

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ
В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ
ТА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ**

Монографія

За загальною редакцією П. Д. Лежнюка

Вінниця
ВНТУ
2014

УДК 621.311.16
ББК 31.27
П76

Автори:

П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, В. В. Нетребський, В. В. Тептя

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 27.12.2012 р.).

Рецензенти:

В. М. Кутін, доктор технічних наук, професор;

В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор.

Принцип найменшої дії в електротехніці та електроенергетиці :
П76 монографія / за заг. ред. П. Д. Лежнюка. — Вінниця : ВНТУ,
2014. — 212 с.

ISBN 978-966-641-576-2

В монографії розглянуто принцип найменшої дії (ПНД) і показано як він проявляється в електротехніці і електроенергетиці. Досліджується можливість формування умов самооптимізації нормальних режимів електроенергетичної системи на основі ПНД. Застосування ПНД розглядається щодо функціонування електричних систем з метою забезпечення умов для їх самоорганізації у відповідності з заданим критерієм оптимальності – втратами електроенергії. Ефективність використання ПНД показана на прикладі оптимального розподілу навантаження між електричними станціями. Показано, що ПНД доцільно використовувати для оптимізації режимів електроенергетичних систем.

УДК 621.311.16
ББК 31.27

ISBN 978-966-641-576-2

© П. Лежнюк, В. Кулик, В. Нетребський, В. Тептя, 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ.....	7
ВСТУП	8
1 ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ І ЙОГО ПРОЯВИ В ПРИРОДІ	12
1.1 Формування принципу найменшої дії	12
1.1.1 Коротка історична довідка	12
1.1.2 Варіаційний принцип Гамільтона	18
1.2 Прояв принципу найменшої дії в електротехніці	22
1.2.1 Принцип найменшої дії як метод оптимізації складних систем	22
1.2.2 Електромеханічні аналогії і застосування ПНД в електротехніці.....	23
1.2.2.1 Електромеханічні аналогії	23
1.2.2.2 Застосування ПНД в електротехніці	27
1.3 Застосування ПНД в оптимальному керуванні режимами ЕЕС	32
1.3.1 Особливості і характеристика ЕЕС як об'єкта оптимального керування.....	32
1.3.2 Аналіз ПНД як методу формування оптимізуючих впливів на режими ЕЕС.....	34
1.4 Висновки	37
2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УМОВ САМООПТИМІЗАЦІЇ НОРМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ ЕЕС.....	39
2.1 Математичне моделювання умов оптимальності струморозподілу в ЕЕС	39
2.1.1 Варіаційний метод пошуку оптимальних рішень на основі принципу найменшої дії.....	39
2.1.2 Оптимальний струморозподіл в замкнутій електричній мережі	40
2.1.3 Оптимальний струморозподіл в електроенергетичній системі	45
2.1.3.1 Оптимальний струморозподіл при заданих струмах у всіх вузлах крім балансуєчого.....	45
2.1.3.2 Оптимальний струморозподіл, коли на струми у генерувальних вузлах не накладені обмеження.....	47

2.2 Математичне моделювання умов оптимальності потоків потужності в ЕЕС	49
2.3 Оптимальний розподіл навантаження між джерелами електроенергії.....	51
2.3.1 Математична модель електричної станції в оптимальному керуванні режимами ЕЕС на засадах ПНД.	51
2.3.2 Оптимізація режиму ЕЕС за реактивною потужністю і напругою.	55
2.3.3 Комплексна оптимізація режимів ЕЕС.....	58
2.4 Висновки	60
3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРИЧНИХ СТАНЦІЙ НА ПІДСТАВІ ПРИНЦИПУ НАЙМЕНШОЇ ДІЇ	62
3.1 Математичне моделювання витратних характеристик ЕС.....	63
3.2 Критерії оптимальності найвигіднішого розподілу навантаження між джерелами електроенергії за різних умов експлуатації	67
3.2.1 Критерій оптимальності розподілу навантаження в умовах оптового ринку електроенергії.....	67
3.2.2 Критерій оптимальності розподілу навантаження в умовах ринку двосторонніх договорів.....	71
3.2.3 Критерій оптимальності розподілу навантаження в системі, що містить розосереджені джерела електроенергії.....	74
3.3 Аналіз чутливості втрат потужності, зумовлених експлуатацією джерел енергії в електроенергетичній системі.....	75
3.3.1 Аналіз чутливості взаємних і транзитних втрат потужності в ЕЕС.....	77
3.3.2 Визначення втрат потужності під час транспортування електроенергії за економічного і оптимального поточкорозподілу в ЕЕС.....	80
3.3.3 Оптимальне керування потоками в неоднорідних електричних системах з урахуванням чутливості.....	83
3.3.3.1 Визначення оптимальних е. р. с. від незбалансованих коефіцієнтів трансформації.	84
3.3.3.2 Визначення оптимальних коефіцієнтів трансформації трансформаторів зв'язку.....	86
3.4 Висновки	88

4 ВИКОРИСТАННЯ ПНД ДЛЯ ВДОСКОНАЛЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НОРМАЛЬНИМИ РЕЖИМАМИ ЕЕС	89
4.1 Алгоритм визначення параметрів оптимального режиму	89
4.1.1 Оптимізація режимів ЕЕС по активній потужності	90
4.1.2 Комплексна оптимізація режимів ЕЕС.....	94
4.1.3 Організація обчислювального процесу в ПК оптимізації режимів ЕЕС	96
4.2 Оцінювання та аналіз втрат потужності в ЕЕС для коригування тарифів за двосторонніми договорами.....	103
4.2.1 Алгоритм формування вектора чутливості втрат потужності в ЕЕС до зміни активних потужностей вузлів ЕЕС.....	103
4.2.2 Коригування тарифів на електроенергію з урахуванням чутливості втрат	105
4.2.3 Алгоритм визначення втрат потужності під час транспортування електроенергії за оптимального поточкорозподілу в ЕЕС	107
4.2.4 Алгоритм коригування цінових заявок з урахуванням двосторонніх договорів на постачання електроенергії.....	111
4.3 Використання ПНД в системах автоматичного керування	114
4.3.1 Автоматизація оптимального керування режимом ЕЕС з використанням ПНД.....	114
4.3.2 Автоматизація розподілу навантаження між електростанціями	117
4.4 Висновки	120
5 ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ ПНД	122
5.1 Розрахунок оптимальних режимів ЕЕС.....	122
5.2 Дослідження ефективності методів та алгоритмів оптимізації нормальних режимів на прикладі Південно-Західної ЕЕС	128
5.2.1 Особливості реалізації модуля комплексної оптимізації нормальних режимів електроенергетичних систем	128
5.2.2 Комплексна оптимізація нормального режиму на прикладі фрагмента схеми Південно-Західної ЕЕС	131
5.2.3 Формування графіків ведення оптимального режиму ЕЕС	135
5.3 Розрахунок оптимальних графіків потужності генерування в електроенергетичній системі	138

5.3.1	Визначення оптимального розподілу навантажень між джерелами електроенергії з урахуванням вартісних показників	138
5.3.2	Розрахунок оптимальних добових графіків навантаження джерел електроенергії на прикладі Південно-Західної ЕЕС	142
5.4	Визначення втрат в електричних мережах від транзитних перетоків потужності під час транспортування електроенергії від джерела до споживача	146
5.5	Аналіз чутливості оптимальних рішень до параметрів режиму ЕЕС в умовах їх експлуатації	155
5.5.1	Результати розрахунків з аналізу чутливості втрат потужності в ЕЕС до параметрів режиму	155
5.5.2	Аналіз чутливості оптимальних коефіцієнтів трансформації трансформаторів зв'язку до зміни потужностей у вузлах ЕЕС	157
5.6	Висновки	160
	ВИСНОВКИ	162
	ЛІТЕРАТУРА	165
	Додаток А вихідні дані та результати розрахунку усталеного режиму для тестової 14 вузлової електричної схеми ІЕЕЕ	182
	Додаток Б Вихідні дані та результати розрахунку усталеного режиму для схеми 110–750 кВ Південно-Західної електроенергетичної системи	187
	Додаток В Результати оптимізації обсягів надходження потужності від окремих джерел для забезпечення споживачів електромереж 110–750 кВ Південно-Західної електроенергетичної системи	199
	Додаток Д Дослідження характерних параметрів ітераційного процесу оптимізації обсягів вироблення електроенергії в ЕЕС	203
	Додаток Е Розрахунок оптимальних добових графіків навантаження джерел електроенергії Південно-Західної ЕЕС	204

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

АДЕ	– альтернативні джерела енергії
АСДК	– автоматизована система диспетчерського керування
АСК	– автоматизована система керування
АЧП	– аналіз чутливості та оптимізації втрат потужності
БД	– база даних
БР	– балансуючий ринок
ВДЕ	– відновлювані джерела енергії
ВДТ	– вольтододатковий трансформатор
ГЕС	– гідравлічна електрична станція
ДПЕК	– Донбаська паливно-енергетична компанія
ДРП	– джерела реактивної потужності
ЕГК	– енергогенерувальна компанія
ЕЕС	– електроенергетична система
ЕОМ	– електронно-обчислювальна машина
е. р. с.	– електрорушійна сила
ЕС	– електрична станція
ЛЕП	– лінія електропередачі
ОІК	– оперативно-інформаційний комплекс
ОРЕ	– оптовий ринок електричної енергії
ПК	– програмний комплекс
ПНВЕ	– принцип найменших втрат електроенергії
ПНД	– принцип найменшої дії
ПНТ	– постачальники за нерегульованим тарифом
ПРТ	– постачальники за регульованим тарифом
РДД	– ринок двосторонніх договорів
РДЕ	– розосереджені джерела електроенергії
РЕ	– ринок електричної енергії
РП	– регулювальний пристрій
РПН	– регулювання під навантаженням
САК	– система автоматичного керування
СОП	– спеціальний обчислювальний пристрій
ТЕС	– теплова електрична станція
ХЕО	– характеристика економічних опорів

ВСТУП

В сучасній енергетиці України вдосконалюються ринкові форми, очікується зростання електричного навантаження, інтелектуалізуються електричні мережі енергосистем [97, 139, 143]. З впровадженням балансуєчого ринку електроенергії та електропостачання за двосторонніми договорами, з розвитком сучасних інформаційних технологій низка задач в електроенергетичних системах (ЕЕС) і методи їх розв'язання вимагають перегляду. Зокрема до таких задач відноситься задача оптимізації нормальних режимів ЕЕС.

