

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

Комп'ютерне моделювання систем та процесів
Методи обчислень
Частина 1

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2013

УДК 519.876.5(075)

ББК 32.97в6я73

К32

Автори:

Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко, О. Ю. Софіна, О. М. Шушура

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Системна інженерія». Лист № 1/11-1254 від 01.02.2012 р.

Рецензенти:

Б. П. Русин, доктор технічних наук, професор

Г. С. Фінін, доктор фізико-математичних наук, ст.н.сп.

А. М. Петух, доктор технічних наук, професор

Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1 : навчальний посібник / [Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та інші]; за заг. ред. Р. Н. Кветного. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 191 с.

ISBN 978-966-641-520-5 (частина 1)

Перша частина навчального посібника, в якому розглянуто найпоширеніші чисельні методи, що зустрічаються в типових інженерних та наукових задачах, методи оптимізації та основи математичного моделювання, а також методи цифрової обробки сигналів та зображень, фрактальний та інтервальний аналіз. Призначено для студентів напряму підготовки «Системна інженерія» при вивченні дисципліни «Комп'ютерне моделювання систем та процесів», але може бути використано при вивченні широкого спектру дисциплін цього та інших напрямів, які пов'язані з комп'ютерними обчисленнями та обробкою даних, сигналів, зображень, а також для наукової роботи студентів, аспірантів, інженерів та вчених. Наведено широкий спектр прикладів та задач.

УДК 519.876.5(075)

ББК 32.97в6я73

ISBN 978-966-641-519-9 (загальний)

ISBN 978-966-641-520-5 (частина 1)

© Р. Кветний, І. Богач, О. Бойко, О. Софіна, О. Шушура, 2013

ЗМІСТ

Вступ	8
РОЗДІЛ 1 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	8
1.1 Поняття моделі та моделювання. Властивості та класифікація моделей	8
1.2 Узагальнена методика математичного моделювання	12
1.3 Аналітичне моделювання.....	16
1.3.1 Особливості аналітичного динамічного моделювання....	16
1.3.2 Особливості аналітичного статичного моделювання.....	19
1.4 Комп'ютерне та імітаційне моделювання	22
1.4.1 Алгоритми і програмування	22
1.4.2 Особливості комп'ютерного моделювання	27
1.4.3 Особливості імітаційного статистичного моделювання...	28
1.5 Похибки та властивості обчислювальних алгоритмів	40
1.6 Математичне моделювання і обчислювальні методи в задачах проектування комп'ютерних систем автоматики та управління	43
1.7 Інструментальні засоби моделювання.....	45
1.7.1 Моделювання з використанням математичних пакетів...	45
1.7.2 Програмні пакети для імітаційного моделювання.....	48
1.7.3 Системи автоматизованого проектування.....	56
Контрольні запитання та завдання	62
РОЗДІЛ 2 ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	64
2.1 Розв'язання систем лінійних рівнянь	64
2.1.1 Прямі методи	65
2.1.1.1 Метод Гаусса	65
2.1.1.2 Метод виключення Гаусса-Жордана	69
2.1.1.3 Модифікований метод Гаусса	69
2.1.1.4 Застосування прямого ходу метода Гаусса для пошуку визначників	71
2.1.1.5 Метод Крамера	72
2.1.1.6 Метод оберненої матриці	73
2.1.1.7 Метод прогонки	73
2.1.2 Ітераційні методи	74
2.2 Визначення власних значень матриць	77
2.2.1 Постановка проблеми	77
2.2.2 Методи обчислення власних значень	78
2.2.2.1 Прямі методи	79

2.2.2.2 Ітераційні методи	80
2.2.2.3 Методи перетворень подібності	81
2.2.3 Порівняння методів визначення власних значень	83
Контрольні запитання та завдання	84
РОЗДІЛ 3 НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ	87
3.1 Розв'язання нелінійних рівнянь	87
3.1.1 Метод половинного ділення	91
3.1.2 Метод хибного положення (хорд)	92
3.1.3 Метод Ньютона (дотичних)	95
3.1.4 Метод січних	97
3.1.5 Метод простої ітерації	98
3.1.6 Визначення комплексних коренів	99
3.2 Розв'язання систем нелінійних рівнянь	101
Контрольні запитання та завдання	106
РОЗДІЛ 4 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ	108
4.1 Методи розв'язання задачі Коші	110
4.1.1 Однокрокові методи	111
4.1.2 Багатокрокові методи	118
4.1.3 «Жорсткі» задачі	121
4.1.4 Вибір методу розв'язання задачі Коші	121
4.2 Методи розв'язання крайових задач	122
4.2.1 Метод «стрілянини»	123
4.2.2 Різницеві методи	123
Контрольні запитання та завдання	126
РОЗДІЛ 5 МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ	127
5.1 Різницевий метод	129
5.2 Розв'язання різних типів диференціальних рівнянь в частинних похідних	133
5.2.1 Еліптичні рівняння	133
5.2.2 Гіперболічні рівняння	135
5.2.3 Параболічні рівняння	136
5.3 Загальні рекомендації до розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних	137
Контрольні запитання та завдання	138

РОЗДІЛ 6 МЕТОДИ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ	139
6.1 Інтерполяція	139
6.1.1 Різницеві методи	140
6.1.2 Інтерполяція за Лагранжем	147
6.1.3 Сплайн-інтерполяція	149
6.1.3.1 Класичний кубічний сплайн	152
6.1.3.2 Створення сплайнових параметричних кривих	155
6.2 Апроксимація даних	161
6.3 Статистична обробка даних	164
6.4 Чисельне інтегрування	168
6.4.1 Формули прямокутників	169
6.4.2 Формули Ньютона -Котеса	171
6.4.3 Формула Чебишева	173
6.4.4 Формула Гаусса	175
6.4.5 Оцінка похибки при чисельному інтегруванні	178
6.4.6 Алгоритми застосування чисельних методів	178
6.4.7 Метод Монте-Карло	180
6.5 Чисельне диференціювання	183
6.5.1 Чисельне диференціювання аналітично заданих функцій	183
6.5.2 Чисельне диференціювання таблично заданих функцій	185
Контрольні запитання та завдання	186
Література	188

