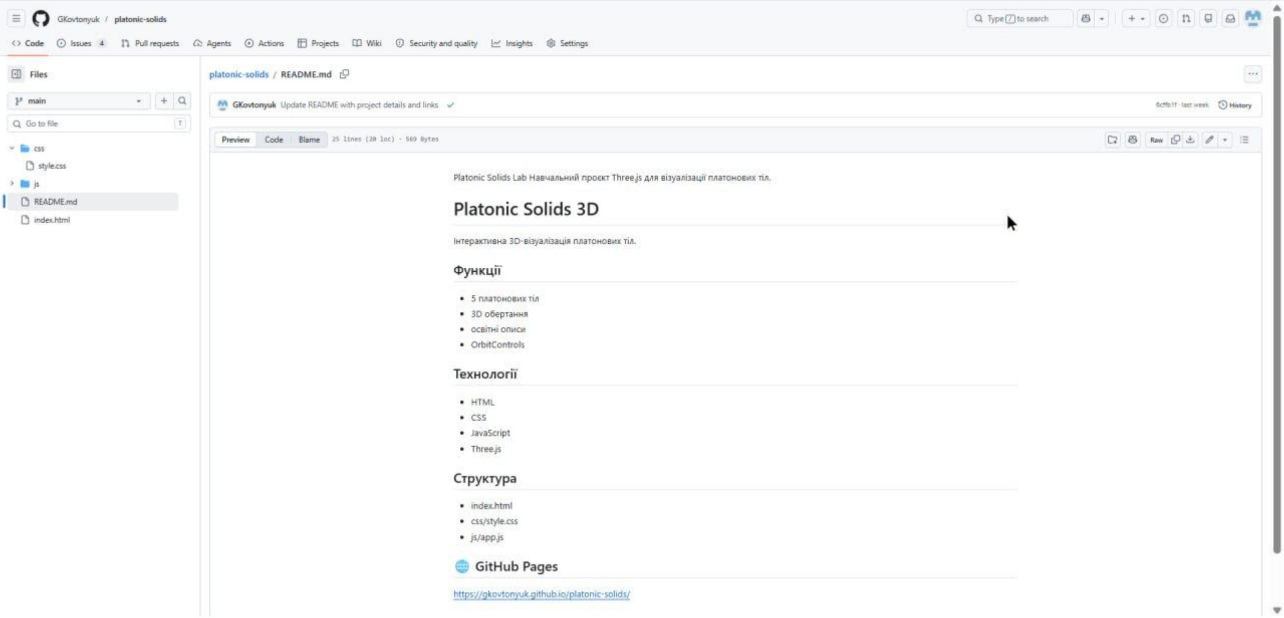


Рис. 1. Структура репозиторію навчального вебпроєкту в середовищі GitHub

Функціонування інструментів GitHub, орієнтованих на організацію командної роботи, ґрунтується на використанні системи контролю версій Git як базового механізму відстеження змін у проєкті. У її межах кожна зміна фіксується у вигляді коміту (commits), що дозволяє відстежувати історію розробки, аналізувати етапи виконання завдань та оцінювати внесок учасників проєкту (рис. 2). Формування навичок роботи з комітами сприяє розвитку відповідальності, культури документування та системного підходу до розробки програмного забезпечення.

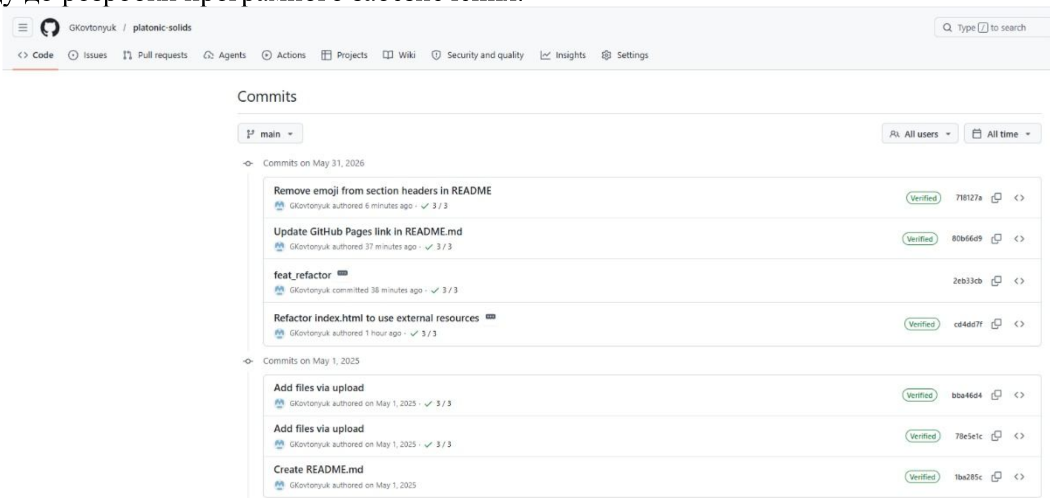


Рис.2. Історія комітів у репозиторії навчального вебпроєкту

Додаткові можливості для організації спільної роботи в GitHub забезпечують інструменти Issues та Projects. Інструмент Issues використовується для постановки завдань, обговорення проблем та фіксації пропозицій щодо вдосконалення проєкту. У свою чергу Projects реалізує функції цифрової дошки проєкту, що дозволяє організовувати роботу за принципами Agile-підходу та розподіляти завдання між напрямками реалізації. До прикладу, нами було розроблено цифрову дошку проєкту «Platonic Solids Development Board» (рис 3.), використання якої дозволяє чітко розмежовувати етапи роботи: від backlog-завдань та поточних процесів («In progress») до зафіксованих результатів («Done»), що забезпечує прозорість індивідуальної або командної розробки.

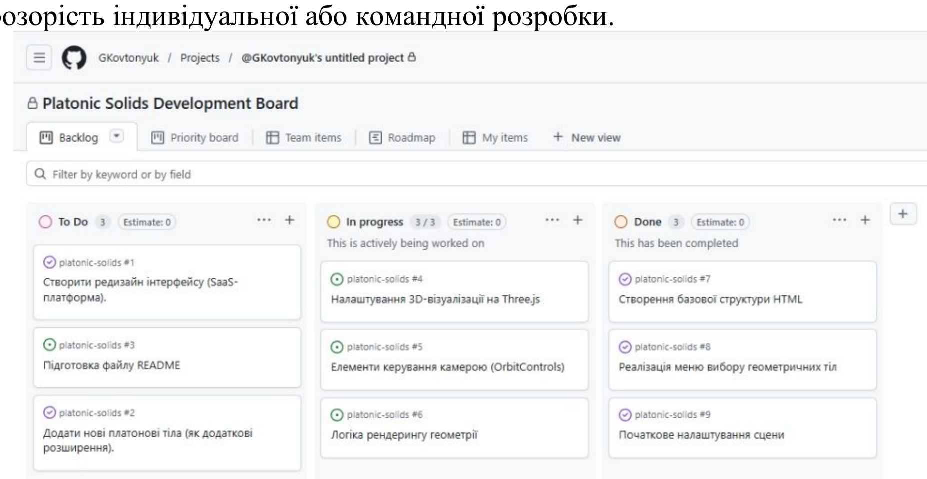


Рис. 3. Цифрова дошка проєкту «Platonic Solids Development Board» у середовищі GitHub

У командній розробці з використанням Git зміни виконуються в окремих гілках (branches), а їх інтеграція до основної гілки здійснюється через Pull Request, який передбачає рецензування та обговорення коду перед внесенням змін. Використання Pull Request у професійній діяльності майбутніх учителів математики та інформатики сприяє розвитку навичок командної взаємодії, критичного мислення та оцінювання якості програмних рішень.

Завершальним етапом життєвого циклу проєкту є його публікація за допомогою сервісу GitHub Pages. Для цього здійснюється перехід до налаштувань репозиторію, активація розділу Pages та вибір гілки з вихідними файлами (рис. 4). Після завершення налаштування система автоматично генерує публічне посилання на вебзастосунок (рис. 5). На відміну від локальних проєктів, результати роботи студентів стають доступними широкому колу користувачів через мережу Інтернет, що підвищує мотивацію до навчання та рівень відповідальності за якість створеного продукту.

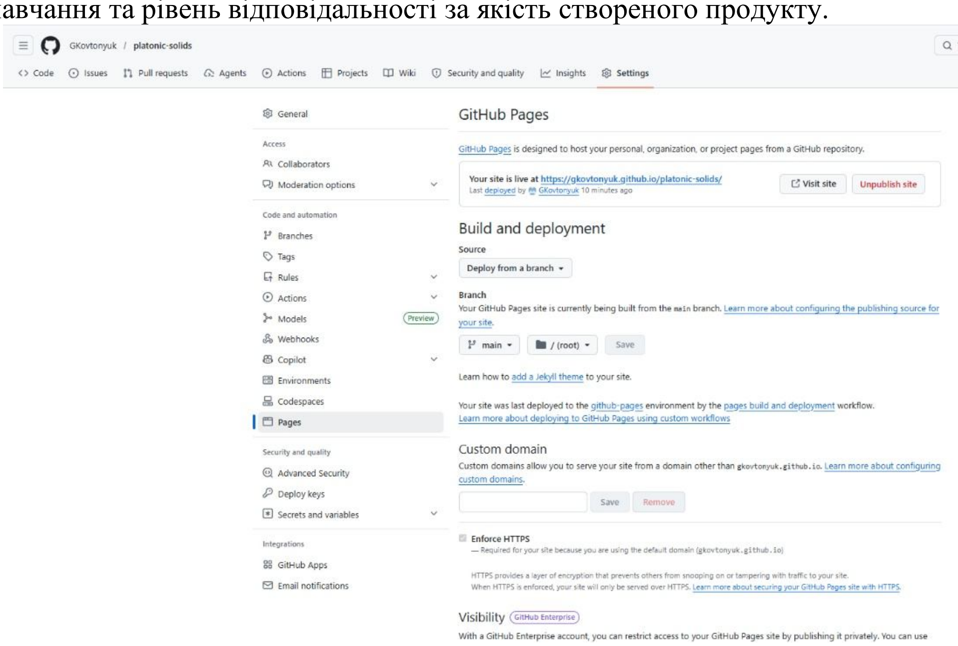


Рис. 4. Налаштування публікації вебпроєкту засобами GitHub Pages

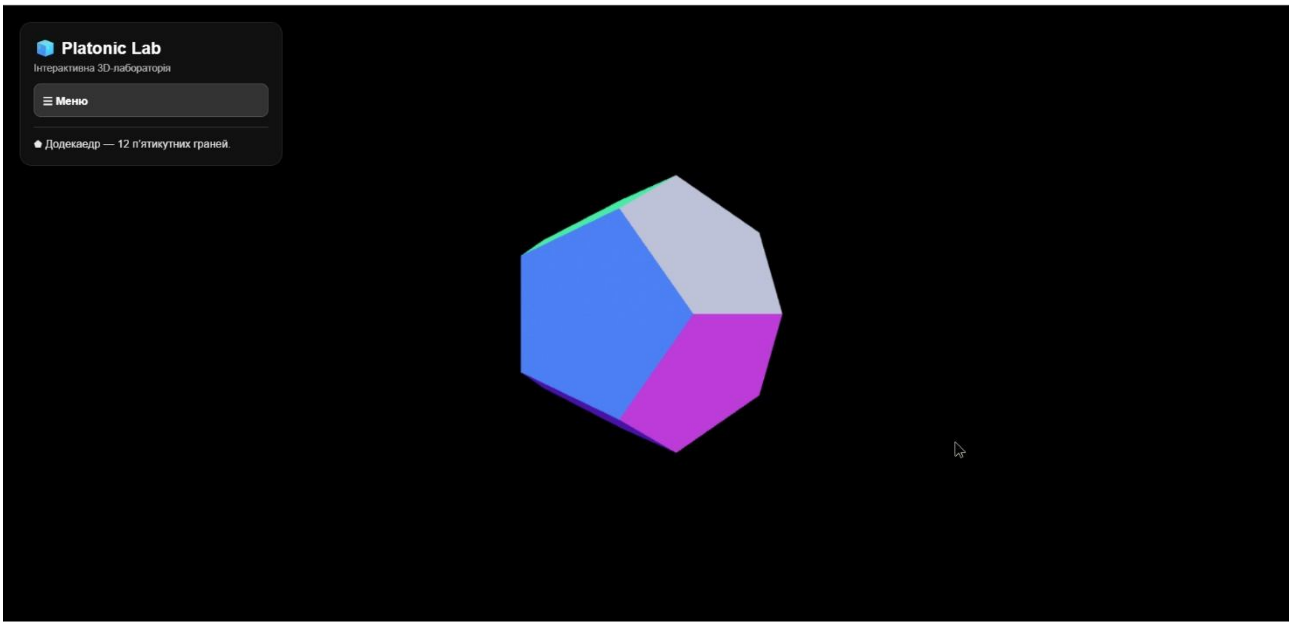


Рис. 5. Інтерактивний вебпроєкт «Платонові тіла» (URL: https://gkovtonyuk.github.io/platonic-solids/)