Нормальні стани ЕЕС відрізняються між собою параметрами режиму і кількістю електроенергії, що витрачається на її транспортування від джерел до споживачів (втрати електроенергії). Значення цих втрат окрім параметрів системи, значень навантажень і генерування залежить також від керуючих параметрів, – параметрів регулюючих пристроїв (РП) (трансформаторів, автотрансформаторів, вольтододаткових трансформаторів, лінійних регуляторів, джерел активної і реактивної потужності). При зміні будь-якого з параметрів в ЕЕС встановлюється новий режим, що характеризується певними параметрами режиму і значенням втрат електроенергії. Не завжди наявність існуючого механізму зворотних зв'язків, завдяки якому здійснюється саморегулювання системи, може забезпечити режим, який найвигідніший з погляду якості електроенергії і мінімуму її втрат [7]. Таким чином, цю властивість ЕЕС як штучної системи кібернетичного типу [7] необхідно удосконалювати.

Оскільки електричні мережі ЕЕС за своєю природою є неоднорідними, то ця їх особливість завжди призводить до додаткових втрат електроенергії під час її транспортування і розподілу. Мінімізувати ці втрати, тобто перейти від природного стану ЕЕС до оптимального, можливо тільки примусово. Шляхи і методи тут відомі різні [40]. Проте в сучасних умовах вони вимагають вдосконалення. Адаптацією методів оптимізації режимів ЕЕС до ринкових умов активно займаються вчені на пост-радянському просторі [17, 32, 34, 129, 136, 145].

При реалізації відмічених підходів для вибору кращих варіантів з різною ефективністю використовуються числові методи лінійного і нелінійного програмування. Загальним їх недоліком є те, що вони дають часткові розв'язки. У даній роботі досліджується можливість формування умов самооптимізації нормальних режимів ЕЕС на основі принципу

найменшої дії (ПНД) [75, 144]. Застосування ПНД розглядається стосовно функціонування ЕЕС з метою забезпечення умов для їх самоорганізації, або самооптимізації їх функціонування у відповідності з заданим критерієм оптимальності – втратами електроенергії. В цьому сенсі стосовно оптимізації станів ЕЕС ПНД можна формулювати як принцип найменших втрат електроенергії (ПНВЕ) на підтримання нормальних режимів ЕЕС.

Перенесення закономірностей довільних систем на електроенергетичну систему дозволяє стверджувати, що у будь-який момент часу функціонування для поточної сукупності параметрів системи та незалежних параметрів режиму вона знаходиться в оптимальному стані з точки зору технічних втрат електроенергії, але глибина цього оптимуму зумовлена мірою ідеальності самої системи. Таким чином, сприяння природному розвитку ЕЕС, тобто підвищенню міри її ідеальності, дозволяє завдяки механізмам самооптимізації забезпечувати зниження технічних втрат електроенергії незалежно від її навантаження. Саме це є суттєвою перевагою такого підходу порівняно з класичними методами оптимізації [40].

Підвищення міри ідеальності ЕЕС забезпечується розвитком її у двох напрямках: шляхом оптимізації параметрів режиму системи та за рахунок насичення системи від'ємними зворотними зв'язками. Обидва напрямки є взаємопов'язаними і для забезпечення максимального системного ефекту мають розглядатися в комплексі.

Для того, щоб виявити фізичну суть оптимізації конструктивних параметрів ЕЕС під час їх проектування і реконструкції, а також, щоб виявити сутність реалізації зворотних зв'язків в ЕЕС, необхідно встановити першопричини відхилення станів системи від глобального оптимуму за заданим критерієм оптимальності та дати їм оцінку, що дозволить розв'язати актуальну задачу оптимізації нормальних режимів електроенергетичних систем на засадах принципу найменшої дії.

Останні десятиліття в Україні відбуваються реформи в енергетичному секторі з метою впровадження ринкових методів керування. Було засновано оптовий ринок електроенергії (ОРЕ), на якому здійснюються операції купівлі-продажу електричної енергії за участі конкуруючих енергогенерувальних компаній, системних операторів та незалежних постачальників електричної енергії [122].

Особливості формування і функціонування ринку електроенергії обумовлюють специфічні її властивості, а саме: однорідність товару, універсальність, неможливість складувати товар, постачання тільки через електричні мережі, режим виробництва визначається режимом споживання. Такі особливості електроенергії ускладнюють процес керування в реальному часі. Жорсткі системні вимоги щодо балансу потужності та якості електричної енергії призводять до того, що при організації торгівлі в режимі реального часу споживачі не мають технічної можливості спостерігати за змінами цін, а тим більше реагувати на них зміною своєї поведінки.

Всі структурні перетворення в електроенергетиці повинні бути відображені в методах керування режимами електроенергетичних систем і математичних моделях. Планування режимів роботи повинне враховувати як технічні, так і економічні особливості функціонування суб'єктів енергосистеми. Враховуючи, що функціонування потужних компаній (виробників, постачальників та споживачів електроенергії) у конкурентних умовах призводить до конфлікту інтересів, необхідно замінювати постановку оптимізаційних задач, критерії оптимальності роботи ЕЕС і т. д. Оптимізацію функціонування джерел енергії вже не можна розглядати як задачу мінімізації витрат умовного палива. Тут доцільно розв'язувати комплекс задач забезпечення максимального прибутку від продажу електроенергії енергогенерувальною компанією у сукупності з мінімізацією витрат на транспортування енергії залежно від договірних умов.

З появою конкурентного ринку постає необхідність вдосконалення створених та розроблення нових моделей та методів розрахунку. Набуває актуальності розроблення програмного забезпечення для роботи ринку за новою моделлю та модернізації існуючої інформаційної інфраструктури енергосистеми, що дозволить вдосконалити процес електропостачання і керування енергосистемою. Очевидно, що нові розробки повинні орієнтуватися на застосування Smart Grid технологій.

На сьогодні способи передачі електроенергії базуються на принципах «одностороннього» зв'язку, розроблених багато десятиліть тому: електростанція направляє електроенергію до виробничих і офісних споруд, житлових будинків і т. д. Проте зі збільшенням частки альтернативних джерел, збільшується кількість вузлів, через які електроенергія надходить в розподільні мережі (так звана концепція розосередженого гене-

рування). Тому інфраструктура і методи керування режимами електричних мереж повинні ставати все більш «розумними», щоб забезпечити оптимальний розподіл електроенергії, отриманої з різних джерел. Мережі повинні вміти керувати передачею енергії та її споживанням, причому робити це в режимі реального часу, з максимальною ефективністю та на основі використання нових інформаційних технологій. Мова йде про впровадження технологій Smart Grid [54, 117, 120, 160, 164]. Наявність оптимізованих двосторонніх комунікаційних зв'язків в електричних мережах дозволить енергопостачальним компаніям скоротити втрати електроенергії в мережах. Автоматизовані системи диспетчерського керування є одним з ключових сегментів, на яких значною мірою позначиться розвиток технологій Smart Grid. Впровадження таких технологій дозволить регулювати попит, зсуваючи його в часі і тим самим вирівнюючи графік електроспоживання. Отже, Smart Grid підвищить ефективність генерування, транспортування і споживання електроенергії.

Як показує досвід, в сучасних умовах експлуатації найбільшої уваги вимагають задачі оперативного керування ЕЕС, при якому оброблення інформації і керування ведуться в режимі реального часу. Серед задач оперативно-диспетчерських служб в сучасних умовах важливою є задача вибору оптимального складу енергогенерувального обладнання. Вона повинна розв'язуватись з урахуванням тарифів на електроенергію виробників, запланованих об'ємів постачання електричної енергії, прогнозованих графіків електроспоживання, стану енергогенерувального обладнання, графіків планових ремонтів обладнання, метеорологічних факторів тощо [95, 96, 98, 99, 119, 120]. Враховуючи нагальність вирішення проблеми визначення оптимальних параметрів джерел електроенергії та зростаючий інтерес до проблеми використання відновлюваних джерел енергії, можна стверджувати про актуальність використання нових методів оптимального керування процесами виробництва, передачі і розподілу електроенергії.

Таким чином, метою даної роботи є підвищення ефективності виробництва і транспортування електричної енергії в електроенергетичній системі за рахунок впровадження нових і вдосконалення існуючих методів та алгоритмів оптимального розподілу навантаження між джерелами електроенергії з урахуванням мінімізації втрат електроенергії під час її транспортування та розподілу.

