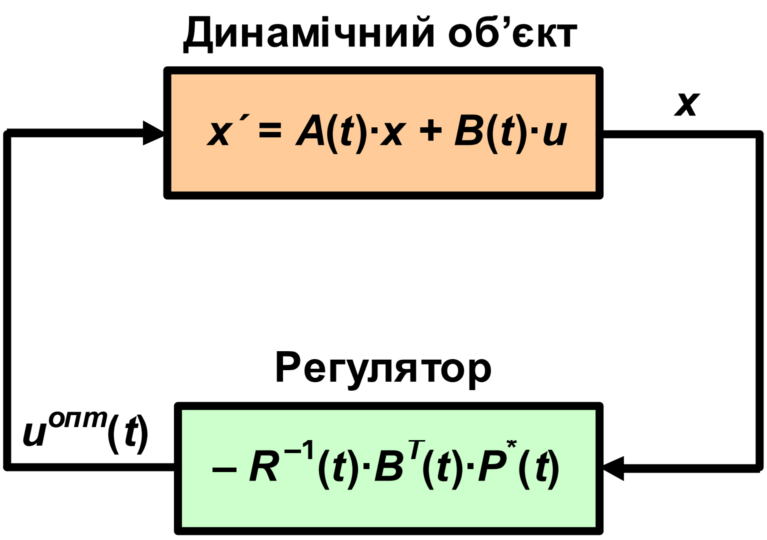
Б. І. Мокін, О. Б. Мокін

# ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ. МЕТОДОЛОГІЯ ТА ПРАКТИКА ОПТИМІЗАЦІЇ




Вінниця, 2013

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

**Б. І. Мокін, О. Б. Мокін**

# ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ. МЕТОДОЛОГІЯ ТА ПРАКТИКА ОПТИМІЗАЦІЇ

**Навчальний посібник**

Вінниця
ВНТУ
2013

**УДК 681.513.5:62-83**
**ББК 32.965**
**М74**

Автори:
**Б. І. Мокін, О. Б. Мокін**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Лист № 1/11-16754 від 26.10.2012 р.

Рецензенти:
**В. Я. Данилов**, доктор технічних наук, професор (НТУУ «КПІ»)
**С. Т. Толмачов**, доктор технічних наук, професор (КНУ)

**Мокін, Б. І.**
М74 Теорія автоматичного керування. Методологія та практика оптимізації : навчальний посібник / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 210 с.
ISBN 978-966-641-534-2

В навчальному посібнику головна увага приділена викладенню математичних методів оптимізації динамічних об'єктів, які можна віднести до класу детермінованих безперервних з зосередженими параметрами.

Навчальний посібник рекомендується для студентів, які навчаються за напрямком «Електромеханіка» спеціальностей «Електромеханічні системи автоматизації та електропривод» та «Електричні системи і комплекси транспортних засобів» для поглибленого вивчення дисципліни «Теорія автоматичного керування» у розділі «Оптимальні системи автоматичного керування».

**УДК 681.513.5:62-83**
**ББК 32.965**

**ISBN 978-966-641-534-2**

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Як відомо, кожний об'єкт, який перебуває у певному стані, після прикладення до нього зовнішнього впливу переходить в інший стан. В деяких об'єктах цей перехід здійснюється миттєво – такі об'єкти називають статичними. В переважній же більшості об'єктів цей перехід тією чи іншою мірою розтягується у часі, тобто супроводжується перехідними процесами – такі об'єкти називають динамічними. Оскільки внаслідок перехідних процесів в динамічних об'єктах витрачається непродуктивно певна кількість різних видів енергії і витрачається додатковий час на досягнення наступного стану, то надзвичайно велику роль для людства відіграє оптимізація їх режимів роботи та синтез систем оптимального керування цими режимами.

Під оптимізацією режимів роботи динамічних об'єктів ми будемо розуміти процес пошуку таких значень параметрів їх функціонування, що забезпечують досягнення залежно від характеру задачі максимуму або мінімуму якогось вибраного нами показника, який інтегрально характеризує ефективність функціонування динамічного об'єкта і який прийнято називати критерієм оптимізації. Значення параметрів функціонування динамічного об'єкта, які доставляють оптимум критерію оптимізації, прийнято теж називати оптимальними, а методи пошуку цих оптимальних значень називають методами оптимізації, ідеологія і алгоритми яких у сукупності та послідовності застосування складають суть методології оптимізації.

Досить часто ці оптимальні значення знаходяться всередині діапазонів фізично допустимих значень параметрів функціонування динамічних об'єктів. Але не менше випадків, коли теоретичний оптимум може бути досягнутий лише за межами фізично допустимих значень параметрів функціонування динамічних об'єктів, що унеможливлює його практичну реалізацію. В цих випадках задачу безумовної оптимізації переводять до розряду задач оптимізації в умовах наявності обмежень, для розв'язання якої методи оптимізації удосконалюють так, щоб їх алгоритми враховували появу цих обмежень.

На сьогодні вченими різних країн розроблено велику кількість методів оптимізації:

- як для об'єктів керування із зосередженими параметрами, так і з розподіленими;
- як для детермінованих об'єктів керування, так і для стохастичних;
- як для безперервних об'єктів керування, так і для дискретних.

Реальні динамічні об'єкти керування залежно від своєї структури та характеру навантаження можуть бути віднесеними до будь-якого класу об'єктів із перерахованих вище.

Прикладом безперервного об'єкта є електропривод, виконаний за системою «генератор – двигун», а дискретного – тиристорний електропривод. Автоматизований електропривод насоса, який по трубі качає рідину чи газ до споживача при наявності зворотного зв'язку лише за своїми власними режимними параметрами є прикладом об'єкта із зосередженими параметрами, а той же автоматизований електропривод при введенні зворотного зв'язку за тиском рідини чи газу на кінці труби (у споживача), якщо ця труба є достатньо довгою, вже стає об'єктом з розподіленими параметрами.

Детермінованим об'єктом можна вважати будь-який електропривод, який працює на стале навантаження за наявності завад, сумарна потужність яких на порядок менша потужності електродвигуна. Це може бути, наприклад, електропривод насоса, який закачує воду в резервуар.