ВСТУП

Одним з головних напрямків науково-технічного прогресу протягом вже кількох десятиріч є розвиток методів і засобів інформатики та обчислювальної техніки. Використання методів математичного моделювання та комп'ютерного розв'язання інженерних і наукових задач дозволяє значно підвищити ефективність процесів проектування та управління. Впровадження персональних комп'ютерів, комп'ютерних інформаційних мереж, побудова та розвиток INTERNET, широке та різноманітне використання методів математичного моделювання привели до розширення як практичної, так і теоретичної баз комп'ютерної математики. Математичне комп'ютерне моделювання стало головним засобом дослідження складних процесів і систем, на якому базуються сучасні підходи до проектування, оптимізації та управління в різних галузях науки і техніки. Обчислювальна математика стала основою для реалізації та комп'ютерного розрахунку методів математичного моделювання.

Метою цієї книги, що видана в двох частинах, є ознайомлення широкого кола студентів, науковців, інженерно-технічних працівників з основними поняттями комп'ютерного моделювання систем і процесів та методами розв'язання на комп'ютерах сучасних задач обчислювальної математики, що виникають в процесі дослідження й проектування систем управління та автоматики.

Посібник призначений для студентів напрямів підготовки «Системна інженерія» та «Комп'ютерна інженерія», але також може бути використаний для інших спеціальностей при вивченні дисциплін, пов'язаних з чисельними методами, методами обробки даних, оптимізацією та плануванням експерименту.

Теоретичною основою посібника стали відомі роботи в області моделювання та обчислювальної математики Л. Коллатця, Дж. Форсайта, Р. Мура, Д. Кнута, А. Самарського, Б. Демідовича, І. Марона, В. Скурихіна, М. Бусленка, А. Крилова, А. Верланя, Г. Марчука та інших вітчизняних і закордонних вчених. В посібнику узагальнено досвід багаторічного викладання Р. Н. Кветним курсів з обчислювальної математики та моделювання, використано результати наукових і навчально-методичних розробок співавторів цієї книги.

Перший розділ першої частини книги присвячений розгляду основних понять і підходів до побудови математичних комп'ютерних моделей. В наступних розділах розглянуто найбільш поширені задачі обчислювальної математики, методи та алгоритми їх розв'язання. Ці задачі розглянуто в першій частині навчального посібника. Друга частина присвячена задачам обробки сигналів та зображень, що дуже поширені в практиці комп'ютерного моделювання, інтервальним методам та ще деяким

проблемам, які пов'язані з розрахунками в процесі математичного моделювання й можуть бути корисними для сучасних науковців та інженерів.

Використання посібника передбачає знання основ програмування, а алгоритмізація та реалізація комп'ютерних програм може здійснюватись з застосуванням будь-якої зручної для користувача мови програмування. В книзі наведено приклади розв'язання деяких задач з використанням процедур програмних систем MathCad, MATLAB та інших, але не дається загальних основ використання цих систем, що не входить до задач цього посібника. Автори намагалися зробити так, щоб викладений матеріал не дуже підпадав під вплив часу, тому робили наголос на висвітленні базових понять. Особливу увагу приділено алгоритмізації обчислювальних процедур як основ застосування комп'ютерної математики.

Розділ 1 першої частини підготовлено Р. Н. Кветним, О. Ю. Софиною, О. М. Шушурою; розділи 2, 3 – Р. Н. Кветним, І. В. Богач, О. М. Шушурою; розділи 4, 5 – Р. Н. Кветним; розділ 6 – Р. Н. Кветним та О. М. Шушурою. В другій частині розділи 1, 2 – О. Ю. Софиною (2.2 – разом з І. В. Богач); розділ 3 – О. Р. Бойко; розділ 4 – Р. Н. Кветним. Загальну редакцію книги здійснено Р. Н. Кветним.

РОЗДІЛ 1 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Поняття моделі та моделювання. Властивості та класифікація моделей

Натурний експеримент (Natural experiment), тобто дослідження властивостей та поведінки об'єкта управління в певних умовах з використанням самого об'єкта, є важливою складовою у сферах проектування та управління. Однак у багатьох випадках натурне моделювання є неможливим або недоцільним. Наприклад, експерименти на об'єкті керування при управлінні технологічними процесами у режимі реального часу, проектуванні складних систем та пристроїв можуть бути економічно недоцільні або неможливі через неготовність самого об'єкта.

Модель (від лат. *modulus* – міра, зразок, норма) – це об'єкт-замінник, створений з метою відтворення за певних умов суттєвих властивостей об'єкта-оригіналу. Модель може бути подана фізичним об'єктом, подібним до оригіналу, або описом об'єкта у вигляді математичних формул, тексту, комп'ютерної програми.

Основним призначенням моделі в задачах управління є прогноз реакції об'єкта на керувальні впливи. Крім того, моделі використовуються для дослідження об'єкта, аналізу його чутливості.

Основні властивості моделей:

- цілеспрямованість;
- скінченність;
- спрощеність;
- повнота;
- адекватність.

Цілеспрямованість моделі полягає в тому, що вона завжди будується з певною метою. Ця мета впливає на те, які властивості об'єктивного явища вважаються істотними, а які – ні. Модель є, так би мовити, проекцією об'єктивної реальності під певним кутом зору. Наприклад, моделі вищого навчального закладу як інформаційної, фінансової, енергетичної та соціальної систем будуть зовсім різними. Інколи, залежно від мети, можна отримати ряд проєкцій об'єктивної реальності, що вступають у протиріччя. Це характерно, як правило, для складних систем, в яких кожна проєкція виділяє суттєве для певної мети з безлічі несуттєвого. *Задача моделювання* полягає в тому, що для заданого об'єкта потрібно підібрати такий опис, який у повній мірі відображав би оригінал з точки зору заданої мети моделювання.

Скінченність моделі визначає те, що модель відтворює лише скінченну кількість властивостей та відношень, і через це модель завжди є більш простою, ніж оригінал.