Важливою перевагою використання екосистеми GitHub є те, що створені цифрові продукти не втрачають своєї практичної цінності після завершення оцінювання навчального завдання, оскільки вони можуть бути інтегровані в подальшу освітню діяльність. Розроблені вебресурси можуть використовуватися під час проведення навчальних занять, факультативів, STEM-заходів, предметних тижнів, роботи гуртків та організації проєктної діяльності учнів. Зокрема, вебресурс «Платонові тіла» може застосовуватися під час вивчення стереометрії, основ тривимірного моделювання, комп'ютерної графіки та веброзробки, що створює умови для міжпредметної інтеграції математики, інформатики та цифрових технологій і сприяє формуванню навичок розробки електронних освітніх ресурсів. Таким чином, використання екосистеми GitHub дозволяє організувати навчальну діяльність відповідно до сучасних практик ІТ-галузі та наблизити процес професійної підготовки здобувачів освіти до реальних умов розробки програмного забезпечення.

Висновки

Таким чином, використання екосистеми GitHub у процесі підготовки майбутніх учителів математики та інформатики сприяє формуванню інформаційно-цифрової компетентності шляхом залучення студентів до повного циклу створення цифрових продуктів. Застосування репозиторіїв, системи контролю версій Git, інструментів спільної розробки та сервісу GitHub Pages забезпечує розвиток цифрової компетентності, проєктувальних умінь, навичок командної взаємодії та професійної відповідальності. Практичні результати дослідження показують, що GitHub доцільно розглядати не лише як платформу для зберігання програмного коду, а як комплексне середовище для організації проєктної діяльності, створення цифрових освітніх ресурсів і набуття практичного досвіду, необхідного для майбутньої професійної діяльності вчителів математики та інформатики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Биков В. Ю., Шишкіна М. П. Теоретико-методологічні засади формування хмароорієнтованого середовища вищого навчального закладу. *Теорія і практика управління соціальними системами*. 2016. № 2. С. 30–52.
2. Ковтонюк Г. М. Деякі аспекти використання хмарних сервісів у підготовці майбутніх учителів. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. Випуск 38. Київ-Вінниця: ТОВ „Планер”, 2014. С. 315–319.
3. Ковтонюк Г. М. До питання формування інформатичної компетентності майбутніх учителів фізико-математичних дисциплін. Нова педагогічна думка. 2017. № 3(91). С. 49–51.
4. Ковтонюк Г. М. Персональний сайт викладача як ефективний засіб організації самостійної пізнавальної діяльності майбутніх учителів фізико-математичних дисциплін. Фізико-математична освіта. 2017. Вип. 4(14). С. 205–208.
5. Крупський Я., Ковтонюк Г. Застосування інтерактивного середовища Jupyter Notebook при проведенні інтегрованих уроків з інформатики та математики. Математика, інформатика, фізика: наука та освіта. 2025. Т. 2, № 1. С. 104-112. DOI: https://doi.org/10.31652/3041-1955-2025-02-01-12
6. Попель М. В., Шишкіна М. П. Хмарні технології та доповнена реальність: перспективи використання. *Педагогіка вищої та середньої школи*. 2018. Т. 51. 297–303. DOI: https://doi.org/10.31812/pedag.v51i0.3677
7. Спірін О. М., Вакалюк Т. А. Критерії добору відкритих Web-орієнтованих технологій навчання основ програмування майбутніх учителів інформатики. *Інформаційні технології і засоби навчання*. 2017. Т. 61, № 5. С. 213–238.
8. Шаклеіна І. Хмарні сервіси для підтримки командної роботи у вивченні об’єктно-орієнтованого програмування. *Молодь і ринок*. 2025. № 7-8/239-240. С. 122–127. DOI: https://doi.org/10.24919/2308-4634.2025.336063
9. GitHub Docs. GitHub Pages [Електронний ресурс]. URL: https://docs.github.com/en/pages

Ковтонюк Галина Миколаївна — канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, galyna.kovtonyuk@gmail.com

Kovtoniuk Halyna M. — Cand. Sc. (Ped.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, galyna.kovtonyuk@gmail.com

Бак Сергій Миколайович — докт. фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, sergiy.bak@gmail.com

Bak Serhii M. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, sergiy.bak@gmail.com

Леонова Іванна Миколаївна — асистент кафедри математики та інформатики, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, ivannaleonova6@gmail.com

Leonova Ivanna M. — Assistant Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, ivannaleonova6@gmail.com

УДК 378.016:51:004.9

Г.Л. Ісаєнко[1]
Ю.А. Мейш[2]

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ І ЦИФРОВІ ІНСТРУМЕНТИ У ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

[1] Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут;
[2] Національний університет біоресурсів і природокористування України

Анотація
Розглянуто методичні підходи до викладання вищої математики для здобувачів інженерних спеціальностей в умовах цифровізації освітнього процесу. Акцентовано увагу на поєднанні фундаментальної математичної підготовки з професійно орієнтованими задачами, елементами моделювання, цифровими середовищами та системним контролем результатів навчання. Показано, що така організація курсу підвищує мотивацію здобувачів і сприяє формуванню практично значущих компетентностей майбутніх інженерів.
Ключові слова: вища математика, інженерна освіта, прикладна задача, цифрові технології, математичне моделювання, змішане навчання.

Abstract
The paper considers methodological approaches to teaching higher mathematics to engineering students in the context of digitalization of the educational process. The emphasis is placed on combining fundamental mathematical training with professionally oriented tasks, elements of modelling, digital environments and systematic assessment of learning outcomes. It is shown that such organization of the course increases students' motivation and contributes to the formation of practically significant competencies of future engineers.
Keywords: higher mathematics, engineering education, applied task, digital technologies, mathematical modelling, blended learning.

Вступ

Вища математика є однією з базових дисциплін у підготовці інженерних фахівців, оскільки забезпечує формування аналітичного мислення, уміння працювати з абстрактними моделями, виконувати кількісні оцінки та обґрунтовувати технічні рішення. Для спеціальностей, пов'язаних із телекомунікаціями, інформаційними системами, автоматизацією та комп'ютерними технологіями, математична підготовка має не лише загальноосвітнє, а й безпосереднє професійне значення [4].

У військовому закладі вищої освіти викладання математичних дисциплін має свою специфіку. З одного боку, необхідно зберегти фундаментальність курсу, без якої неможливе подальше опанування фахових дисциплін. З іншого боку, обмеженість навчального часу, різний рівень базової підготовки здобувачів і потреба в швидкому переході до професійних задач вимагають більш раціональної організації навчального матеріалу. Тому актуальним є пошук таких методичних рішень, які дозволяють пов'язати математичні поняття з інженерною практикою та підтримати навчання цифровими інструментами [1; 4].

Метою роботи є визначення підходів до організації навчання вищої математики для інженерних спеціальностей, за яких фундаментальний зміст курсу поєднується з прикладними задачами, цифровими засобами та елементами автоматизованого аналізу навчальних результатів.

Результати дослідження

Першою умовою ефективного викладання вищої математики є професійна спрямованість навчального змісту. Здобувачі краще сприймають математичні методи тоді, коли бачать їх зв'язок із задачами майбутньої діяльності: аналізом сигналів, оцінюванням надійності технічних систем, оптимізацією параметрів мережі, обробленням експериментальних даних, розрахунками в задачах зв'язку та управління. У такому підході формула або алгоритм подаються не як ізольований теоретичний результат, а як інструмент дослідження конкретної ситуації [4].

Доцільною є побудова заняття за логікою поступового переходу від практичного питання до математичної моделі. Наприклад, під час вивчення похідної можна аналізувати швидкість зміни технічного параметра; під час вивчення інтеграла — сумарну дію змінної величини; у темах з лінійної алгебри — системи рівнянь, що виникають під час опису мережевих процесів; у теорії ймовірностей і математичній статистиці — оброблення результатів вимірювань і прогнозування показників надійності. Така послідовність допомагає уникнути формального запам'ятовування і сприяє усвідомленню змісту математичних дій [3; 4].

Другим важливим напрямом є використання цифрових середовищ. Електронні таблиці, системи комп'ютерної математики, графічні калькулятори, інтерактивні симуляції та навчальні платформи дають змогу швидко перевіряти гіпотези, будувати графіки, змінювати параметри моделі й аналізувати вплив окремих величин на результат. Водночас цифровий інструмент має виконувати допоміжну функцію: спочатку здобувач повинен сформулювати математичну модель, визначити метод розв'язання та пояснити очікуваний результат, а вже потім використовувати програмні засоби для обчислень або візуалізації [1; 2; 5].

Окремої уваги потребує диференціація навчальних завдань. У межах однієї теми доцільно передбачати базовий рівень, спрямований на засвоєння основного алгоритму; прикладний рівень, де здобувач самостійно обирає спосіб розв'язання; та дослідницький рівень, що передбачає зміну параметрів, порівняння результатів і формулювання інженерного висновку. Такий підхід дає змогу підтримувати здобувачів із різною підготовкою, не знижуючи загальних вимог до математичної культури [3; 4].

Перспективним є також використання елементів автоматизованого обліку й аналізу результатів навчання. Накопичення даних про виконання тестів, індивідуальних завдань, лабораторно-розрахункових робіт і тематичних контрольних заходів дозволяє викладачу швидко визначати типові помилки, бачити динаміку засвоєння матеріалу та коригувати навчальну траєкторію. За аналогією з інформаційними системами, що автоматизують документообіг і формування звітності, освітній курс може містити модуль аналітики навчальних результатів, який допомагає приймати методичні рішення на основі даних [2].

Змішане навчання у вищій математиці варто організовувати не як просте розміщення конспектів в електронному курсі, а як систему послідовних дій. Перед аудиторним заняттям здобувач опрацьовує короткий теоретичний блок і виконує діагностичні питання; під час заняття розв'язує професійно орієнтовану задачу; після заняття отримує індивідуальне завдання з автоматизованим і змістовним зворотним зв'язком. Така модель робить самостійну роботу керованою та допомагає раціонально використовувати аудиторний час [3].

