

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**А. С. Моргун**

**НЕЛІНІЙНІ ПРОБЛЕМИ  
МЕХАНІКИ ҐРУНТІВ**

**Монографія**

Вінниця  
ВНТУ  
2016

УДК.519.635:624.044:624.15

ББК 22.193.38.112:38.58

M79

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького навчального університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 28 квітня 2016 р.)

Рецензенти:

**О. А. Савицький**, доктор технічних наук, старший науковий співробітник

**М. Ф. Друкований**, доктор технічних наук, професор

**Моргун, А. С.**

M79 Нелінійні проблеми механіки ґрунтів : монографія / А. С. Моргун. – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 135 с.

ISBN 978-966-641-674-5

В роботі з позицій механіки дисперсного пружно-пластичного середовища викладено уявлення про особливості сучасних моделей розрахунку фундаментних конструкцій та наведено найбільш широко вживані моделі ґрунтової основи. Для кращого розуміння матеріалу в книгу включено викладення загальних питань механіки суцільних пружно-пластичних середовищ. Теоретичні питання висвітлено в об'ємі, що дозволяє продумано підійти до оцінки роботи ґрунтів в основах фундаментів і проектуванню їх за межами пружності. Приклади приведено практично для всіх етапів проектування, що полегшує розуміння і практичне прикладання теорії.

УДК 519.642:624.044:624.15

ББК 22.193:38.112:38.58

ISBN 978-966-641-674-5

© А. Моргун, 2016

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ .....	5
ВСТУП .....	6
Розділ 1 СУЧАСНИЙ СТАН ТА ПОДАЛЬШІ ПЕРСПЕКТИВИ ДОСЛІДЖЕНЬ МЕХАНІКИ ҐРУНТІВ .....	10
1.1 Історичні віхи розвитку механіки ґрунтів .....	10
1.2 Принципові особливості нелінійного деформування ґрунту .....	13
1.3 Енергія руйнування.....	16
1.3.1 Незалежність об’ємної деформації від деформації формозміни .....	19
1.4 Дилатансія гранульованих мас. Вторинні явища .....	19
1.5 Змінність жорсткості основи при дії стиску .....	21
1.6 Математичний опис міцності ґрунту під навантаженням .....	24
1.7 Розрахункові моделі ґрунту та параметри розрахункових моделей.....	27
1.8 Основні рівняння теорії пружності та пластичності. Плоска задача.....	42
1.9 Критерії міцності ґрунту. Поверхні текучості .....	49
1.10 Деякі теорії руйнування .....	51
1.11 Простір напружень. П-площина. Поверхня текучості .....	54
1.11.1 Закон фрикційного руйнування.....	59
Розділ 2. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ЗА МГЕ НЕЛІНІЙНОЇ ПОВЕДІНКИ ҐРУНТІВ .....	61
2.1 Математичне моделювання нелінійної задачі геомеханіки для управління класом задач визначення НДС фундаментних конструкцій.....	61

2.2 Розроблення способів економічної практичної реалізації прийняття оптимальних рішень в фундаментабудуванні .....	71
2.3 Аспекти використання методу граничних елементів в прогнозуванні надійності фундаментів висотних споруд .....	75
2.4 Теорія пластичної течії в прикладній задачі поведінки висячої забивної палі .....	82
2.5. Взаємодія буронабивних паль з ґрунтом за МГЕ .....	87
2.6 Моделювання МГЕ процесу замокання ґрунтової основи .....	94
2.7 Прогнозування впливу води на напружено-деформований стан лесової основи числовим МГЕ.....	101
2.8 Проблеми ресурсу НДС фундаментних конструкцій при реконструкції будівель .....	105
2.9 Числове моделювання процесу взаємодії штампа з пружно-пластичним середовищем ґрунту числовим МГЕ .....	110
2.10 Числові дослідження МГЕ вибору оптимальної ширини кільцевих фундаментів .....	120
2.11 Прогнозування за МГЕ технічних ресурсів кільцевого пальового поля силосу зерносушарки .....	125
ЛІТЕРАТУРА .....	131

## **ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ**

ДБНіП – державні будівельні норми і правила  
МГЕ – метод граничних елементів  
МСЕ – метод скінченних елементів  
МСР – метод скінченних різниць  
НДС – напружено-деформований стан  
ПК – програмний комплекс  
САПР – системи автоматизованого проектування  
СЕ – скінчений елемент  
САПР – системи автоматизованого проектування  
СЕ – скінчений елемент  
СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь  
СПФ – стрічковий пальовий фундамент

## ВСТУП

Механіка ґрунтів – прикладна наука, основна мета якої створювати передумови для вирішень практичних задач будівництва. За різноманіттям і мінливістю ґрунти не мають аналогів серед матеріалів, які використовуються в будівництві. Вони завжди неоднорідні та анізотропні. Ґрунти – природна субстанція, яку інженер-будівельник може змінити не завжди і в дуже обмежених межах.

Геомеханіку необхідно розглядати як широку спеціальну область механіки, в якій досліджуються механічні процеси в земній корі, що виникають як під дією природних факторів (гравітація, сейсміка, тектоніка, гідродинамічні тиски і т. д.) так і під впливом діяльності людей. Основами теорії в геомеханіці є добре обґрунтовані загальні закономірності деформованих середовищ. Та при розв'язанні деяких конкретних задач цих закономірностей недостатньо, необхідні ще додаткові специфічні залежності.

До фундаментальних дисциплін механіки деформованих тіл, досягнення яких можна з успіхом використовувати, розглядаючи проблеми геомеханіки, відносяться: теорія пружності, повзучості, пластичності, консолідації.

Теорія пружності має добре розроблений математичний апарат і широко використовується в багатьох інженерних прогнозах. Основні рівняння теорії пружності (визначальні залежності між  $\sigma - \varepsilon$ ), як відомо, є лінійними, та в деяких задачах геомеханіки більш відповідати дійсності буде нелінійна залежність. Переваги прикладання до ґрунтів теорії пружності, пов'язані з її стрункістю і напрацьованістю, знижуються в результаті явного перебільшення значень осідань, прогинів, згинальних моментів в конструкціях на пружній основі, особливо при проведенні розрахунків в умовах плоскої задачі та при великих опорних площах, навіть при урахуванні активної зони.

Теорія пружності всі матеріальні тіла розглядає як континуальні (суцільні), але на молекулярному рівні вони дискретні. У ґрунтів дискретність виражена на макрорівні. До них необхідно застосовувати і реологію і механіку дисперсних середовищ. Сучасні методи в механіці ґрунтів напрацьовані для однорідних середовищ:

- пружний півпростір;
- пружний шар на нестискуваній основі.

