Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

Комп'ютерне моделювання систем та процесів

Методи обчислень

Частина 2

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2013

УДК 519.876.5(075)
ББК 32.97в6я73
К32

Автори:
Р. Н. Квєтний, І. В. Богач, О. Р. Бойко, О. Ю. Софина, О. М. Шушура

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом підготовки «Системна інженерія». Лист № 1/11-1254 від 01.02.2012 р.

Рецензенти:
Б. П. Русин, доктор технічних наук, професор
Г. С. Фінін, доктор фізико-математичних наук, ст.н.сп.
А. М. Пєтух, доктор технічних наук, професор

К32 **Комп'ютерне** моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 2 : навчальний посібник / [Р. Н. Квєтний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та інші]; за заг. ред. Р. Н. Квєтного. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 235 с.

ISBN 978-966-641-521-2 (частина 2)

Друга частина навчального посібника, в якому розглянуто найпоширеніші чисельні методи, що зустрічаються в типових інженерних та наукових задачах, методи оптимізації та основи математичного моделювання, а також методи цифрової обробки сигналів та зображень, фрактальний та інтервальний аналіз. Призначено для студентів напряму підготовки «Системна інженерія» при вивченні дисципліни «Комп'ютерне моделювання систем та процесів», але може бути використано при вивченні широкого спектру дисциплін цього та інших напрямів, які пов'язані з комп'ютерними обчисленнями та обробкою даних, сигналів, зображень, а також для наукової роботи студентів, аспірантів, інженерів та вчених. Наведено широкий спектр прикладів та задач.

УДК 519.876.5(075)
ББК 32.97в6я73

ISBN 978-966-641-519-9 (загальний)
ISBN 978-966-641-521-2 (частина 2)

ЗМІСТ

ВСТУП

Одним з головних напрямків науково-технічного прогресу протягом вже кількох десятиріч є розвиток методів і засобів інформатики та обчислювальної техніки. Використання методів математичного моделювання та комп’ютерного розв’язання інженерних і наукових задач дозволяє значно підвищити ефективність процесів проектування та управління. Впровадження персональних комп’ютерів, комп’ютерних інформаційних мереж, побудова та розвиток INTERNET, широке та різноманітне використання методів математичного моделювання привели до розширення як практичної, так і теоретичної баз комп’ютерної математики. Математичне комп’ютерне моделювання стало головним засобом дослідження складних процесів і систем, на якому базуються сучасні підходи до проектування, оптимізації та управління в різних галузях науки і техніки. Обчислювальна математика стала основою для реалізації та комп’ютерного розрахунку методів математичного моделювання.

Метою цієї книги, що видана в двох частинах, є ознайомлення широкого кола студентів, науковців, інженерно-технічних працівників з основними поняттями комп’ютерного моделювання систем і процесів та методами розв’язання на комп’ютерах сучасних задач обчислювальної математики, що виникають в процесі дослідження й проектування систем управління та автоматики.

Посібник призначений для студентів напрямів підготовки «Системна інженерія» та «Комп’ютерна інженерія», але також може бути використаний для інших спеціальностей при вивченні дисциплін, пов’язаних з чисельними методами, методами обробки даних, оптимізацією та плануванням експерименту.

Теоретичною основою посібника стали відомі роботи в області моделювання та обчислювальної математики Л. Коллатця, Дж. Форсайта, Р. Мура, Д. Кнута, А. Самарського, Б. Демідовича, І. Марона, В. Скурихіна, М. Бусленка , А. Крилова, А. Верланя, Г. Марчука та інших вітчизняних і закордонних вчених. В посібнику узагальнено досвід багаторічного викладання Р. Н. Квєтним курсів з обчислювальної математики та моделювання, використано результати наукових і навчально-методичних розробок співавторів цієї книги.

Перший розділ першої частини книги присвячений розгляду основних понять і підходів до побудови математичних комп’ютерних моделей. В наступних розділах розглянуто найбільш поширені задачі обчислювальної математики, методи та алгоритми їх розв’язання. Ці задачі розглянуто в першій частині навчального посібника. Друга частина присвячена задачам обробки сигналів та зображень, що дуже поширені в практиці комп’ютерного моделювання, інтервальним методам та ще деяким проблемам, які пов'язані з розрахунками в процесі математичного моделювання й можуть бути корисними для сучасних науковців та інженерів.

Використання посібника передбачає знання основ програмування, а алгоритмізація та реалізація комп'ютерних програм може здійснюватись з застосуванням будь-якої зручної для користувача мови програмування. В книзі наведено приклади розв'язання деяких задач з використанням процедур програмних систем MathCad, MATLAB та інших, але не дається загальних основ використання цих систем, що не входить до задач цього посібника. Автори намагалися зробити так, щоб викладений матеріал не дуже підпадав під вплив часу, тому робили наголос на висвітленні базових понять. Особливу увагу приділено алгоритмізації обчислювальних процедур як основ застосування комп'ютерної математики.

Розділ 1 першої частини підготовлено Р. Н. Квєтним, О. Ю. Софиною, О. М. Шушурою; розділи 2, 3 – Р. Н. Квєтним, І. В. Богач, О. М. Шушурою; розділи 4, 5 – Р. Н. Квєтним; розділ 6 – Р. Н. Квєтним та О. М. Шушурою. В другій частині розділи 1, 2 – О. Ю. Софиною (2.2 – разом з І. В. Богач); розділ 3 – О. Р. Бойко; розділ 4 – Р. Н. Квєтним. Загальну редакцію книги здійснено Р. Н. Квєтним.

РОЗДІЛ 1 ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ

1.1 Загальні відомості та поняття

Цифрова обробка сигналів (ЦОС) (digital signal processing) – це область обчислювальної техніки, що динамічно розвивається та охоплює як технічні, так і програмні засоби. Спорідненими областями для цифрової обробки сигналів є теорія інформації, зокрема, теорія оптимального прийому сигналів і теорія розпізнавання образів. При цьому в першому випадку основним завданням є виділення сигналу на фоні шумів і завад різної фізичної природи, а в другому – автоматичне розпізнавання, тобто класифікація та ідентифікація сигналу.