Важлива роль у реалізації зазначених підходів належить викладачу. Саме він визначає, які поняття є ключовими для подальшої інженерної підготовки, добирає задачі відповідно до спеціальності, пояснює межі застосування моделей і формує в здобувачів відповідальне ставлення до результатів розрахунків. Тому цифровізація навчання не зменшує ролі викладача, а підвищує вимоги до його методичної культури, уміння інтегрувати математичний зміст із професійним контекстом і сучасними технологіями [1; 2].

Висновки

Таким чином, у викладанні вищої математики для інженерних спеціальностей важливо не обмежуватися відпрацюванням стандартних алгоритмів. Доцільно частіше показувати, як математичні поняття працюють у задачах, близьких до майбутньої професійної діяльності здобувачів: під час аналізу сигналів, побудови графіків, оброблення вимірювань, оцінювання параметрів технічних систем. За такої організації курсу вища математика не сприймається здобувачами як набір тем, які потрібно пройти лише для складання заліку або іспиту. Вона поступово пов'язується з тими діями, які майбутній інженер виконує у фаховій підготовці: читає графік, оцінює зміну параметра, порівнює результати розрахунків, перевіряє похибку або робить висновок за числовими даними.

Цифрові засоби доцільно застосовувати як допоміжний інструмент. Вони можуть бути корисними для побудови графіків, роботи з числовими даними, порівняння результатів і поточного контролю знань. Водночас використання програмних засобів не повинно замінювати розуміння математичної моделі, вибору методу розв'язання та змістовного пояснення результату.

Отже, найбільш доцільним є поєднання фундаментального викладу матеріалу, професійно орієнтованих задач і помірного використання цифрових інструментів. Такий підхід дозволяє зробити курс вищої математики більш прикладним і водночас зберегти його роль як базової дисципліни у підготовці майбутніх інженерів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Drijvers P., Sinclair N. The role of digital technologies in mathematics education: purposes and perspectives. *ZDM – Mathematics Education*. 2024. Vol. 56, No. 2. P. 239–248. DOI: 10.1007/s11858-023-01535-x.
2. Engelbrecht J., Borba M. C. Recent developments in using digital technology in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*. 2024. Vol. 56, No. 2. P. 281–292. DOI: 10.1007/s11858-023-01530-2.
3. López-Reyes L. J., Jiménez-Gutiérrez A. L., Costilla-López D. The Effects of Blended Learning on the Performance of Engineering Students in Mathematical Modeling. *Education Sciences*. 2022. Vol. 12, No. 12. Article 931. DOI: 10.3390/educsci12120931.
4. Sipos D., Kocsis I. A complex methodology for the development of mathematical modeling skills in engineer - ng education. *International Review of Applied Sciences and Engineering*. 2024. Vol. 15, No. 3. P. 397–412. DOI: 10.1556/1848.2024.00803.
5. Гонгало Н. Реалізація міждисциплінарних зв'язків у процесі навчання вищої математики з використанням MS Excel. *Фізико-математична освіта*. 2022. Т. 36, № 4. С. 32–37. DOI: 10.31110/2413-1571-2022-036-4-004.

Ісаєнко Галина Леонідівна — канд. техн. наук, доцент, Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, Київ, e-mail: gl_isayenko@ukr.net.

Мейш Юлія Анатоліївна — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, e-mail: juliameish@nubip.edu.ua

Isaienko Halyna L. — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Heroes of Kruty Military Institute of Telecommunications and Information Technology, Kyiv, e-mail: gl_isayenko@ukr.net.

Meish Yuliia A. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, e-mail: juliameish@nubip.edu.ua.

УДК 378.016:51:621.3

Б.О. Грудинін
Ю.А. Мейш
Г.А. Гай

ПРОФЕСІЙНО ОРІЄНТОВАНА МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ІНЖЕНЕРНОГО МИСЛЕННЯ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Національний університет біоресурсів і природокористування України;

Анотація
У роботі обґрунтовано професійно орієнтовану методику вивчення комплексних чисел студентами спеціальності G3 «Електрична інженерія». Показано доцільність поєднання алгебраїчної, тригонометричної та показникової форм комплексного числа із символічним методом аналізу кіл синусоїдного струму. Розкрито особливості професійно орієнтованої методики вивчення комплексних чисел, що охоплює математичне моделювання електричних величин, застосування опору в комплексній формі, законів Ома і Кірхгофа та розв'язання професійно спрямованих задач.
Ключові слова: вища математика, комплексні числа, електрична інженерія, символічний метод, математичне моделювання, професійно орієнтоване навчання.

Abstract
The paper substantiates a professionally oriented methodology for teaching complex numbers to students majoring in G3 Electrical Engineering. The approach combines algebraic, trigonometric and exponential representations of complex numbers with the symbolic analysis of sinusoidal electrical circuits. The proposed learning sequence includes the mathematical representation of electrical quantities, the use of complex impedance, Ohm's and Kirchhoff's laws, and the solution of profession-related engineering problems.
Keywords: higher mathematics, complex numbers, electrical engineering, symbolic method, mathematical modelling, professionally oriented learning.

Вступ

Математична підготовка майбутнього інженера має забезпечувати не лише володіння обчислювальними алгоритмами, а й здатність будувати моделі, інтерпретувати результати та застосовувати математичний апарат у професійних ситуаціях. Для студентів спеціальності G3 «Електрична інженерія» особливе значення мають комплексні числа, оскільки вони використовуються під час аналізу змінного струму, фазових співвідношень, імпедансу, гармонічних процесів та режимів електричних кіл [1–3, 6].

На практиці ця тема часто сприймається студентами як абстрактна й відокремлена від майбутньої професії. Засвоєння правил виконання дій із комплексними числами без розуміння їх фізичного змісту ускладнює подальше опанування теоретичних основ електротехніки. Тому методика навчання має поєднувати фундаментальні поняття, математичне моделювання та прикладні задачі електротехнічного змісту.

Мета роботи полягає у визначенні послідовності й методичних прийомів професійно орієнтованого вивчення комплексних чисел у курсі вищої та прикладної математики з метою формування інженерного мислення і здатності використовувати математичні моделі під час розв'язання електротехнічних задач здобувачами освіти *спеціальності G3 «Електрична інженерія»*.

Результати дослідження

Модуль «Комплексні числа» доцільно будувати як перехід від математичного поняття до інженерного застосування. На першому етапі студенти повторюють алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми комплексного числа, геометричну інтерпретацію на комплексній площині, правила знаходження модуля й аргументу. Важливо не лише відпрацювати перетворення між формами, а й пояснити вибір зручної форми: додавання та віднімання виконуються переважно в алгебраїчному поданні, а множення, ділення, піднесення до степеня — у тригонометричному або показниковому.

Другий етап передбачає встановлення зв'язку між комплексним числом і синусоїдальною електричною величиною. Амплітуду та фазовий зсув струму або напруги подають одним комплексним числом, що дає змогу перейти від тригонометричного опису до компактної символічної форми. Для послідовного кола з активним, індуктивним і ємнісним елементами повний опір записується як $Z = R + j(XL - XC)$, а закон Ома − як $U = I \cdot Z$. У такому поданні диференціювання синусоїдної величини відповідає множенню на $j\omega$, а інтегрування — діленню на $j\omega$. Завдяки цьому інтегро-диференціальні співвідношення замінюються алгебраїчними рівняннями, зручними для практичного розрахунку [4, 6].

На третьому етапі комплексна форма використовується для запису законів Кірхгофа: алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі дорівнює нулю, а сума комплексних напруг у замкненому контурі дорівнює сумі комплексних електрорушійних сил. Студенти мають не механічно підставляти значення, а пояснювати, що дійсна й уявна частини відображають взаємопов'язані амплітудні та фазові характеристики електричного процесу.

Практичний блок доцільно організовувати навколо типових задач електротехніки: застосування правил дільника струму і дільника напруги, визначення струмів у паралельних гілках, розрахунок напруг на активному, індуктивному та ємнісному опорах, перевірка законів Кірхгофа. Навчальна робота будується за схемою «аналіз кола — побудова комплексної моделі — вибір форми чисел — обчислення — перевірка — фізична інтерпретація». Така послідовність допомагає уникнути формального виконання операцій та пов'язує кожен математичний крок із характеристиками реального електричного кола.

Цифрові математичні середовища доцільно використовувати для перевірки ручних розрахунків, побудови векторних діаграм і аналізу зміни параметрів. Водночас студент спочатку має сформувати модель та обґрунтувати вибір форми комплексного числа, тому програмний засіб виконує функцію перевірки й візуалізації, а не замінює математичне міркування [5].

Упевнено констатуємо, запропонований підхід посилює зв'язок між вищою математикою, фізикою та теоретичними основами електротехніки. Комплексні числа постають як робочий інструмент інженера, що дає змогу одночасно враховувати амплітуду й фазу та переходити від розрахунку до технічного висновку.

Висновки

Професійно орієнтоване вивчення комплексних чисел має поєднувати математичну теорію із символічним методом, моделюванням кіл змінного струму та розв'язанням прикладних задач. Методично важливими є послідовний перехід між формами комплексного числа, пояснення фізичного змісту комплексних величин, застосування законів Ома і Кірхгофа в комплексній формі та обов'язкова інтерпретація результатів. Такий підхід створює передумови для розвитку інженерного мислення, підвищення усвідомленості математичної підготовки та успішного опанування спеціальних дисциплін.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Pepin B., Biehler R., Gueudet G. Mathematics in Engineering Education: a Review of the Recent Literature with a View towards Innovative Practices. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education. 2021. Vol. 7, No. 2. P. 163–188. DOI: 10.1007/s40753-021-00139-8.
2. Niss M., Højgaard T. Mathematical competencies revisited. Educational Studies in Mathematics. 2019. Vol. 102. P. 9–28. DOI: 10.1007/s10649-019-09903-9.
3. Greefrath G., Siller H.-S., Vorhölter K., Kaiser G. Mathematical modelling and discrete mathematics: opportunities for modern mathematics teaching. ZDM – Mathematics Education. 2022. Vol. 54, No. 4. P. 865–879. DOI: 10.1007/s11858-022-01339-5.
4. Бойко В.В., Відьмаченко А.П., Грудинін Б.О., Чорній В.П. Фізика: основи теорії, тести, задачі з прикладами розв'язування: навчальний посібник. Київ, 2023. 404 с.
5. Tokanov M., Damekova S., Kuttykozhayeva S., Abdoldinova G., Smagulov Y. Information and communication technology integration and teaching mathematics in higher education. Journal on Mathematics Education. 2022. Vol. 13, No. 4. P. 739–752.
6. Грудинін Б.О., Мейш Ю.А., Гай Г.А. Методика вивчення комплексних чисел студентами інженерних спеціальностей у курсі вищої та прикладної математики. Вісник Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка. 2026. Вип. 2(61). С. 28–36. DOI: https://doi.org/10.31376/2410-0897-2026-2-61-28-36

Грудинін Борис Олександрович — д-р пед. наук, доцент, завідувач кафедри фізики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, e-mail: b.hrudynin@nubip.edu.ua

Мейш Юлія Анатоліївна — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, e-mail: juliameish@nubip.edu.ua
Гай Ганна Анатоліївна — канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, e-mail: gtatana704@gmail.com

УДК 378.147:51:630

Н.В. Арнаута

ІНТЕГРАЦІЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФАХОВИХ ДИСЦИПЛІН У ПІДГОТОВЦІ ГЕОДЕЗИСТІВ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

Анотація

У роботі проаналізовано важливість інтеграції вищої математики та фахових дисциплін у підготовці майбутніх геодезистів. Показано, що поєднання математичних знань із професійною підготовкою забезпечує розвиток ключових компетентностей, аналітичних здібностей і сприяє підвищенню якості навчання.