Ґрунти – дисперсні багатофазові тіла, суттєво різняться від конструктивних матеріалів, складаються із твердих частинок та пор між ними, які можуть бути заповнені водою (частіше всього). Механіка ґрунтів розглядає рух і рівновагу частинок ґрунту та взаємодію, що виникає при цьому. На цій основі стає можливим побудова і дослідження математичних моделей, що адекватно описують деформативність ґрунтів та дають науковий аналіз ситуації.

Принцип розрахунку основ по граничних станах, що лежить в основі діючих ДБН при проектуванні основ і фундаментів, дає можливість максимально використовувати несучу спроможність основ, завдяки чому досягається значний економічний ефект. Впровадження цього принципу потребує подальшого розвитку механіки ґрунтів в цілому, розроблення методів прогнозування кінцевих осідань споруд, удосконалення моделей основи з метою їх більшого наближення до дійсності. До таких відносяться моделі нелінійно деформованого середовища.

Широке використання знайшли моделі у вигляді стиснутого (пружного) шару кінцевої товщини. Ця схема точніше відображує реальні умови роботи основи, ніж схема нескінченного півпростору і розрахунки по ній дають більш економічне вирішення влаштування фундаментів різного призначення.

Результати експериментальних досліджень і натурних спостережень за деформаціями ґрунту під спорудами, що мають великі розміри в плані [8, 9, 13] показали, що відображення умов деформацій ґрунтів більш близьке до реальних дає схема розрахунку по моделі основи у вигляді лінійно-деформованого шару кінцевої товщини. Ці обставини слугували приводом для включення в діючі ДБН умови про необхідність розрахунку деформацій основ під великорозмірні фундаменти за цією схемою.

Для сучасних нових типів споруд попередній досвід є недостатнім. Подібні задачі знаходяться за межами дії емпіричних правил і потребують звернення до раціональних наукових методів розрахунку.

Таким чином, в механіці ґрунтів склалось два напрямки: фізичний і математичний. Останній дав немало цікавих розв'язків, для практичної реалізації яких необхідні модулі деформацій ґрунту. На цій же модульній основі побудовані формули діючих нормативних документів для розрахунку основ за деформаціями. Існує багато методів визначення модулів деформацій ґрунту, та ні один із них не можна вважати достовірним, підкреслював

В. П. Горбунов [9], в тому числі і рекомендовані дослідження ґрунтів штампом площею  $5000 \text{ см}^2$ , оскільки модулі деформацій є лише математичними параметрами, а не реальними фізичними показниками. Та ґрунти – це утворення природні і механіку ґрунтів неможливо відділяти від природничих наук, серед яких головуюче місце належить фізиці, тому математичні концепції, які використовують в механіці ґрунтів, мають відповідати основним фізичним законам, таким, наприклад, як умовам збереження маси і енергії. Цим умовам повністю відповідає теорія пружності. Умовам збереження маси не суперечить і теорія фільтраційної консолідації. Після накладання на гіпотези стиснення ґрунтів з урахуванням зміни їх пористості умов, до яких потрібно віднести не лише закони збереження маси і енергії, а і інші закони фізики, термодинаміки незворотних процесів, реології, їх можна буде підняти в ранг теорії. Адже в основі властивостей ґрунтів лежать загальні фундаментальні закони природи.

Системи «фундамент–основа» розраховуються сьогодні на навантаження і впливи, виходячи із нормативних обмежень сумісних деформацій з використанням відомого програмного забезпечення для ЕОМ, в основі якого лежить числовий МСЕ, та напрацьовані на сьогодні математичні моделі. Це стало практично традиційним. Навантаження на фундаментну конструкцію може враховуватись за гранично допустимим осіданням будівлі. На ринку комп'ютерних програм є такі програмні комплекси (ПК) для розв'язку геотехнічних задач за допомогою числового методу скінчених елементів (МСЕ), як «Ліра» (НИИАС, Київ), «Геомеханика» (СПбГАСУ, Петербург), «PLAXIS» (PLAXIS, Голандія) та інші.

Із порівняння результатів підрахунків за наведеними програмними комплексами та експериментом видно, що врахування нелінійності роботи ґрунту наближує теоретичні розв'язки до реальної поведінки ґрунту та дозволяє отримати більш достовірні дані поведінки основи ґрунту під навантаженням.

Сучасний числовий метод граничних елементів (МГЕ) поряд з МСЕ дозволяє ефективно вирішувати за допомогою ЕОМ складні задачі інженерної практики. Про це свідчать висвітлені в літературі аспекти практичного прикладання МГЕ до розділу механіки дисперсних середовищ (ґрунтів) та числова реалізація практичних задач пружно-пластичних ґрунтів. МГЕ – це один із класичних числово-аналітичних методів досліджень і розв'язків як крайових задач, так і інтегральних рівнянь.



МГЕ дозволяє зразу знайти невідомі величини на межі не обраховуючи їх по всій досліджуваній області. Для багатьох практичних задач цим можна обмежитись, коли ж необхідно знайти розв'язок в довільній внутрішній точці області, то для цього достатньо виконати інтегрування.

Про рівень складності задач, що ефективно розв'язуються МГЕ, можна судити з наведених в роботі прикладів, серед яких розрахунок НДС та несучої спроможності фундаментних конструкцій проведено одночасно за двома граничними станами (несучою спроможністю та деформаціями).

В роботі висвітлені аспекти практичного прикладання МГЕ до розділу механіки дисперсних середовищ (ґрунтів) та числова реалізація практичних задач пружно-пластичних ґрунтів. Представлена робота містить формулювання МГЕ в формі з початковими деформаціями з критерієм текучості Мізеса–Шлейхера–Боткіна, який враховує як пружне деформування ґрунту так і рух дислокацій – носіїв непружності. Метод розв'язання реалізується за допомогою ітераційних процесів при малих приростах деформацій з використанням на ітераціях одного рекурентного виразу, який пов'язує напруження з пластичними деформаціями та початковою пружністю.

За результатами наведених прикладів прогнозування НДС фундаментних конструкцій можна зробити висновок, що моделювання нелінійної задачі граничної рівноваги механіки ґрунтів за теорією пластичної течії та дилатансійною теорією ґрунтового середовища є перспективним, оскільки дає змогу виявити значні резерви роботи основ та отримувати економічніші проектні рішення. Використання цього напрямку в практичних розрахунках потребує великої кількості достовірних даних фізико-механічних характеристик ґрунтів (вхідних параметрів моделі) та застосування ЕОМ.