При цифровій обробці використовується подання сигналів у вигляді послідовностей чисел або символів. Ціль такої обробки може полягати в оцінюванні характерних параметрів сигналу або в перетворенні сигналу у форму, що, в деякому змісті, більше зручна. Такі формули класичного чисельного аналізу, як формули для інтерполяції, інтегрування й диференціювання, безумовно, є алгоритмами цифрової обробки. Наявність швидкодійних цифрових ЕОМ сприяє розвитку все більше складних і раціональних алгоритмів обробки сигналів; останні ж успіхи в технології інтегральних схем обіцяють високу економічність побудови дуже складних систем цифрової обробки сигналів. Цифрова обробка сигналів застосовується в таких різних галузях, як біомедицина, акустика, звукова локація, радіолокація, сейсмологія, зв'язок, системи передачі даних, ядерна техніка і багатьох інших.

Цифрова обробка сигналів є альтернативою традиційній аналоговій. До її найважливіших якісних переваг відносять можливість реалізації будь-яких як завгодно складних (оптимальних) алгоритмів обробки з гарантованою і незалежною від дестабілізувальних факторів точністю; програмованість та функціональна гнучкість; можливість адаптації до сигналів, що обробляються; технологічність.

Розвиток нової точки зору на цифрову обробку сигналів було прискорено відкриттям в 1965 р. ефективних алгоритмів для обчислень перетворень Фур'є. Цей клас алгоритмів став відомий як швидке перетворення Фур'є (ШПФ, fast Fourier transform). Можливості ШПФ були значними з декількох точок зору. Багато алгоритмів обробки сигналів, отриманих на цифрових ЕОМ, вимагали часу обробки на декілька порядків більшого, ніж реальний час. Часто це було пов'язане з тим, що спектральний аналіз був важливою складовою частиною обробки сигналів, а ефективні засоби для його виконання не були відомі. Алгоритм швидкого перетворення Фур'є зменшив час обчислення перетворення Фур'є на кілька порядків. Це дозволило створити дуже складні алгоритми обробки сигналів у реальному часі. Крім того, з урахуванням можливостей дійсної реалізації алгоритму швидкого перетворення Фур'є на спеціалізованому цифровому пристрої, багато алгоритмів обробки сигналів, що були раніше непрактичними, стали знаходити втілення на спеціалізованих пристроях.

Методами ЦОС є математичні співвідношення або алгоритми, відповідно до яких виконуються обчислювальні операції над цифровими сигналами. До них належать алгоритми цифрової фільтрації, спектрально-кореляційного аналізу, модуляції та демодуляції сигналів, адаптивної обробки та ін.

Засобами реалізації ЦОС є жорстка логіка, програмовані логічні інтегральні схеми, мікропроцесори загального призначення, мікроконтролери, персональні комп'ютери (комп'ютерна обробка сигналів) та цифрові сигнальні процесори.

У технічних галузях знань термін «сигнал» (signal, від латинського signum – знак) часто використовується в широкому діапазоні значень, без дотримання строгої термінології. Під ним розуміють і технічний засіб (матеріальний носій) для передачі, обігу і використання інформації – електричний, магнітний, оптичний сигнал; і фізичний процес, що являє собою матеріальне відображення інформаційного повідомлення – зміна певного параметра носія інформації (напруги, частоти, потужності електромагнітних коливань, інтенсивності світлового потоку тощо) у часі, у просторі або залежно від зміни значень будь-яких інших аргументів (незалежних змінних).

Всі ці поняття можна об'єднати одним технічним терміном: сигнал – це фізична величина, що містить у собі певні відомості про певний об'єкт або процес.

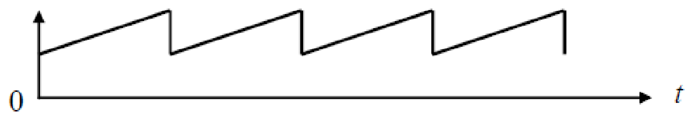
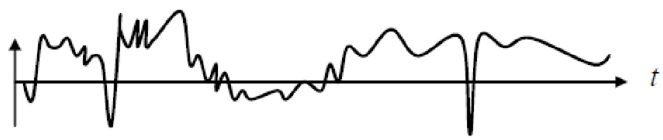
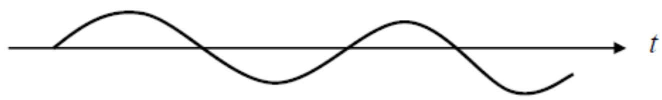
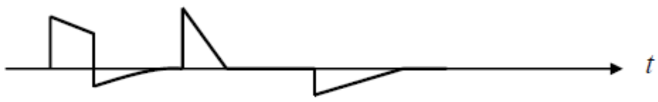
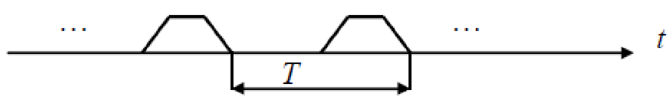
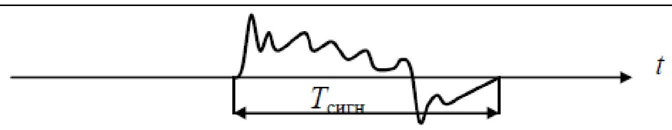
Термін «сигнал» дуже часто ототожнюють із поняттями «дані» (data) і «інформація» (information). Дійсно, ці поняття взаємозалежні і не існують одне без іншого, але належать до різних категорій.