Але автоматизований електропривод похилого конвеєра, який піднімає кускову залізну руду із шахти на поверхню, вже не може розглядатись як детермінований об'єкт, оскільки момент навантаження на валі електродвигуна має стохастичний характер і є порівнянним із його обертальним моментом.

В цьому навчальному посібнику ми розглянемо лише методологію оптимізації режимів роботи безперервних детермінованих об'єктів із зосередженими параметрами як при відсутності обмежень, так і за їх наявності та застосування цієї методології до синтезу систем оптимального керування динамічними об'єктами, які можуть бути віднесені до вказаного класу.

Оптимізація режимів роботи дискретних та стохастичних динамічних об'єктів і методологія синтезу систем оптимального керування ними буде нами розглянута в окремому навчальному посібнику.

При викладенні матеріалу авторами були використані в тій чи іншій мірі всі, наведені в бібліографії, літературні джерела, але, фактично, в основу даного навчального посібника нами покладено наш же навчальний посібник «Оптимізація електроприводів», опублікований у 2004 році з грифом університету, в якому було багато почерпнуто з книги Юрія Петровича Петрова [12], яка є бібліографічною рідкістю. Багато із викладених в цій книзі результатів, незважаючи на те, що з моменту їх отримання пройшло вже 50 років, не втратили актуальності та практичної цінності і сьогодні. Зазначимо, що, використовуючи як ілюстрації приклади розв'язання задач оптимізації із книги Ю. П. Петрова, ми одночасно ще в навчальному посібнику «Оптимізація електроприводів» виправили всі неточності, що допущені при викладенні цих прикладів у зазначеній книзі, серед яких виявились і такі, що мають принциповий характер.

Що ж стосується відмінностей даного нашого навчального посібника від нашого ж навчального посібника «Оптимізація електроприводів», то вони полягають у першу чергу в іншому структуруванні навчального матеріалу, обумовленому тим, що новий навчальний посібник орієнтовано на поглиблене вивчення дисципліни «Теорія автоматичного керування» в частині її застосування до розв'язання задач синтезу систем оптимального керування динамічними об'єктами, а також у деякому скороченні одних розділів і розширенні інших, що було підказано практикою використання цього навчального посібника в процесі підготовки спеціалістів і магістрів в галузі електромеханіки. Крім того, друга частина навчального посібника, що присвячена розв'язанню практичних задач оптимізації, доповнена двома розділами, в яких викладено нові результати, отримані авторами в напрямку оптимізації режимів роботи конкретних динамічних об'єктів після 2004 року.

## Частина перша. МЕТОДОЛОГІЯ ОПТИМІЗАЦІЇ

У першій частині навчального посібника ми викладемо методологію оптимізації динамічних об'єктів, розуміючи під методологією сукупність методів оптимізації, методик визначення областей застосування цих методів та алгоритмів їх реалізації при розв'язанні оптимізаційних задач.

Розпочинаючи викладення методології оптимізації, ми нагадаємо спочатку деякі поняття з диференціального числення, функціонального аналізу та теорії оптимізації, такі як: функція і функціонал, екстремуми функції та функціонала, класифікація екстремумів, приклади критеріїв та задач оптимізації.

Потім ми викладемо методи пошуку функцій, що доставляють екстремум деяким функціоналам у відсутності обмежень, тобто введемо у варіаційне числення, яке задає теоретичне підґрунтя процесам оптимізації динамічних об'єктів на основі рівняння Ейлера.

Далі викладемо методи пошуку функцій, що доставляють екстремум функціоналам при наявності обмежень, тобто адаптуємо класичне варіаційне числення до розв'язання прикладних задач оптимізації динамічних об'єктів з застосуванням методу і алгоритмів Лагранжа.

Після цього розглянемо методи оптимізації, метою яких є синтез математичних моделей оптимального керування динамічними об'єктами. Розглянемо алгоритми синтезу оптимального керування шляхом зведення задачі до ізопериметричної та з використанням принципу максимуму Понтрягіна. Покажемо, також, як розв'язувати задачі синтезу оптимального керування за допомогою динамічного програмування Беллмана та методу Калмана.

Далі ми введемо потрібні нам в подальшому поняття метричного, банахового та гільбертового просторів. Розкриємо їх властивості та властивості операторів. Введемо ортонормовані базиси в гільбертовому просторі та розкриємо процедуру апроксимації функцій з їх використанням.

Завершимо викладення методології оптимізації ми алгоритмами розв'язання задач оптимізації з використанням ортонормованих послідовностей в гільбертових просторах на основі методу Рітца.

Слід зазначити, що, оскільки в навчальний посібник з будь-якої навчальної дисципліни автори зобов'язані включати лише ті, уже апробовані, теоретичні засади, які включені до затвердженої міністерством навчальної програми цієї дисципліни, то у першу частину нашого навчального посібника ми також включили лише ті відомі методи і алгоритми оптимізації, які запропоновані не нами, а почерпнуті із літературних джерел, наведених у списку використаної літератури. Авторською є лише методика викладення цього теоретичного матеріалу за критерієм доступності його для інженерів, що засвоїли лише втузівський курс вищої математики.

# РОЗДІЛ 1
# СУТЬ ОПТИМІЗАЦІЇ

*В цьому розділі ми нагадаємо деякі поняття з диференціального числення, функціонального аналізу та теорії оптимізації, такі як: функція і функціонал, екстремуми функції та функціонала, класифікація екстремумів, приклади критеріїв та задач оптимізації.*

## 1.1 Функція

З курсу математики відомо, що *функція* – це закон, за яким одній числовій множині ставиться у відповідність інша числова множина.

Графічно це виглядає так, як показано на рис. 1.1.