Чітка обумовленість області використання наведеної в роботі нелінійної математичної моделі з залученням числового МГЕ (висячі палі, буронабивні палі, фундаменти мілкового закладання, кільцеві фундаменти, складові фундаменти, круглі фундаменти, вплив води), найсучасніша дилатансійна методика розрахунку, можливість корегування вхідних параметрів моделі дозволяють отримати надійні та економічні результати розрахунків несучої спроможності ґрунтових основ, що підтверджуються даними експериментів.

# РОЗДІЛ 1 СУЧАСНИЙ СТАН ТА ПОДАЛЬШІ ПЕРСПЕКТИВИ ДОСЛІДЖЕНЬ МЕХАНІКИ ҐРУНТІВ

## 1.1 Історичні віхи розвитку механіки Ґрунтів

Важливим питанням в механіці Ґрунтів є підняття точності передбачень поведінки споруд на Ґрунтових основах.

Всі споруди в кінцевому рахунку передають своє навантаження на Ґрунт через послідовність елементів конструкцій чи безпосередньо через контакт з Ґрунтом, як у дорожніх покриттів. У всіх випадках важлива реакція Ґрунту на прикладені навантаження. К. Терцаґі [42] показав, що поведінка Ґрунту в значній мірі залежить від попередньої історії його навантаження, насичення водою.

Основним математичним формулюванням механіки Ґрунтів є абстрактна ідея про неперервність середовища, що дозволяє використати для досліджень математичний аналіз. Механіка Ґрунтів має прогнозувати ступінь наближення Ґрунту до стану руйнування, коли Ґрунтовий масив вже не в змозі далі виконувати своє призначення. Встановлені залежності *мають відповідати експериментальним* даним. Оскільки зміна розташування частинок Ґрунту – це деформація, яку вивчає теорія пружності, а явище руйнування відноситься до теорії пластичності, постає необхідність залучення реології (механіки суцільних континуумів, середовищ) до аналізу задач механіки Ґрунтів. Ступінь прийнятності залежить від вхідних параметрів.

Історичні віхи розвитку механіки Ґрунтів неодноразово наголошені. Першою капітальною теоретичною роботою по механіці Ґрунтів є теорія Ш. Кулона (1773) – метод розв'язання задач про тиск Ґрунту на підпирні стінки та формулювання закону опору Ґрунту зсуву.

В 20-х роках 20-го століття (1925) К. Терцаґі (геолог і інженер) заклали фізичні закони механіки Ґрунтів. В 30-х роках Н. М. Герсіванов (1931–1933, як математик і інженер) опираючись на роботи К. Терцаґі та теорію пружності, дав математичний напрям механіці Ґрунтів, заснований на зв'язку деформацій з напруженням.

Н. М. Герсіванов обмежив область прикладання теорії пружності до Ґрунтів межами лінійної залежності між осіданням основи і навантаженням від споруд. Використання теорії пружності правомірне,

поки дотичні зусилля ні в одній точці масиву ґрунту не перевищують контактної опору тертя. Саме цей принцип, пов'язаний з обмеженням тиску під подошвою фундаменту розрахунковим опором ґрунту, закладено в нормативних документах при визначенні розмірів подошви фундаменту. Для зв'язку нормальних напружень з лінійними деформаціями ізотропного ґрунту використовується узагальнений закон Гука з використанням двох параметрів (модуль деформацій  $E_0$  і коефіцієнт Пуассона  $\nu$ ):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\} / E_0; \quad \gamma_{xy} = 2(1 + \nu)\tau_{xy} / E_0; \\ \varepsilon_y &= \{\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\} / E_0; \quad \gamma_{yz} = 2(1 + \nu)\tau_{yz} / E_0; \\ \varepsilon_z &= \{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\} / E_0; \quad \gamma_{xz} = 2(1 + \nu)\tau_{xz} / E_0.\end{aligned}\quad (1.1)$$

Аналогами параметрів  $E_0$  і  $\nu$  є модуль зсуву  $G$  і модуль об'ємного стиснення  $K$

$$G = E_0 / 2(1 + \nu); \quad K = E_0 / 3(1 - 2\nu); \quad (1.2)$$

які використовуються при визначенні деформацій формозміни і об'ємних деформацій. Це фізичні рівняння.

Геометричні рівняння для плоскої задачі в площині  $XZ$  мають вигляд:

$$\varepsilon_x = du / dx; \quad \varepsilon_z = dw / dz, \quad \tau_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}. \quad (1.3)$$

В 1934 р. з'явилися «Основи механіки ґрунтів» Н. А. Цитовича. В 1942 р. – унікальна робота В. В. Соколовського «Статика сипучого середовища».

Математичний напрям в механіці ґрунтів зайняв домінуюче положення в усіх країнах.

Якщо К. Терцагі вважав ґрунт за реальне фізичне тіло, то вчені математичного напрямку подають ґрунт у вигляді силових рівнянь з постійними параметрами – модулями.

Класична механіка ґрунтів була сформована в ХХ столітті. В її основу покладено теорію граничного напруженого стану, що базується на лінійній теорії міцності Кулона–Мора і теорії лінійно-деформованого середовища, що виходить із закону Гука про залежність між  $\sigma - \varepsilon$ .

Та натепер все більше виявляється недостатність цих теорій. Основні причини такі:

- 1) обмеження діючих на основу навантажень ( $p \leq R$ );
- 2) деформації, осідання, обраховані за методом лінійно-деформованого середовища, не збігалися з реальними;
- 3) експерименти (і лабораторні дослідження зразків малих розмірів і великомасштабні досліди в лотках, в польових умовах і натурні дослідження) фіксують в ґрунтах нелінійну залежність  $\sigma - \varepsilon$ .

Не вирішена проблеми механіки ґрунтів з удосконалення і підняття точності її методів розрахунків. Для цього в механіці ґрунтів необхідно враховувати нелінійності деформування.

При розрахунку конструкцій різняться фізичну, геометричну, конструктивну нелінійності.

Конструктивна нелінійність виникає при зміні розрахункової схеми під час монтажу конструкції і її роботи. Наприклад, зміна розрахункової схеми шпунтового кріплення котловану, установка додаткових розпірок. Для ґрунтових основ характерні всі види нелінійностей, головною є фізична.

В значній більшості задач механіки ґрунтів вони розглядаються чи як пружні, чи пластичні, чи в'язкі або як середовища із пружно-в'язко-пластичними властивостями. У всіх випадках НДС цих середовищ приводить до необхідності складання і розв'язку відповідних лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Відомо, що коли для розв'язування даної задачі вдається скласти диференціальні рівняння, то вважається, що задачу поставлено строго.