Ключові слова: *методика викладання, вища математика, фахові дисципліни.*

Abstract

The paper analyzes the importance of integrating higher mathematics and specialized disciplines in the training of future geodesy specialists. It is shown that combining mathematical knowledge with professional training contributes to the development of key competencies, analytical skills, and improves the quality of education.

Keywords: *teaching methods, higher mathematics, professional disciplines.*

Вступ

Підготовка сучасних фахівців у сфері геодезії вимагає комплексного підходу, який передбачає поєднання фундаментальної математичної підготовки з професійними дисциплінами. Вища математика є важливим компонентом освітнього процесу, оскільки формує логічне та аналітичне мислення студентів і забезпечує математичний апарат для вирішення спеціалізованих інженерних завдань.

Результати досліджень

Поєднання вищої математики з такими дисциплінами, як геодезія, картографія, фотограмметрія, супутникові технології та геоінформаційні системи (ГІС), дає змогу студентам глибше усвідомити практичну цінність математичних знань. Методи математичного аналізу використовуються для опису й моделювання геодезичних поверхонь, зокрема, інструменти лінійної алгебри — для роботи з координатами та перетворення систем координат, а статистичні методи— для оцінювання точності вимірювань і аналізу похибок.

Орієнтація навчального процесу на практичне застосування знань допомагає пов’язати теоретичний матеріал із реальними професійними ситуаціями. Використання прикладних задач і професійно спрямованих кейсів у процесі вивчення вищої математики підсилює мотивацію студентів, сприяє розвитку навичок математичного моделювання та формує вміння обґрунтовано приймати технічні рішення.

Результативна інтеграція можлива завдяки використанню міждисциплінарних завдань, сучасних цифрових інструментів, спеціалізованого програмного забезпечення та проєктних методів навчання. Такий підхід сприяє розвитку професійних компетентностей, необхідних майбутнім геодезистам в умовах активної цифрової трансформації галузі.

Висновок

Таким чином, інтеграція вищої математики з фаховими дисциплінами є важливим чинником підвищення якості професійної підготовки геодезистів, оскільки забезпечує гармонійне поєднання теоретичних знань і практичного досвіду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Tokanov M., Damekova S., Kuttykozhayeva S., Abdoldinova G., Smagulov Y. Information and communication technology integration and teaching mathematics in higher education. Journal on Mathematics Education. 2022. Vol. 13, No. 4. P. 739–752. DOI: https://doi.org/10.22342/jme.v13i4.pp739-752

2. Національний університет біоресурсів і природокористування України. Освітньо-професійна програма «Геодезія та землеустрій»: спеціальність G18 «Геодезія та землеустрій». Київ: НУБіП України, 2026. URL: https://drive.google.com/file/d/11xWIXJjTrQfRkONxI6GEyX_Dwv-6HOH6/view

***Арнаута Наталія Володимирівна* – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, e-mail: arnauta_nata@nubip.edu.ua.**

***Arnauta Nataliia* Volodymyrivna– PhD in Education, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, e-mail: arnauta_nata@nubip.edu.ua.**

УДК 378.14:51:621.3

М. І. Бєсєда[1]
О. В. Кобилянський[1]

ВИКЛИКИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ В ПІДГОТОВЦІ ІНЖЕНЕРІВ-ЕНЕРГЕТИКІВ В УМОВАХ ПЕРЕХОДУ ДО ЗЕЛЕНОЇ ЕНЕРГЕТИКИ

[1]Вінницький національний технічний університет

Анотація
Стаття присвячена аналізу сучасних викликів вищої математичної освіти в підготовці інженерів-енергетиків в умовах переходу до зеленої енергетики. Розглянуто ключові проблеми математичної підготовки, зокрема змістовий розрив між фундаментальною математикою та профільними дисциплінами, недостатнє використання цифрових інструментів моделювання та слабкий розвиток компетентностей роботи в умовах невизначеності. Визначено основні професійні компетентності інженера-енергетика, що потребують міцної математичної основи. Обґрунтовано перспективні шляхи розвитку математичної компетентності майбутніх фахівців. Доведено, що модернізація математичної освіти є необхідною передумовою формування конкурентоспроможних інженерів-енергетиків нового покоління.
Ключові слова: вища математична освіта, математичне моделювання, професійна підготовка енергетиків, енергоефективність, компетентнісний підхід, цифрові інструменти

Abstract
The article is devoted to the analysis of modern challenges of higher mathematical education in the training of power engineers in the context of the transition to green energy. The key problems of mathematical training are considered, in particular, the content gap between fundamental mathematics and specialized disciplines, the insufficient use of digital modeling tools and the weak development of competencies for working in conditions of uncertainty. The main professional competencies of a power engineer that require a solid mathematical foundation are determined. Promising ways of developing the mathematical competence of future specialists are substantiated. It is proved that the modernization of mathematical education is a necessary prerequisite for the formation of competitive power engineers of a new generation.
Keywords: higher mathematical education, mathematical modeling, professional training of energy professionals, energy efficiency, competency-based approach, digital tools

Вступ

Перехід України до зеленої енергетики є одним із стратегічних пріоритетів національної енергетичної політики та важливою складовою європейської інтеграції. Зростання частки відновлювальних джерел енергії, розвиток систем накопичення енергії, створення інтелектуальних мереж (Smart Grid) та підвищення енергоефективності вимагають від інженерів-енергетиків нового рівня професійної підготовки. У цих умовах особливого значення набуває якість вищої математичної освіти, оскільки саме математичні методи стають основним інструментом аналізу, моделювання та оптимізації складних, часто стохастичних енергетичних систем.

Сучасна вища математична освіта стикається з низкою суттєвих викликів у підготовці інженерів-енергетиків. По-перше, спостерігається розрив між теоретичною математичною підготовкою та практичними потребами галузі. Студенти часто володіють формальними знаннями з математичного аналізу, диференціальних рівнянь та теорії ймовірностей, проте недостатньо підготовлені до їхнього застосування для моделювання роботи сонячних і вітрових електростанцій, прогнозування нестабільної генерації чи оптимізації гібридних енергетичних комплексів. По-друге, стрімкий розвиток цифрових технологій вимагає від майбутніх фахівців уміння працювати з великими даними, створювати цифрові двійники енергетичних об’єктів та застосовувати методи машинного навчання – навичок, які поки що недостатньо інтегровані в навчальні плани. По-третє, перехід до зеленої енергетики суттєво підвищує рівень невизначеності в роботі енергосистем, що актуалізує необхідність розвитку в студентів компетентностей роботи зі стохастичними процесами, теорією ризиків та багатокритеріальною оптимізацією. Ігнорування цих викликів призводить до зниження конкурентоспроможності випускників на ринку праці та уповільнення впровадження інноваційних технологій в енергетичній галузі.

Результати дослідження

Аналіз сучасного стану математичної підготовки майбутніх інженерів-енергетиків дає змогу виокремити низку системних проблем, які суттєво знижують якість їхньої професійної підготовки в умовах переходу до зеленої енергетики. До основних проблем відносимо:

1. Наявність змістового розриву між курсом вищої математики та профільними енергетичними дисциплінами. Математика викладається переважно на перших двох курсах як абстрактна дисципліна, відокремлена від майбутньої професійної діяльності, тоді як прикладні енергетичні курси, що потребують математичного апарату, читаються значно пізніше – без належного методичного зв'язку з раніше вивченим матеріалом. Унаслідок цього студенти не вбачають практичної цінності математичних знань і не вміють трансформувати їх в інструмент розв'язання інженерних задач, таких як моделювання роботи відновлюваних джерел енергії, оптимізація енергетичних потоків чи прогнозування нестабільної генерації.
2. Спостерігається недостатня орієнтація на сучасні цифрові інструменти. Більшість навчальних програм досі базується на традиційних методах розв'язання задач вручну, тоді як сучасна енергетика вимагає володіння спеціалізованим математичним програмним забезпеченням (MATLAB/Simulink, Python, ANSYS). Студенти здебільшого мають лише поверхневі навички роботи з цими інструментами, що обмежує їхню здатність створювати складні математичні моделі та цифрові двійники енергетичних об'єктів. Це поглиблюється також застарілою матеріально-технічною базою окремих закладів вищої освіти та обмеженим доступом до ліцензійного програмного забезпечення.
3. Актуальною є проблема недостатнього розвитку компетентностей роботи в умовах невизначеності [1-3]. Зростання частки відновлюваних джерел енергії надає енергосистемам стохастичного характеру, що потребує від фахівця вміння прогнозувати нестабільні режими генерації. Однак у навчальному процесі недостатньо уваги приділяється методам теорії ймовірностей, аналізу часових рядів, стохастичного моделювання та оцінювання ризиків – саме тим розділам математики, які є критично важливими для зеленої енергетики.
4. Недостатнє формування мотивації та рефлексії. Студенти часто сприймають математику як дисципліну, відірвану від майбутньої професії. Відсутність чіткого розуміння практичної значущості математичних методів призводить до формального засвоєння матеріалу та низького рівня сформованості математичної компетентності [4]. Додатковим чинником є відсутність систематичної рефлексивної практики: студенти рідко отримують можливість самостійно оцінити, наскільки опановані математичні методи відповідають вимогам реальних інженерних задач.
5. Наявні певні організаційно-методичні проблеми: недостатня кількість годин на вивчення математики на старших курсах, слабка міжкафедральна взаємодія (між кафедрами математики та енергетики), а також недостатня підготовка викладачів до впровадження сучасних педагогічних технологій (проєктно орієнтоване навчання, симуляційне моделювання, змішане навчання). До цього додається фрагментарність навчально-методичного забезпечення: підручники з вищої математики рідко містять приклади та задачі, побудовані на матеріалі енергетичної галузі.
6. Слабка інтеграція математичної підготовки з вимогами ринку праці та сучасними тенденціями галузі. Швидкі темпи декарбонізації, цифровізації енергосистем і впровадження технологій штучного інтелекту в енергетичний менеджмент випереджають оновлення освітніх програм, унаслідок чого випускники нерідко опановують математичний апарат, який не повністю відповідає актуальним професійним викликам [6-7].

Окремої уваги заслуговує проблема недостатньої наступності між рівнями математичної освіти – шкільною та вищою. Значна частина студентів першого курсу демонструє прогалини в базовій математичній підготовці, що ускладнює засвоєння більш складного апарату вищої математики й апріорі знижує ефективність подальшого навчання за фахом [5; 8]. Це посилюється відсутністю систематичних діагностичних процедур, які дозволяли б на ранньому етапі виявляти такі прогалини та коригувати індивідуальну освітню траєкторію студента. Водночас слід зазначити, що згадані проблеми не є однаково гострими для всіх закладів вищої освіти: заклади, що мають тривалий досвід співпраці з енергетичними підприємствами та розвинену матеріально-технічну базу, демонструють помітно вищий рівень інтеграції математичної підготовки в професійний контекст. Це свідчить про те, що подолання окреслених проблем можливе передусім за умови системного, а не фрагментарного підходу до реформування освітнього процесу.