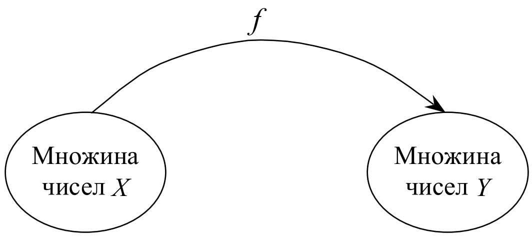



Рисунок 1.1 – Графічна інтерпретація поняття функції

При цьому множину $X$ називають областю задання функції, а множину $Y$ – областю значень цієї функції.

Умовно функцію найчастіше записують так

$$y = f(x),\ \ x \in X,\ \ y \in Y, \tag{1.1}$$

або так

$$y = y(x),\ \ x \in X,\ \ y \in Y, \tag{1.2}$$

де $\in$ – символ належності елемента до множини.

Якщо кожному числу $x \in X$ функція $f$ задає у відповідність лише одне число $y \in Y$, то така функція називається *однозначною*, а якщо кожному числу $x \in X$ функція $f$ задає у відповідність два або більше чисел $y \in Y$, то така функція називається *багатозначною*.

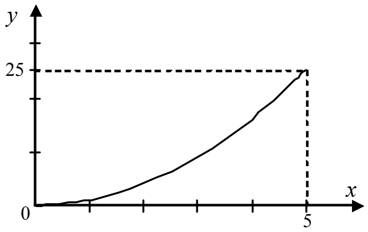
Функцію можна задавати таблично, графіком або однією чи декількома формулами. Приклади наведені на рис. 1.2.

В теорії функцій подано багато класів функцій і їх властивостей, але ми зупинимось лише на деяких із них, які нам будуть потрібні при розгляді задач оптимізації.

Функція, графік якої не має розривів, відноситься до класу *безперервних*, а безперервна функція, графік якої не містить зломів, а тому має безперервну першу похідну, відноситься до класу *гладких* (рис. 1.3, а).

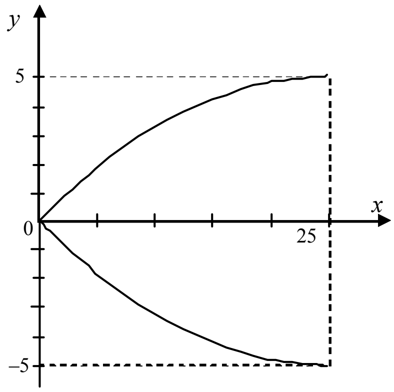
Безперервна функція, графік якої має зломи, а тому її похідна – розриви 1-го роду, відноситься до класу *кусково-гладких* (рис. 1.3, б).

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |



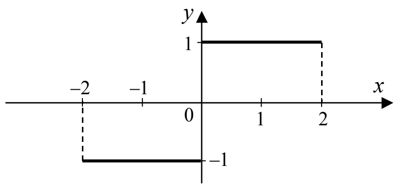

$$y = x^2, \ \ x \in [0, 5]$$

| X | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 |




$$y = \pm\sqrt{x}, \ \ x \in [0, 25]$$

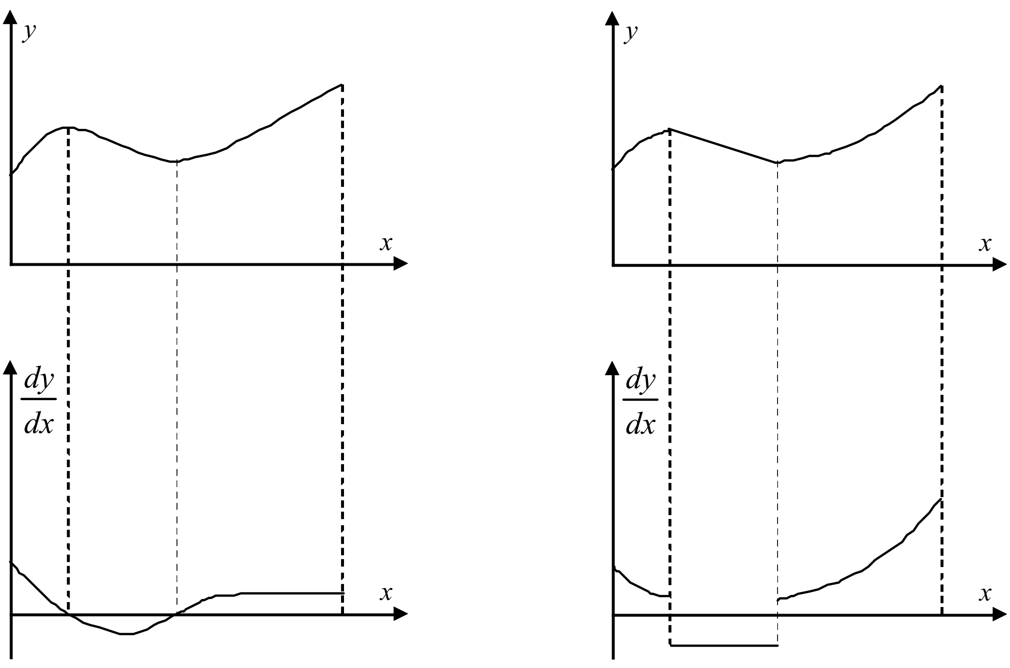
| X | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 |




$$y = \begin{cases} -1, & x \in [-2, 0], \\ +1, & x \in (0, 2]. \end{cases}$$

*а) таблично* *б) графічно* *в) формульно*

Рисунок 1.2 – Приклади задання функції




*а) гладка* *б) кусково-гладка*

Рисунок 1.3 – Приклади безперервних функцій

Саме на гладких та кусково-гладких функціях працюють класичні методи оптимізації, яким буде присвячено цей навчальний посібник.

### 1.2 Функціонал

З курсу математики відомо, що *функціонал* – це закон, за яким множині функцій ставиться у відповідність множина чисел.

Графічно це виглядає так, як показано на рис. 1.4.

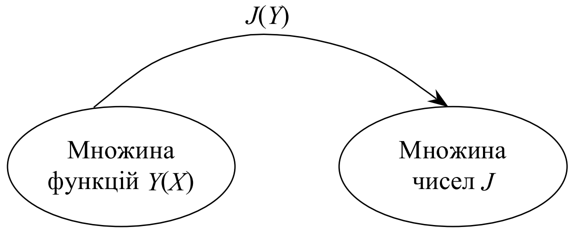



Рисунок 1.4 – Графічна інтерпретація поняття функціонала

При цьому множину $Y(X)$ називають областю задання функціонала, а множину $J$ – областю його значень.