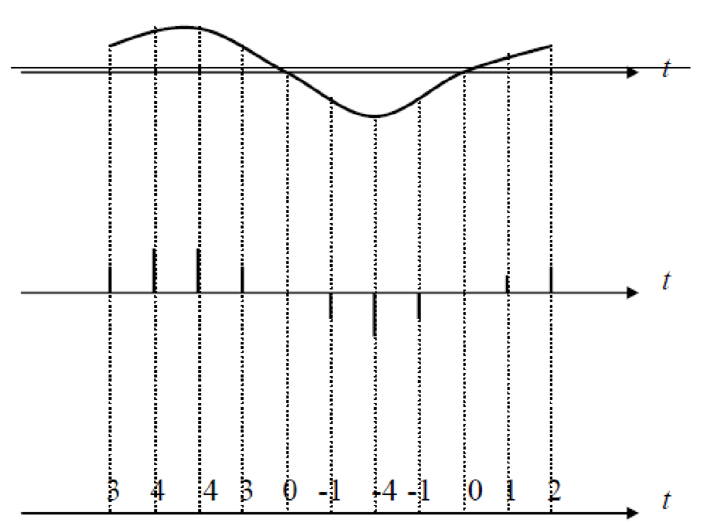
Термін «signal» у світовій практиці є загальноприйнятим для характеристики форми подання даних, при якій дані розглядаються у вигляді послідовності значень скалярних величин (аналогових, числових, графічних та ін.) залежно від зміни будь-яких змінних значень (часу, енергії, температури, просторових координат та ін.). З урахуванням цього, надалі під терміном «сигнал» у точному значенні цього слова будемо розуміти певним чином впорядковане *відображення* певних даних про характер зміни у просторі і часі або за будь-якою іншою зміною фізичних величин, фізичних властивостей або фізичного стану об'єкта досліджень. Оскільки дані про вимірювання містять інформацію як про основні цільові параметри об'єкта досліджень, так і про різні супутні фактори впливу, то в широкому розумінні цього слова можна вважати, що сигнал є відображенням загальної вимірювальної інформації. При цьому матеріальна форма носіїв сигналів, так само як і форма їхнього відображення в будь-якому фізичному процесі, значення не має.

Отже, сигнал – це інформаційна функція, що несе повідомлення про фізичні властивості, стан або поведінку будь-якої фізичної системи, об'єкта або середовища, а метою обробки сигналів у найзагальнішому змісті можна вважати отримання певних інформаційних відомостей, які відображені в цих сигналах (корисна або цільова інформація), і перетворення цих відомостей у форму, зручну для сприйняття і подальшого використання.

Множина сигналів надзвичайно різноманітна. Проте, вибираючи певні критерії розбіжності, можна навести приблизну класифікацію сигналів (таблиця 1.1). Однак слід пам’ятати, що у реальному житті сигнали часто не вкладаються в рамки чистої класифікації. Наприклад, будь-який реальний детермінований сигнал має випадкову шумову складову.

Таблиця 1.1 – Класифікація сигналів

	Тип (клас) сигналів	Геометричне зображення
1.	а) **Детерміновані** (значення s (t) відомо в будь-який момент часу t) б) **Випадкові** (передбачити точне значення s (t) неможливо)	 
2.	а) **Неперервні** (без розривів першого роду) б) **Імпульсні** (з розривами першого роду)	 
3.	а) **Періодичні** (період Т) б) **Неперіодичні** $T = \infty$	 
4.	а) **Кінцевої довжини** ($T_{сигн}$) б) **Нескінченної довжини** $T_{сигн} = \infty$	 

5.	а) **Аналогові** (існують у будь-який момент часу t і можуть приймати будь-яке значення в інтервалі $[S_{\min}, S_{\max}]$) б) **Дискретні** (існують тільки в дискретні моменти t_k, тобто є послідовністю імпульсних відліків) в) **Цифрові** (послідовність цифрових відліків)	

1.2 Загальна структура системи цифрової обробки аналогових сигналів

Системи ЦОС безпосередньо оперують із послідовностями цифрових кодів, які називають цифровими сигналами. Такі сигнали обробляються процесором ЦОС, що є операційним або обчислювальним ядром системи. Алгоритмічна обробка аналогових сигналів цифровими засобами припускає їхнє попереднє перетворення в цифрову форму, а в системах з аналоговим виходом – із цифрової форми в аналогову. Загальній структурній схемі системи цифрової обробки аналогових сигналів (рис. 1.1) відповідає ланцюжок функціональних перетворень сигналу виду: $A/A \Rightarrow A/Ц \Rightarrow Ц/Ц \Rightarrow Ц/A \Rightarrow A/A$ («аналог/аналог», «аналог/цифра», «цифра/цифра», «цифра/аналог», «аналог/аналог»), реалізованих відповідно аналоговим фільтром нижніх частот ФНЧ1, аналого-цифровим перетворювачем АЦП, процесором ЦОС, цифроаналоговим перетворювачем ЦАП і аналоговим фільтром нижніх частот ФНЧ2.

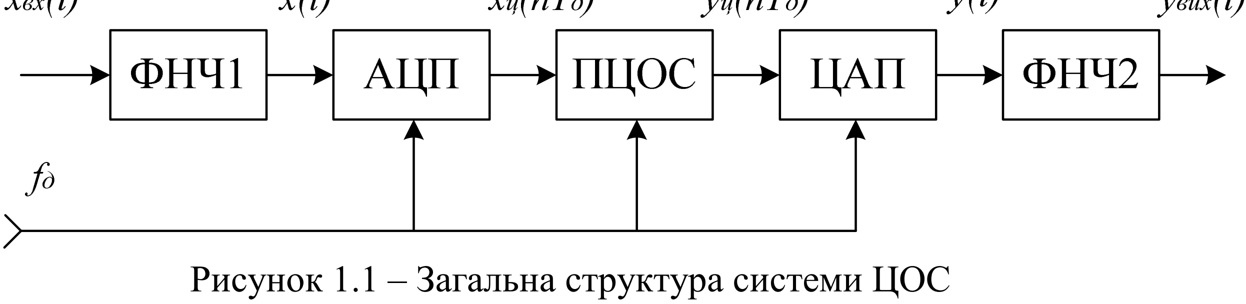


Рисунок 1.1 – Загальна структура системи ЦОС

Вхідний сигнал системи ЦОС $x_{вх}(t)$ надходить на АЦП через аналоговий фільтр нижніх частот ФНЧ1 із частотою зрізу $\omega_з$. Фільтр обмежує смугу частот вхідного сигналу (охоплюючи й супутні йому шуми та завади) максимальною частотою $\omega_m \approx \omega_з$, що задовольняє умову $\omega_m < \omega_D/2$, де $\omega_D = 2\pi f_D$ – частота дискретизації сигналу. Він послабляє спотворення накладання при дискретизації сигналів з необмеженим за частотою спектром і називається протимаскувальним.