Одним із найважливіших сучасних напрямків та перспектив досліджень механіки ґрунтів є напрямки, які розвивають на базі уявлень про ґрунт як дисперсне нелінійно-деформоване середовище, що є відображенням широкого процесу пошуків нових розрахункових моделей ґрунтових основ, які проводяться в більшості країн.

Необхідно відмітити складність нових механічних моделей ґрунту і їх математичного описання. Моделі (теорія) має відповідати потребам фундаментобудування, а результати розрахунку – явищам, що протікають в ґрунтовій основі під натурними фундаментами.

Нові методи розрахунку основ мають давати можливість в рамках єдиної розрахункової схеми розв'язувати такі *штучно* розірвані на те-

перішній час задачі, як розрахунок осідань, міцності основи, деформацій і несучої спроможності фундаменту.

Сьогодення потребує [4, 28–30] описання пружно-пластичних властивостей ґрунтових основ, дилатансійних кінематичних співвідношень, врахування порушення асоційованого закону течії в ґрунтах, моделей неголономного пружно-пластичного дилатуючого середовища, вибір відповідної поверхні текучості для ґрунтів. Для оцінки особливостей роботи зернистих матеріалів ґрунту необхідно врахувати явище дилатансії.

В теорії пластичності важливим питанням є межа текучості  $\tau_i$ , що розділяє пружні та пружно-пластичні деформації. При виборі конкретної моделі обов'язковим є експериментальне обґрунтування.

## 1.2 Принципові особливості нелінійного деформування ґрунту

В нелінійній геомеханіці при описанні НДС ґрунту і закономірностей його зміни грають важливу роль *інваріанти тензорів напружень та деформацій* із механіки суцільних середовищ. Вони забезпечують повну характеристику відповідних тензорів.

$$\text{Рівномірне стиснення: } \sigma_{cp} = \frac{1}{3} I_{\sigma}^I . \quad (1.4)$$

$$\text{Рівномірне вкорочення (подовження) } \varepsilon_{cp} = \frac{1}{3} I_{\varepsilon}^I = \varepsilon_v / 3 . \quad (1.5)$$

Оскільки **практично всі матеріали (і ґрунт) руйнуються внаслідок розвитку деформацій форми**, важливими є інваріанти  $\varepsilon_i$  і  $\Gamma$  (*інтенсивність деформацій і інтенсивність деформацій зсуву*)

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \gamma_{окт}; \quad \Gamma = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \gamma_{окт} , \quad (1.6)$$

$$\text{де } \gamma_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} . \quad (1.7)$$

Для характеристики ступеня відхилення  $T_{\sigma}$  від гідростатичного стану ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) використовується *інтенсивність напружень*:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} ; \quad (1.8)$$

$$\text{інтенсивність дотичних напружень } T = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_i . \quad (1.9)$$

В механіці ґрунтів окрім двох пар інваріантів:

$$\text{I} - \sigma_{cp}, \quad \sigma_i \quad \text{чи} \quad T ,$$

$$\text{II} - \varepsilon_{cp}, \quad \varepsilon_i \quad \text{чи} \quad \Gamma ,$$

прийнято третій тип інваріантів – параметри Лоде  $\mu_\sigma$ ,  $\mu_\varepsilon$  виду напруженого та деформованого станів. Параметри Лоде показують відносне положення проміжного головного напруження  $\sigma_2$  чи деформацій  $\varepsilon_2$  в інтервалі між головними напруженнями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  чи деформаціями  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_3$ .

$$\mu_\sigma = [2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)] / (\sigma_1 - \sigma_3) ; \quad (1.10)$$

$$\mu_\varepsilon = [2\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)] / (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) . \quad (1.11)$$

В лінійно-деформованому середовищі залежності між інваріантами напруженого і деформованого станів:

$$\sigma_{cp} = \frac{E}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_{cp} = K \cdot \varepsilon_{cp} ; \quad (1.12)$$

$$T = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \Gamma = G \cdot \Gamma \quad \text{чи} \quad \sigma_i = 3 \cdot G \cdot \varepsilon_i . \quad (1.13)$$

Таким чином, в межах лінійних деформацій середовища об'ємні деформації  $\varepsilon_v = 3\varepsilon_{cp}$  викликані лише всебічним стисканням  $\sigma_{cp}$ , а зміна форми (яка характеризується  $\sigma_i$  чи  $\Gamma$ ), визначається лише девіатором напружень, чи те ж саме,  $\sigma_i$  чи  $\Gamma$ .

Із (1.10) – (1.13) випливає, що  $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon$  – співвідношення подібності напруженого та деформованого станів і умова співвісності (*коаксіальності*) головних осей  $T_\sigma$  та  $T_\varepsilon$  при розгляді лінійної задачі, коли не перевищено поріг пропорційності.

В поведінці ґрунтів є відмінності від конструкційних матеріалів з низкою принципів особливостей. На розвиток об'ємних і зсувних деформацій ґрунту впливають: вид напруженого стану, історія навантаження, деформації формозміни переважно пластичні (залишкові), які залежать не лише від девіатора напружень, а і від шарового тензора .

Чим більше стиснутий ґрунт, тим важче девіатору напружень провести його формозміну через збільшення сил тертя між частинками ґрунту. Це *перша* особливість ґрунту як пористого (дисперсного) середовища.

Об'ємна деформація ґрунту в більшій своїй частині є пластичною і залежить *не лише від середнього тиску* (шарового тензора напружень), а і від девіатора напружень. Це **принципово відрізняє ґрунт від конструкційних матеріалів** та є *другою* особливістю ґрунту. Вона обумовлена тим, що при зсуві частинки пористого ґрунту змінюють своє положення, укладаючись пухкіше, чи щільніше (оптимальні умови для зміни об'єму в ґрунті створюються під час зсуву).

Явище зміни об'єму при зсуві відкрито О. Рейнольдсом ще в 1885 р. та названо дилатансією, рис. 1.1, Воно може бути додатним, від'ємним, нулевим. В останньому випадку щільність ґрунту є критичною.