Умовно функціонал найчастіше записують так

$$J_y = J(y(x), x),\ \ x \in X,\ \ y(x) \in Y(X),\ \ J_y \in J\ . \tag{1.3}$$

В задачах оптимізації нас цікавитиме лише один клас функціоналів, який задається визначеним інтегралом, наприклад,

$$J_y = \int_a^b y(x)\, dx \tag{1.4}$$

або

$$J_y^f = \int_a^b f(x, y)\, dx\,, \tag{1.5}$$

або

$$J_y^F = \int_a^b F(x, y, y')\, dx\,, \tag{1.6}$$

де $f(x, y)$ – математичний вираз, який є конструкцією з незалежної змінної $x$ та її функції $y(x)$, а $F(x, y, y')$ – математичний вираз, який є конструкцією з незалежної змінної $x$, її функції $y(x)$ та першої похідної $y'(x)$ від цієї функції; при цьому відрізок $[a, b]$ є областю задання функції $y(x)$, тобто $x \in [a, b]$.

На рис. 1.5 показано дві криві, які з’єднують точки площини $(0, 0)$ та $(1, 1)$.

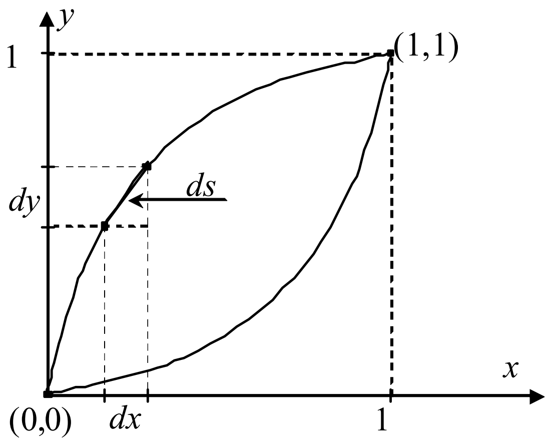



Рисунок 1.5 – Графічна інтерпретація побудови функціонала

Побудуємо формулу, за допомогою якої можна знайти довжину такої кривої.

З прямокутного трикутника зі сторонами $dx$ і $dy$ (рис. 1.5) знайдемо, що нескінченно малий елемент $ds$ довжини $L$ кривої, який є гіпотенузою цього трикутника, дорівнює

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx, \tag{1.7}$$

а сама довжина кривої $L$ визначається інтегралом

$$L = \int_0^1 ds \tag{1.8}$$

або

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \tag{1.9}$$

У виразі (1.9):

$$\begin{cases} [a, b] = [0; 1]; \;\; x \in [0; 1]; \\ F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}; \\ J_y^F = L. \end{cases} \tag{1.10}$$

Як другий приклад функціонала можна навести інтеграл

$$S = \int_0^T V\, dt, \tag{1.11}$$

в якому $S$ – це шлях, пройдений автомобілем за час $T$ зі швидкістю $V$.

У цьому випадку:

$$\begin{cases} [a, b] = [0; T]; \ t \in [0; T]; \\ y(x) = V(t); \\ J_y = S. \end{cases} \quad (1.12)$$

Як третій приклад функціонала наведемо вираз, за допомогою якого знаходяться втрати активної електричної потужності $\Delta P$ на опорі $R$ обмотки якоря електродвигуна, по якій тече струм $I(t)$. Цей вираз має вигляд

$$\Delta P = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\, R\, dt\,. \quad (1.13)$$

У цьому випадку:

$$\begin{cases} [a, b] = [0; T]; \ t \in [0; T]; \\ f(x, y) = I^2(t)\, R; \\ J_y^f = \Delta P. \end{cases} \quad (1.14)$$

Неважко навести інші приклади функціоналів, за допомогою яких множині функцій можна поставити у відповідність множину чисел.

## 1.3 Екстремум функції

Розглянемо дві функції $f_1(x)$, $f_2(x)$, задані графіками в області $x \in (-\infty, \infty)$ (рис. 1.6).

Нагадаємо, що для побудови графіка першої похідної від функції, заданої графічно, необхідно в кожній точці графіка функції визначити тангенс кута нахилу до осі $x$ дотичної до цього графіка, проведеної в даній точці. Аналогічно, з використанням графіка першої похідної, будується графік другої похідної цієї функції.

З цих графіків видно, що як у випадку мінімуму функції $f_1(x)$ в точці $x_{01}$, так і у випадку максимуму функції $f_2(x)$ в точці $x_{02}$, перші похідні $f_1'(x)$, $f_2'(x)$ в цих точках дорівнюють нулю. Тож цілком зрозумілим є той факт, що значення $x_{01}$ і $x_{02}$ необхідно знаходити шляхом розв'язання рівнянь

$$\begin{cases} f_1'(x) = 0, \\ f_2'(x) = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

І як розпізнати, де матимемо максимум, а де – мінімум, теж легко бачити з графіків, наведених на рис. 1.6.