Аналого-цифрове перетворення (analog-to-digital conversion) охоплює дискретизацію сигналу за часом, квантування за рівнем і цифрове кодування (рис. 1.2)

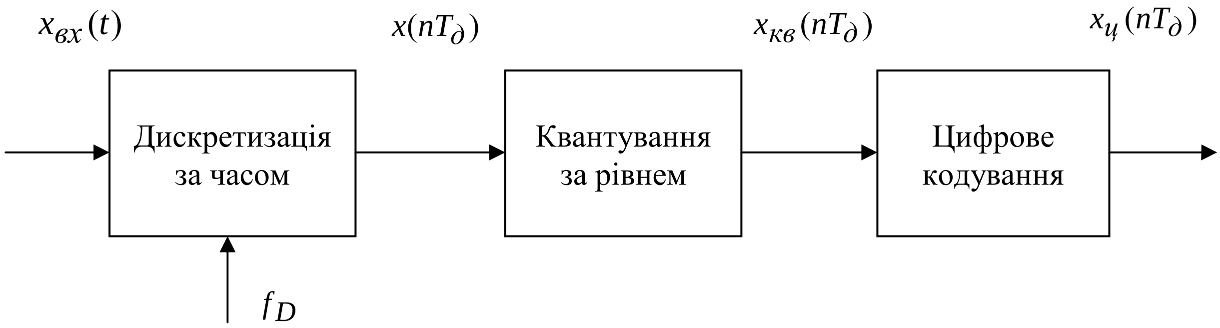


Рисунок 1.2 – Послідовність операцій аналого-цифрового перетворення сигналу

У результаті утворюється дискретний сигнал $x(nT_\partial)$, що відповідає вибіркам аналогового сигналу *x(t)* у дискретні рівновіддалені моменти часу nT_∂, дискретний квантованный сигнал $x_{кв}(nT_\partial)$, що відрізняється кінцевою множиною прийнятих ним значень, і цифровий сигнал $x_ц(nT_\partial)$ у вигляді послідовності цифрових двійкових кодів із числом розрядів, що відповідають розрядності АЦП. Процесором ЦОС, відповідно до заданого алгоритму цифрової обробки (оператором Ф), вхідний цифровий сигнал $x_ц(nT_\partial)$ перетвориться у вихідний цифровий сигнал системи $y_ц(nT_\partial) = \Phi[x_ц(nT_\partial)]$.

Аналоговий вихідний сигнал системи $y_{вих}(t)$ виходить із цифрового сигналу $y_ц(nT_\partial)$ за допомогою ЦАП, що перетворює його у квантований за рівнем аналоговий сигнал ступінчастої форми, і аналогового ФНЧ2, яким обмежується частотний спектр і заглушаються високочастотні компоненти вихідного сигналу. Цей фільтр із частотою зрізу $\omega_з < \omega_D/2$ називають також згладжувальним.

Дискретизація за часом, або просто дискретизація (digitization) являє собою процедуру взяття миттєвих значень – відліків аналогового сигналу *x(t)* з інтервалом часу, рівним періоду дискретизації T_∂. Приклад дискретизованого сигналу наведено на рис. 1.3.

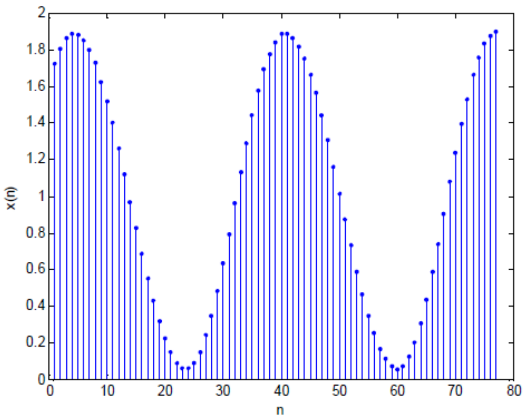


Рисунок 1.3 – Дискретизований сигнал

Квантування за рівнем (квантування – quantization) здійснюється з метою подання точних значень відліків $x_ц(nT_∂)$ у вигляді двійкових чисел кінцевої розрядності – квантованих відліків $x_ц(nT_∂)$. Для цього динамічний діапазон дискретного сигналу $x(nT_∂)$ розбивається на кінцеве число дискретних рівнів – рівнів квантування – і кожному відліку за певним правилом привласнюється значення одного з найближчих рівнів, між якими він виявляється. Рівні квантування кодуються двійковими числами розрядності b, що залежить від числа рівнів квантування R

$$R \le 2^b .$$

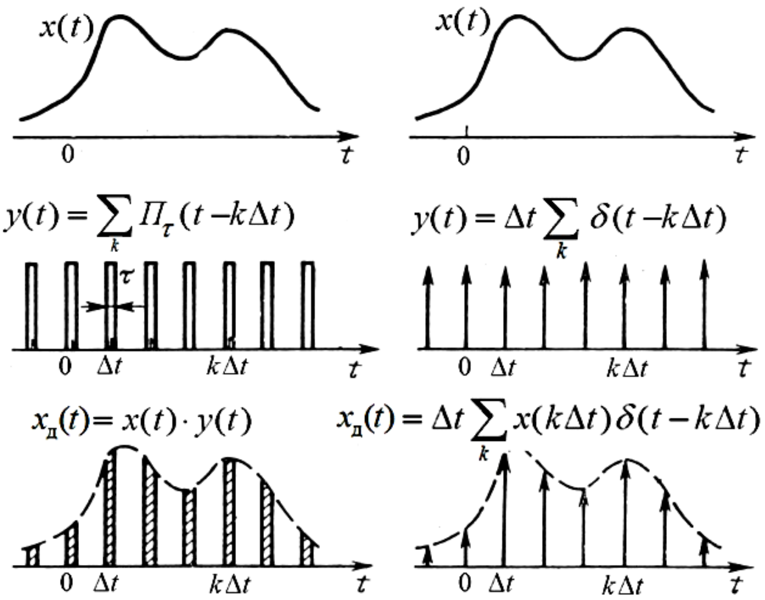
Сукупність квантованных відліків $x_ц(nT_∂)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ називають *цифровим сигналом* (digital signal).