1 ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ І ЙОГО ПРОЯВИ В ПРИРОДІ

1.1 Формування принципу найменшої дії

1.1.1 Коротка історична довідка

Екстремальні принципи в класичній механіці вперше були сформульовані Г. Лейбніцем, П. Мопертюї, Л. Ейлером, в оптиці – П. Ферма. Але лише Ж. Лагранж і, особливо, У. Гамільтон додали їм той сенс і ту форму, яка виявилася плідною надалі у всіх розділах фізики. Термін «варіаційні принципи» пов'язаний з уявленням про математичну операцію варіювання (як правило позначається символом δ), тобто з виділенням деякого дійсного руху або стану як єдиного шляхом перебору спектра всіх можливих рухів або станів. Це рух або стан трактують як екстремальний по відношенню до всього різноманіття можливих.

Термін «екстремальні принципи» відтіняє у філософському сенсі певні моменти загальності цих принципів, що виходять далеко за межі фізики, – в кібернетику, біологію, теорію систем і ін. Він взагалі виділяє універсальність стосунків між максимумами і мінімумами або навіть просто наявність їх в процесах вимірювання.

Багато вчених XVII–XIX сторіччя намагались встановити єдине джерело для виведення диференційних рівнянь будь-якого фізичного процесу. «Ми повинні збирати і групувати явища до тих пір, – розмірковував Гамільтон, – поки наукова уява розрізнить в них прихований закон і єдність виникне з різноманіття. Потім ми повинні знову вивести з єдності різноманіття і за допомогою відкритого нами закону передбачати ще не виявлені явища» [118].

Варіаційний принцип для фізичної проблеми вперше був виразно сформульований в геометричній оптиці в XVII ст. і застосований до розв'язування задач віддзеркалення і заломлення світла. Це був принцип «найкоротшого часу» або «принцип Ферма». П. Ферма (1601–1665) в 1662 р. поклав в основу свого дослідження закону заломлення принцип найкоротшого часу. У замітці «*Synthesis ad Refractiones*» він вивів закон заломлення світла геометричним способом, виходячи з цього принципу. На думку Ферма, – «природа діє найбільш легкими доступними шляхами, а зовсім не коротшими, як це думає багато

хто». Конкретизуючи цю ідею, він говорить: «Подібно до того як Галілей, коли розглядав рух важких тіл в природі, вимірював відношення його не стільки відстанню, скільки часом, ми так само розглядаємо не найкоротші відстані або лінії, а ті, які можуть бути пройдені легше, зручніше і за коротший час» [118]. Закономірно виникла проблема відшукування аналогічних завдань з мінімальним значенням часу в механіці.

Вперше термін «дія» сформульований Лейбніцем (1646–1716), на який в цьому відношенні посилається і Мопертюї (1698–1759). Він викладений в праці з динаміки, над якою працював Лейбніц, але яка залишилась незавершеною і лише в 1860 р. була видана Г. І. Гергардтом [118]. Лейбніц називав цю величину «*actio formalis*». Сенс цього поняття полягає в тому, що зміна положення, що відбувається безперервно внаслідок сили інерції рухомої маси, само собою впливає з поняття маси, є її дією – «*actio formalis*». Визначається ця величина добутком маси, швидкості і довжини шляху, а оскільки довжина шляху може бути представлена у вигляді добутку швидкості на якийсь час, то величина дії визначається добутком живої сили на якийсь час.

У 1746 р. Мопертюї оголосив про універсальний закон руху і рівноваги – принцип найменшої кількості дії. Термін «кількість дії» розуміється в сенсі «дії» і вимірюється добутком mvs , де m – маса, v – швидкість, s – шлях, що проходить тіло. Для руху, $mvs = \min$, а у разі рівноваги, положення тіла таке, що коли йому переданий малий рух, то проведена кількість дії виявляється мінімальною.

Універсальний характер принципу Мопертюї доводить за допомогою аргументів телеологічного і теологічного характеру. Проголосивши принцип найменшої дії загальним законом світла, Мопертюї в 1746 р. представив Берлінській Академії роботу, в якій він застосував цей принцип для удару тіл і для випадку рівноваги.

Можна сказати, що найбільшою заслугою Мопертюї є висунення принципу мінімуму кількості дії як універсального закону природи, тоді як у Ейлера (1707–1783) те ж співвідношення має більший сенс і точний математичний вираз. Воно розглядалося як застосоване до окремих задач. Ось у цьому універсальному сенсі сформульованого Мопертюї принципу найменшої дії і міститься причина визнання Ейлером пріоритету Мопертюї. У цьому сенсі слів такого принципу не

було ні у Лейбніца, ні у Ейлера, хоча той же принцип, але не зведений в ранг «закону всесвіту», був відкритий Ейлером навіть раніше Мопертюї.

Спроба введення телеології в механіку викликала різку відсіч. Опубліковані Мопертюї роботи, в яких давалося телеологічне «обґрунтування» принципу найменшої дії, викликали велику дискусію, що вийшла далеко за межі механіки. У цій дискусії переплелися питання пріоритету, натурфілософські і фізичні питання про міру руху і фундаментальні проблеми світогляду і філософії.

В процесі розв'язування задачі про брахістохрон Я. Бернуллі висловив принцип, який хоч і не має загального характеру, але зіграв значну роль як на першій стадії розвитку варіаційного числення, так і у формулюванні Ейлером принципу найменшої дії. За принципом Я. Бернуллі, якщо будь-яка крива має властивість максимуму або мінімуму, то кожна її нескінченно мала частина має таку ж властивість. Саме це дозволило Ейлерові написати замість кінцевого шляху s , що входить у формулу, дану Мопертюї, елемент шляху ds і тим самим зробити крок вперед.

Ейлерові належить історично перша виразна ідея математичного змісту, який вкладається наукою в принцип найменшої дії. Саме Ейлер в 1744 р. показав, що для траєкторій, що описуються під дією центральних сил, інтеграл $\int v ds$, де v – швидкість, завжди рівний мінімуму або максимуму. Ейлер не дав цьому виразу якого-небудь спеціального найменування.

Математичний вираз, названий принципом найменшої дії, у Ейлера природно впливав з його робіт по пошуку кривих, що мають екстремальні властивості. Обмеження універсальності його характеру виявлялося з того, що у Ейлера він органічно пов'язаний із законом живих сил і має місце тільки там, де застосовний останній.

Робота Ейлера робить незначною роль Мопертюї, якому, по суті, належить тільки назва принципу. Мопертюї сам пише: «Цей великий геометр (Л. Ейлер) не тільки обґрунтував принцип ґрунтовніше, ніж це зробив я, але його погляд, більш охоплюючий і проникливіший, ніж мій, привів його до відкриття висновків, яких я не вбачав» [118]. Проте, не дивлячись на те, що вираз, що є математично осмисленою формою принципу найменшої дії, даний Ейлером незалежно і одноча-

сно з роботами Мопертюї, які були математично аморфні і не містили в собі ядра майбутнього прогресу, Ейлер завжди підкреслював пріоритет Мопертюї.

В процесі розвитку варіаційних принципів і методів телеологічні аргументи і ідеї поступово природно відпадають, оскільки їм немає місця в достовірно науковому знанні. Ейлер переконався в тому, що каузальне пояснення зовсім не еквівалентне телеологічному опису явищ, але має перед останнім ту очевидну перевагу, що будь-яка проблема механіки може бути вирішена без допомоги принципу найменшої дії, тоді як застосування останнього вимагає при розгляді конкретних завдань попереднього знання їх вирішення.

Досліджуючи фактичне застосування принципу до завдань механіки, Ейлер побачив, що знайти вираз, який повинен бути максимумом або мінімумом, для кожного завдання можна тільки тоді, коли вже відомий розв'язок цієї задачі, отриманий, виходячи із звичайних загальних принципів механіки, що формулюють не кінцеву мету, а причинно-наслідкові зв'язки явищ. Таким чином, евристичне значення принципу виявилось нікчемним. Він не дає можливості передбачати або встановити закони навіть тих механічних явищ, які досліджуються звичайними диференціальними рівняннями руху Ньютона. Як також було відмічено Ейлером, універсальність принципу найменшої дії навіть в межах механіки не є встановленою і він, Ейлер, не може скільки-небудь упевнено оцінити межі його застосовності. Треба відзначити, що Ейлер абсолютно не розглядав питання про визначення характеру варійованих рухів.

Після ряду спроб Ейлер припинив свої дослідження, пов'язані з принципом найменшої дії, хоча ця область дуже цікавила його як додаток розроблених ним методів пошуку кривих ліній, що мають властивість максимуму або мінімуму. Все це показує, що хоча Ейлер і не звільнився повністю від впливу телеологічного фіналізму Мопертюї, він, проте, прагнув математизувати принцип найменшої дії [107, 118]. Ейлер, не дивлячись на використання ним термінології Мопертюї, сформулював ідеї, які далеко перевершують обмежені і односторонні вислови Мопертюї. Ейлерові належить перше точне і математично плідне формулювання принципу найменшої дії, що відкрило нові горизонти для достовірно наукового застосування. Він є дійсним осно-

воположником науково сформульованого принципу найменшої дії в механіці. Він надав йому наукову форму. Потрібний був ще тільки один крок для того, щоб математично узагальнити його. Цей крок зробив Лагранж.

Саме Лагранж зіграв вирішальну роль в розвитку принципу найменшої дії. Він розповсюдив принцип, сформульований Ейлером для матеріальної точки, на випадок довільної системи точок, що пов'язані між собою і діють одна на одну абсолютно довільним чином. Таким чином, виявляється можливим застосувати принцип найменшої дії до динаміки системи.