Зрозуміло, що якщо

$$f_1''(x_{01}) > 0\,, \quad (1.16)$$

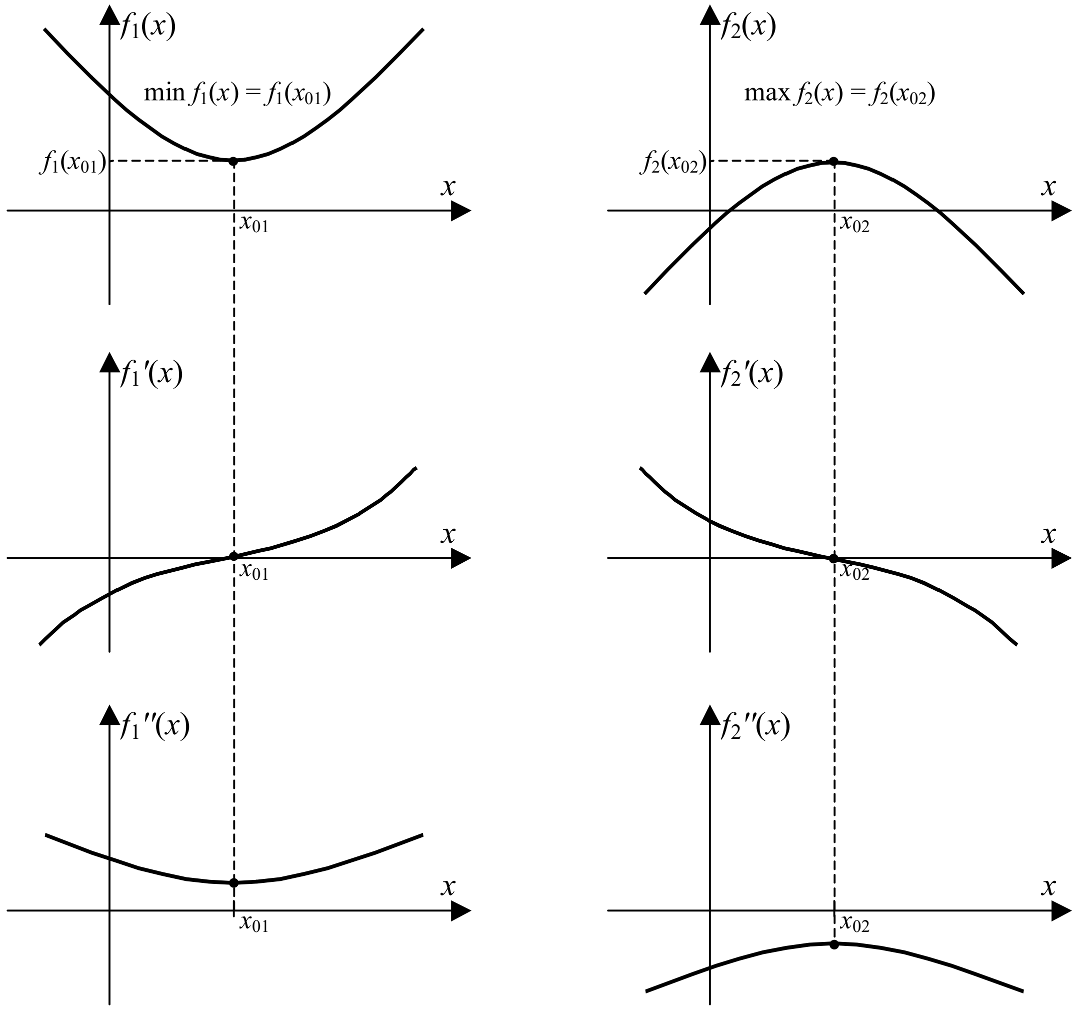
то в точці $x_{01}$ має місце мінімум функції $f_1(x)$, а якщо

$$f_2''(x_{02}) < 0, \tag{1.17}$$

то в точці $x_{02}$ має місце максимум функції $f_2(x)$.

Рівняння (1.15) задають необхідні умови існування екстремуму функції однієї змінної, а нерівності (1.16), (1.17) – достатні.

Виникає запитання: «А чи завжди при виконанні умов (1.15) має місце екстремум функції однієї змінної?»




*а) мінімум* *б) максимум*

Рисунок 1.6 – Графічна інтерпретація умов існування екстремуму функції однієї незалежної змінної

Виявляється, що не завжди. Це легко бачити з графіків функції $f_3(x)$ та її першої похідної $f_3'(x)$, наведених на рис. 1.7. З цих графіків видно, що в точці $x_{03}$, незважаючи на виконання необхідних умов екстремуму, тобто незважаючи на те, що

$$f_3'(x_{03}) = 0\,, \tag{1.18}$$

маємо і не максимум, і не мінімум функції, а її перегин.

Отже, умовою того, що в точці $x_{03}$ маємо перегин функції, як видно з графіка другої похідної $f_3''(x)$, наведеного теж на рис. 1.7, є

$$f_3''(x_{03}) = 0\,. \tag{1.19}$$

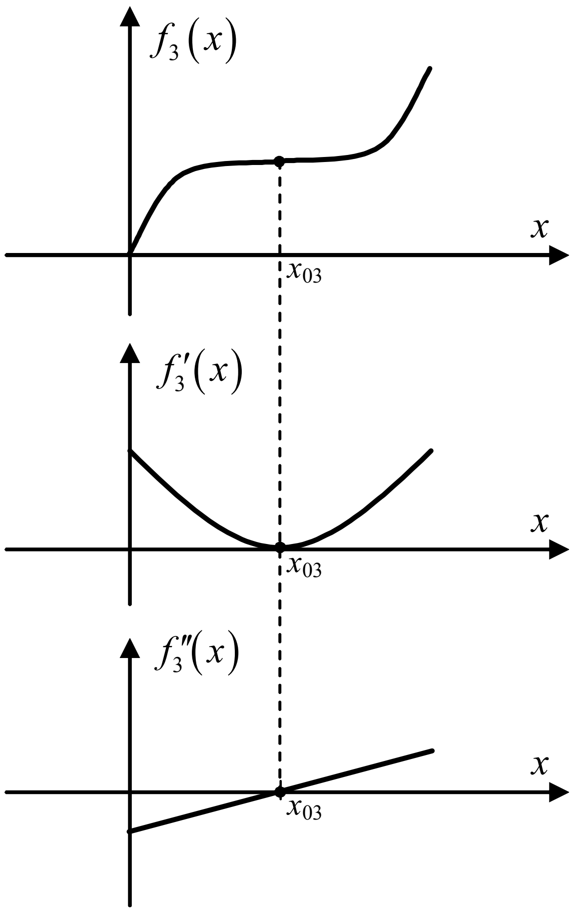



Рисунок 1.7 – Графічна інтерпретація умов відсутності екстремуму функції однієї незалежної змінної в точці, для якої виконуються необхідні умови його існування

На завершення цього підрозділу розглянемо ще один графік, наведений на рис. 1.8.