Повнота моделі полягає в тому, що вона має відображати всі істотні, з точки зору мети моделювання, властивості оригіналу.

Необхідною умовою для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт дослідження є вимога адекватності моделі і об'єкта. *Адекватність* – це відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження. Це, мабуть, найголовніша властивість моделі, яка визначає можливість її використання. Оскільки будь-яка модель простіша за оригінал, ніколи не можна говорити про абсолютну адекватність, при якій модель за всіма характеристиками відповідає оригіналу. Модель називається *ізоморфною* (однаковою за формою), якщо між нею і реальною системою існує повна поелементна відповідність, і *гомеоморфною*, якщо існує відповідність лише між найбільш значними складовими частинами об'єкта і моделі.

Моделювання (Modeling) охоплює створення, дослідження та використання моделей об'єктів. Методи моделювання широко використовуються в різних сферах людської діяльності, особливо в сферах проектування та управління, де основними є процеси ухвалення ефективних рішень на основі отримуваної інформації. *Метою моделювання* є здобуття, обробка, подання і використання інформації про об'єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем; а модель тут виступає як засіб пізнання властивостей і закономірностей поведінки об'єкта.

Теорія моделювання є розділом науки, що вивчає способи дослідження властивостей об'єктів (оригіналів) на основі заміщення їх іншими об'єктами (моделями). Вирізняють натурні, фізичні, мовні та математичні моделі.

Зупинимося на одному з найбільш універсальних видів моделювання – математичному, що ставить у відповідність модельованому фізичному процесу систему математичних співвідношень, розв'язання якої дозволяє отримати відповідь на питання про поведінку об'єкта без створення фізичної моделі, яка часто є дорогою і малоефективною. Отже, *математичною моделлю* називається сукупність математичних співвідношень, рівнянь, нерівностей, що описують основні закономірності, властиві досліджуваному процесу, об'єкту або системі.

На підставі різних критеріїв класифікації виділяють такі види моделей:

- динамічні або статичні;
- детерміновані або стохастичні;
- неперервні, дискретні або дискретно-неперервні;
- лінійні чи нелінійні;
- з розподіленими або зосередженими параметрами;
- аналітичні, імітаційні чи комп'ютерні.

Динамічні моделі (dynamic models) відтворюють поведінку нестационарних об'єктів, що змінюються у часі. Статичні моделі описують стан об'єкта у деякий момент часу. Такі моделі розробляються для стаціонарних об'єктів, зміни яких у часі не є істотними стосовно періоду розробки та використання моделі.

Детерміновані моделі (deterministic models) використовують для опису процесів, що не містять істотної випадковості. Наприклад, поведінку більшості технічних систем можна охарактеризувати за допомогою так званих фазових змінних – фізичних величин типу потоку і потенціалу. При цьому доцільно виділити в об'єктах моделювання досить великі елементи, що розглядаються як невідимі одиниці. Закони функціонування елементів системи задаються компонентними рівняннями, що зв'язують різнорідні фазові змінні. Загальність опису процесів, що відбуваються в різних технічних системах, дозволяє виділити декілька типів елементів: R – елемент розсіювання енергії; C і L – елементи накопичення енергії. Поєднанням цих простих елементів і джерел фазових змінних отримують еквівалентну схему технічної системи будь-якої складності та її математичну модель. Конкретний зміст фазових змінних і простих елементів фізичних систем наведений у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Зміст фазових змінних і простих елементів фізичних систем

Підсистема	Фазові змінні		Елементи		
	типу течії	типу потенціалу	типу R	типу C	типу L
Електрична	Струм	Напруга	Опір	Ємність	Індуктивність
Механічна поступальна	Сила	Швидкість	Тертя	Маса	Пружність
Механічна обертальна	Момент	Кутова швидкість	Тертя	Момент інерції	Обертальна гнучкість
Гідравлічна (пневматична)	Витрата	Тиск	Тертя	Гідравлічна ємність	Гідравлічна індуктивність
Теплова	Тепловий струм	Температура	Теплоопір	Теплоємність	-

Для моделювання нестационарних імовірнісних процесів використовують стохастичні моделі (stochastic models). Якщо об'єкт моделювання стаціонарний і піддається випадковим впливам, то модель називають статистичною. Наприклад, для моделювання функцій перетворення вимірювальних пристроїв досить скористатися детермінованим способом опису, тоді як для аналізу похибок, оцінювання інформаційних характеристик необхідно застосувати ймовірнісно-статистичні методи.

Неперервні моделі (continuous model) описують системи з неперервними процесами, а дискретні моделі відображають поведінку

систем з дискретними станами. Дискретно-неперервні моделі використовуються, коли на об'єкті виділяються обидва типи процесів.

Якщо при описі моделі використовуються лише лінійні математичні конструкції (наприклад, лінійні алгебраїчні рівняння), то модель називають лінійною, інакше – нелінійною.

Моделі з розподіленими параметрами (models with distributed parameters) описують просторове поширення явищ, а моделі з зосередженими параметрами нехтують просторовою складовою. Динамічні неперервні детерміновані моделі з розподіленими параметрами використовують апарат диференціальних рівнянь у частинних похідних, а з зосередженими параметрами – звичайних диференціальних рівнянь.

Для аналітичних моделей (analytical models) властиво те, що процеси функціонування об'єкта подаються у вигляді аналітичних математичних залежностей: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь або їх систем, логічних умов. Наприклад, закон Ома чи рівняння Максвелла. Дослідження аналітичних моделей можливе за допомогою методів:

- аналітичних;
- чисельних;
- якісних.

Аналітичні методи полягають у пошуку явних залежностей між характеристиками. Однак такі залежності можна отримати лише для невеликої кількості простих моделей, як правило, лінійних. Інколи виконують спрощення моделей для отримання можливості вивчити хоча б загальні властивості об'єкта.

Чисельні методи (numerical methods) дозволяють отримати розв'язок аналітичних моделей, для котрих застосування аналітичних методів неможливо або недоцільно. Розв'язання чисельними методами здійснюється для конкретних вихідних даних і має додаткову похибку. Детальніше питання похибок чисельних методів розглядається у підрозділі 1.5.