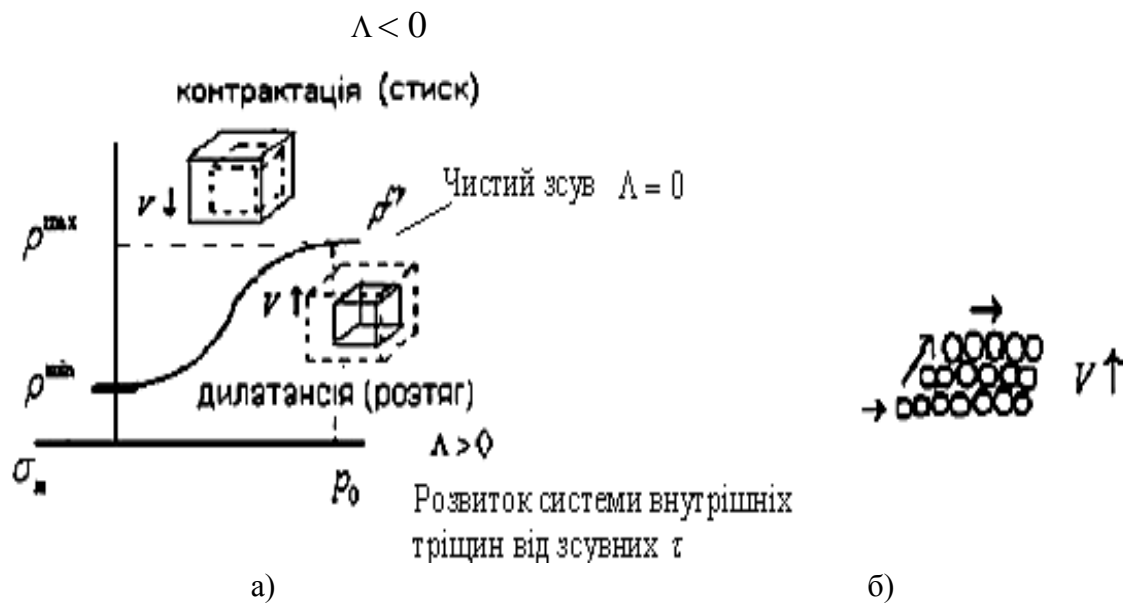


Рисунок 1.1 – Межі зміни щільності ґрунту в залежності від величини гідростатичного тиску  $\sigma_m$  (а) та процес прийняття більш відкритого упакування при зсуві щільних ґрунтів (б)

На теперішній час дилатансією називають збільшення об'єму ґрунту при зсуві, тобто розпушення його.

Ущільнення ґрунту при зсуві називають від'ємною дилатансією – контракцією [2, 3, 4].

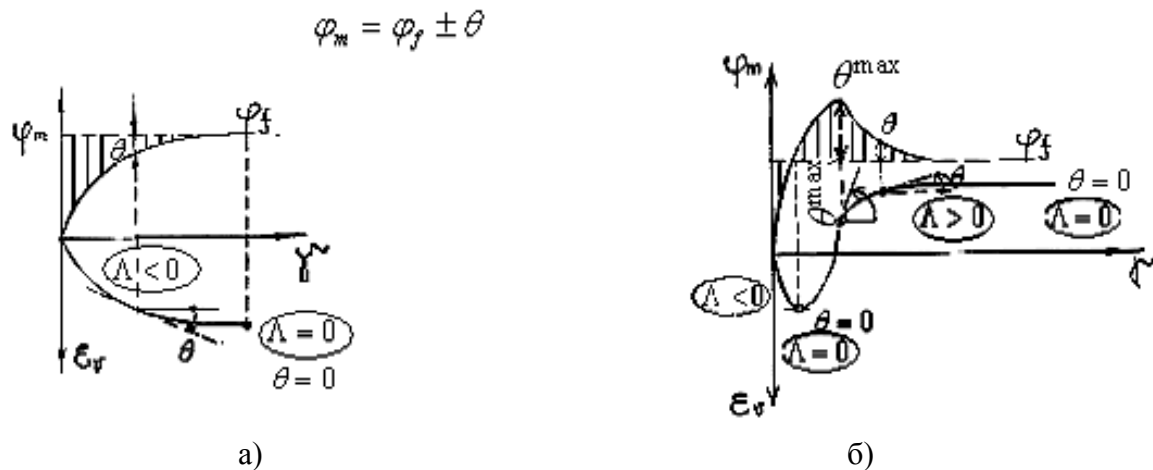


Рисунок 1.2 – Результати тривісних експериментальних досліджень на зсув ефектів контракції та дилатансії пухких (а) та щільних (б) пісків [45];  $\varphi_m$  – кут нахилу дотичної до кругів Мора;  $\varphi_f$  – залишковий кут внутрішнього тертя ґрунту;  $\Lambda$  – коефіцієнт

дилатансії;  $\theta$  – кут поверхневої енергії чи кут дилатансії;  $\operatorname{tg} \theta = \Lambda = \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_\gamma}$

### 1.3 Енергія руйнування

Процес руйнування тіла по частини супроводжується появою деяких форм енергії. Деколи з'являється звук, що вказує на наявність коливань. Прикладами можуть бути «співаючі» піски в барханах, момент розриву шийки стержня при дослідженнях сталі на розтяг.

Ці коливання, що викликають звук при руйнуванні поступово затихають і в кінцевому розрахунку перетворюються в тепло. При руйнуванні до характерних його явищ потрібно віднести збільшення поверхневої енергії тіла через підвищення поверхні зруйнованих частин в порівнянні з поверхнею цілого тіла.

Поява при руйнуванні цих та інших видів енергії обумовлено перетвореннями потенціальної енергії  $E$  (енергії внутрішніх сил – напружень).

Вся робота напружень, створена зовнішніми силами, не може перейти в енергії руйнування. Лише частина роботи напружень, яка є консервативною, або як її ще називають – робота пружних деформацій, перетворюється в інші види енергії. В загальному випадку частина роботи розсіюється (дисипує).

Динамічна теорія міцності Рейнера–Вейсенберга постулює, що матеріал руйнується, коли робота пружних деформацій (яка є зворотною частиною роботи напружень) сягає деякого значення.



Робота напружень на відміну від роботи пружних деформацій буде частково зворотною, як енергія пружних деформацій, а частково – незворотною. Зворотною частиною є робота пружних деформацій і вона рівна роботі напружень мінус енергія дисипації.

У відповідності з різною поведінкою матеріалів при зміні об'єму і форми існують різні пороги міцності при об'ємних деформаціях і при зсуві.

Згідно з першою аксіомою реології (реологія класично відома як механіка суцільного середовища): під дією всебічного рівномірного тиску всі непористі матеріали поведуться однаково – вони поведуться як ідеально пружні тіла. Першу аксіому реології слід сприймати, як достатньо добре наближення, яке так чи інакше не завжди справедливе. Вся об'ємна робота напружень є робота пружних деформацій.