Для Лагранжа принцип найменшої дії не пов'язаний з тим специфічним теологічним змістом, який вклав в нього Мопертюї. І, немов відповідаючи Ейлерові, Лагранж в своїй «Аналітичній механіці» говорить, що він називає цей принцип «принципом найменшої дії, за аналогією з принципом, який Мопертюї дав під цією назвою» [63, 118]. Лагранж в «Аналітичній механіці» ставить питання про фізичний сенс принципу найменшої дії. Саму назву «принцип найменшої дії» він вживає лише за традицією. Ця назва зовсім не відповідає математичному формулюванню принципу. Телеологія впливає не з механіки в її математичному формулюванні, а привноситься ззовні упередженими і довільними узагальненнями і невизначеними найменуваннями, «немов невизначені і довільні найменування склали суть законів природи і за допомогою якоїсь прихованої властивості здатні прості висновки з відомих законів механіки піднести до степеня кінцевих причин» [118].

Лагранж помічає довільність найменування величини mvs дією. Він вказує, що ця довільність і неясність в термінології дають можливість протягати телеологію туди, де їй інакше не було б місця. «Ці найменування, що даються нами, у жодному випадку не складають суті законів природи» [107]. Все значення, яке можна приписати цьому принципу, визначається його зв'язком із законом збереження живої сили і його математичною формою виразу. «Цей принцип, будучи сполучений з принципом живих сил і розвинений за правилами варіаційного числення, дає всі рівняння, необхідні для розв'язання кожної проблеми» [107]. Він дійсно є загальним методом вирішення проблем руху тіл, але це у жодному випадку не є самостійним, особливим ме-

тодом. Таким чином, в «Аналітичній механіці» принцип найменшої дії жодною мірою не є основним принципом механіки (не говорячи вже про природу).

Серед інших дослідників, що займалися питаннями, пов'язаними з принципом найменшої дії, необхідно відзначити Л. Карно (1753–1823). Під безпосереднім впливом робіт Лагранжа Л. Карно застосував принцип найменшої дії до теорії удару і встановлення загальних теорем імпульсного руху. У формулюванні Л. Карно «більш не залишається нічого невизначеного в принципі Мопертюї, який виражений строго і математично». Виключивши категорично всякий метафізичний аспект Л. Карно указує разом з тим, що претензії Мопертюї на універсальність принципу не обґрунтовані, і зокрема відзначає, що і в області законів удару, які виводив з нього Мопертюї, цей принцип не охоплює випадку, коли тіла мають різний ступінь пружності. В окремих же випадках за допомогою цього принципу можна отримати цікаві і корисні результати.

Наступний важливий крок зробив французький учений Пуассон, виходячи з розробленого Лагранжем методу варіації довільних постійних. Разом з тим він завершив включення всякої сторонньої метафізики з питань, пов'язаних із співвідношенням, що отримало назву принципу найменшої дії.

В подальшому до варіаційних принципів звернувся ірландський математик У. Гамільтон (1805–1865). Він будує свій загальний метод динаміки на основі розгляду і розвитку оптико-механічної аналогії. Гамільтон розглядає функцію, що вводиться ним, як результат індукції в оптичній науці. Ця функція охоплює всю геометричну оптику. Але важливо інше. Гамільтон відзначає в загальному вигляді спорідненість принципу Ферма і принципу найменшої дії. Звичайно, звідси ще досить далеко до побудови такої математичної схеми, в якій оптика променів збігалася б з механікою матеріальної точки. Тут ще немає нічого принципово нового, бо спорідненість принципу Ферма і принципу найменшої дії наголошувалося і раніше. Лише пізніше, коли в розробленій Гамільтоном математичній теорії співпадуть форми рівнянь променевої оптики і механіки, визначиться те, що називається оптико-механічною аналогією.

Таким чином, всі ці дослідження можна узагальнити таким чином. Мопертюї оголосив про універсальний закон руху і рівноваги – принцип найменшої кількості дії (principe da la moindre action). Термін «кількість дії» розуміється в сенсі «діяльності» і вимірюється як $I = mvs$.

Для руху $mvs = \min$, а у разі рівноваги, положення тіла таке, що коли йому переданий малий рух, то проведена цим кількість дії виявляється мінімальною.

Ейлер показав, що для випадку руху в полі центральної сили траєкторія, по якій рухається тіло, задовольняє вимогу [19]

$$\int v ds = \min.$$

Лагранж узагальнив цей принцип у вигляді [63]

$$\sum m_i \int v_i ds_i = \min.$$

Він розповсюдив принцип, сформульований Ейлером для матеріальної точки, на випадок довільної системи точок, що зв'язані між собою і діють одна на одну абсолютно довільним чином. Таким чином, виявляється можливим застосувати принцип найменшої дії до динаміки системи.

Гамільтон виходив з припущення, що система може бути і зв'язана, але кінетична енергія є однорідною функцією другого порядку від узагальнених швидкостей. Таким чином, він неявно припускав стаціонарність зв'язків.

Розглянемо більш детально особливості варіаційного принципу Гамільтона стосовно динамічних систем і траєкторій їх руху.

1.1.2 Варіаційний принцип Гамільтона

Як фундамент механіки можуть розглядатися не тільки диференціальні рівняння

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad (1.1)$$

$$L = K - \Pi, \quad (1.2)$$

що зв'язують механічні параметри в даний момент часу t , але також деякі загальні властивості, що характеризують рух механічної системи в цілому, на будь-якому довільному відрізку часу від t_1 до t_2 .

В (1.1) і (1.2): q – деякий узагальнений параметр, L – лагранжян системи, K – кінетична енергія, Π – потенційна енергія.

Переконаємося в цьому, аналізуючи величину

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) \cdot dt, \quad (1.3)$$

названу дією по Гамільтону на відрізку $[t_0, t_1]$.

Очевидно, що (1.3) є функціоналом, який залежить від того, як рухається система в момент часу $t_0 \leq t \leq t_1$ (див. рис. 1.1).

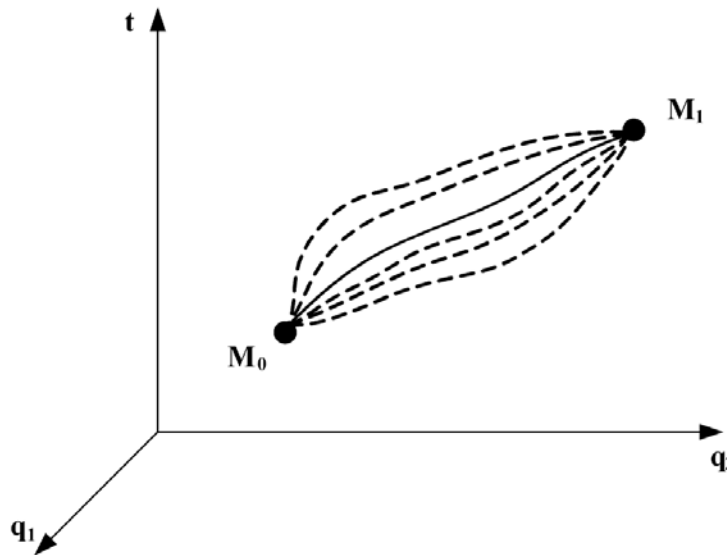


Рисунок 1.1 – Можливі траєкторії руху системи з однієї точки в іншу

Візьмемо в $(n+1)$ -вимірному просторі q, t дві точки $M_0(q(t_0), t_0)$ і $M_1(q(t_1), t_1)$, зафіксувавши тим самим моменти t_0, t_1 і положення системи в ці моменти («швидкості» \dot{q} в моменти t_0, t_1 не фіксуються). З точки M_0 в точку M_1 система може потрапити, рухаючись в просторі q, t , за будь-якими можливими траєкторіями (шляхами), тобто шляхами, що допускаються існуючими зв'язками. Нехай серед цих шляхів є так званий прямий шлях (суцільна лінія). На ньому функції $q_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, у будь-який момент часу підкоряються рівнянням Лагранжа (1.1). Решта шляхів називається обхідними (штрихові лінії).

Принцип Гамільтона формулюється так: дія Q має на прямому шляху екстремальне в порівнянні з обхідними шляхами значення [39, 46].

Охарактеризуємо всі можливі шляхи однопараметричним сімейством функцій

$$q_j = q_j(t, \alpha), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad |\alpha| \leq \beta < \infty, \quad j = \overline{1, n}$$

де значенню $\alpha = 0$ відповідає прямий шлях, а значенням $\alpha \neq 0$ – обхідні шляхи. Тоді дія (1.3), очевидно, є функцією параметра α :

$$Q(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[q_j(t, \alpha), \dot{q}_j(t, \alpha), t] dt.$$

Варіація Q при варіюванні параметра α

$$\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt, \quad (1.4)$$

дорівнює сумі приростів, викликаних варіацією координат $\delta q_j(t, \alpha)$ і швидкостей $\delta \dot{q}_j(t, \alpha)$.