Констатуємо, що визначені проблеми математичної підготовки інженерів-енергетиків мають системний характер і охоплюють як змістове наповнення освіти, так і методичні підходи до її організації, а також інституційні й мотиваційні аспекти. Подолання цих проблем потребує комплексної модернізації навчального процесу, зокрема через інтеграцію математичного моделювання в усю систему професійної підготовки майбутніх фахівців енергетичного профілю.

Висновки

Перехід до зеленої енергетики ставить перед вищою школою нові, складні виклики щодо якості математичної підготовки інженерів-енергетиків. Аналіз сучасного стану свідчить, що традиційна система математичної освіти недостатньо відповідає потребам галузі, оскільки не забезпечує необхідного рівня інтеграції фундаментальних математичних знань з професійними компетентностями майбутніх фахівців. У результаті дослідження встановлено, що ключовими проблемами є змістовий розрив між математикою та профільними дисциплінами, недостатнє використання сучасних цифрових інструментів моделювання, слабкий розвиток компетентностей роботи в умовах невизначеності та низька мотивація студентів до вивчення математики в контексті майбутньої професії. Подолання цих викликів можливе за умови системної інтеграції математичного моделювання в процес професійної підготовки інженерів-енергетиків. Перспективи подальших досліджень пов’язані з розробкою компетентнісно-орієнтованої моделі такої інтеграції, що базується на поєднанні інтегративного, цифрово-інструментального, проєктно-дослідницького та практико-орієнтованого шляхів розвитку математичної компетентності, дозволяє значно підвищити якість підготовки фахівців.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Dembitska S, Kobylianska I, Kobylianskyi O., Kuzmenko O. Training of Technical Specialties for Work Protection Professional Activity According to the Requirements of the Transdisciplinary Approach. *Professional Pedagogics*. 2023. № 1(26). Pp. 110–121. https://doi.org/10.32835/2707-3092.2023.26.110-121
2. Dembitska S., Kuzmenko O., Savchenko I., Demianenko V., Safronova A. Digitization of the Educational and Scientific Space Based on STEAM Education. In: Auer, M.E., Cukierman, U.R., Vendrell Vidal, E., Tovar Caro, E. (eds) Towards a Hybrid, Flexible and Socially Engaged Higher Education. ICL 2023. Lecture Notes in Networks and Systems, 2024. vol 901. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53022-7_34
3. Dembitska S., Shakhina I., Stoliarenko O., Melnyk A., Drabovskyi A., Kobylianska I. Collaborative Learning in a Digital Environment: Opportunities and Challenges. In: Auer, M.E., Toth, P. (eds) Innovation via Collaborative Learning in Engineering Education. ICL 2025. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1846. Springer, Cham, 2026. https://doi.org/10.1007/978-3-032-18888-5_36
4. Ivaniuk V., Miastkovska M., Dembitska S., Kuzmenko O., Smalko O., Pinaieva O. Refactoring the Department’s Website for Barrier-Free Education. In: Auer, M.E., Toth, P. (eds) Innovation via Collaborative Learning in Engineering Education. ICL 2025. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1846. Springer, Cham, 2026. https://doi.org/10.1007/978-3-032-18888-5_54
5. Kuzmenko, O., Dembitska, S., Miastkovska, M., Savchenko, I., Demianenko, V. (2026). Synergy of STEM Education and Digital Technologies: Creating an Intelligent ECO Environment. In: Auer, M.E., Toth, P. (eds) Innovation via Collaborative Learning in Engineering Education. ICL 2025. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1847. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-032-18885-4_38
6. Miastkovska M., Dembitska S., Puhach V., Kobylianska I., Kobylianskyi O. Improving the efficiency of students’ independent work during blended learning in technical universities. In: Auer, M.E., Cukierman, U.R., Vendrell Vidal, E., Tovar Caro, E. (eds) Towards a Hybrid, Flexible and Socially Engaged Higher Education. ICL 2023. Lecture Notes in Networks and Systems, 2024. vol 899. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-51979-6_21
7. Дембіцька С.В. Особливості освітніх інновацій в контексті розвитку цифрового суспільства. Інноваційні трансформації в сучасній освіті: виклики, реалії, стратегії : зб. матер. V Всеукр. відкр. наук.-практ. онлайн-форуму, Київ, 20 вер. 2023 р. / за заг. ред. І. М. Савченко, В. В. Ємець. — Київ: Національний центр «Мала академія наук України», 2023. С.108-110.
8. Дембіцька С.В. Розвиток культури безпеки у здобувачів вищої освіти в умовах надзвичайних ситуацій. Управління та адміністрування в умовах протидії гібридним загрозам національній безпеці: Матеріали IV

Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 22 листопада 2023 року). Київ: ДУІТ, ХНУРЕ, МНТУ. 2023. С. 791-794

9. Дембіцька С.В., Кобилянська І. М. Розвиток професійної культури майбутніх фахівців технічних спеціальностей: інноваційні підходи та засоби. Актуальні проблеми та перспективи технологічної і професійної освіти. Матеріали VIII всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції – ТНПУ ім. В. Гнатюка, 25-26 квітня 2024 р 59-61

Бєсєда Максим Ігорович **–** аспірант кафедри безпеки життєдіяльності та педагогіки безпеки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: Maxbeseda@gmail.com

Кобилянський Олександр Володимирович – д-р пед. наук, професор, завідувач кафедри безпеки життєдіяльності та педагогіки безпеки Вінницького національного технічного університету. e-mail: akobilanskiy@gmail.com

Maksym I. Biesieda **–** Postgraduate Student, Department of Life Safety and Safety Pedagogy, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: Maxbeseda@gmail.com

Oleksandr V. Kobylyanskyi **–** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Life Safety and Pedagogy safety, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: akobilanskiy@gmail.com

УДК 378.147:51:620.9

А. С. Грогуль[1]
О. В. Кобилянський[1]

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ЕНЕРГОЕФЕКТИВНОСТІ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ПРОФЕСІЙНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ МАЙБУТНІХ ЕНЕРГЕТИКІВ

[1]Вінницький національний технічний університет

Анотація
Обґрунтовано роль математичного моделювання в системі професійної підготовки фахівців з енергетики. Розглянуто можливості інтеграції методів вищої математики (диференціальні рівняння, методи оптимізації, теорія ймовірностей) у вивчення питань енергоефективності, моделювання енергетичних систем та відновлювальних джерел енергії. Показано вплив такого підходу на розвиток аналітичного мислення та готовності до розв'язання реальних інженерних задач.

Ключові слова: вища математична освіта, математичне моделювання, професійна підготовка енергетиків, енергоефективність, компетентнісний підхід, цифрові інструменти.

Abstract
The role of mathematical modeling in the system of professional training of energy specialists is substantiated. The possibilities of integrating higher mathematics methods (differential equations, optimization methods, probability theory) into the study of energy efficiency issues, modeling of energy systems and renewable energy sources are considered. The impact of such an approach on the development of analytical thinking and readiness to solve real engineering problems is shown.

Keywords: higher mathematical education, mathematical modeling, professional training of energy professionals, energy efficiency, competency-based approach, digital tools.

Вступ

Сучасний етап розвитку вищої освіти характеризується посиленням вимог до якості професійної підготовки фахівців технічних спеціальностей, зокрема фахівців енергетичної галузі. Перехід України до зеленої енергетики, підвищення енергоефективності та забезпечення енергетичної безпеки країни в умовах воєнних викликів і європейської інтеграції вимагають від випускників не лише технічних знань, а й високого рівня математичної компетентності та здатності до математичного моделювання складних процесів.

Математична підготовка традиційно є фундаментальною складовою інженерної освіти. Однак у сучасних умовах спостерігається розрив між рівнем засвоєння понять вищої математики студентами енергетичних спеціальностей та їхньою готовністю використовувати математичні методи для розв'язання реальних професійних задач. Багато випускників сформували теоретичні знання з математичного аналізу, диференціальних рівнянь та теорії ймовірностей, проте відчувають труднощі при перекладі цих знань на мову інженерних розрахунків, моделювання енергетичних систем та оптимізацію процесів енергоефективності. Особливої гостроти ця проблема набуває у підготовці інженерів-енергетиків, оскільки саме математичне моделювання є основним інструментом дослідження та оптимізації роботи теплових схем, відновлювальних джерел енергії, систем енергопостачання, процесів тепломасообміну та енергоефективності. Недостатня інтеграція математичних методів у професійну підготовку призводить до зниження конкурентоспроможності випускників на ринку праці та уповільнює впровадження інноваційних технологій в енергетичній галузі. Таким чином, актуальність теми зумовлена необхідністю подолання розриву між фундаментальною математичною освітою та практичними потребами енергетичної галузі в умовах викликів сучасності.

Результати дослідження

Розвиток енергетичної галузі України характеризується складними викликами, пов'язаними з декарбонізацією економіки, інтеграцією відновлюваних джерел енергії, цифровізацією систем енергопостачання та забезпеченням енергетичної безпеки в умовах воєнних загроз. У цьому контексті інженер-енергетик має виступати не лише виконавцем технічних рішень, а й суб'єктом інноваційної діяльності, здатним до математичного аналізу, моделювання та оптимізації складних енергетичних систем. Відтак математична підготовка набуває статусу ключового чинника формування професійних компетентностей такого фахівця.

Однією з фундаментальних компетентностей вважаємо здатність до математичного моделювання енергетичних процесів. Фахівець повинен уміти будувати математичні моделі тепломасообміну, гідродинаміки, фазових переходів і хімічних реакцій в енергетичному обладнанні, що передбачає розуміння теорії диференціальних рівнянь та чисельних методів їх розв'язання. Як зазначає М. Кулик, [11], без таких навичок неможливо забезпечити перехід від емпіричних підходів до науково обґрунтованого проєктування сучасного енергетичного обладнання. Не менш важливою є уміння оптимізації енергетичних систем. Інженер має розв'язувати задачі багатопараметричної оптимізації з метою підвищення енергоефективності, зниження втрат і забезпечення надійності, що потребує знання лінійного, нелінійного, динамічного та стохастичного програмування, генетичних алгоритмів і методів багатокритеріальної оптимізації [9; 12]. Особливої актуальності ця компетентність набуває під час проєктування гібридних енергетичних комплексів із використанням відновлюваних джерел енергії. Важливе місце посідає також здатність до прогнозування та роботи в умовах невизначеності. Інтеграція нестабільних джерел енергії (вітрових і сонячних) надає енергосистемі стохастичного характеру, тому фахівець має володіти методами теорії ймовірностей, математичної статистики, аналізу часових рядів та елементами теорії хаосу.

Крім того, інженер-енергетик повинен демонструвати компетентність у сфері цифрового моделювання та створення цифрових двійників енергетичних об'єктів. Це передбачає інтеграцію математичного апарату з програмними середовищами MATLAB/Simulink, Python (бібліотеки SciPy, NumPy, Pandas), ANSYS та іншими інструментами, що уможливлює симуляцію динамічних режимів, діагностику обладнання в реальному часі та прогнозування відмов. Дедалі більшої ваги набуває й аналітико-діагностична компетентність, пов'язана з обробкою великих даних, отриманих від систем SCADA та IoT, яка ґрунтується на методах регресійного аналізу, кластеризації, нейронних мереж та машинного навчання.