З цього графіка видно, що в області значень $x \in [a, b]$ функція має дві точки мінімуму ($f_4(x_{01})$, $f_4(x_{03})$) і дві точки максимуму ($f_4(x_{02})$, $f_4(x_{04})$). При цьому значення функції $f_4(x)$ в точці $x_{01}$ є меншим за значення цієї ж функції в точці $x_{03}$, а значення функції $f_4(x)$ в точці $x_{02}$ є більшим за її значення в точці $x_{04}$.

В зв'язку з такою можливістю максимуми та мінімуми функції поділяють на глобальні та локальні. Зрозуміло, що в точці глобального мінімуму функція має найменше значення в області її задання, а в точці глобального максимуму функція має найбільше значення в цій області.

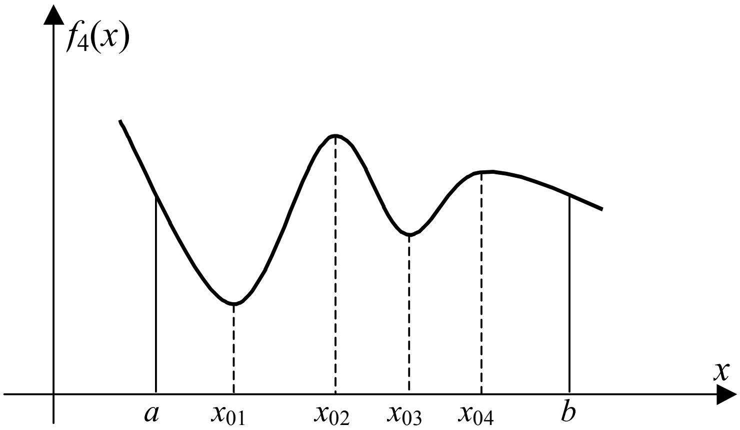



Рисунок 1.8 – Графік функції однієї змінної, яка має декілька мінімумів і максимумів

Тож, досліджуючи функцію на екстремум, слід не забувати дослідити її у всіх кореневих точках, отримуваних з рівняння необхідних умов екстремуму, інакше є небезпека зупинитись на локальному екстремумі і пропустити глобальний.

А тепер розглянемо функцію $f_{12}(x_1, x_2)$ двох незалежних змінних $x_1$ та $x_2$, де $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [c, d]$.

Зрозуміло, що такою функцією можна описати поверхню гори, яка піднялася над площиною землі, обмеженою прямокутником зі сторонами "$ab$" та "$cd$" (рис. 1.9).

На цьому ж рисунку показані графіки функцій однієї незалежної змінної $f_1(x_1, e)$ та $f_2(g, x_2)$, які є лініями перерізу поверхні гори з площинами, паралельними координатним площинам, за умови, що ці площини проходять на площині землі через точку з координатами $(g, e)$. Як бачимо, в функціях $f_1(x_1, e)$, $f_2(g, x_2)$ одна із змінних перетворилась на параметр, який після того, як ми його задали чисельно, перетворюється на коефіцієнт. Після цього функція двох незалежних змінних стає функцією лише однієї незалежної змінної.

Задамося питанням: «Як знайти найвищу точку гори?»

З математичної точки зору це означає, що необхідно знайти максимум функції $f_{12}(x_1, x_2)$.

Зрозуміло, що для того, щоб знайти цей максимум, необхідно спочатку знайти його координати на площині $x_1 x_2$ (див. рис. 1.9 – точка $(g, e)$).

Ми вже знаємо, як знайти координату точки максимуму для функції однієї незалежної змінної: треба взяти похідну від цієї функції, прирівняти цю похідну нулю і знайти корінь (чи корені) отриманого рівняння.

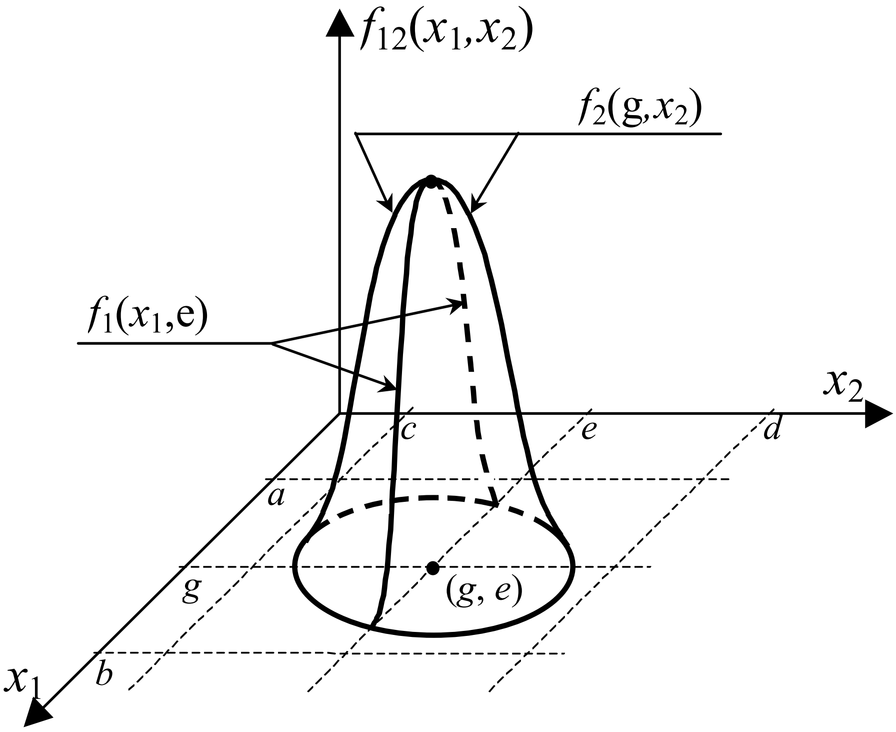



Рисунок 1.9 – Графічна інтерпретація функції $f_{12}(x_1,x_2)$ двох незалежних змінних $x_1$ і $x_2$, $x_1 \in [a,b]$, $x_2 \in [c,d]$

З викладеного вище сам собою напрошується спосіб пошуку координат точки максиму функції $f_{12}(x_1,x_2)$ двох незалежних змінних $x_1$, $x_2$ – треба взяти перші частинні похідні від цієї функції за кожною із незалежних змінних, вважаючи другу незалежну змінну в цьому процесі параметром, прирівняти отримані перші частинні похідні нулю і сумісно розв'язати отриману систему двох рівнянь з двома невідомими. Цей розв'язок і дасть нам чисельне значення координат точки максимуму функції.