Сукупність елементів ФНЧ1, АЦП, ЦАП і ФНЧ2 системи цифрової обробки аналогових сигналів, що виконують перетворення сигналів виду А/А, А/Ц і Ц/А, утворює підсистему її аналогового введення-виведення або аналого-цифровий інтерфейс.

1.3 Дискретні та неперервні сигнали

Більшість реальних сигналів (наприклад, звукових) є неперервними функціями. Для цифрової обробки таких сигналів їх потрібно перевести в цифрову форму. Один із способів зробити це – рівномірно за часом виміряти значення сигналу на певному проміжку часу і ввести отримані значення амплітуд. Якщо робити вимірювання досить часто, то за значеннями отриманого дискретного сигналу можна буде досить точно відновити вигляд вихідного неперервного сигналу.

Дискретні сигнали (discrete signal) $x_д(t)$ утворюють шляхом множення аналогового сигналу *x(t)* на так звану функцію дискретизації *y(t)*, яка являє собою періодичну послідовність коротких імпульсів, що слідують з кроком дискретизації Δt (рис. 1.4, а). В ідеальному випадку як функція дискретизації використовується періодична послідовність дельта-функцій (рис. 1.4, б).



а) б)

Рисунок 1.4 – Дискретизація сигналу

Процес вимірювання величини сигналу через рівні проміжки часу називається рівномірною (за часом) дискретизацією. Багато пристроїв для введення даних здійснюють дискретизацію.

Наприклад, звукова карта дискретизує сигнал з мікрофона, сканер дискретизує сигнал, що надходить з фотоелемента. У результаті дискретизації безперервний (аналоговий) сигнал перетворюється у послідовність значень. Пристрій, що виконує цей процес, називається аналого-цифровим перетворювачем (АЦП, analogue-to-digital converter, ADC). Частота, з якою АЦП здійснює вимірювання значень аналогового сигналу і видає його цифрові значення, називається частотою дискретизації.

Інтервал $T = k\Delta t$ називають періодом дискретизації, частотою дискретизації є обернена величина

$$f_n = \frac{1}{t}.$$

Значення послідовності в моменти часу *nT* називають відліками. Дискретний сигнал може бути як дійсним, так і комплексним. В останньому випадку його дійсна та уявна частини описуються дійсними послідовностями

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT).$$

Математично дискретний сигнал визначають:

– функцією дискретного часу nT_∂ : $x(nT_\partial) = x(t)\big|t = nT_\partial$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ що відповідає вибіркам аналогового сигналу в дискретні періодично повторювані моменти часу;

– функцією номера вибірки $n: x(n) = x(nT_\partial)\big|T_\partial = 1$, що в загальному випадку не пов'язана з часом;

– функцією неперервного часу t:

$$x(t) = x(t)\,f_\delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_\partial) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_\partial)\delta(t - nT_\partial),$$

що її отримують множенням аналогового сигналу *x(t)* на функцію дискретизації $f_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_\partial)$ у вигляді періодичної послідовності 8 імпульсів з періодом, що є рівним:

$$\delta(t - nT_\partial) = \begin{cases}\infty, t = nT_\partial \\ 0, t \neq nT_\partial\end{cases}.$$

Графічно дискретні сигнали представляються функцією номера вибірки *n* або дискретного часу nT_∂ (рис. 1.5).

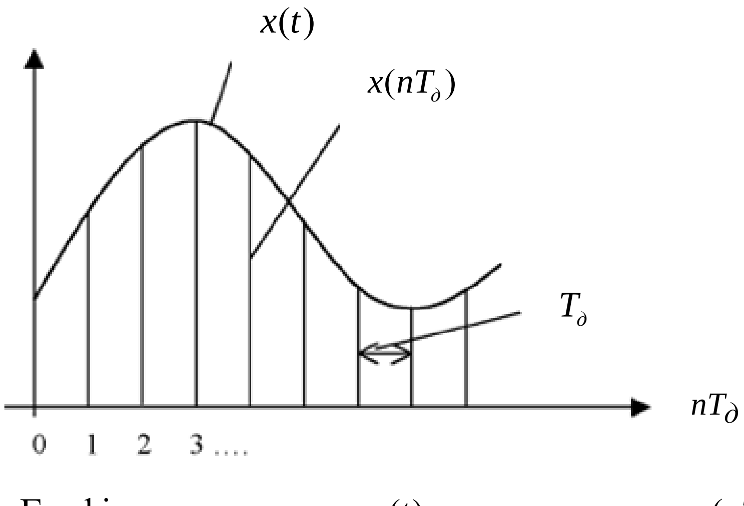


Рисунок 1.5 – Графік неперервного $x(t)$ та дискретного $x(nT_\partial)$ сигналу

1.4 Теорема Котельникова.

Для того, щоб відновити вихідний неперервний сигнал з дискретизованого з малими похибками, необхідно раціонально вибрати крок дискретизації. Тому при перетворенні аналогового сигналу в дискретний обов'язково виникає питання про величину кроку дискретизації. Якщо аналоговий сигнал має низькочастотний спектр, обмежений деякою верхньою частотою $F_в$ (тобто функція *u(t)* має вигляд кривої, яка плавно змінюється, без різких змін амплітуди), то навряд чи на деякому невеликому часовому інтервалі дискретизації Δt ця функція може істотно змінюватися за амплітудою.

Очевидно, що точність відновлення аналогового сигналу за послідовністю його відліків залежить від величини інтервалу дискретизації. Чим він коротше, тим менше буде відрізнятися функція *u(t)* від плавної кривої, що проходить через точки відліків. Однак зі зменшенням інтервалу дискретизації, істотно зростає складність і обсяг обчислень. При досить великому інтервалі дискретизації Δt зростає ймовірність спотворення або втрати інформації при відновленні аналогового сигналу.

Оптимальна величина інтервалу дискретизації встановлюється **теоремою Котельникова**, яка має важливе теоретичне та практичне значення: дає можливість правильно здійснити дискретизацію аналогового сигналу та визначає оптимальний спосіб його відновлення на приймальному кінці за відліковим значенням.