Відтак розвиток математичної компетентності вимагає системного переосмислення підходів до організації освітнього процесу в закладах вищої технічної освіти. Одним із провідних шляхів є інтегративний розвиток математичної компетентності. Традиційне викладання вищої математики у відриві від профільних дисциплін призводить до формального засвоєння знань, тоді як ефективним рішенням є створення міждисциплінарних модулів, у яких математичні методи вивчаються через призму реальних енергетичних задач: моделювання теплових схем, розрахунок режимів роботи електричних мереж чи оптимізацію роботи вітрових електростанцій [1-6]. Такий підхід забезпечує органічний перехід від абстрактних математичних понять до їхнього прикладного застосування. Перспективним є також проєктно-дослідницькі методи. Участь студентів у розробці реальних проєктів, науково-дослідній роботі та конкурсах сприяє формуванню досвіду самостійного математичного моделювання [7-8]. Особливо цінним є виконання курсових і дипломних робіт, у яких математична модель становить не додаток, а основу дослідження. Не менш значущим є практико-орієнтований (дуальний) шлях. Тісна співпраця з енергетичними підприємствами під час виробничої практики дає змогу студентам працювати з реальними даними, розв'язувати актуальні виробничі задачі та отримувати зворотний зв'язок від практикуючих фахівців, що сприяє формуванню професійної рефлексії щодо значення математичних методів у повсякденній інженерній діяльності. Нарешті, важливим залишається адаптація навчального навантаження до рівня підготовки студента, використання адаптивних освітніх платформ, а також систематичну рефлексію щодо власних математичних компетентностей. Розвиток уміння самостійно оцінювати якість математичного апарату, застосованого в моделі, є запорукою формування фахівця, здатного до постійного самовдосконалення [10].

Висновки

Отже, математична підготовка є невід'ємною основою формування професійних компетентностей інженера-енергетика. Вона забезпечує перехід від репродуктивного до творчого рівня мислення, дозволяє фахівцю ефективно працювати в умовах невизначеності та швидко адаптуватися до технологічних змін. Посилення математичної складової у професійній підготовці енергетиків є стратегічно важливим завданням вищої школи України, що відповідає як національним пріоритетам енергетичної безпеки, так і вимогам Болонського процесу. Разом з тим, розвиток математичної компетентності майбутніх інженерів-енергетиків повинен здійснюватися комплексно, через поєднання інтегративного, цифрового, проєктного, практичного та рефлексивного шляхів. Лише за таких умов вища школа зможе підготувати фахівців, готових до ефективного розв'язання складних завдань енергетичної безпеки та сталого розвитку України в умовах швидких технологічних змін.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Dembitska S, Kobylianska I, Kobylianskyi O., Kuzmenko O. Training of Technical Specialties for Work Protection Professional Activity According to the Requirements of the Transdisciplinary Approach. *Professional Pedagogics*. 2023. № 1(26). Pp. 110–121. https://doi.org/10.32835/2707-3092.2023.26.110-121
2. Dembitska S., Kuzmenko O., Savchenko I., Demianenko V., Safronova A. Digitization of the Educational and Scientific Space Based on STEAM Education. In: Auer, M.E., Cukierman, U.R., Vendrell Vidal, E., Tovar Caro, E. (eds) Towards a Hybrid, Flexible and Socially Engaged Higher Education. ICL 2023. Lecture Notes in Networks and Systems, 2024. vol 901. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53022-7_34
3. Dembitska S., Shakhina I., Stoliarenko O., Melnyk A., Drabovskyi A., Kobylianska I. Collaborative Learning in a Digital Environment: Opportunities and Challenges. In: Auer, M.E., Toth, P. (eds) Innovation via Collaborative Learning in Engineering Education. ICL 2025. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1846. Springer, Cham, 2026. https://doi.org/10.1007/978-3-032-18888-5_36
4. Ivaniuk V., Miastkovska M., Dembitska S., Kuzmenko O., Smalko O., Pinaieva O. Refactoring the Department's Website for Barrier-Free Education. In: Auer, M.E., Toth, P. (eds) Innovation via Collaborative Learning in Engineering Education. ICL 2025. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1846. Springer, Cham, 2026. https://doi.org/10.1007/978-3-032-18888-5_54
5. Kuzmenko, O., Dembitska, S., Miastkovska, M., Savchenko, I., Demianenko, V. (2026). Synergy of STEM Education and Digital Technologies: Creating an Intelligent ECO Environment. In: Auer, M.E., Toth, P. (eds) Innovation via Collaborative Learning in Engineering Education. ICL 2025. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1847. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-032-18885-4_38
6. Miastkovska M., Dembitska S., Puhach V., Kobylianska I., Kobylianskyi O. Improving the efficiency of students' independent work during blended learning in technical universities. In: Auer, M.E., Cukierman, U.R., Vendrell Vidal, E., Tovar Caro, E. (eds) Towards a Hybrid, Flexible and Socially Engaged Higher Education. ICL 2023. Lecture Notes in Networks and Systems, 2024. vol 899. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-51979-6_21
7. Граф М., Любченко Д. Математична модель оптимізації енергопостачання в прикордонних районах з урахуванням геополітичних ризиків. Технічна інженерія. 2025. №1. С. 274-279. 10.26642/ten-2025-1(95)-274-279.
8. Дембіцька С.В. Особливості освітніх інновацій в контексті розвитку цифрового суспільства. Інноваційні трансформації в сучасній освіті: виклики, реалії, стратегії : зб. матер. V Всеукр. відкр. наук.-практ. онлайн-форуму, Київ, 20 вер. 2023 р. / за заг. ред. І. М. Савченко, В. В. Ємець. — Київ: Національний центр «Мала академія наук України», 2023. С.108-110.
9. Дембіцька С.В. Розвиток культури безпеки у здобувачів вищої освіти в умовах надзвичайних ситуацій. Управління та адміністрування в умовах протидії гібридним загрозам національній безпеці: Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 22 листопада 2023 року). Київ: ДУІТ, ХНУРЕ, МНТУ. 2023. С. 791-794
10. Дембіцька С.В., Кобилянська І. М. Розвиток професійної культури майбутніх фахівців технічних спеціальностей: інноваційні підходи та засоби. Актуальні проблеми та перспективи технологічної і професійної освіти. Матеріали VIII всеукраїнської науково-практичної інтернет-конференції – ТНПУ ім. В. Гнатюка, 25-26 квітня 2024 р 59-61
11. Кулик М.М., Маляренко О.Є., Майстренко Н.Ю., Станиціна В.В., Куц Г.О. Енергоефективність та прогнозування енергоспоживання на різних ієрархічних рівнях економіки: методологія, прогнозні оцінки до 2040 року. Київ : Наукова думка, 2021. 234 с
12. Маляренко О., Іваненко Н., Судариков О. Дослідження взаємозв'язку показників екологічної та енергетичної ефективності на рівні країни. Системні дослідження в енергетиці. 2023. № 4(75). С. 84–94. DOI: https://doi.org/10.15407/srenergy2023.04.084

***Грогуль Андрій Сергійович* –** аспірант кафедри безпеки життєдіяльності та педагогіки безпеки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: grogulflash@gmail.com.

***Кобилянський Олександр Володимирович* –** д. пед. н., професор, завідувач кафедри безпеки життєдіяльності та педагогіки безпеки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: akobilanskiy@gmail.com.

***Andrii Hrohul* –** Postgraduate Student, Department of Life Safety and Safety Pedagogy, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Email: grogulflash@gmail.com.

Oleksandr V. Kobylyansky – Doctor of Pedagogy, Professor, Head of the Department of Life Safety and Safety Pedagogy, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Email: akobilanskiy@gmail.com.

УДК 378.147:004.9

В. В. Гальчинський[1]
С. В. Дембіцька[1]

ФОРМУВАННЯ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ МАЙБУТНІХ ІТ-СПЕЦІАЛІСТІВ ЗАСОБАМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

[1]Вінницький національний технічний університет

Анотація
Стаття присвячена проблемі формування критичного мислення як ключової soft skill майбутніх ІТ-спеціалістів. Розглянуто потенціал курсу вищої математики для розвитку цієї компетентності в умовах цифрової трансформації ІТ-індустрії. Проаналізовано основні виклики сучасної математичної підготовки, пов'язані з її відірваністю від реальних професійних задач. Обґрунтовано доцільність використання математичного моделювання як ефективного засобу розвитку критичного мислення. Охарактеризовано перспективні методи формування цієї компетентності: проблемно-орієнтоване та проєктно-орієнтоване навчання, аналіз помилок та рефлексивні практики. Запропоновано практичні приклади завдань, адаптованих до специфіки ІТ-сфери. Доведено, що системне впровадження активних методів у процес вивчення вищої математики дозволяє перетворити математичну підготовку на потужний інструмент формування критичного мислення майбутніх ІТ-фахівців.
Ключові слова: критичне мислення, soft skills, математичне моделювання, вища математика, ІТ-фахівці, проблемно-орієнтоване навчання.

Abstract
The article is devoted to the problem of forming critical thinking as a key soft skill of future IT specialists. The potential of the higher mathematics course for the development of this competence in the conditions of digital transformation of the IT industry is considered. The main challenges of modern mathematical training related to its isolation from real professional tasks are analyzed. The feasibility of using mathematical modeling as an effective means of developing critical thinking is substantiated. Promising methods of forming this competence are characterized: problem-oriented and project-oriented learning, error analysis and reflective practices. Practical examples of tasks adapted to the specifics of the IT sphere are proposed. It is proved that the systematic introduction of active methods into the process of studying higher mathematics allows turning mathematical training into a powerful tool for forming critical thinking of future IT specialists.
Keywords: critical thinking, soft skills, mathematical modeling, higher mathematics, IT specialists, problem-based learning.

Вступ

Сучасний ринок праці в ІТ-сфері висуває високі вимоги не лише до технічних навичок, а й до розвинених soft skills, серед яких одне з провідних місць посідає критичне мислення. Здатність аналізувати складні проблеми, оцінювати інформацію, виявляти логічні помилки, формулювати обґрунтовані висновки та приймати ефективні рішення в умовах невизначеності є ключовою компетентністю успішного ІТ-фахівця. У зв'язку з цим особливої актуальності набуває питання формування критичного мислення вже на етапі університетської підготовки майбутніх спеціалістів інформаційних технологій. Одним із найбільш потужних засобів розвитку критичного мислення є математичне моделювання. Воно вимагає від студента не просто виконання алгоритмічних дій, а глибокого розуміння проблеми, побудови адекватної моделі, критичного аналізу результатів, врахування обмежень моделі та оцінки її практичної цінності. Саме через математичне моделювання студент вчиться мислити системно, бачити причинно-наслідкові зв'язки, працювати з невизначеністю та постійно перевіряти власні припущення.

Проте в сучасній практиці вищої освіти спостерігається суттєвий розрив між потенціалом математичного моделювання та його реальним використанням для розвитку критичного мислення ІТ-студентів. Курс вищої математики часто залишається формальним, відірваним від майбутньої професійної діяльності, а завдання носять переважно репродуктивний характер. У результаті випускники демонструють слабку здатність до критичного аналізу проблем, що негативно впливає на їхню конкурентоспроможність на ринку праці. Незважаючи на значну кількість досліджень з проблем формування критичного мислення та математичної підготовки ІТ-фахівців, зокрема [1-2; 5-7], питання цілеспрямованого використання математичного моделювання як засобу розвитку критичного мислення майбутніх ІТ-спеціалістів залишається недостатньо вивченим.