Формально цю умову можна записати так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f_{12}(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = g,\ \ x_2 = e; \\ \qquad \Downarrow \\ f_{12}(g,e) = \max\limits_{\substack{[a,b] \\ [c,d]}} f_{12}(x_1,x_2). \end{cases} \tag{1.21}$$

Але цілком зрозуміло, що функцією $f_{12}(x_1,x_2)$ може описуватись не лише поверхня гори над площиною землі, але і поверхня провалля під площиною землі.

Тож, із системи рівнянь (1.21) не зрозуміло, що саме ми знайшли, розв'язавши їх, координати точки максимуму чи точки мінімуму.

Узагальнюючи викладки, які ми наводили щодо характеру екстремуму функції однієї незалежної змінної, на функцію двох незалежних змінних, можна стверджувати: для того, щоб розв'язок системи рівнянь (1.20) задавав координати точки максимуму функції $f_{12}(x_1,x_2)$ достатньо сумісного виконання системи нерівностей відносно других частинних похідних цієї функції такого характеру –

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=g,x_2=e} < 0, \\ \left.\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\right|_{x_1=g,x_2=e} < 0, \end{cases} \tag{1.22}$$

а для того, щоб цей розв'язок задавав координати точки мінімуму функції $f_{12}(x_1,x_2)$, достатньо сумісного виконання системи нерівностей відносно других частинних похідних цієї функції такого характеру –

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}\right|_{x_1=g,x_2=e} > 0, \\ \left.\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\right|_{x_1=g,x_2=e} > 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Якщо в умовах (1.22) або (1.23) одна з других частинних похідних дорівнює нулю, то точка $x_1 = g$, $x_2 = e$ лежить на прямій, по якій відбувається перегин поверхні, що описується функцією $f_{12}(x_1,x_2)$.

Якщо в умовах (1.22) або (1.23) обидві другі частинні похідні дорівнюють нулю, то точка $x_1 = g$, $x_2 = e$ лежить на плоскій ділянці поверхні, яка має місце на якійсь ділянці гори.

Якщо ж в умовах (1.22) або (1.23) одна друга частинна похідна більша за нуль, а інша – менша за нуль, то точка $x_1 = g$, $x_2 = e$ є сідловою – це нижня точка перевалу між двома горами або верхня точка перевалу між двома проваллями.

Завершуючи цей підрозділ, відзначимо, що якщо функція має більше двох незалежних змінних, то необхідні умови існування екстремуму відрізнятимуться від (1.20) лише більшою кількістю аналогічних рівнянь. Але достатні умови вже не можуть обмежуватись виконанням нерівностей (1.22), (1.23). Необхідно, щоб виконувались і ще деякі більш складні умови.

### 1.4 Критерії та обмеження в інженерних задачах оптимізації

Дієслово «оптимізувати» є спорідненим слову «оптиміст», а це особа бадьора, впевнена у благополучному кінці, життєрадісна – так запевняє словник. Іменник «оптимум» пояснюється як «найкращий рівень, розмір, кількість» і т. ін. Прикметник «оптимальний» визначається як «найбільш сприятливий» або «найкращий», наприклад, варіант, що приводить при заданих умовах до бажаного результату.

Зрозуміло, що якщо мова йде про щось найкраще, то необхідно домовитись про критерій, за допомогою якого ми встановлюємо цю «найкращість».

Серед факторів, які визначають критерій оптимальності роботи об'єкта, часто розглядають такі, як продуктивність, затрати, швидкодія, надійність, точність, прибуток, якість і т. ін.

Неможливо побудувати систему керування, у якої всі показники мали б оптимальні значення, оскільки умови досягнення цих значень дуже часто входять у протиріччя. А тому на практиці як критерій оптимальності вибирають критеріальну функцію (або функціонал), які залежать лише від одного чи кількох найбільш важливих факторів, а всі інші фактори враховують у вигляді обмежень.

Наприклад, при мінімізації вартості об'єкта, що проектується, ми змушені будемо враховувати обмеження за продуктивністю, точністю та надійністю.

Критеріальну функцію (чи функціонал), як правило, будують, виходячи з чотирьох принципів.

*1. Принцип однозначності.* За цим принципом як критеріальну функцію (чи функціонал) вибирають таку, яка однозначно визначає мету.

*2. Принцип відповідності.* За цим принципом як критеріальну функцію (чи функціонал) вибирають таку, оптимізація складових якої завжди приводить до заданої мети.

*3. Принцип керованості.* За цим принципом до критеріальної функції (чи функціонала) обов'язково повинні входити ті змінні, на які може впливати керівник, оператор чи регулятор. Критеріальні функції (чи функціонали), складені зі змінних, якими не можна керувати, нікому не потрібні, оскільки ніякої користі не принесуть.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Андреев В. П. Основы електропривода / В. П. Андреев, Ю. А. Сабинин. – Москва : Госэнергоиздат, 1963. – 772 с.

2. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Беллман Р. – Москва : Наука, 1976. – 351 с.

3. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – Москва : Мир, 1972. – 544 с.

4. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – Москва : Наука, 1967. – 608 с.

5. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – Москва : изд-во МГУ, 1974. – 374 с.

6. Вольдек А. И. Электрические машины : учебник для студентов высш. техн. учебн. заведений / Вольдек А. И. – 3-е изд., перераб. – Ленинград : Энергия, 1978. – 832 с.

7. Директор С. Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер. – Москва : Мир, 1974. – 464 с.