Відповідно до однієї з найбільш відомих і простих інтерпретацій теореми Котельникова довільний сигнал *s(t)*, спектр якого обмежений деякою частотою $F_в$, може бути повністю відновлений за послідовністю своїх відлікових значень, що слідують з інтервалом часу

$$\Delta t = \frac{1}{2F_в}.$$

Інтервал дискретизації Δt та частоту $F_в$ часто називають інтервалом і частотою Найквіста. Аналітично теорема Котельникова подається рядом

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t}(t - k\Delta t)}{\frac{\pi}{\Delta t}(t - k\Delta t)} \quad ,$$

де k – номер відліку; $s(k\Delta t)$ – значення сигналу в точках відліку.

Фізичний зміст цієї теореми стає зрозумілим, якщо розглянути спектри сигналів $S(t)$ і $S_D(t)$.

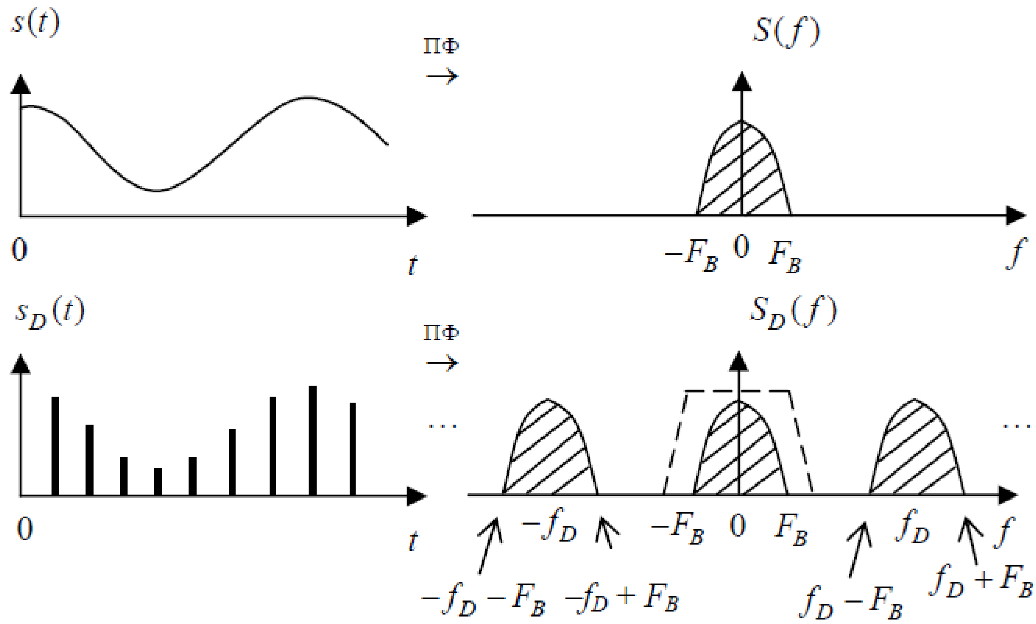


Рисунок 1.6 – Теорема Котельникова

З рис. 1.6 видно, що $S_D(f)$ містить у собі $S(f)$ ще й нескінченне число копій $S(f)$, зсунутих одна відносно одної на частоту дискретизації f_D. Якщо пропустити сигнал $S_D(f)$ через фільтр нижніх частот (ФНЧ), амплітудно-частотна характеристика якого показана на цьому ж рисунку, на виході ФНЧ залишиться тільки $S(f)$, тобто відновиться вихідний сигнал *s(t)* .

При $f_D > 2F_в$ копії не перетинаються з основним пелюстком спектра $S_D(f)$ і таке відновлення можливе.

При $f_D = 2F_в$ копії стикаються з основним пелюстком, однак виділення вихідного сигналу *s(t)* ще можливе за допомогою ідеального ФНЧ із нескінченною крутизною спаду амплітудно-частотної характеристики (АЧХ).

При $f_D < 2F_в$ пелюстки спектра $S_D(f)$ перекриваються і відновлення вихідного сигналу *s(t)* неможливим.

На практиці частоту f_D завжди вибирають більшою, ніж $2F_в$, тому що будь-який фільтр має далеко не нескінченну крутизну спаду АЧХ.

Спектр реального сигналу рідко має точну верхню границю $F_в$. Найчастіше $S(f)$ зменшується з ростом частоти, асимптотично наближуючись до нуля. У такому випадку на вході пристрою дискретизації поміщають ФНЧ, що має частоту, рівну ефективній ширині спектра вихідного аналогового сигналу. Його призначення – забрати залишки спектра за межами $F_в$ і тим самим уникнути перекриття пелюстків спектра $S_D(f)$.

На практиці ця теорема має величезне значення. Наприклад, відомо, що більшість звукових сигналів можна з деякою мірою точності вважати сигналами з обмеженим спектром. Їх спектр, в основному, лежить нижче 20 кГц. Це означає, що при дискретизації з частотою не менш 40 кГц, ми можемо достатньо точно відновити вихідний аналоговий звуковий сигнал за його цифровими відліками. Абсолютної точності досягти не вдасться, тому що в природі не буває сигналів з ідеально обмеженим спектром.

Пристрій, який інтерполює дискретний сигнал до безперервного, називається цифроаналоговим перетворювачем (ЦАП, digital-to-analogue converter). Ці пристрої застосовуються, наприклад, в програвачах компакт-дисків для відтворення звуку з цифрового звукового сигналу, записаного на компакт-диск. Частота дискретизації звукового сигналу під час запису на компакт-диск становить 44100 Гц. Таким чином, і ЦАП на CD-плеєрі працює на частоті 44100 Гц.

1.5 Дискретні перетворення сигналів

Крім звичного подання сигналів і функцій у вигляді залежності їх значень від певних аргументів (часу, лінійної або просторової координати тощо) при аналізі й обробці даних широко використовується математичний опис сигналів за аргументами. Можливість такого опису визначається тим, що будь-який як завгодно складний за своєю формою сигнал, що не має нескінченних значень на своєму інтервалі, можна подати у вигляді суми більше простих сигналів, і, зокрема, у вигляді суми найпростіших гармонічних коливань, що виконується за допомогою перетворення Фур'є. Відповідно, математично розкладання сигналу на гармонічні складові описується функціями значень амплітуд і початкових фаз коливань за неперервним або дискретним аргументом. Сукупність амплітуд гармонічних коливань розкладання називають амплітудним спектром сигналу, а сукупність початкових фаз – фазовим спектром. Обидва спектри разом утворюють повний частотний спектр сигналу, що за точністю математичного подання тотожний динамічній формі опису сигналу.