Якісні методи дозволяють зробити певні висновки стосовно моделі, не маючи розв'язку у явному вигляді. Наприклад, такі методи використовуються у теорії автоматичного управління для оцінювання ефективності різних варіантів систем управління.

Імітаційне моделювання (simulation) передбачає подання моделі у вигляді алгоритму та комп'ютерної програми, яка дозволяє відтворити поведінку об'єкта. *Імітаційні моделі* розглядаються як експерименти, що проводяться на комп'ютерах з математичними моделями, які імітують поведінку реальних об'єктів. При цьому імітуються елементарні явища, що складають процес, зі збереженням їх логічної структури та послідовності у часі, що дозволяє отримати відомості про стан системи у певний момент часу та оцінити характеристики системи. Імітаційні моделі дозволяють

вирішувати більш складні задачі, ніж аналітичні. Наприклад, вони дозволяють досить легко враховувати вплив випадкових факторів.

Традиційно під моделюванням на ЕОМ розумілося лише імітаційне моделювання. Але завдяки розвитку графічного інтерфейсу та графічних пакетів значного поширення набуло комп'ютерне структурно-функціональне моделювання, а також розпочалося використання комп'ютера з метою концептуального моделювання, наприклад для побудови систем штучного інтелекту.

Під комп'ютерною моделлю (computer model) найчастіше розуміють:

– умовний образ об'єкта чи деякої системи об'єктів (або процесів), описаних за допомогою взаємозалежних комп'ютерних таблиць, схем, діаграм, графіків, рисунків, анімаційних фрагментів, гіпертекстів і т. ін., що відбивають структуру та взаємозв'язки між елементами об'єкта чи системи. Комп'ютерні моделі такого типу називають структурно-функціональними;

– окрему програму, сукупність програм чи програмний комплекс, що дає змогу виконанням послідовності обчислень з подальшим графічним відображенням їх результатів відтворювати (імітувати) процеси функціонування об'єкта (системи об'єктів), що функціонує під впливом різних, як правило, випадкових, факторів.

Інколи застосовується комбіноване (аналітико-імітаційне) моделювання, яке полягає в тому, що об'єкт декомпозується на окремі підсистеми. Для тих підсистем, для яких це можливо, використовуються аналітичні моделі, а для інших розробляються імітаційні моделі.

Розробка моделей поєднує в собі науку і мистецтво. На жаль, немає чіткого формального алгоритму, який би дозволив побудувати модель для будь-якого об'єкта. Тому далі розглядаються лише певні методичні рекомендації щодо розробки моделей.

1.2 Узагальнена методика математичного моделювання

Математичне моделювання можна розглядати як засіб вивчення реальної системи шляхом її заміни зручнішою для експериментального дослідження системою (моделлю), що зберігає істотні риси оригіналу. При моделюванні здійснюється апроксимація функції опису більш простою і зручною для практичного аналізу функцією – моделлю.

Математичні моделі, особливо ті, що використовують чисельні методи, потребують для свого створення значних інтелектуальних, фінансових і часових затрат. Тому рішення про створення нової моделі приймається лише в разі відсутності більш простих шляхів вирішення поставленої проблеми (наприклад, модифікації однієї з існуючих моделей).

Дослідження об'єкта моделювання та складання його математичного опису полягає у встановленні зв'язків між характеристиками процесу, виявленні його граничних і початкових умов та формалізації процесу у вигляді системи математичних співвідношень.

Процес побудови будь-якої математичної моделі можна подати послідовністю етапів, зображених на рис. 1.1.

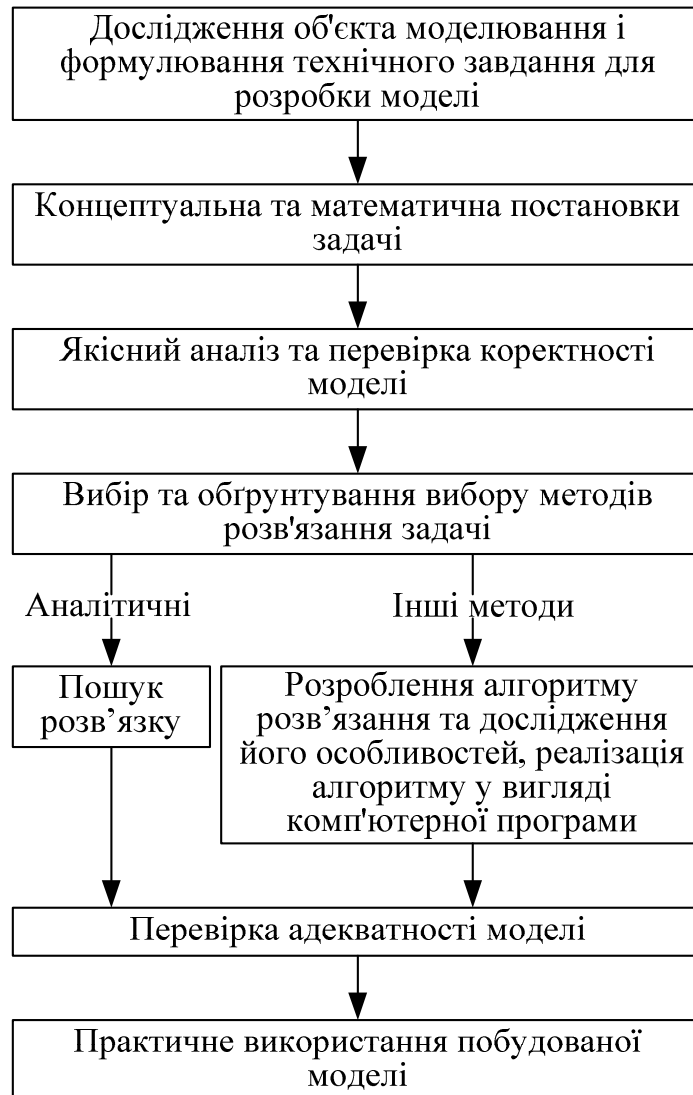


Рисунок 1.1 – Послідовність етапів побудови математичної моделі

- На етапі *дослідження об'єкта моделювання* потрібно виконати такі дії:
- аналіз взаємодії об'єкта з зовнішнім середовищем, виділення характеристик вхідних впливів та реакції об'єкта, класифікація їх на вимірні та невимірні, керувані та перешкоди;
 - проведення декомпозиції та дослідження внутрішньої структури об'єкта;
 - дослідження порядку функціонування об'єкта, виявлення зв'язку між входом та виходом, формування множини станів об'єкта;