Проінтегрувавши по частинах другий член в правій частині (1.4), отримуємо

$$\delta Q = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta(\dot{q}_j) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j \cdot dt,$$

або, використовуючи переставність операцій варіювання по α і диференціювання по t :

$$\delta(\dot{q}_j) = \delta \left[\frac{dq_j(t, \alpha)}{dt} \right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{d}{dt} q_j(t, \alpha) \delta \alpha = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} q_j(t, \alpha) \delta \alpha \right] = \frac{d}{dt} \delta q_j,$$

приходимо до рівності

$$\delta Q = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \delta q_j \cdot dt. \quad (1.5)$$

За побудовою варіації $\delta q_j(\alpha)$ дорівнюють нулю в моменти t_0, t_1 , тобто дорівнює нулю перший член в правій частині (1.5). Для прямого

ЛІТЕРАТУРА

1. Абакшин П. С. Комплекс программ планирования суточных режимов энергообъединений ПРЭС-СУТКИ / П. С. Абакшин, Т. М. Алябышева, Р. М. Яганов // Электрические станции. – 2004. – № 8. – С. 42–46.
2. Аберсон М. Л. Оптимизация регулирования напряжения / М. Л. Аберсон. – М. : Энергия, 1975. – 160 с.
3. Авраменко В. М. Методики і програмні засоби для забезпечення автоматичного та диспетчерського керування електроенергетичними системами / В. М. Авраменко, В. О. Крилов, В. Л. Прихно // Праці Інституту електродинаміки НАНУ. – 2010. – Вип. 26. – С. 31–37.
4. Алябышева Т. М. О методах оптимизации режимов энергосистем и энергообъединений / Т. М. Алябышева, Ю. И. Моржин, Т. Н. Протопопова // Электрические станции. – 2005. – № 1. – С. 44–49.
5. Антонюк Ю. В. Принцип формування роздрібних тарифів на електричну енергію / Ю. В. Антонюк // Проблеми загальної енергетики. – 2007. – № 15. – Режим доступу : http://www.ienergy.kiev.ua/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=39&Itemid=63.
6. Арзамасцев Д. А. АСУ и оптимизация режимов энергосистем / Д. А. Арзамасцев, П. И. Бартоломей, А. М. Холян. – М. : Высш. шк., 1983. – 208 с.
7. Астахов Ю. Н. Электрические системы. Кибернетика электрических систем / Ю. Н. Астахов, В. А. Веников, Ю. М. Горский. – М. : Высшая школа, 1974. – 328 с.
8. Астахов Ю. Н. Электроэнергетические системы в примерах и иллюстрациях / Ю. Н. Астахов, В. А. Веников, В. В. Ежков; под ред. В. А. Веникова. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 504 с.
9. Астахов Ю. Н. Применение критериального метода в электроэнергетике / Ю. Н. Астахов, П. Д. Лежнюк. – К. : УМК ВО, 1989. – 140 с.
10. Астахов Ю. Н. О моделировании оптимальных режимов электроэнергетических систем / Ю. Н. Астахов, П. Д. Лежнюк, В. И. Нагул // Электронное моделирование. – 1990. – № 2. – С. 84–89.

11. Астахов Ю. Н. Определение оптимальных режимов электрических сетей / Ю. Н. Астахов, П. Д. Лежнюк, В. И. Нагул // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1983. – № 1. – С. 48–59.
12. Аюев Б. И. Методы и модели эффективного управления режимами единой электроэнергетической системы России : автореф. дис. на соискание уч. степ. докт. техн. наук : спец. 05.14.02 «Электросети и электроэнергетические системы» / Б. И. Аюев. – Новосибирск, 2008. – 52 с.
13. Аюев Б. И. Анализ эффективности вычислительных моделей расчета установившихся режимов электрических систем / Б. И. Аюев, В. В. Давыдов, В. Г. Неуймин // Электричество. – 2008. – № 8. – С. 2–14.
14. Баламетов А. Б. Об определении экономического режима энергосистемы по активной мощности / А. Б. Баламетов, Э. Д. Халилов, Э. Д. Исмаилов // Проблемы энергетики. – 2008. – № 2–3. – Режим доступа : <http://www.elm.az/physics/PowerEng/2008/v2article/art04.pdf>.
15. Баринов В. А. Режимы энергосистем: Методы анализа и управления / В. А. Баринов, С. С. Абрамович. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 440 с.
16. Бартоломей П. И. Решение электроэнергетических задач методами второго порядка : учебное пособие / П. И. Бартоломей. – Свердловск : УПИ. – 1988. – 88 с.
17. Бартоломей П. И. Решение комплексной задачи распределения электроэнергии в энергосистеме / П. И. Бартоломей, А. О. Егоров, Е. Н. Машалов // Электричество. – 2007. – № 2. – С. 8–13.
18. Безверхий С. Принцип найменшої дії: історична довідка та деякі застосування в електротехніці та електромеханіці / С. Безверхий, В. Нагул, Гассан Шобаш // Проблемы создания новых машин и технологий (Научные труды Кременчугского политехн. ин-та). – 2000. – № 1. – С. 272–276.
19. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 448 с.

20. Бессонов Л. А. Нелинейные электрические цепи / Л. А. Бессонов – М. : Высшая школа, 1964.
21. Борисенко А. В. Модель функціонування та розвитку генеруючих потужностей в ринкових умовах / А. В. Борисенко, С. Є. Саух // Праці Інституту електродинаміки НАН України : збірник наукових праць.– К. – 2010. – Вип. 25. – С. 21–32.
22. Бурбело М. Й. Стимулювання зменшення втрат в електричних мережах / М. Й. Бурбело, Л. М. Мельничук : монографія. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 110 с.
23. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику / Н. В. Бутенин, Н. А. Фуфаев. – 2-е изд., пер. и доп. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.— 256 с.
24. Буткевич А. Ф. Некоторые практические вопросы интеллектуализации компонентов АСУ ТП тепловых электростанций / А. Ф. Буткевич, Л. Н. Лукьяненко, Е. В. Парус // Праці Інституту електродинаміки НАН України: збірник наукових праць. – 2005. – № 2(11). ч. 1. – С. 55–59. – Режим доступу : <http://rql.kiev.ua/tesd/sb2051.s20.html>.
25. Буткевич О. Ф. Підвищення ефективності розв'язання задач оперативного управління електричними мережами за допомогою експертних систем / О. Ф. Буткевич, В. В. Павловський // Теорія та моделі пристроїв вимірювальної і перетворювальної техніки: зб. наук. пр. – К. : Ін-т електродинаміки АН України, 1993. – С. 45–51.
26. Веников В. А. Электрические системы: электрические расчеты, программирование и оптимизация режимов. / под ред. В. А. Веникова. – М. : Высшая школа, 1973. – 320 с.
27. Веников В. А. Электрические системы: электрические сети. Т. 2 / под ред. В. А. Веникова. – М. : Высшая школа, 1971. – 438 с.
28. Веников В. А. Оптимизация режимов электростанций и энергосистем / В. А. Веников, В. Г. Журавлев, Т. А. Филиппова. – М. : Энергоиздат, 1981. – 464 с.
29. Веников В. А. Оптимизация режимов электростанций и энергосистем : учеб. для вузов / В. А. Веников, В. Г. Журавлев, Т. А. Филиппова. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 352 с.
30. Веников В. А. Регулирование напряжения в электроэнергетических системах / В. А. Веников, В. И. Идельчик, М. С. Лисеев. – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 216 с.

31. Веретенников В. Г. Метод переменного действия / В. Г. Веретенников, В. А. Сеницын. – 2-е изд., исправ. и доп.] – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 272 с.
32. Воротницкий В. Э. Особенности формирования балансов электрической энергии и мощности в современных условиях / В. Э. Воротницкий, Б. И. Макоклюев, Ю. М. Кудряшов // Электрические станции. – 2010. – № 3. – С. 2–8.
33. Воцинський Ю. К. Стан впровадження автоматизованих систем обліку електроенергії в магістарських і міждержавних мережах України. / Ю. К. Воцинський // Енергетичні ринки: перехід до нової моделі ринку двосторонніх контрактів і балансуючого ринку : спеціальний випуск збірника наукових праць Інституту електродинаміки НАН України. – К., – 2009. – С. 22–30.
34. Галашов Н. И. Оптимальное распределение нагрузок ТЭС на основе объектного подхода / Н. И. Галашов, П. В. Новик, С. Ю. Кузьмин // Электрические станции. – 2009. – № 3. – С. 43–44.
35. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике : учебное пособие для вузов / Ф. Р. Гантмахер. ; под ред. Е. С. Пятницкого. – 3-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 264 с.
36. Гвоздев Д. Б. Предложения по изменению процесса формирования тарифов для управления оптовым рынком электроэнергии / Д. Б. Гвоздев, В. В. Шурупов // Электрические станции. – 2002. – № 11. – С. 2–6.
37. Герхард Я. Х. Оптимизация загрузки оборудования когенерационных электростанций / Я. Х. Герхард, С. А. Гусева, А. Б. Долгицер // Технічна електродинаміка : тематичний випуск. Проблеми сучасної електротехніки. – 2008. – Ч. 1. – С. 42–46.
38. Глебов Н. И. Методы оптимизации : учеб. пособие / Н. И. Глебов, Ю. А. Кочетов. – Новосибирск, 2000. – 105 с.
39. Гончуков В. В. Автоматизация управления энергообъединениями / В. В. Гончуков, В. М. Горнштейн, Л. А. Крумм. – М. : Энергия, 1979. – 432 с.
40. Горнштейн В. М. Методы оптимизации режимов энергосистем / В. М. Горнштейн, Б. П. Мирошниченко, А. В. Пономарев ; под ред. В. М. Горнштейна. – М. : Энергия, 1981. – 336 с.