Крім гармонічного ряду Фур'є застосовуються й інші види розкладання сигналів: за функціями Уолша, Адамара, Вейвлета та інших, крім того, існують розкладання за поліномами Чебишова, Лаггера, Лежандра та інших. У ЦОС широко використовується дискретне перетворення Фур'є (ДПФ, discrete Fourier transform) і алгоритм його швидкого обчислення – швидке перетворення Фур'є (ШПФ). Вони дозволяють адекватно описувати в частотних координатах всі, крім найміттєвіших (< 1 с), сигнали; зрізані за частотою Фур'є-компоненти описують дані більш правдоподібно, ніж будь-які інші степеневі ряди.

1.5.1 Спектр Фур'є неперервних та дискретних сигналів

Нехай $x(t)$ – неперервний сигнал, що задовольняє умову $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$. Сигнал $x(t)$ у цьому випадку може бути поданий у вигляді інтегрального розкладу за системою комплексних синусоїдальних функцій – інтеграла Фур'є:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \ , \qquad (1.1)$$

де $X(\omega)$ – комплексна функція, що визначає амплітуду та фазову затримку комплексної синусоїди із частотою $\omega : e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$. У загальному випадку ця функція визначена на всій осі частот $\omega \in [-\infty, \infty]$ і називається вона Фур'є-спектром сигналу $x(t)$.

У свою чергу Фур'є-спектр $X(\omega)$ може бути отриманий з вихідного сигналу $x(t)$ за допомогою співвідношення:

$$X(\omega) = \int_{-\omega}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt. \qquad (1.2)$$

Співвідношення (1.1), (1.2) являють собою пари інтегральних перетворень Фур'є, причому (1.2) – пряме перетворення Фур'є, (1.1) – обернене перетворення Фур'є.

Відмітимо, що сигнал $x(t)$ и Фур'є-спектр $X(\omega)$ – дві взаємно-однозначні характеристики, перша є часовим поданням сигналу, друга – частотним. Часове подання більш наочне та звичне для повсякденного сприйняття, друге – менш наочне, але винятково корисне при математичному описі перетворень сигналів у лінійних системах з постійними параметрами.

Основні властивості Фур'є-спектра $X(\omega)$:

1. Функція $X(\omega)$ в загальному випадку є комплексною:

$$X(\omega) = \operatorname{Re} X(\omega) + i \operatorname{Im} X(\omega) = |X(\omega)| e^{i \arg X(\omega)} = A(\omega) e^{i\Phi(\omega)}.$$

Функцію $A(\omega) = |X(\omega)|$ називають амплітудним спектром (іноді магнітудою спектра), вона визначає дійсну амплітуду синусоїди із частотою ω, що бере участь у формуванні сигналу. Функцію

$\Phi(\omega) = \arg X(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} X(\omega)}{\operatorname{Re} X(\omega)}\right)$ називають фазовим спектром, вона показує фазовий зсув, якому варто піддати комплексну синусоїду частоти ω перед підсумовуванням при відновленні вихідного сигналу.

2. Внаслідок дійсності сигналу $x(t)$ функція $X(\omega)$ має комплексно-спряжену симетрію

$$X(\omega) = X^*(-\omega),$$
$$\operatorname{Re} X(\omega) = \operatorname{Re} X(-\omega), \qquad \operatorname{Im} X(\omega) = -\operatorname{Im} X(-\omega),$$
$$|X(\omega)| = |X(-\omega)|, \qquad ArgX(\omega) = -ArgX(-\omega);$$

3. Енергія спектра Фур'є обмежена й дорівнює енергії вихідного сигналу (рівність Парсеваля):

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} X^2(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt < \infty.$$

У теорії неперервних лінійних систем з постійними параметрами широко використовується поняття перетворення Лапласа (s-перетворення)

$$X(s) = \int_{-\omega}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{1.3}$$

функції, визначеної на комплексній s-площині: $s = \upsilon + j\omega$.

При цьому пряме перетворення Фур'є (1.2) може розглядатися як перетворення Лапласа, обчислене на уявній осі в s-площині:

$$X(\omega) = X(s = j\omega).$$

У зв'язку із цим, у літературі часто можна зустріти позначення для Фур'є-спектра – $X(j\omega)$, в якому є вказівка на те, що це спектр саме неперервного сигналу.

В теорії дискретних лінійних систем замість s-перетворення Лапласа широко використовується поняття Z-перетворення дискретного сигналу

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \tag{1.4}$$

Z-перетворення має сенс для тих значень комплексної змінної z, при

Література

1. Gonzales R. C. Digital Image Processing Using MATLAB / R. C. Gonzales , R. E. Woods, S. Eddins. – Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004. – 492 p.
2. Greenspan D. Introduction to Numerical Analysis and Applications / D. Greenspan. – Markham : Chicago, 1971. – 176 p.
3. Image Processing Toolbox For Use with Matlab, User's Guide. Version 3. – The Math Works Inc., 2004. – 775 p.
4. Kvyetnyy R. Basics of Modelling and Computational Methods / R. Kvyetnyy. – Вінниця : ВДТУ, 2007. – 147 с.
5. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В. А. Сойфера – 2 изд. испр. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 784 с.
6. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / Абрамовиц М. , Стиган И. – М. : Наука, 1979. – 486 с.
7. Амосов А. А. Вычислительные методы для инженеров : учеб. пособ. / Амосов А. А. , Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. – М. : Высшая школа, 1994. – 554 с.
8. Анисимов Б. В. Распознавание и цифровая обработка изображений / Анисимов Б. В., Курганов В. Д., Злобин В. К. – М. : Высшая школа, 1983. – 468 с.
9. Аттетков А. В. Методы оптимизации : учеб. для вузов / Аттетков А. В. , Галкин С. В., Зарубин В. С. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 440 с.
10. Батищев Д. И. Методы оптимального проектирования / Батищев Д. И. – М. : Радио и связь, 1984. – 248 с.
11. Бахвалов Н. С. Численные методы / Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. – М. : Наука, 1987. – 630 с.
12. Васильков Ю. В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании : учеб. пособие / Ю. В. Васильков, Н. Н. Василькова. – М. : Финансы и статистика, 2002. – 256 с.
13. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К. : Наукова думка, 1986. – 544 с.
14. Вержбицкий В. М. Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения) : учеб. пособие для вузов / Вержбицкий В. М. – М. : Высш.шк., 2001. – 382 с.
15. Воеводин В. В. Матрицы и вычисления / Воеводин В. В. – М. : Наука, 1984. – 320 с.
16. Глинченко А. С. Цифровая обработка сигналов / Глинченко А. С. – Красноярск : Изд-во КГТУ, 2001. – 199с.