- збір та перевірка існуючих експериментальних даних про об'єкти-аналоги, проведення, за необхідності, додаткових експериментів;
- класифікація об'єкта моделювання на стаціонарний чи нестаціонарний, визначення міри впливу випадкових факторів на об'єкт та порядку нелінійності зв'язків між характеристиками об'єкта;
- аналітичний огляд літературних джерел, аналіз та порівняння побудованих раніше моделей подібних об'єктів;
- аналіз та узагальнення всього накопиченого матеріалу, розроблення загального плану створення математичної моделі.

В деяких випадках дослідження внутрішньої будови та порядку функціонування об'єкта моделювання неможливе або економічно недоцільне. Тому можна розглядати об'єкт як «чорний ящик», стосовно якого нам відомі лише його входи та виходи.

На підставі аналізу об'єкта моделювання формується змістовна постановка моделювання, в якій мають бути зазначені:

- мета моделювання;
- тип моделі;
- вимоги до адекватності моделі та якості розв'язку.

Тип моделі має відповідати результатам класифікації об'єкта моделювання, інакше модель навряд чи буде адекватною.

Весь накопичений в результаті дослідження матеріал, змістовна постановка задачі моделювання, додаткові вимоги до реалізації моделі, оформляються у вигляді технічного завдання на проектування та розробку моделі.

Концептуальна постановка задачі моделювання – це сформульований в термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології тощо) список основних питань, а також сукупність гіпотез відносно особливостей та поведінки об'єкта моделювання. Розробник моделі на підставі результатів аналізу об'єкта моделювання формує своє бачення стосовно процесів на об'єкті і формулює його природною мовою в термінах предметної області. При цьому з метою спрощення моделі він приймає низку припущень та обмежень. Припущення можуть містити нехтування певними процесами або зміну характеру їх протікання. Концептуальна модель має пройти погодження з експертами у даній предметній галузі з метою перевірки на адекватність. Адекватність концептуальної моделі визначає адекватність математичної моделі, яка формується на її основі.

Математична постановка задачі моделювання – це сукупність математичних співвідношень, які описують поведінку та характеристики об'єкта моделювання. Необхідно формалізувати змінні моделі та зв'язки між ними. Математичний опис моделі складається на основі законів фізики, хімії тощо, які характеризують динаміку і статику процесів в досліджуваному об'єкті, та виражається мовою будь-яких розділів математики. Найбільше поширення при побудові детермінованих моделей

набули алгебраїчні рівняння та системи, звичайні диференціальні рівняння і диференціальні рівняння в частинних похідних, матрична алгебра, а при стохастичному моделюванні – і методи теорії імовірності, математичної статистики та теорії випадкових процесів. Якщо апріорні відомості про об'єкт недостатні, вигляд математичних моделей уточнюється за допомогою методів багатовимірної статистики: регресійного, кореляційного, багатофакторного та інших аналізів, а також проведення пасивного або планування активного експериментів. Для більшості складних об'єктів структура моделі містить параметри, які відображають особливості конкретних об'єктів. Пошук значень цих параметрів відбувається за допомогою методів параметричної ідентифікації на основі проведення пасивного або активного експериментів.

Поняття коректності задачі має важливе значення в процесі моделювання. Адже, наприклад, чисельні методи розв'язання задач доцільно застосовувати лише до коректно поставлених задач. При цьому, не всі практичні задачі можна вважати коректними. Математична модель є *коректною*, якщо для неї отримано позитивний результат у всіх контрольних перевірках: розмірності, порядку, характеру залежностей, граничних умовах, фізичному сенсі тощо.

Для математичної моделі обирається один з методів розв'язання, який дозволяє при заданих значеннях вхідних змінних отримати значення вихідних змінних. Вибір методу обґрунтовується на підставі властивостей моделі, даних про точність вимірювання значень змінних, вимог до точності та швидкості отримання розв'язку.

Необхідною умовою для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт моделювання є вимога адекватності моделі об'єкта. *Адекватність* – це відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження. Як правило, адекватність моделі визначається на підставі статистичних оцінок розбіжностей значень вихідних змінних моделі та об'єкта при однакових значеннях вхідних змінних, розрахованих за результатами серії експериментів на об'єкті моделювання. Для перевірки адекватності моделі використовуються дані іншої серії експериментів, ніж для параметричної ідентифікації. Відмінність значень виходу моделі та об'єкта може бути зумовлена такими причинами:

- спрощеність моделі;
- похибка чисельних методів;
- похибка вимірювальних пристроїв;
- обчислювальна похибка, пов'язана з переходом від десяткової до двійкової системи числення та особливостями комп'ютерних обчислень.

Якщо модель не задовольняє критерії адекватності, необхідно крок за кроком перевірити коректність розробки на всіх етапах:

- умови проведення експерименту та правильність вимірювання і фіксування його результатів;
- правильність програмної реалізації алгоритмів;
- адекватність результатів параметричної ідентифікації;
- обґрунтованість вибору методу розв'язання моделі;
- коректність математичного опису явищ та характеристик об'єкта;
- адекватність концептуальної моделі.

Після успішної перевірки адекватності модель може бути застосована в задачах прогнозування та дослідження об'єкта.

Метод математичного моделювання дозволяє уникати необхідності виготовлення громіздких фізичних моделей, пов'язаної з матеріальними витратами; скоротити час визначення характеристик (особливо при розрахунку математичних моделей на комп'ютері і застосуванні ефективних обчислювальних методів і алгоритмів); вивчати поведінку об'єкта моделювання при різних значеннях параметрів; аналізувати можливість застосування різних елементів; отримувати характеристики і показники, які складно отримувати експериментально (кореляційні, частотні, параметричної чутливості).