При зсуві це не так. Тут в наявності два протилежних тіла: гукове тіло, для якого теж вся робота напружень є зворотною роботою пружних деформацій, і ньютонівська рідина, для якої вся робота напружень дисипує і є не зворотною [32, 39].

У всякому реальному матеріалі будуть обидва види роботи, консервативна і дисипативна, тому для визначення порогу міцності матеріалу потрібно використовувати динамічну теорію міцності.

II аксіомі реології – всякому матеріалу властиві всі реологічні властивості, хоч і з різним ступенем прояву.

При розрахунках на міцність і тріщиностійкість необхідно враховувати як головні, так і другорядні явища реологічних законів, об'єднавши два наукових напрямки методів і критеріїв механіки руйнування.

Реологічні основи механіки руйнування висвітлюють пройдені шляхи розвитку наукової думки. В боротьбі за міцність конструкцій руйнування недопустимо. *Знання закономірностей недопустимих процесів руйнування дозволяє також закономірно їх попереджувати.*

В механіці суцільних середовищ використовуються закони механіки:

1. Перший закон Ньютона: – в випадку рівноваги, коли цент мас тіла знаходиться в спокої чи в стані рівномірного прямолінійного руху ( $a = 0$ ) існує рівність:  $\sum P = 0$  .

2. Другий закон Ньютона:  $a = \frac{P}{m}$ ,

де  $a$  – прискорення центру мас тіла з масою  $m$ , на яке діє сила  $P$ .

3. Якщо тіло не повертається навколо центра мас чи повертається з постійною кутовою швидкістю, то  $\sum M = 0$ ,

де  $M$  – момент сили відносно центра мас.

Всебічний рівномірний тиск в кожному матеріалі незалежно від його реологічних властивостей, викликає пружну деформацію.

Різниця в реологічних властивостях проявляється *лише при деформаціях, які змінюють форму тіла*. Ця деформація називається деформацією формозміни.

Реологічні рівняння визначають три ідеальні тіла:

- гукове тіло (пружне тіло)  $\tau = G\gamma$  ;
- сен-венанове тіло (пластичне тіло)  $\tau = \tau_T$  ;
- ньютонівська рідина (в'язка рідина)  $\tau = \eta\dot{\gamma}$  .

Кожне з них визначене як тіло, що має лише одну реологічну властивість. Кожний реальний матеріал розглядається як тіло, якому властиві всі реологічні властивості, але в різній мірі.

Якщо параметри матеріалу ( $E, \nu, G, K$ ) *проявляють залежність від реологічних змінних*, такі матеріали називають *фізично нелінійними*.

Крім того, коли градієнт зміщень матеріалу не є нескінченно малим, і деформація не може бути виражена через градієнт, що входить тільки в перші степені, тоді

$$D = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \left( \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} \right) = \ln \left( 1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) = \frac{\Delta l}{l_0} - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 + \dots, \quad (1.14)$$

де  $D$  – логарифмічне подовження (деформація), вперше введено Рентгеном, а систематичне його прикладання дано Генкі в 1926 р. Цей випадок створює *геометричну не лінійність* [39].

Нелінійність виникає в зв'язку з мікронеоднорідністю матеріалу. Матеріали, з якими реологія має справу, є майже без винятку дисперсними системами, які складаються з двох чи більше фаз.

Якщо дисперсні тіла розглядати в макрореології, то їх можна назвати квазіоднорідними і квазіізотропними.

Так, наприклад, квазіізотропні метали можуть стати анізотропними після появи в них пластичної деформації (до прикладу, листовий метал після прокатки, чи дріт після волочіння).

### 1.3.1 Незалежність об'ємної деформації від деформації формозміни

При постулюванні реологічних рівнянь передбачається незалежність об'ємних деформацій (їх ще називають дилатацією) від деформацій формозміни. Перший вид деформацій формує шаровий тензор напружень (гідростатичний тиск чи всебічний розтяг), а другий вид деформацій формує девіатор напружень (комбінація дотичних напружень).

Передбачається, що ізотропні напруження викликають лише дилатацію, і не впливають на зміну форми.

Аналогічно приймається, що дотичні напруження викликають лише зсув чи зміну форми, але не впливають на об'єм чи щільність матеріалу.

Таку точку зору – точку зору класичної теорії пружності і гідродинаміки змінюють:

- явище дилатансії, відкрите Рейнольдсом в 1885 році;
- явище «поперечної пружності» в рідинах чи «ефект Вейсенберга»;
- явище зміни довжини металевих стержнів при крученні («ефект Пойнтінга»).

### 1.4 Дилатансія гранульованих мас. Вторинні явища

Рейнольдс описав дослід з кулями (рис. 1.3). Якщо скласти в найбільш щільному упакуванні кулі (рис. 1.3а), то прийнявши щільність шарів за одиницю, щільність середовища рівна  $\pi/3\sqrt{2}$ . Якщо кулі складено в вигляді правильного кубічного утворення (рис. 1.3б) то щільність середовища рівна  $\pi/\sqrt{6}$ , чи в  $\sqrt{2}$  рази менша, ніж у першому випадку. Тобто, зміна форми викликала зміну об'єму. Рейнольдс назвав це явище *дилатансією* – зміна об'єма при деформації викривлення (зсуві).

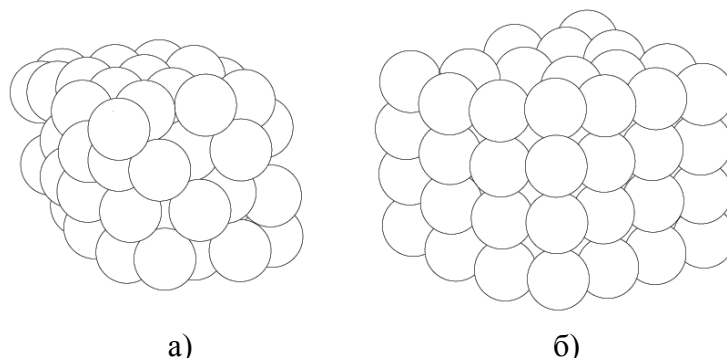


Рисунок 1.3 – Щільне (а) та пухке (б) упакування куль

При дії зсуву щільне упакування куль має прийняти більш відкрите упакування, показане справа на рис. 1.3б. Можна побачити, що така зміна упакування приводить до об'ємного розширення.