41. Даревский А. И. Теоретические основы электротехники / А. И. Даревский, Е. С. Кухаркин ; под ред. П. А. Ионкина. – Ч. II – М. : Высшая школа, 1965. – 282 с.
42. Долгицер А. Оптимизация режимов когенерационных электростанций по максимуму прибыли / А. Долгицер, О. Линкевич, А. Махнитко ; (на рус.яз.) // *Elektroenergetika Journal : Technical University of Kosice : Slovak Republic.* – 2008. – Vol 1, No. 2. – P. 33–39.
43. Дубовський С. В. Оптимізація навантажень ТЕС за ціновим пріоритетом / С. В. Дубовський // *Проблеми загальної енергетики.* – 2007. – № 15. – Режим доступу : http://www.ienergy.kiev.ua/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=42&Itemid=63.
44. Железко Ю. С. Компенсация реактивной мощности в сложных электрических системах / Ю. С. Железко – М.: Энергоиздат, 1981. – 200 с.
45. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій / Ю. П. Зайченко. – К. : ВІПОЛ, 2001. – 688 с.
46. Идельчик В. И. Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем / В. И. Идельчик – М. : Энергоатомиздат, 1998. – 288 с.
47. Идельчик В. И. Электрические системы и сети / В. И. Идельчик. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 592 с.
48. Ілка Левінгтон Україна – впровадження Концепції оптового ринку електроенергії (ОРЕ) / Ілка Левінгтон // *Електропанорама.* – 2009. – № 1–2. – С. 40–44. № 3. – С. 33–36.
49. Йо Тейссен Матеріали 21-го Всесвітнього енергетичного конгресу, що пройшов у Монреалі у вересні 2010 року / Йо Тейссен // *Новини енергетики.* – 2011. – № 1. – С. 10–18.
50. Карпов Ф. Ф. Компенсация реактивной мощности в распределительных сетях / Ф. Ф. Карпов – М. : Энергия, 1975. – 184 с.
51. Кириленко А. В. Оптимизация режимов энергосистем в условиях рынка электроэнергии / А. В. Кириленко, В. Л. Прихно // *Енергетичні ринки: перехід до нової моделі ринку двосторонніх контрактів і балансуєчого ринку : спеціальний випуск збірника наукових праць Інституту електродинаміки НАН України.* – К., – 2009. – С. 3–10.
52. Кириленко А. В. Иерархическое формирование режимов ОЭС Украины для оптимизационных расчетов в условиях рынка электроэнер-

нергии / А. В. Кириленко, В. Л. Прихно, В. В. Трубицын // Энергетичні ринки: перехід до нової моделі ринку двосторонніх контрактів і балансуєчого ринку : спеціальний випуск збірника наукових праць Інституту електродинаміки НАН України. – К., – 2009. – С. 10–14.

53. Кириленко О. В. Інформаційно-технологічні системи конкурентного оптового ринку електричної енергії в Україні / О. В. Кириленко, І. В. Блінов, Г. С. Корхмазов // Проблеми загальної енергетики. – 2009. – № 19. – Режим доступу : http://www.nbu.gov.ua/portal/natural/pze/2009_19/02_%20kyrylenko.pdf.

54. Кириленко О. В. Енергетика сталого розвитку: виклики та шляхи побудови / О. В. Кириленко, А. В. Праховник // Збірник наукових праць Інституту електродинаміки НАН України : спеціальний випуск. – 2010. – С. 10–16.

55. Кириленко О. В. Ієрархічний оперативно-керуючий комплекс автоматизованої системи диспетчерського керування / О. В. Кириленко, Б. С. Стогній, В. Л. Прихно // Збірник наукових праць Інституту електродинаміки НАН України. – 2008. – Вип. 20. – № 2. – Режим доступу : <http://www.ied.org.ua/ansborn/ansb208.s1.html>.

56. Кириленко О. В. Інтелектуальні вимірювальні перетворювачі струмів та напруг для інтелектуальних енергосистем / О. В. Кириленко, Є. М. Танкевич, С. Є. Танкевич // Збірник наукових праць Інституту електродинаміки НАН України : спеціальний випуск. – 2010. – С. 81–86.

57. Китушин В. Г. Критический анализ реформирования электроэнергетики России / В. Г. Китушин, Ф. Л. Бык // Электрические станции. – 2009. – № 12. – С. 6–8.

58. Концепція функціонування та розвитку оптового ринку електричної енергії України / Кабінет Міністрів України. – (Нормативний документ Кабінету Міністрів України. Постанова № 1789 від 16.11.2002). – Режим доступу : http://search.ligazakon.ua/l_doc2.nsf/link1/KP021789.html.

59. Красовский А. А. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.

60. Крошко Д. Л. Иєрархические алгоритмы решения задач оценивания состояния электроэнергетических систем / Д. Л. Крошко,

Д. А. Новицкий, О. А. Суханов // Электронное моделирование. – 2007. – Т. 29, № 1. – С. 85–96.

61. Крумм Л. А. Методы приведенного градиента при управлении электроэнергетическими системами / Л. А. Крумм. – Новосибирск : Наука, 1977. – 368 с.

62. Кузнецов В. Г. Оптимизация режимов электрических сетей / В. Г. Кузнецов, Ю. И. Тугай, В. А. Баженов – К. : Наукова думка, 1992. – 216 с.

63. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т.1 / Ж. Лагранж – М. : ГТТИ, 1950. – 594 с.

64. Ланцош К. Вариационные принципы механики: [пер. с англ.] / К. Ланцош. – М. : Мир, 1965. – 408 с.

65. Лауреаты Нобелевской премии : энциклопедия / [the N.W. Wilson Company, 1987] – М. : Прогресс, 1992. – 242 с.

66. Лежнюк П. Д. Аналіз чутливості оптимальних рішень в складних системах критеріальним методом : монографія / П. Д. Лежнюк. – Вінниця : Універсум-Вінниця, 2003. – 131 с.

67. Лежнюк П. Д. Натурно-імітаційне моделювання з використанням критеріального методу в оптимальному керуванні електроенергетичними системами / П. Д. Лежнюк, В. М. Гайдамака // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 1. – С. 37–41.

68. Лежнюк П. Д. Оптимізація режиму розподільних електричних мереж з розосередженими джерелами електроенергії / П. Д. Лежнюк, О. А. Ковальчук, В. В. Кулик // Електротехніка і енергетика : наукові праці Донецького національного технічного університету. – 2011. – Вип. 11 (186). – С. 250–254.

69. Лежнюк П. Д. Взаємовплив електричних мереж і систем в процесі керування їх режимами : монографія / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, О. Б. Бурикін. – Вінниця : Універсум-Вінниця, 2008. – 123 с.

70. Лежнюк П. Д. Оптимальне керування потоками в неоднорідних електричних системах з урахуванням чутливості / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, О. Б. Бурикін // Вісник національного університету «Львівська політехніка» : Електроенергетичні та електромеханічні системи. – 2010. – № 666. – С. 56–61.

71. Лежнюк П. Д. Оптимальний розподіл навантаження між електричними станціями в умовах енергоринку / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, О. Б. Бурикін // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2008. – № 3. – Режим доступу : http://www.nbu.gov.ua/e%2Djournals/VNTU/2008-3/2008-3.files/uk/08pdloem_ua.pdf.

72. Лежнюк П. Д. Оптимальне керування розосередженими джерелами енергії в локальній електричній системі / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, О. А. Ковальчук, // Збірник наукових праць Інституту електродинаміки НАН України : спеціальний випуск.– 2011. – ч. 1. – С. 48–55.

73. Лежнюк П. Д. Моделювання та формування умов оптимізації режимів електроенергетичної системи / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, К. І. Кравцов // Технічна електродинаміка : тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки.– 2002. – ч. 3. – С. 96–101.

74. Лежнюк П. Д., Кулик В. В., Кравцов К. І. Бурикін О. Б. Комар В. О. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 34106 Комп'ютерна програма «Програмний комплекс розрахунку втрат потужності і електроенергії в розподільних електричних мережах 110(35)-10(6)-0,4 кВ та розробки заходів щодо їх зменшення – Втрати» («Втрати»). – МОН України, Державний департамент інтелектуальної власності, Відділ з питань авторського права і суміжних прав. 13.07.2010.

75. Лежнюк П. Д. Принцип найменшої дії в задачах оптимізації електроенергетичних систем / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, В. В. Нетребський // Технічна електродинаміка : тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки.– 2006. – ч. 3. – С. 35–41.

76. Лежнюк П. Д. Оптимізація функціонування каскадів малих ГЕС з застосуванням засобів автоматичного керування / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, О. В. Нікіторович // Електротехніка і енергетика : наукові праці Донецького національного технічного університету. – 2008. – Вип. 8 (140).– С. 171–174.

77. Лежнюк П. Д. Моделирование и компенсация влияния неоднородности электрических сетей на экономичность их режимов / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, Д. И. Оболонский // Электричество. – 2007. – № 11.– С. 2–8.

78. Лежнюк П. Д. Моделювання оптимальних режимів роботи електричних станцій в умовах балансуєчого ринку / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, В. В. Тептя // Технічна електродинаміка : тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки. – 2010. – ч. 3. – С. 44–47.

79. Лежнюк П. Д. Оптимізація розподілу навантажень між електростанціями з урахуванням аналізу чутливості втрат потужності в ЕЕС / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, В. В. Тептя // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету ім. Михайла Остроградського. – 2009. – № 3 (56), част. I. – С. 158–160.

80. Лежнюк П. Д. Формування критеріїв оптимальності розподілу навантаження між електричними станціями в сучасних умовах / П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик, В. В. Тептя // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – № 6. – С. 59–65.

81. Лежнюк П. Д. Принцип найменшої дії в задачах технічної електродинаміки / П. Д. Лежнюк, В. І. Нагул, В. В. Нетребський // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2010. – № 1. – С. 110–118.