Розглянемо особливості аналітичного та імітаційного моделювання.

1.3 Аналітичне моделювання

1.3.1 Особливості аналітичного динамічного моделювання

Дана методика застосовується для створення моделей об'єктів, що змінюються в часі (нестационарних об'єктів). Специфіка динамічного моделювання полягає в особливій побудові концептуальної моделі (гіпотези про механізм процесів) і формалізації залежностей математичної постановки.

Концептуальна модель ґрунтується на розгляді об'єкта на кількох рівнях декомпозиції. Як правило, виділяють явища на макро- і мікрорівні об'єкта. На макрорівні процеси розглядаються узагальнено, «великими мазками». Наприклад, рух потоків маси і енергії, надходження грошових коштів і т. п. На мікрорівні ці процеси розглядаються більш детально.

На кожному рівні декомпозиції виділяють явища і зв'язки між ними. При динамічному моделюванні під явищем будемо розуміти зміну деякої величини. У концептуальній моделі описується перебіг кожного явища. Зв'язки між явищами поділяються на взаємозв'язки явищ одного рівня декомпозиції і зв'язки між явищами різних рівнів декомпозиції. Наприклад, для гіпотези з двома рівнями декомпозиції можливі зв'язки трьох видів:

- зв'язки між явищами на мікрорівні;
- зв'язки між явищами на мікро- та макрорівні;
- зв'язки між явищами на макрорівні.

Для спрощення явищ об'єкта з метою їх формального опису приймається ряд припущень. Припущення стосуються особливостей протікання фізичних, економічних, хімічних та інших типів процесів на об'єкті моделювання. Припущення є однією з основних частин концептуальної моделі і обов'язково підлягають узгодженню з замовником, тому що безпосередньо впливають на адекватність моделі.

Формалізація залежностей здійснюється на основі фізичних законів перебігу описаних явищ. Кожному явищу зазвичай відповідає звичайне диференціальне рівняння першого порядку. Права частина рівняння описує складові частини цього явища. Якщо явище має стохастичний характер, у праву частину рівняння вносяться відповідні характеристики випадкових процесів. Величини, загальні для правих частин рівнянь і залежні від змінних, що стоять в лівій частині (які диференціюються за часом), розраховуються окремо. Відповідно до порядку та розмірності моделі задаються початкові або граничні умови. Крім того, праві частини можуть містити параметри, що характеризують специфіку конкретного об'єкта моделювання.

У результаті формалізації буде отримана структура математичної моделі, придатна для класу однотипних об'єктів моделювання. Специфіку конкретного об'єкта моделювання визначають параметри моделі. Для практичного використання моделі необхідна розробка процедури її рішення та параметричної ідентифікації.

Для розв'язання динамічних моделей, як правило, використовують відповідні чисельні методи. Особливістю цих методів є дискретизації часу, що приведе до апроксимації моделі різницевиими рівняннями. Розв'язання моделі дозволяє отримати вихідні змінні у вигляді таблично заданих функцій на заданому інтервалі часу.

Задача ідентифікація полягає у мінімізації відхилень між вихідними змінними моделі, які в загальному випадку є функціями $y_i(t, \bar{x}, \bar{\beta})$ від часу t , вхідних змінних \bar{x} і параметрів $\bar{\beta}$, та значеннями відповідних вихідних змінних об'єкта $y_i^*(t, \bar{x})$ шляхом підбору значень параметрів $\bar{\beta}$. Як правило, ця процедура не є тривіальною.

Розробка процедури параметричної ідентифікації моделі охоплює:

- фізичну та формальну постановку задачі ідентифікації;
- вибір методу ідентифікації та його програмну реалізацію;
- проведення експерименту та розрахунок значень параметрів.

Фізична постановка задачі ідентифікації формулюється природною мовою та містить перелік параметрів, значення яких необхідно знайти, вимоги до збігання значень вихідних змінних моделі та об'єкта (в які

моменти часу, точність), вимоги до швидкості процедури (якщо ідентифікація відбувається в контурі управління).

Формальна постановка задачі ідентифікації полягає в записі фізичної постановки у вигляді задачі оптимізації, головною складовою якої є критерій (функціонал) похибки $E(\bar{\beta})$. Параметри можуть розглядатись і як константи, і як функції. Вигляд критерію похибки залежить від специфіки конкретної задачі. Вирізняють парні та непарні критерії похибки. Непарні критерії залежать від знака відхилення вихідних змінних моделі від змінних об'єкта, а парні – ні. Як приклад розглянемо парний критерій, який призначений для контролю похибки на всьому інтервалі прогнозу $[t_0, T]$:

$$E(\bar{\beta}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^T (y_i(t, \bar{x}_j, \bar{\beta}) - y_{ij}^*(t, \bar{x}_j))^2 dt \rightarrow \min_{\bar{\beta}},$$

де m – кількість експериментів; n – кількість вихідних змінних, $y_{ij}^*(t, \bar{x}_j)$ – значення змінної об'єкта $y_i^*(t, \bar{x})$ за результатами j -го експерименту.

Звичайно вимірювання проводяться в дискретні моменти часу, тому інтеграли подаються у вигляді дискретних конструкцій за допомогою формул чисельного інтегрування.

В залежності від вигляду критерію $E(\bar{\beta})$ та вимог до швидкості процедури обирається аналітичний чи чисельний методи параметричної ідентифікації. Ці методи спираються на методи оптимізації і, як правило, пов'язані з пошуком частинних похідних $\frac{\partial E}{\partial \beta_l}$. Коли аналітичний вигляд

залежності $y_i(t, \bar{x}, \bar{\beta})$ невідомий, для розрахунку частинних похідних $\frac{\partial E}{\partial \beta_l}$

застосовуються формули чисельного диференціювання. За необхідності, на основі обраного методу параметричної ідентифікації розробляється комп'ютерна програма для автоматизації розрахунку параметрів.