Результати дослідження

У сучасній ІТ-індустрії критичне мислення по праву вважається однією з найбільш затребуваних soft skills. За даними численних досліджень і звітів провідних ІТ-компаній (Google, Microsoft, LinkedIn [3-4]), саме ця компетентність часто визначає успішність фахівця більше, ніж суто технічні знання. Критичне мислення передбачає не лише здатність аналізувати складні проблеми, але й уміння оцінювати достовірність інформації, виявляти приховані припущення та логічні помилки, порівнювати альтернативні рішення, працювати з неповними або суперечливими даними, а також обґрунтовувати власні висновки в умовах високої невизначеності. У світі швидких технологічних змін, де ІТ-фахівці постійно стикаються з новими задачами, алгоритмами та бізнес-вимогами, критичне мислення стає ключовим інструментом адаптації та інновацій. Курс вищої математики, який традиційно сприймається студентами та навіть деякими викладачами як суто теоретична, абстрактна дисципліна, далекий від реальних потреб ІТ-сфери, насправді володіє значним, проте ще недостатньо реалізованим потенціалом для цілеспрямованого та системного розвитку цієї важливої компетентності у майбутніх ІТ-фахівців.

Ефективне формування критичного мислення майбутніх ІТ-фахівців вимагає системного та цілеспрямованого застосування сучасних активних педагогічних методів, що радикально відрізняються від традиційного репродуктивного підходу. Одним із найбільш перспективних і дієвих серед них є проблемно-орієнтоване навчання . На відміну від виконання стандартних алгоритмічних завдань з підручника, студентам пропонується самостійно розв'язувати складні, багатоваріантні та відкриті проблеми, максимально наближені до реальних ІТ-задач. Наприклад, студентам можна запропонувати таке завдання: «Розробити математичну модель для прогнозування навантаження на сервер у залежності від часу доби, кількості користувачів, типу трафіку та дня тижня. Які ключові припущення ви робите при побудові моделі? Наскільки модель чутлива до зміни параметрів? Які фактори ви не врахували і чому?». Такий підхід змушує студентів не просто механічно застосовувати відомі формули, а глибоко аналізувати умови задачі, критично оцінювати вхідні дані, обирати найбільш адекватний математичний апарат, перевіряти припущення на реалістичність та обґрунтовано оцінювати обмеження та похибки побудованої моделі.

Не менш ефективним засобом розвитку критичного мислення є проєктно-орієнтоване навчання. Воно дозволяє студентам зануритися в комплексну діяльність, яка імітує реальні професійні задачі ІТ-сфери. Студенти можуть виконувати проєкти на кшталт «Математична оптимізація розподілу ресурсів у хмарному сховищі з урахуванням вартості та енергоспоживання» або «Моделювання ефективності алгоритму рекомендаційної системи типу Netflix з урахуванням поведінки користувачів і динаміки даних». У процесі такої роботи вони послідовно вчаться формулювати задачу в математичних термінах, обирати найбільш підходящий метод розв'язання (лінійне чи нелінійне програмування, теорію графів, стохастичне моделювання), реалізовувати створену модель у середовищах Python або MATLAB, проводити чисельні експерименти, аналізувати отримані результати та критично оцінювати їхню практичну цінність, точність і межі застосування. Такий підхід формує не лише технічні навички, а й уміння бачити проблему комплексно та обґрунтовувати прийняті рішення. Цікавим і ефективним доповненням є метод аналізу помилок. Викладач може спеціально надати студентам розв'язок задачі, що містить приховані логічні помилки або некоректні припущення. Наприклад: «У наведеній моделі зростання обсягу даних використано чисту експоненціальну залежність. Знайдіть помилки в припущеннях, поясніть, чому така модель є нереалістичною в довгостроковій перспективі, та запропонуйте більш точну та обґрунтовану математичну модель». Такий підхід активно розвиває вміння критично оцінювати як власні, так і чужі рішення, що є надзвичайно важливим для майбутньої роботи в ІТ-командах.

Важливим елементом системи формування критичного мислення є рефлексивні практики, які допомагають студентам перейти від простого виконання завдань до усвідомленого управління власним пізнавальним процесом. Після виконання математичного завдання або проєкту студентам пропонується дати структуровану письмову або усну відповідь на низку рефлексивних питань: «Які ключові припущення я зробив під час побудови моделі? Наскільки вони були обґрунтованими з точки зору реальної IT-задачі? Які обмеження має створена мною модель і в яких умовах вона може давати суттєву похибку? Що б я змінив або вдосконалив при повторному розв'язанні цієї задачі?».

Така систематична рефлексія сприяє формуванню метакогнітивних навичок – вміння аналізувати, контролювати і вдосконалювати власне мислення. Студент починає не просто розв'язувати задачу, а усвідомлювати, як саме він це робить, де допускає типові помилки та як можна покращити процес мислення в майбутньому. Таким чином, вища математика за умови впровадження сучасних методів може стати потужним і ефективним середовищем для розвитку критичного мислення майбутніх IT-спеціалістів. Перехід від традиційного, переважно репродуктивного викладання до проблемно-проєктних, рефлексивних та дослідницьких методів дозволяє перетворити математичну підготовку на дієвий, практико-орієнтований інструмент формування ключових професійних компетентностей сучасного IT-фахівця, здатного успішно працювати в умовах швидких технологічних змін і високої невизначеності.

Висновки

Критичне мислення є однією з ключових soft skills сучасного IT-фахівця, що забезпечує його адаптивність, інноваційність та ефективність у розв'язанні складних професійних задач. Курс вищої математики, попри традиційне сприйняття як абстрактної дисципліни, має значний потенціал для цілеспрямованого розвитку цієї компетентності за умови застосування сучасних педагогічних методів. У результаті аналізу встановлено, що найбільш ефективними засобами формування критичного мислення під час вивчення вищої математики є проблемно-орієнтоване та проєктно-орієнтоване навчання, порівняльний аналіз моделей та систематичні рефлексивні практики. Ці методи дозволяють студентам не лише опановувати математичний апарат, а й розвивати вміння критично аналізувати умови задач, оцінювати припущення, виявляти обмеження моделей та обґрунтовувати прийняті рішення. Запропоновані підходи сприяють переходу від репродуктивного засвоєння знань до конструктивістської моделі навчання, де студент виступає активним суб'єктом пізнавальної діяльності. Інтеграція математичного моделювання з елементами програмування (Python, MATLAB) та реальними IT-кейсами значно підвищує мотивацію студентів і наближає навчальний процес до вимог сучасного ринку праці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Avsec S., Jagiełło-Kowalczyk M., Żabicka A. Enhancing Transformative Learning and Innovation Skills Using Remote Learning for Sustainable Architecture Design. Sustainability Teaching Tools in the Digital Age. 2022. № 14. P. 3928. https://doi.org/10.3390/su14073928
2. Johnsen D. C., Marchini L. Artificial intelligence to develop outcomes for critical thinking: a helping start and still up to the educator to develop the final outcome. European Journal of Dental Education. 2024. Vol. 28, № 4. P. 877-879. DOI: https://doi.org/10.1111/eje.13017.
3. Mastering The Most Valuable Professional Skills Of 2026 (3 лютого 2026). URL: https://www.forbes.com/sites/markcperna/2026/02/03/mastering-the-most-valuable-professional-skills-of-2026
4. Technical Skills Aren't Enough - Why Soft Skills Lead To Higher Salaries In The AI Boom. URL: https://www.forbes.com/sites/lizelting/2025/10/30/technical-skills-arent-enough-why-soft-skills-lead-to-higher-salaries-in-the-ai-boom
5. Антонов О. В., Антонова О. Є. Застосування проєктного методу у розвитку критичного мислення майбутніх фахівців. *Наука і техніка сьогодні*. 2025. № 48. С. 494–508.
6. Клочко О. В. Розвиток критичного мислення майбутніх вчителів інформатики та математики з використанням засобів штучного інтелекту. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. 2024. Випуск 72. С. 14-26.
7. Клочко О., Федорець В., Спажев О., Петрунько М. Інтеграція штучного інтелекту в освітні практики. Науково-популярний альманах «Математика та інформатика навколо нас». Вінниця: Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. 2023. № 7. С. 38-42.

Гальчинський Віталій Володимирович – аспірант кафедри безпеки життєдіяльності та педагогіки безпеки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: halchynskyiv@gmail.com**.**

Дембіцька Софія Віталіївна – д. пед. н., професор, професор кафедри безпеки життєдіяльності та педагогіки безпеки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: sofiyadem13@gmail.com.

Vitalii Halchynskyi – Postgraduate Student, Department of Life Safety and Safety Pedagogy, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Email: halchynskyiv@gmail.com.

Sofia Dembitska – Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Life Safety and Safety Pedagogy, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: sofiyadem13@gmail.com.

УДК 378.147:004:005

А. С. Доскоч[1]
І. М. Кобиляська[1]

МАТЕМАТИЧНА ПІДГОТОВКА МАЙБУТНІХ МЕНЕДЖЕРІВ В УМОВАХ ЦИФРОВОЇ ТРАНСФОРМАЦІЇ БІЗНЕСУ

[1] Вінницький національний технічний університет

Анотація

Стаття присвячена актуальній проблемі математичної підготовки майбутніх менеджерів в умовах цифрової трансформації бізнесу. Розглянуто ключові виклики, з якими стикається вища школа: змістовий розрив між математикою та управлінськими дисциплінами, недостатній рівень цифрової компетентності, формальний характер викладання та низька мотивація студентів. Обґрунтовано, що в сучасних умовах математична компетентність стає стратегічно важливою складовою професійної підготовки менеджера, особливо в контексті цифрової трансформації економіки. Проаналізовано основні перспективи вдосконалення математичної підготовки, зокрема впровадження проблемного та проєктно-орієнтованого навчання, інтеграцію сучасних інструментів бізнес-аналітики та посилення міждисциплінарних зв'язків. Запропоновано основні напрями модернізації математичної освіти.

Ключові слова: математична підготовка, менеджери, цифрова трансформація бізнесу, аналітичне мислення, цифрова економіка, вдосконалення освітнього процесу.

Abstract

The article is devoted to the urgent problem of mathematical training of future managers in the conditions of digital transformation of business. The key challenges faced by higher education are considered: the content gap between mathematics and management disciplines, the insufficient level of digital competence, the formal nature of teaching and low motivation of students. It is substantiated that in modern conditions mathematical competence is becoming a strategically important component of the professional training of a manager, especially in the context of the digital transformation of the economy. The main prospects for improving mathematical training are analyzed, in particular, the introduction of problem-based and project-oriented learning, the integration of modern business analytics tools and the strengthening of interdisciplinary ties. The main directions for the modernization of mathematical education are proposed.