Явище, що викликає деяку зміну об'єму гранульованих мас в результаті деякої зміни їх форми чи деформації викривлення, Рейнольдс описує на такому прикладі [32]: «Одне добре відоме явище отримує своє пояснення завдяки існуванню дилатансії піску. Якщо після відливу біля моря чи річки наступити ногою на твердий мокрий пісок, то пісок на деякий час стає сухим навколо ноги. Після відливу пісок заповнений водою, поверхня якої підтримується капілярними силами на рівні поверхні піску. Тиск ноги (*це деформація викривлення*) викликає об'ємне розширення піску і при цьому потрібно більше води, яка має надійти чи за рахунок зниження поверхового рівня, переборюючи капілярні сили, чи за рахунок відкачки води через порожнечі від оточуючого піску.

Останнє для свого здійснення потребує часу, так що в перший момент переборюються капілярні сили і поверхня води опускається нижче поверхні піску, тому він і стає сухішим, поки не буде отримано достатньо притоку від нижніх шарів.

Коли нога піднімається, то можна бачити, що пісок під ногою миттєво стає мокрим. Це здійснюється тому, що сили, які викликають викривлення (зсув), видаляються, пісок знов стискається, і надлишок води знаходить тимчасове вивільнення на поверхні».

Властивість дилатансії не обмежується лише гранульованими масами.

Після додатної дилатансії піску (об'єм збільшується при зсуві, коли пісок щільно укладений) було зафіксовано від'ємну дилатансію глини. В той час, як частини піску являють собою маленькі сфери, частинки глини є мілкими дисками. Тому осадовий піщаний ґрунт буде знаходитись в стані щільного упакування, в той час, як глина в своєму вільному стані буде мати вільне упакування, бо частина дисків буде стояти на ребрах. При зсуві вони порушуються і щільність глини *зростає* [32].

Явище дилатансії до Рейнольдса теоретично було відкрито в 1845 р. Вільямом Томпсоном та лордом Кельвіном: «Можливо, що дотичні напруження можуть викликати в ізотропному тілі стиснення чи розширення пропорційно квадрату їх величини, і можливо цей ефект може бути значним для резини чи корка, чи інших тіл, в яких можливі великі деформації в межах пружності».

## ЛІТЕРАТУРА

1. Алейников С. М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований / С. М. Алейников. – М. : АСВ, 2000. – 754 с.
2. Бойко И. П. Свайные фундаменты на нелинейно-деформируемом основании : автореф. дис. ... докт. тех. Наук : 05.23.02. – М. : НИИ-ОСП, 1989. – 45 с.
3. Бойко И. П. Теоретические основы проектирования свайных фундаментов на упруго-пластическом основании / И. П. Бойко // Основания и фундаменты. – 1985. – № 18. – С. 11–18.
4. Бойко І. П. Напружено-деформований стан ґрунтового масиву при побудові нових фундаментів поблизу існуючих будинків / І. П. Бойко, В. О. Сахаров // Основи і фундаменти : міжвідомчий науково-технічний збірник. – К. : КНУБА. – 2004. – Вип. 28. – С. 3–10.
5. Бахолдин В. В. Совершенствование норм проектирования буронабивных свай / В. В. Бахолдин, В. Н. Мамонов // ОФиМГ. – 1972. – № 6. – С. 21–23.
6. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел ; пер. с англ. Л. Г. Корнейчука. – М. : Мир, 1987. – 524 с.
7. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов / С. С. Вялов. – М. : Высшая школа, 1983. – 352 с.
8. Гольдштейн М. Н. Механические свойства грунтов / М. Н. Гольдштейн. – М. : Стройиздат, 1979. – 304 с.
9. Горбунов В. П. О современных тенденциях в развитии механики грунтов. Дискуссии. / В. П. Горбунов // ОФиМГ. – 1979. – № 1.
10. Голубков В. Н. Исследование процесса формирования зоны деформаций в основании одиночных свай // Основания и фундаменты. – К. : Будівельник, 1971. – Вып. 4.
11. Зарецкий Ю. К. К расчету ленточных фундаментов на нелинейно-деформируемом основании / Ю. К. Зарецкий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1965. – № 1. – С. 10–14.
12. Інженерна геологія. Механіка ґрунтів, основи та фундаменти / М. Л. Зоценко, В. І. Коваленко, А. В. Яковлев [та ін.]. – Полтава, 2004. – 562 с.
13. Далматов Б. И. Механика грунтов. / Б. И. Далматов. – М. : АСВ, 2000. – Ч. 1 : Основы геотехники. – 201 с.
14. Косте Ж. Механика грунтов / Ж. Косте, Г. Санглера. – М. : Стройиздат, 1981. – 455 с.
15. Клепиков С. Н. Расчет сооружений на деформируемом основании / С. Н. Клепиков. – К. : НИИСК, 1996. – 202 с.

16. Кушнер С. Г. Расчет деформаций зданий и сооружений / С. Г. Кушнер. – Запорожье, 2008. – 496 с.
17. Колкунов М. А. Прикладная механика деформируемого твёрдого тела / М. А. Колкунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода. – М. : Высшая школа, 1983. – 352 с.
18. Леонардс Д. А. Основания и фундаменты / Д. А. Леонардс. – М. : Из-во литературы по строительству, 1968. – 505 с.
19. Мангушев Р. А. Плитно-свайный фундамент для здания повышенной этажности / Р. А. Мангушев, А. В. Игошин, Н. В. Ощурков // ОФиМГ. – 2008. – № 1. – С. 15–19.
20. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М. : Мир, 1974. – 318 с.
21. Моргун А. С. Пластична задача механіки руйнувань ґрунтової основи будівель за методом граничних елементів / А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич // Збірник НДіБК. – К. : 2008. – № 71, кн. 1. – С. 88–92.
22. Моргун А. С. Моделювання дилатансійного середовища ґрунту системи «паль-основа» за МГЕ / А. С. Моргун // Основи і фундаменти : науково-технічний збірник. – К. : КНУБА, 2007. – Вип. 27. – С. 84–89.
23. Моргун А. С. Застосування методу граничних елементів у розрахунках паль в пластичному середовищі ґрунту / А. С. Моргун. – ВНТУ : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2001. – 132 с.
24. Моргун А. С. Застосування інструменту числового МГЕ в прикладних дослідженнях поведінки плитно-пального фундаменту висотної будівлі / А. С. Моргун, А. В. Ніцевич // Основи і фундаменти : науково-технічний збірник. – К. : КНУБА, 2011. – Вип. 32. – С. 62–71.
25. Моргун А. С. Комп'ютерні технології розрахунку фундаментних конструкцій на основі методу граничних елементів / А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 162 с.
26. Моргун А. С. Теорія пластичної течії в механіці ґрунтів : монографія / А. С. Моргун. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 108 с.
27. Моргун А. С. Метод граничних елементів в розрахунках несучої спроможності кільцевих та круглих в плані фундаментних конструкцій / А. С. Моргун, О. В. Франчук // Вісник ВПІ. – 2012. – № 5. – С. 11–14.
28. Николаевский В. Н. Дилатансия и законы необратимого деформирования грунтов / В. Н. Николаевский // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1979. – № 5. – С. 29–31.
29. Николаевский В. Н. Современные проблемы механики грунтов / В. М. Николаевский // Определяющие законы механики грунтов. – М. : Стройиздат, 1975. – С. 210–227.