Далі проводиться серія експериментів, і на підставі отриманих даних, з використанням обраного методу ідентифікації, розраховуються значення параметрів моделі. Для знайдених значень параметрів за тими же експериментальними даними розраховуються оцінки адекватності моделі. Значення цих оцінок мають бути значно кращими, ніж поставлені в постановці задачі моделювання вимоги до адекватності моделі, інакше результати ідентифікації є незадовільними і необхідно повторити процедуру або переглянути структуру моделі.

Вдало ідентифікована модель проходить перевірку адекватності на іншій серії експериментів.

Динамічні моделі використовуються для прогнозування поведінки та дослідження змін нестационарних об'єктів у часі. Для стаціонарних об'єктів розробляються статичні моделі.

1.3.2 Особливості аналітичного статичного моделювання

Якщо за підсумками аналізу характеристик об'єкта моделювання він був віднесений до класу стаціонарних (вихід залежить тільки від входу, об'єкт не змінюється в часі), то можливе застосування даної методики, яка є окремим випадком загальної методики моделювання.

У випадку, коли на стадії аналізу вдалося встановити майже всі зв'язки між характеристиками об'єкта, це відображається в концептуальній моделі, за якою відбувається розробка формальних залежностей моделі. Зазвичай, статична модель подається у вигляді одного рівняння або системи рівнянь чи нерівностей, лінійних чи нелінійних, алгебраїчних чи трансцендентних. Якщо інформації про залежність характеристик недостатньо для їх точної ідентифікації, або зв'язки мають випадковий характер, об'єкт моделювання розглядається як «чорна скриня», стосовно якої виділяються лише входи та виходи, а внутрішні зв'язки вважаються невідомими. Для ідентифікації моделі в цьому випадку може бути застосований апарат регресійного аналізу. Розглянемо ситуацію, коли у об'єкта одна вихідна величина та декілька вхідних. Такі об'єкти в концептуальній моделі подаються у вигляді, зображеному на рис 1.2, на якому x_1, \dots, x_n – вхідні змінні (фактори, регресори), y – вихідна змінна (відклик).

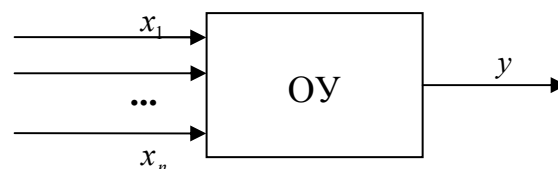


Рисунок 1.2 – Об'єкт моделювання «чорна скриня»

При цьому приймаються припущення, які визначають стаціонарність об'єкта, відсутність взаємозв'язку між різними реалізаціями процесу. Наприклад, як відклик можна розглянути витрати палива автомобілем на 100 км шляху. Факторами будуть вага вантажу, середня швидкість руху. Припущення: рух відбувається в основному по горизонталі по однотипних дорогах; якість пального, технічний стан автомобіля та водій не змінюються.

Структура математичної моделі може бути лінійною чи нелінійною. Розглянемо найпростіший випадок, коли залежність вихідної змінної від факторів має вигляд:

$$y = b_0 + b_1 \cdot x_1 + \dots + b_n \cdot x_n, \quad (1.1)$$

де b_0, \dots, b_n – невідомі параметри.

Для пошуку значень параметрів полінома (1.1) може бути застосований один з методів параметричної ідентифікації, наприклад, метод найменших квадратів (МНК, least squares method), який докладніше викладений у розділі 6.

Методика застосування МНК складається з етапів:

- збір статистичних даних про залежність відгуку від факторів;
- обробка і дослідження цих даних;
- розрахунок варіантів значень параметрів (множинний регресійний аналіз) і їх оцінок адекватності.

Збір статистичних даних здійснюється в ході експерименту. Результати експерименту подаються у вигляді таблиці 1.2.

Таблиця 1.2 – Результати експерименту

№	y	x_1	...	x_n
1	y_1	x_{11}	...	x_{1n}
...
m	y_m	x_{m1}	...	x_{mn}

Рядки в таблиці відповідають результатам окремого експерименту. Кількість записів у таблиці має дорівнювати або бути більше числа факторів. Чим більше експериментальних даних, тим більше інформації для побудови моделі. Однак слід пам'ятати, що кожний експеримент має певну вартість.

З метою дослідження об'єкта дані експерименту піддаються статистичній обробці та аналізу. На основі даних:

- розраховуються середнє значення, середньоквадратичне відхилення, мінімум, максимум кожного з факторів і відгуку;
- перевіряються гіпотези про закон розподілу факторів і відгуку шляхом побудови гістограм;
- обчислюється кореляційна матриця.

Дослідження статистичної інформації дає змогу частково виявляти помилки введення та методики проведення експерименту. Аналіз кореляційної матриці дозволяє з'ясувати ступінь взаємозв'язку відгуку з факторами та факторів між собою.

Для проведення розрахунків результати експерименту подаються у вигляді матриць:

Література

1. Gonzales R. C. Digital Image Processing Using MATLAB / R. C. Gonzales, R. E. Woods, S. Eddins. – Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004. – 492 p.
2. Greenspan D. Introduction to Numerical Analysis and Applications / D. Greenspan. – Markham : Chicago, 1971. – 176 p.
3. Image Processing Toolbox For Use with Matlab, User's Guide. Version 3. – The Math Works Inc., 2004. – 775 p.
4. Kvyetnyy R. Basics of Modelling and Computational Methods / R. Kvyetnyy. – Вінниця : ВДТУ, 2007. – 147 с.
5. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В. А. Сойфера – 2 изд. испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 784 с.
6. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / Абрамовиц М., Стиган И. – М. : Наука, 1979. – 486 с.
7. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров : учеб. пособ. / Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. – М. : Высшая школа, 1994. – 554 с.
8. Анисимов Б. В. Распознавание и цифровая обработка изображений / Анисимов Б. В., Курганов В. Д., Злобин В. К. – М. : Высшая школа, 1983. – 468 с.
9. Аттетков А. В. Методы оптимизации : учеб. для вузов / Аттетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 440 с.
10. Батищев Д. И. Методы оптимального проектирования / Батищев Д. И. – М. : Радио и связь, 1984. – 248 с.
11. Бахвалов Н. С. Численные методы / Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. – М. : Наука, 1987. – 630 с.
12. Васильков Ю. В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании : учеб. пособие / Ю. В. Васильков, Н. Н. Василькова. – М. : Финансы и статистика, 2002. – 256 с.
13. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К. : Наукова думка, 1986. – 544 с.
14. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) : учеб. пособие для вузов / Вержбицкий В. М. – М. : Высш.шк., 2001. – 382 с.
15. Воеводин В. В. Матрицы и вычисления / Воеводин В. В. – М. : Наука, 1984. – 320 с.
16. Глинченко А. С. Цифровая обработка сигналов / Глинченко А. С. – Красноярск : Изд-во КГТУ, 2001. – 199с.