82. Лежнюк П. Д. Застосування принципу найменшої дії для оптимізації режимів електроенергетичних систем / П. Д. Лежнюк, В. В. Нетребський // Електроенергетичні та електромеханічні системи. Вісник Національного Університету «Львівська політехніка». – 2009. – № 637. – С. 44–50.

83. Лежнюк П. Д. Математичне моделювання оптимальних станів електроенергетичних систем на засадах принципу найменшої дії / П. Д. Лежнюк, В. В. Нетребський // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Електроенергетичні та електромеханічні системи. – 2007. – № 596. – С. 73–79.

84. Лежнюк П. Д. Оптимізація режимів роботи джерел електроенергії в енергосистемі з використанням принципу найменшої дії / П. Д. Лежнюк, В. В. Нетребський // Електротехніка і енергетика : наукові праці Донецького національного технічного університету. – 2011. – Вип. 11 (186). – С. 255–258.

85. Лежнюк П. Д. Самооптимізація режимів електроенергетических систем как проявление принципа наименьшего действия / П. Д. Лежнюк, В. В. Нетребський // Моделювання та керування ста-

ном еколого-економічних систем регіону. – 2008. – № 4. – С. 137–144.

86. Лежнюк П. Д. Принцип наименьшего действия в моделировании оптимальных состояний электроэнергетических систем / П. Д. Лежнюк, В. В. Нетребский, О. Ю. Петрушенко // Моделювання та інформаційні технології : збірник наукових праць інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України. – Київ, – 2010. – Т. 2. – С. 215–222.

87. Лежнюк П. Д. Подобие и расчет оптимального токораспределения в электрических сетях / П. Д. Лежнюк, Л. Р. Пауткина // Изв. Вузов. Энергетика. – 1989. – № 2. – С. 51–53.

88. Лежнюк П. Д. Расчет токораспределения в электрической сети / П. Д. Лежнюк, Л. В. Ярных // Электричество. – 1982. – № 8. – С. 10–14.

89. Летун В. М. Оптимальное управление режимом работы электростанций в условиях оптового рынка / В. М. Летун, И. С. Глуз // Электрические станции. – 2003. – № 3. – С. 8–12.

90. Лисеев М. С. Метод расчета наивыгоднейшего распределения реактивных мощностей в районных сетях / М. С. Лисеев, Эль-Саях С. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1979. – № 5. – С. 80–86.

91. Листровой С. В. Об использовании гарантированных прогнозов в методах решения задач булевого программирования на основе рангового подхода / С. В. Листровой, О. Н. Симашкевич // Электронное моделирование. – 2003. – Т. 25, № 4. – С. 89–103.

92. Любарский Ю. Я. Отечественные оперативно-информационные комплексы АСДУ энергосистемами / Ю. Я. Любарский, Ю. И. Моржин // Электрические станции. – 2001. – № 2. – С. 27–31.

93. Любченко В. Я. Генетический алгоритм оптимизации режимов энергосистем по активной мощности / В. Я. Любченко, В. З. Манусов, Д. А. Павлюченко // Электро. – 2003. – № 3. – С. 2–5.

94. Львович А. Ю. Основы теории электромеханических систем / А. Ю. Львович. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1973. – 196 с.

95. Макоклюев Б. И. Аспекты влияния летнего и зимнего времени на электропотребление энергосистем / Б. И. Макоклюев // Энергоэксперт. – 2011. – № 1. – С. 8–11.

96. Макоклюев Б. И. Информационная структура и программные средства обработки и хранения данных технологического оборудования и режимных параметров / Б. И. Макоклюев, А. В. Антонов, Р. Ф. Набиев. – Режим доступа : <http://energostat.ru/articles/>.

97. Макоклюев Б. И. Прогнозирование электрической нагрузки ОЭС Украины / Б. И. Макоклюев, А. В. Антонов, К. В. Ушаповский // Электрические сети и системы. – 2010. – № 4. – С. 4–12.

98. Макоклюев Б. И. Система формирования и планирования электропотребления и балансов электроэнергии Дальневосточного региона / Б. И. Макоклюев, А. А. Артемьев, А. В. Антонов, // Энергоэксперт. – 2011. – № 1. – С. 54–57.

99. Макоклюев Б. И. Влияние колебаний метеорологических факторов на электропотребление энергообъединений / Б. И. Макоклюев, В. С. Павликов, А. И. Владимиров // Энергетик. – 2003. – № 6. – Режим доступа : <http://energostat.ru/articles/>.

100. Манусов В. З. Эволюционный алгоритм оптимизации режимов электроэнергетических систем по активной мощности / В. З. Манусов, Д. А. Павлюченко // Электричество. – 2004. – № 3. – С. 2–8.

101. Маркович И. М. Режимы энергетических систем / И. М. Маркович. – М. : Энергия, 1969. – 352 с.

102. Махнитко А. Оценка величины и цены резерва мощности для производителей электроэнергии / А. Махнитко, Т. Ломан, Я. Герхард; (на рус.яз.) // Elektroenergetika Journal : Technical University of Kosice : Slovak Republic. – 2008. – V. 1, No. 2. – P. 40–44.

103. Мерцалов А. Е. Оптимизация процессов в энергетике / А. Е. Мерцалов // Электрические станции. – 2012. – № 1. – С. 26–37.

104. Методика по оценке эффективности применения трансформаторов с РПН и автоматического регулирования напряжения в замкнутых электрических сетях : РД 34.46.504-90. – М. : СПО Союзтехэнерго. – 1990. – 36 с.

105. Мехович С. А. Узгодження інтересів учасників ринку двосторонніх договорів / С. А. Мехович, М. М. Наташов, М. В. Швецов // Праці Інституту електродинаміки НАН України. Спеціальний випуск: Енергетичні ринки і перехід до нової моделі ринку двосторонніх кон-

трактів і балансуючого ринку. – К., 2009. – С. 68–70.

106. Мокін Б. І. Імітаційне моделювання в оптимальному керуванні нормальними режимами електричної системи / Б. І. Мокін, П. Д. Лежнюк, Ю. В. Лук'яненко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 1995. – № 3. – С. 5–9.

107. Мякишев Г. Я. Динамические и статистические закономерности в физике / Г. Я. Мякишев. – М. : Наука, 1973. – 272 с.

108. Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян. : Ч. IV. – Л. : Энергия, 1967. – 407 с.

109. Нікіторович О. В. Підвищення ефективності експлуатації малих ГЕС засобами автоматичного керування / О. В. Нікіторович, П. Д. Лежнюк, В. В. Кулик // Гідроенергетика України. – 2007. – № 3. – С. 38–41.

110. Никитин А. А. Особенности развития балансирующего рынка и рынка вспомогательных услуг в ОЭС Украины / А. А. Никитин, Д. А. Олефир, Е. Н. Франчик // Электропанорама. – 2010. – № 1–2. – С. 54–55. № 3. – С. 30–32. № 4. – С. 48–50.

111. Новоселов В. С. Вариационные методы в механике / В. С. Новоселов. – Л. : Изд-во Лен. ун-та, 1966. – 69 с.

112. Оболонский Д. И. Адаптация метода узловых напряжений к составу исходной информации / Д. И. Оболонский, И. А. Серова // Изв. вузов СССР : Энергетика. – 1986. – № 10. – С. 47–50.

113. Остром К. Системы управления с ЭВМ / К. Остром, Б. Виттенмарк. – М. : Мир, 1987. – 480 с.

114. Павловский В. В. Инженерный расчет потерь мощности и энергии в электрических сетях, основанный на моделировании установившихся режимов / В. В. Павловский, Г. Е. Куденко // Электрические сети и системы. – 2004. – № 3. – С. 17–22.

115. Павловський М. А. Теоретична механіка / М. А. Павловський. – К. : Техніка, 2002. – 510 с.

116. Пентегов И. В. Лагранжиан электрической цепи с сосредоточенными параметрами и его применение / И. В. Пентегов, И. В. Волков // Электричество. – 1969. – № 5. – С. 59–63.

117. Перспективы развития технологий Smart Grid в России – Режим доступа : http://www.elektropanorama.com.ua/ua/magazine/3_2009/market?article=799.

118. Полака Л. С. Вариационные принципы механики: [сб. ст.] / под ред. Л. С. Полака. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 932 с.

119. Полижаров А. С. Опыт разработки и внедрения иерархической системы прогнозирования электропотребления (ИСП) СО ЕЭС / А. С. Полижаров, А. В. Антонов, Э. А. Алла // Энергоэксперт. – 2010. – № 6. – С. 64–66.

120. Порошин В. И. Выбор состава включенного генерирующего оборудования / В. И. Порошин, Ф. Ю. Черных // Электрические станции. – 2009. – № 9. – С. 11–14.

121. Портнов Е. М. Построение интегрированных АСУ ТП распределенных энергообъектов и производств на информационно-управляющих телемеханических комплексах «Гранит-микро» / Е. М. Портнов, М. Л. Портнов // Электрические сети и системы. – 2004. – № 5, 6. – С. 59–64.

122. Правила оптового ринку електричної енергії України / Національна комісія регулювання електроенергетики України. – (Нормативний документ НКРЕ. Постанова НКРЕ № 921. Протокол Ради Оптового ринку електричної енергії України № 14 від 04.09.2003 р.). – Режим доступу : <http://forca.com.ua/knigi/pravila/pravila-optovogo-rinku-elektrichnoi-energii-ukraini.html>.