30. Николаевський В. Н. Механічні властивості ґрунтів і теорія пластичності // Ітоги науки і техніки. Механіка твердих деформуваних тіл. – М., 1972. – Т. 6, – С. 87.
31. Работнов Ю. Н. Механіка деформованого твердого тіла / Ю. Н. Работнов. – М. : Наука, 1988. – 712 с.
32. Рейнер. М. Деформація і течія / М. Рейнер. – М. : Мир. – 1963, – 383 с.
33. Сахаров В. О. Моделювання багатоповітряного будинку на нелінійній основі в умовах прибудови / В. О. Сахаров // Світ геотехніки. – 2006. – № 4. – С. 25–28.
34. СНиП 2.02.01-83. Основи будівель і споруджень. – М. :ФГУП ЦПП, 2006. – 41 с.
35. Сивухин Д. В. Общій курс фізики. Термодинаміка і молекулярна фізика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979. – 552 с.
36. Соломін В. І. Методи розрахунку і оптимальне проектування залізобетонних фундаментних конструкцій / В. І. Соломін, С. В. Шматков. – М. : Стройиздат, 1986. – 209 с.
37. Сегерлинд Л. Застосування методу скінченних елементів / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
38. Соколовський В. В. Теорія пластичності / В. В. Соколовський. – М. : Вища школа, 1969. – 608 с.
39. Сиратори М. Висхідальна механіка руйнувань / М. Сиратори, Т. Миєси, Х. Моцусита. – М. : Мир, 1986. – 334 с.
40. Седов Л. І. Механіка сплошної середовища / Л. І. Седов. – М. : Наука, 1970. – 540 с.
41. Тер-Мартиросян З. Г. Взаємодія свайного фундаменту з ґрунтом / З. Г. Тер-Мартиросян, З. Н. Нгуєн, А. Н. Динь // Основи, фундаменти і механіка ґрунтів. – 2007. – № 2. – С. 2–7.
42. Терцагі К. Теорія механіки ґрунтів / К. Терцагі. – М. : Госстрой-издат, 1961. – 508 с.
43. Трофимчук А. Н. Надійність систем спорудження – ґрунтового основи в складних інженерно-геологічних умовах / А. Н. Трофимчук, В. Г. Черний, В. І. Черний. – К. : Поліграфконсалтинг, 2006. – 248 с.
44. Федоровський В. Г. Предельне тиск на ряд ленточних фундаментів і ефект «непродавливання» / В. Г. Федоровський // Основи, фундаменти і механіка ґрунтів. – 2006. – № 3. – С. 9–14.
45. Федоровський В. Г. Прогноз осадки фундаментів мелкого закладення і вибір моделі основи для розрахунку плит / В. Г. Федоровський, С. Г. Безволев // Основи, фундаменти і механіка ґрунтів. – 2000. – № 4. – С. 23–25.

46. Флорин В. А. Основы механики грунтов / В. А. Флорин. – М. : Стройиздат, 1961. – 372 с.
47. Харр М. Е. Основы теоретической механики грунтов / М. Е. Харр. – М. : Мир, 1971. – 320 с.
48. Хоу Б. К. Основы инженерного грунтоведения / Б. К. Хоу. – М. : Из-во литературы по строительству, 1966. – 460 с.
49. Шукле Л. Реологические проблемы механики грунтов / Л. Шукле. – М. : Стройиздат, 1976. – 485 с.
50. Шутенко Л. Н. Механика грунтов, основания и фундаменты / Л. Н. Шутенко, А. Г. Рудь, О. В. Кичаева. – Харьков : ХНУГХ, 2015. – 501 с.
51. Черкашин А. В. Экспериментальные исследования осадки круглых и кольцевых штампов на песчаном основании / А. В. Черкашин, С. И. Дружкин, В. М. Струлев. // Труды ТГТУ : сб. науч. ст. молодых ученых и студентов. – Тамбов : Тамбовский гос. тех. ун-т, 2007. – Вып. 20. – С. 224–228.
52. Abovskiy N. P. Energy principle and its application for the creation of controlled structures / Spatial structures in new and renovation projects of Building and construction. Proceeding international congress ICSS – 98. – Moscow, 1998. – P. 307–311.
53. Robinson J. Element evaluation. / Robinson J. // A set of assessment parts and tests, Proceeding of Finite Element Methods in the commercial environment, – 1978. – V. 1.
54. Timoshenko S. Theorie des constructions / S. Timoshenko, Young D H. – Paris : Librairie Polutechnique Beranger, 1949, – P. 412–416.
55. Timoshenko S. Resistance des materiaux / S. Timoshenko. – Paris : Librairie Polutechnique Beranger, 1949. – V. 1.
56. Melan E., Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im innern beanspruchten Halbscheibe / E. Melan // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechansk. – 1932. – № 12. – P. 343–346.
57. Mindlin R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid / R. D. Mindlin // Physics. – 1936. – № 7. – P. 195–202.
58. Reisner H. Initial stresses and sources of initial stresses / H. Reisner // ZAMP. – 1931. – Bd. II. – S. 1–8.



*Наукове видання*

**Моргун Алла Серафимівна**

## **НЕЛІНІЙНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ ҐРУНТІВ**

Монографія

Редактор С. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено А. Моргун

Підписано до виготовлення 21.09.2016 р.

Системні вимоги:

процесор Pentium; 512 Mb RAM;

Windows XP, 7, 8, 10; Acrobat Reader 6.0+.

Один електронний оптичний диск (CD-ROM); Обсяг даних 5,2 Мб.

Наклад 100 (1-й запуск 1–30) прим. Зам. № E2016-05

Видавець та виготовлювач – Вінницький національний технічний університет,  
Комп'ютерний інформаційно-видавничий центр Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ,

ГНК, к. 114, м. Вінниця, 21021, тел.: (0432) 59-85-32, 59-81-59.

**publish.vntu.edu.ua**; *email*: kivc.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.