17. Глушков В. М. Основы безбумажной информатики / Глушков В. М. – М. : Наука, 1987. – 552 с.
18. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005. – 1072 с.
19. Горелик А. Л. Методы распознавания / А. Л. Горелик, В. А. Скрипкин. – М. : Высшая школа, 1984. – 208 с.
20. Грузман И. С. Цифровая обработка изображений в информационных системах / И. С. Грузман, В. С. Киричук. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. – 352 с.
21. Дахнович А. А. Дискретные системы и цифровая обработка сигналов : учебное пособие / Дахнович А. А. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 100с.
22. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.
23. Дубовой В. М. Основи застосування ЕОМ у інженерній діяльності / В. М. Дубовой, Р. Н. Квєтний. – К. : ІСДО України, 1994. – 285 с.
24. Дубовой В. М. Програмування комп'ютеризованих систем управління та автоматики / В. М. Дубовой, Р. Н. Квєтний. – Вінниця : ВДТУ, 1997. – 208 с.
25. Дубовой В. М. Програмування персональних комп'ютерів систем управління / В. М. Дубовой, Р. Н. Квєтний. – Вінниця : ВДТУ, 1999.
26. Каллан Р. Основные концепции нейронных сетей / Каллан Р. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2001. –288 с.
27. Канторович Л. В. Оптимальные решения в экономике / Л. В. Канторович, А. Б. Горстков – М. : Наука, 1972. – 335 с.
28. Кветный Р. Н. Математическое моделирование в задачах проектирования средств автоматики и информационно-измерительной техники / Квєтний Р. Н. – К. : УМК ВО,1989. – 112 с.
29. Кветный Р. Н. Информационная теория измерений: от модели к изделию / Р. Н. Квєтний, В. Т. Маликов. – М. : Знание, 1988. – 213 с.
30. Квєтний Р. Н. Інтервальні моделі перетворень сигналів в інформаційно-вимірювальних системах / Р. Н. Квєтний, О. Р. Бойко. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 88с.
31. Різницеві методи та сплайни в задачах багатовимірної інтерполяції / [Квєтний Р. Н., Дементьєв В. Ю., Машницький М. О., Юдін О. О.]. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 87 с.
32. Квєтний Р. Н. Методи фільтрації текстурованих зображень у задачах розпізнавання та класифікації / Р. Н. Квєтний, О. Ю. Софина. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2011. – 119 с.
33. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Коллатц Л. – М. : Мир, 1969. – 448 с.
34. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1986. – 832 с.

35. Краскевич В. Е. Численные методы в инженерных исследованиях / Краскевич В. Е., Зеленский К. Х., Гречко В. И. – К. : Вища школа, 1986. – 264 с.
36. Ляшенко М. Я. Чисельні методи : підручник / М. Я. Ляшенко, М. С. Головань. – К. : Либідь, 1996. – 288 с.
37. Мак-Кракен Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М. : Мир, 1977. – 584 с.
38. Маликов В. Т. Вычислительные методы и применение ЭВМ / В. Т. Маликов, Р. Н. Кветный. – К. : Вища школа, 1989. – 362 с.
39. Марчук Г. И. Введение в проекционно–сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М. : Наука, 1982. – 264 с.
40. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд ; пер. с англ. – М. : Мир, 1979. – 578 с.
41. Ракитский Ю. В. Численные методы решения жестких систем / Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. – М. : Наука, 1979. – 208 с.
42. Рудаков П. И. Обработка сигналов и изображений. Matlab 5.x / П. И. Рудаков, И. В. Сафонов. – М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 2000. – 416 с.
43. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы / Саати Т. – М. : Мир, 1973. – 302 с.
44. Самарский А. А. Введение в численные методы / Самарский А. А. – М. : Наука, 1987. – 234 с.
45. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М. : Наука, 1977. – 400 с.
46. Скурихин В. Н. Математическое моделирование / Скурихин В. Н., Шифрин В. Б., Дубровский В. В. – К. : Техніка, 1983. – 270 с.
47. Трусов П. В. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / Трусов П. В. – М. : Логос, 2005. – 440 с.
48. Фисенко В. Т. Компьютерная обработка и распознавание изображений : учеб. пособие / В. Т. Фисенко, Т. Ю. Фисенко. – СПб. : СпбГУ ИТМО, 2008. – 192 с.
49. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці : підручник / [Фельдман Л. П., Згуровський М. З., Петренко А. І., Дмитрієва О. А.]. – К. : Вид. група BHV, 2006. – 480 с.
50. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М. : Мир, 1980. – 279 с.
51. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ / Шуп Т. – М. : Мир, 1982. – 238 с.
52. Чабан В. Чисельні методи / Чабан В. – Львів : Вид. Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2001. – 186 с.
53. Яковлев А. Н. Введение в вейвлет-преобразования / Яковлев А. Н. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.

Навчальне видання

Квєтний Роман Наумович
Богач Ілона Віталіївна
Бойко Олексій Романович
Софина Ольга Юріївна
Шушура Олексій Миколайович

КОМП’ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ

Частина 2

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна
Оригінал-макет підготовлено О. Софиною

Підписано до друку 28.02.2013 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. др. арк. 13,57.
Наклад 300 (1-й запуск – 100) прим. Зам № 2013-063.

Вінницький національний технічний університет,
комп’ютерний інформаційно-видавничий центр.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп’ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.