123. Прихно В. Л. Оптимизация режимов энергосистем с целью повышения эффективности рынка электроэнергии / В. Л. Прихно // Збірник наукових праць Інституту електродинаміки НАН України. – 2005. – Ч. 1, № 2 (11). – С. 34–36.

124. Прихно В. Л. Ієрархічне оцінювання режимів в енергооб'єднанні України / В. Л. Прихно, В. В. Трубіцин, П. О. Черненко // Праці Інституту електродинаміки НАНУ. – 2011. – Вип. 29. – С. 27–34.

125. Пуанкаре Анри. Избранные труды : в 3 т. / Анри Пуанкаре. – М. : Наука, 1974 – Т. 3 : Математика. Теоретическая физика. – 771 с.

126. Разумовский О. С. Методологические проблемы экстраполяции и инверсии / О. С. Разумовский // Философия науки. – 1995. – № 1. – С. 3–7.

127. Реклейтис Г. Оптимизация в технике / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел.– М. : Мир. – 1986. – 347 с.
128. Романов Л. Г. Применение алгоритмов случайного поиска в решении оптимизационных задач / Л. Г. Романов, В. Ю. Луценко // Электротехніка та електроенергетика. – 2002. – № 2. – С. 43–48.
129. Сафарян В. С. Метод оптимального распределения нагрузок между электростанциями / В. С. Сафарян // Энергетика. Изв. Вузов и энерг. объединений СНГ. – 2002. – № 1. – С. 11–15.
130. Сафрис Л. В. Принцип наименьшего действия в теории электрических цепей / Л. В. Сафрис, В. Ф. Попова // Теоретическая электротехника. – Львов : ЛПИ, 1970. – Вып. 10.– С. 103–105.
131. Сегеда М. С. Математичне моделювання в електроенергетиці : навч. посібник / М. С. Сегеда. – Львів : Видавництво національного університету «Львівська політехніка», 2002. – 300 с.
132. Сивокобыленко В. Ф. Математическое моделирование в электротехнике и энергетике : учебное пособие / В. Ф. Сивокобыленко. – Донецк : РВА ДонНТУ, 2005. – 350 с.
133. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский. – К. : Техніка, 1977. – 768 с.
134. Синьков В. М. Оптимизация режимов энергетических систем / В. М. Синьков, А. В. Богословский, Я. А. Калиновский ; под ред. В. М. Синькова. – К. : Вища школа, 1973. – 280 с.
135. Совалов С. А. Режимы единой энергосистемы / С. А. Совалов. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 384 с.
136. Соколов В. К. Задачи оперативной оптимизации производства электроэнергии в условиях рыночных отношений / В. К. Соколов, А. А. Прейгель, В. Г. Васильев // Электричество. – 2007. – № 1. – С. 2–9.
137. Сошина В. Либерализация рынка и ядерная энергия в Европе / В. Сошина. – Режим доступа : <http://www.baltic-course.com/archive/rus/index.htm-read=250.htm>.
138. Стогній Б. С. Інтелектуальні електричні мережі електроенергетичних систем та їхнє технологічне забезпечення / Б. С. Стогній, О. В. Кириленко, С. П. Денисюк // Технічна електродинаміка. – 2010. – № 6. – С. 44–49.

139. Інтелектуальні електричні мережі: світовий досвід і перспективи України / Б. С. Стогній, О. В. Кириленко, А. В. Праховник, С. П. Денисюк // Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України : спеціальний випуск. – 2011. – ч. 1. – С. 5–20.
140. Тонкаль В. Е. Баланс энергий в электрических цепях / В. Е. Тонкаль, А. В. Новосельцев, С. П. Денисюк ; отв. ред. Волков И. В. – К. : Наукова думка, 1992. – 312 с.
141. Уайт Д. Электромеханическое преобразование энергии / Д. Уайт, Г. Вудсон – Л. : Энергия, 1964. – 528с.
142. Ущাপовський К. В. Балансуючий ринок, допоміжні послуги та платежі за небаланс / К. В. Ущাপовський // Електропанорама. – 2008. – № 12. – С. 59–62.
143. Ущাপовський К. В. Перспективи впровадження ринку двосторонніх договорів та балансуючого ринку в ОЕС України / К. В. Ущাপовський, О. О. Нікітін, Д. О. Олефір // Енергетика і електрифікація. – 2010. – № 9. – С. 3–7.
144. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Изд. 3. – М. : Мир, 1966. Т. 6 : Электродинамика. Глава 19. Принцип наименьшего действия. – С.94–119.
145. Хачатрян В. С. Оптимизация режима большой электроэнергетической системы методом декомпозиции по активным мощностям электростанций / В. С. Хачатрян, М. А. Мнацаканян, К. В. Хачатрян // Электричество. – 2008. – № 2. – С. 10–22.
146. Хмельник С. И. Вариационный принцип экстремума в электромеханических системах / С. И. Хмельник – Published by “MiC” [Mathematics in Computer Comp.], printed in USA, Lulu Inc., Израиль-Россия, 2005. – 62 с.
147. Хмельник С. И. Комплекс программ расчета электромеханических систем / С. И. Хмельник // Творческие поиски ученых Израиля сегодня : материалы IV Международной конференции (Израиль, Ашкелон, 1999 г.) – С. 148–155. – Режим доступа : <http://www.laboratory.ru/articl/tech/at161/htm>.
148. Хмельник С. И. Принцип экстремума для электрических цепей переменного тока / С. И. Хмельник ; ВНИИЭлектроэнергетики. – М., 1988. – 26 с. – Деп. в Информэнерго 13.08.88, № 2960-ЭИ-88.

149. Холмский В. Г. Оптимизация потокораспределения в замкнутых электрических сетях с высокой степенью неоднородности / В. Г. Холмский // Электричество. – 1965. – № 9. – С. 16–21.
150. Холмский В. Г. Расчет и оптимизация режимов электрических сетей (специальные вопросы) / В. Г. Холмский. – М. : Высш. шк., 1975. – 280 с.
151. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М. : Мир. – 1989. – 655 с.
152. Чабан А. Застосування принципу Гамільтона–Остроградського для одержання рівняння трифазної лінії електропередач з розподіленими параметрами / А. Чабан // Електроінформ. – 2008. – № 3. – С. 23–26.
153. Чабан А. Математичне моделювання коливних процесів в електромеханічних системах : монографія / А. Чабан. – Львів : В-во Тараса Сороки, 2007. – 312 с.
154. Чабан А. Одержання рівняння двопровідної лінії на підставі принципу Гамільтона–Остроградського з урахуванням дисипації / А. Чабан // Електроінформ. – 2007. – № 2. – С. 27–28.
155. Черненко П. А. Повышение эффективности планирования режимов энергообъединения с использованием комплекса среднесрочного прогнозирования / П. А. Черненко, А. В. Мартынюк, А. И. Заславский // Технічна електродинаміка : тематичний випуск: Проблеми сучасної електротехніки.– 2008. – ч. 4. – С. 25–30.
156. Швецов А. Ринок електроенергії в Україні. Проблеми вдосконалення / А. Швецов, М. Земляний, В. Вербинський. – Режим доступу : http://www.niss.gov.ua/Monitor/april08/14/htm#_ftnref1.
157. Щербина Ю. В. Моделирование режимов сложных энергосистем при оптимальном управлении по данным телеметрии / Ю. В. Щербина, А. Г. Снежко, Н. А. Качанова // Проблемы моделирования динамических систем. – Кишинев : Штиница, 1990. – С. 167–176.
158. Яковенко Г. Н. Краткий курс аналитической динамики / Г. Н. Яковенко. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 238 с.
159. Яковенко Г. Н. Толковый словарь по теоретической механике / [сост. Г. Н. Яковенко]. – М. : МФТИ, 2007. – 68 с.

160. European Smart Grids Technology Platform // European Commission. Directorate-General for Research Sustainable Energy System, EUR 22040, – 2006. – 44 p.

161. Harry F. Olson, E. E., Ph. D. Dynamical analogies / Harry F. Olson, E. E., Ph. D. – RCA Laboratories, Princeton, New Jersey, 1943. – 196 p.

162. Khmelnik S. I. The Principle of Extreme in Electric Circuits / S. I. Khmelnik. – 2004. – Режим доступа : <http://www.laboratory.ru>.

163. Lezhnyuk P. Formation of optimality conditions for inhomogeneous electric power systems on least action principle / P. Lezhnyuk, V. Kulyk. // Proceedings on of the XIII International symposium on theoretical electrical engineering : ISTET'05: materials of conference – Lviv, Ukraine, 2005. – P. 165–168.

164. NIST Releases Report on Smart Grid Development // National Institute of Standards and Technology (USA) – Recognized Standards for Inclusion In the Smart Grid Interoperability Standards Framework, Release 1.0 Режим доступа : http://collaborate.nist.gov/twiki-sggrid/bin/view/_SmartGridInterimRoadmap/InterimRoadmapFinal.

Наукове видання

**Лежнюк Петро Дем'янович
Кулик Володимир Володимирович
Нетребський Володимир Васильович
Тептя Віра Володимирівна**

**ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ
В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ ТА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ**

Монографія

Редактор С. Малішевська
Оригінал-макет підготовлено В. Тептя

Підписано до друку 27.06.2014 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. др. арк. 12,24
Наклад 300 (1-й запуск 1–75) прим. Зам № В2014-31

Вінницький національний технічний університет,
КІВЦ ВНТУ,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано ФОП Барановська Т. П.
21021, м. Вінниця, вул. Порика, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4377 від 31.07.2012 р.