8. Квакернак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернак, Р. Сиван. – Москва : Мир, 1977. – 650 с.

9. Кузин Л. Т. Основы кибернетики : в 2 т. / Кузин Л. Т. – Москва : Энергия, 1973. – Т.1 : Математические основы кибернетики. – 1973. – 502 с.

10. Макаров И. М. Дополнительные главы математического анализа / Макаров И. М. – Москва : Просвещение, 1968. – 288 с.

11. Мокин Б. И. Математические модели квазиоптимального движения электропривода трамвая с учетом ограничений на скорость, ускорение и рывок / Б. И. Мокин, А. Б. Мокин // Тематический вып. сбор. науч. трудов Днепродзержинского государственного техн. ун-та: «Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика». – 2007. – С. 388-390.

12. Мокін Б. І. Ідентифікація параметрів моделей та оптимізація режимів системи електропривода трамвая з тяговими електродвигунами постійного струму : монографія / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 92 с.

13. Мокін Б. І. Квазіоптимальний закон зміни кутової швидкості обертання вала ротора електродвигуна постійного струму послідовного збудження системи електропривода трамвая в режимі сталого навантаження / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2007. – № 2. – С. 29–33.

14. Мокін Б. І. Математичні моделі в задачі оптимізації електропривода трамвая в номінальному режимі та в режимі перевантаження за критері-

єм мінімуму витрат електроенергії / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Матеріали міжнародної науково-технічної конференції “Електромеханічні системи, методи моделювання та оптимізації” (м. Кременчук). Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук : КДПУ, 2008. – Випуск 3/2008 (50) частина 1. – С. 142–144.

15. Мокін Б. І. Математичні моделі руху транспортних засобів, оптимальні за критерієм мінімуму витрат енергії, з урахуванням рельєфу / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2007. – № 3. – С. 28–33.

16. Мокін Б. І. Математичні моделі руху транспортних засобів, оптимальні за критерієм мінімуму витрат енергії, з урахуванням рельєфу / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2007. – № 3. – С. 28-33.

17. Мокін Б. І. Мінімізація витрат електроенергії електроприводом трамвая при його сталому недовантаженні / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків : НТУ «ХПІ». – 2008. – № 30. – С. 483–485.

18. Мокін Б. І. Модифікація квазіоптимального закону зміни кутової швидкості обертання вала ротора електродвигуна постійного струму послідовного збудження системи електропривода трамвая в режимі сталого навантаження / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2007. – № 3. – С. 46–49.

19. Мокін Б. І. Оптимізація електроприводів : навчальний посібник / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : УНІВЕРСУМ, 2004. – 250 с.

20. Мокін Б. І. Математичні методи ідентифікації електромеханічних процесів. Частина 1. Ідентифікація електромеханічних процесів в лінійних детермінованих системах з зосередженими параметрами : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін. – Вінниця : «УНІВЕРСУМ-Вінниця», 1998. – 153 с.

21. Мокін О. Б. Адаптація математичного методу обробки даних в задачі моделювання оптимального руху електричного транспортного засобу до умов обмеження на швидкість / О. Б. Мокін // Реєстрація, зберігання та обробка даних. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 62-70.

22. Мокін О. Б. Відносні моделі руху електричного транспортного засобу по горизонтальному прямолінійному відрізку колії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 2. – С. 20–24.

23. Мокін О. Б. Метод визначення структури математичної моделі електричного транспортного засобу з різнопрофільними вагонами, що руха-

ються прямолінійною горизонтальною колією / О. Б. Мокін // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2010. – № 2. – С. 24–29.

24. Мокін О. Б. Оптимізація режиму руху завантаженого електричного транспортного засобу на прямолінійному відрізку колії, прокладеній на горизонтальній площині / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Кременчуцького державного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук : КДПУ, 2010. – № 3/2010 (62), частина 2. – С. 162–165.

25. Мокін О. Б. Оптимізація режиму руху порожнього електричного транспортного засобу на прямолінійному горизонтальному відрізку колії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків : НТУ «ХПІ». – 2010. – №28. – С. 266–269.

26. Мокін О. Б. Оптимізація руху порожнього електричного транспортного засобу по прямолінійній горизонтальній колії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 3. – С. 28–33.

27. Мокін О. Б. Оптимізація руху порожнього електричного транспортного засобу на спусках і підйомах / О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 6. – С. 58–62.

28. Мокін О. Б. Особливості моделювання руху електричних транспортних засобів з врахуванням залежності навантаження від рельєфу місцевості [Електронний ресурс] / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Наукові праці ВНТУ. – 2010. – №1. – С. 1–6. – Режим доступу до журн.: www.nbuv.gov.ua/e-journals/VNTU/2010_1/2010-1.files/uk/10abmlor_ua.pdf.

29. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления / Петров Ю. П. – Москва – Ленинград : Энергия, 1965. – 220 с.

30. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа / Соболев В. И. – Москва : Наука, 1968. – 288 с.

31. Степанюк В. В. Методи математичного програмування / Степанюк В. В. – Київ : Вища школа, 1984. – 272 с.

32. Сю Д. Современная теория автоматического управления и ее применение / Д. Сю, А. Мейер. – Москва : Машиностроение, 1972. – 544 с.

33. Фильчаков П. Ф. Справочник по высшей математики / Фильчаков П. Ф. – Киев : Наукова думка, 1974. – 743 с.

34. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Цлаф Л. Я. – Москва : Наука, 1966. – 176 с.

35. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Эльсгольц Л. Э. – Москва : Наука, 1965. – 424 с.

36. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления / Янг Л. – Москва : Мир, 1974. – 488 с.

*Навчальне видання*

**Мокін Борис Іванович**
**Мокін Олександр Борисович**

# ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ. МЕТОДОЛОГІЯ ТА ПРАКТИКА ОПТИМІЗАЦІЇ

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет підготовлено О. Мокіним

Підписано до друку 06.09.2013 р.
Формат 29.7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 13,5.
Наклад 300 (1-й запуск 1-100) прим. Зам. № 2013-110.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.