17. Глушков В. М. Основы безбумажной информатики / Глушков В. М. – М. : Наука, 1987. – 552 с.
18. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1072 с.
19. Горелик А. Л. Методы распознавания / А. Л. Горелик, В. А. Скрипкин. – М. : Высшая школа, 1984. – 208 с.
20. Грузман И. С. Цифровая обработка изображений в информационных системах / И. С. Грузман, В. С. Киричук. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. – 352 с.
21. Дахнович А. А. Дискретные системы и цифровая обработка сигналов : учебное пособие / Дахнович А. А. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 100с.
22. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
23. Дубовой В. М. Основи застосування ЕОМ у інженерній діяльності / В. М. Дубовой, Р. Н. Кветний. – К. : ІСДО України, 1994. – 285 с.
24. Дубовой В. М. Програмування комп'ютеризованих систем управління та автоматики / В. М. Дубовой, Р. Н. Кветний. – Вінниця : ВДТУ, 1997. – 208 с.
25. Дубовой В. М. Програмування персональних комп'ютерів систем управління / В. М. Дубовой, Р. Н. Кветний. – Вінниця : ВДТУ, 1999.
26. Каллан Р. Основные концепции нейронных сетей / Каллан Р. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2001. – 288 с.
27. Канторович Л. В. Оптимальные решения в экономике / Л. В. Канторович, А. Б. Горстков – М. : Наука, 1972. – 335 с.
28. Кветний Р. Н. Математическое моделирование в задачах проектирования средств автоматики и информационно-измерительной техники / Кветний Р. Н. – К. : УМК ВО, 1989. – 112 с.
29. Кветний Р. Н. Информационная теория измерений: от модели к изделию / Р. Н. Кветний, В. Т. Маликов. – М. : Знание, 1988. – 213 с.
30. Кветний Р. Н. Інтервальні моделі перетворень сигналів в інформаційно-вимірювальних системах / Р. Н. Кветний, О. Р. Бойко. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 88с.
31. Різницеві методи та сплайни в задачах багатовимірної інтерполяції / [Кветний Р. Н., Дементьев В. Ю., Машницький М. О., Юдін О. О.]. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 87 с.
32. Кветний Р. Н. Методи фільтрації текстурованих зображень у задачах розпізнавання та класифікації / Р. Н. Кветний, О. Ю. Софіна. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2011. – 119 с.
33. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Коллатц Л. – М. : Мир, 1969. – 448 с.
34. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1986. – 832 с.

35. Краскевич В. Е. Численные методы в инженерных исследованиях / Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. – К. : Вища школа, 1986. – 264 с.
36. Ляшенко М. Я. Чисельні методи : підручник / М. Я. Ляшенко, М. С. Головань. – К. : Либідь, 1996. – 288 с.
37. Мак-Кракен Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М. : Мир, 1977. – 584 с.
38. Маликов В. Т. Вычислительные методы и применение ЭВМ / В. Т. Маликов, Р. Н. Кветный. – К. : Вища школа, 1989. – 362 с.
39. Марчук Г. И. Введение в проекционно–сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М. : Наука, 1982. – 264 с.
40. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд ; пер. с англ. – М. : Мир, 1979. – 578 с.
41. Ракитский Ю. В. Численные методы решения жестких систем / Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. – М. : Наука, 1979. – 208 с.
42. Рудаков П. И. Обработка сигналов и изображений. Matlab 5.x / П. И. Рудаков, И. В. Сафонов. – М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. – 416 с.
43. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы / Саати Т. – М. : Мир, 1973. – 302 с.
44. Самарский А. А. Введение в численные методы / Самарский А. А. – М. : Наука, 1987. – 234 с.
45. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
46. Скурихин В. Н. Математическое моделирование / Скурихин В. Н., Шифрин В. Б., Дубровский В. В. – К. : Техніка, 1983. – 270 с.
47. Трусов П. В. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / Трусов П. В. – М. : Логос, 2005. – 440 с.
48. Фисенко В. Т. Компьютерная обработка и распознавание изображений : учеб. пособие / В. Т. Фисенко, Т. Ю. Фисенко. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2008. – 192 с.
49. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці : підручник / [Фельдман Л. П., Згуровський М. З., Петренко А. І., Дмитрієва О. А.]. – К. : Вид. група ВНУ, 2006. – 480 с.
50. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 279 с.
51. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Шуп Т. – М. : Мир, 1982. – 238 с.
52. Чабан В. Чисельні методи / Чабан В. – Львів : Вид. Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2001. – 186 с.
53. Яковлев А. Н. Введение в вейвлет-преобразования / Яковлев А. Н. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.

Навчальне видання

**Квєтний Роман Наумович
Богач Ілона Віталіївна
Бойко Олексій Романович
Софіна Ольга Юрїївна
Шушура Олексій Миколайович**

**КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ. МЕТОДИ
ОБЧИСЛЕНЬ
Частина 1**

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна
Оригінал-макет підготовлено О. Софіною

Підписано до друку 28.02.2013 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. др. арк. 11,04.
Наклад 300 (1-й запуск – 100) прим. Зам № 2013-062.

Вінницький національний технічний університет,
комп'ютерний інформаційно-видавничий центр.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.