Keywords: mathematical training, managers, digital business transformation, analytical thinking, digital economy, improvement of the educational process

Вступ

Сучасна цифрова трансформація бізнесу кардинально змінює вимоги до професійної підготовки менеджерів. У світі, де дані стали одним із найважливіших ресурсів, а прийняття рішень все частіше відбувається на основі аналізу великих даних, математична компетентність перетворюється з бажаного доповнення на обов'язкову складову професійного профілю сучасного менеджера. Прийняття рішень на основі даних, математичне моделювання бізнес-процесів, прогнозування тенденцій та оптимізація ресурсів – ці навички стають критично важливими для ефективного управління організаціями в умовах Industry 4.0. Водночас система вищої освіти в управлінській сфері стикається з низкою серйозних викликів. Традиційна математична підготовка майбутніх менеджерів часто має формальний характер, обмежується базовим курсом вищої математики на перших курсах і слабо пов'язана з реальними завданнями бізнес-управління. У результаті значна частина випускників спеціальностей «Менеджмент», «Бізнес-адміністрування» та «Управління проектами» демонструє недостатній рівень аналітичного мислення, вміння працювати з кількісними даними та застосовувати математичні методи для обґрунтування управлінських рішень. Ця ситуація створює суттєвий розрив між вимогами ринку праці та рівнем підготовки випускників. За даними міжнародних досліджень (World Economic Forum, McKinsey, Gartner [1-3]), роботодавці все частіше відзначають дефіцит у менеджерів аналітичних компетентностей, здатності до критичного аналізу даних та математичного моделювання бізнес-сценаріїв. Незважаючи на зростаючу кількість наукових робіт, присвячених цифровій трансформації бізнесу та математичній освіті, проблема інтеграції математичної підготовки у професійну підготовку майбутніх менеджерів залишається недостатньо вивченою, особливо в українському контексті.

Результати дослідження

Як засвідчив аналіз публікацій з проблеми дослідження [4-11], цифрова трансформація бізнесу радикально змінила характер управлінської діяльності. Сучасний менеджер повинен не лише володіти класичними навичками лідерства та комунікації, але й уміти працювати з великими обсягами даних, приймати обґрунтовані рішення на основі аналізу та прогнозувати наслідки управлінських дій. У цьому контексті математична підготовка набуває стратегічного значення. Однак система вищої освіти у сфері менеджменту стикається з комплексом серйозних викликів, які суттєво знижують якість підготовки майбутніх керівників.

Одним із головних викликів є змістовий розрив між курсом вищої математики та професійними управлінськими дисциплінами. Математика традиційно викладається на перших курсах як абстрактна дисципліна, позбавлена зв'язку з бізнес-реаліями. Унаслідок цього студенти не бачать практичної цінності математичних методів для розв'язання завдань стратегічного планування, фінансового аналізу, оптимізації бізнес-процесів чи оцінки ризиків. Така відірваність призводить до швидкого забування теоретичних знань і неспроможності застосовувати їх у професійній діяльності.

Іншим суттєвим викликом є недостатній розвиток здатності працювати з даними, інтерпретувати результати аналітики та приймати відповідні рішення. Сучасний бізнес активно використовує прогностичне моделювання та штучний інтелект, проте більшість випускників має лише поверхневе уявлення про статистичні методи, теорію ймовірностей та математичну оптимізацію. Це створює ситуацію, коли менеджери змушені покладатися на інтуїцію або на рекомендації аналітиків, замість того щоб самостійно аналізувати дані.

Не менш гострою є проблема формального характеру математичної освіти. Після перших курсів математика майже зникає з навчальних планів, а профільні дисципліни рідко включають кількісні методи. Крім того, викладачі математики часто не мають достатнього розуміння бізнес-контексту, а викладачі менеджменту – необхідної математичної підготовки. У результаті міждисциплінарна інтеграція залишається на декларативному рівні. Окремий виклик становить низька мотивація студентів. Багато майбутніх менеджерів сприймають математику як непотрібний бар'єр, що не має прямого стосунку до їхньої майбутньої кар'єри. Відсутність чіткого розуміння практичної цінності математичних компетентностей призводить до формального ставлення до предмета та низьких результатів навчання.

Таким чином, математична підготовка майбутніх менеджерів у сучасних умовах цифрової трансформації бізнесу стикається з системними викликами, які потребують не косметичних змін, а глибинної методичної перебудови. Подолання цих викликів є необхідною передумовою підготовки керівників нового типу – аналітично мислячих, здатних ефективно працювати з даними та приймати обґрунтовані стратегічні рішення в умовах високої невизначеності.

Незважаючи на існуючі виклики, цифровізація освіти відкриває значні перспективи для модернізації математичної підготовки майбутніх менеджерів. Головним завданням є трансформація математики з формальної дисципліни в потужний інструмент управлінського мислення та прийняття обґрунтованих рішень. Однією з ключових перспектив є можливість міждисциплінарної інтеграції. Математичні методи мають органічно вплітатися у профільні дисципліни («Стратегічний менеджмент», «Фінансовий менеджмент», «Управління проектами», «Маркетинг»). Це можна реалізувати через створення спільних модулів, таких як «Математичне моделювання бізнес-процесів», «Аналіз цифрових даних для менеджерів» чи «Оптимізація управлінських рішень».

Перспективним напрямом є перехід до проєктно-орієнтованого та проблемно-орієнтованого навчання. Студенти повинні регулярно виконувати практичні кейси, пов'язані з реальними бізнес-задачами: оптимізацію логістичних ланцюгів, прогнозування фінансових показників, моделювання поведінки споживачів, оцінку інвестиційних ризиків тощо. Такі проєкти розвиватимуть не лише математичні навички, а й аналітичне, критичне та системне мислення. Перспективним є і активне впровадження сучасних цифрових інструментів. Майбутні менеджери мають опановувати Power BI, Tableau, Python (з бібліотеками pandas, numpy, scikit-learn) та інші інструменти бізнес-аналітики. Це дозволить перейти від теоретичного вивчення статистики до практичного аналізу реальних даних. У перспективі математична підготовка повинна формувати не просто «користувача даних», а компетентного в цифрових даних менеджера, здатного приймати рішення на основі доказів. Нарешті, значні перспективи пов'язані з індивідуалізацією навчання та використанням адаптивних технологій, штучного інтелекту в освітньому процесі, що дозволить враховувати різний рівень математичної підготовки студентів. Відтак, цифрова трансформація бізнесу не лише створює виклики, але й відкриває унікальні можливості для оновлення математичної підготовки менеджерів. За умови системної методичної перебудови вищої школи можна підготувати нове покоління керівників – з аналітичним мисленням та здатних ефективно керувати бізнесом у складному цифровому середовищі.

Висновки

Цифрова трансформація бізнесу кардинально змінює роль сучасного менеджера, перетворюючи його з традиційного керівника на лідера, здатного приймати обґрунтовані рішення на основі аналізу великих даних. У цьому контексті математична підготовка стає не другорядним елементом, а стратегічно важливою складовою професійної компетентності майбутніх менеджерів. Проведений аналіз свідчить, що сьогодні система вищої освіти у сфері менеджменту стикається з низкою системних викликів: змістовим розривом між математикою та управлінськими дисциплінами, недостатнім рівнем цифрової компетентності, формальним характером математичної підготовки, низькою мотивацією студентів та слабкою міждисциплінарною інтеграцією. Ці проблеми призводять до того, що значна частина випускників не володіє необхідними аналітичними компетентностями для роботи в умовах цифрової економіки. Водночас цифровізація відкриває широкі перспективи для оновлення математичної підготовки. Перехід до проблемного та проєктно-орієнтованого навчання, активне впровадження сучасних інструментів бізнес-аналітики, інтеграція математичного моделювання у профільні дисципліни та формування цифрової культури в освітньому процесі дозволяють значно підвищити якість підготовки майбутніх менеджерів. Подальші дослідження доцільно спрямувати на розробку та апробацію конкретних моделей інтеграції математичних методів у підготовку менеджерів з урахуванням специфіки різних галузей бізнесу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Leadership vision for 2024 [Електронний ресурс] / Gartner. 2024. Режим доступу: https://www.gartner.com/en/documents/5263763
2. The Future of Jobs Report 2023 [Електронний ресурс] / World Economic Forum. – Geneva, 2023. 296 p. Режим доступу: https://www.weforum.org/publications/the-future-of-jobs-report-2023/.
3. The state of AI in early 2024: Gen AI adoption spikes and starts to generate value [Електронний ресурс] / McKinsey & Company. 2024. Режим доступу: https://www.mckinsey.com/capabilities/quantumblack/our-insights/the-state-of-ai-2024
4. Дембіцька С. В., Сіверт І. І. Вплив штучного інтелекту на еволюцію людських компетенцій. Цифрова трансформація освіти: теоретико-методичні засади : збірник мат. Міжнародної науково-практичної конф., присвяч.70-річчю проф. В. П. Сергієнка (28 жовтня). Київ : Вид-во УДУ імені МихайлаДрагоманова, 2024. С.101-102
5. Дембіцька С., Кобилянський О. Васаженко Н. Вплив інноваційних освітніх технологій на підготовку фахівців в умовах динамічного розвитку ринку праці. *Педагогіка безпеки.* 2024. Том 9, вип. 1.. С. 1–7.
6. Дембіцька С.В. Особливості освітніх інновацій в контексті розвитку цифрового суспільства. Інноваційні трансформації в сучасній освіті: виклики, реалії, стратегії : зб. матер. V Всеукр. відкр. наук.-практ. онлайн-форуму, Київ, 20 вер. 2023 р. / за заг. ред. І. М. Савченко, В. В. Ємець. — Київ: Національний центр «Мала академія наук України», 2023. С.108-110.
7. Дембіцька С.В. Розвиток культури безпеки у здобувачів вищої освіти в умовах надзвичайних ситуацій. Управління та адміністрування в умовах протидії гібридним загрозам національній безпеці: Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 22 листопада 2023 року). Київ: ДУІТ, ХНУРЕ, МНТУ. 2023. С. 791-794
8. Дембіцька С.В., Кобилянський О.В. Вдосконалення вищої технічної освіти в умовах сталого розвитку суспільства. Варіативні моделі й технології трансформації професійного розвитку фахівців в умовах відкритої освіти: зб. матер. Всеукр. наук.- практ. інтернет-конф., 23 червня 2022 р. [ред. кол.: Пуховська Л.П., Просіна О.В. та ін.]. – К. : ДЗВО «Ун-т менеджменту освіти», 2022. С.199-203
9. Дембіцька С.В., Кобилянський О.В. Формування самоосвітньої компетентності майбутніх фахівців в контексті інноваційного розвитку вищої освіти. Українські студії в європейському контексті: зб. наук. пр. 2022. №5. С.172-176.

10. Дембіцька С.В., Кузьменко О., Кобилянський О. Інноваційні засоби формування професійної культури майбутніх фахівців технічних спеціальностей. *Педагогіка безпеки*. 2022. № 7(1-2). С. 01–07. https://doi.org/10.31649/2524-1079-2022-7-1-001-007

11. Дембіцька С.В.,. Кобилянський О.В., Васаженко Н.О. Вплив інноваційних освітніх технологій на підготовку фахівців в умовах динамічного розвитку ринку праці. Педагогіка безпеки. 2024. Вип. 9, вип. 1. С. 1–7.

Доскоч Андрій Сергійович – аспірант кафедри безпеки життєдіяльності та педагогіки безпеки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: Andryshkastudent1@gmail.com.

Кобилянська Ірина Миколаївна – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри безпеки життєдіяльності та педагогіки безпеки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: irishakobilanska@gmail.com.

Andrii Doskoch – Postgraduate Student, Department of Life Safety and Safety Pedagogy, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Email: Andryshkastudent1@gmail.com.

Iryna Kobylianska – Candidate of Sciences (Pedagogical), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Life Safety and Safety Pedagogy, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine, Email: irishakobilanska@gmail.com.

Електронне наукове видання

Міжнародна науково-методична Інтернет-конференція Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності (2026)

23-24 червня 2026 року

Збірник матеріалів

Матеріали подаються в авторській редакції

Підписано до видання 01.07.2026 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № Р2026-079

Видавець та виготовлювач -
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua,
Email: irvc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.