Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. С. Моргун

ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ В МЕХАНІЦІ ГРУНТІВ

Монографія

Вінниця
ВНТУ
2013

УДК 519.635:624.044:624.15
ББК 22.193:38.112:38.58
М79

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 5 від 27 грудня 2012 р.)

Рецензенти:
І. П. Бойко, доктор технічних наук, професор
М. Ф. Друкований, доктор технічних наук, професор

Моргун, А. С.
М79 Теорія пластичної течії в механіці ґрунтів : монографія / А. С. Моргун. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 108 с.
ISBN 978-966-641-525-0

Загальні механічні властивості ґрунтів, з яких складена наша планета Земля, з метою їх практичного прикладання мають бути сформульовані в вигляді визначальних законів (у вигляді рівнянь стану). В роботі розглядається актуальне питання сучасної механіки – розробка найбільш адекватної математичної моделі ґрунту. В роботі подано аналіз напрацьованих в механіці ґрунтів матеріалів з цього питання. Цей досвід є вельми корисний для інженерів, студентів, що працюють в області механіки ґрунтів та її прикладань, а також аспірантам та студентам будівельних спеціальностей.

УДК 519.642:624.044:624.15
ББК 22.193:38.112:38.58

ISBN 978-966-641-525-0

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

НДС – напружено-деформований стан
МГЕ – метод граничних елементів
МСЕ – метод скінченних елементів
МСР – метод скінченних різниць
ДБНіП – державні будівельні норми і правила
СПФ – стрічковий пальовий фундамент
САПР – системи автоматизованого проектування
ПК – програмний комплекс
СЕ – скінченний елемент
СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь

ВСТУП

Задачі механіки ґрунтів, що включають стійкість схилів, несучу спроможність фундаментних плит, паль і тиск на підпірні стінки, часто розглядають як задачі пластичності.

Сучасному етапу розвитку будівельних конструкцій та механіки ґрунтів властивий напрям розвитку з використанням числових методів та ЕОМ. Орієнтація на використання ЕОМ обумовлюється не лише складністю поставлених задач, а і тенденцією накопичення розв’язків і методів – створенням бібліотек проблемно орієнтованих програм. Ступінь розвитку ЕОМ дає можливість дослідження НДС ґрунтових основ засобами числового моделювання. Можливості сучасних ЕОМ, що весь час зростають, потребують постійної ревізії існуючих числових методів при дослідженнях нових класів задач, для яких з’явилась надія їх розв’язання. Однією із таких задач с нелінійна задача геомеханіки. Створені для неї на сьогодні математичні моделі адекватного описання процесів поведінки ґрунту та оцінки ефективності стратегії, управління цими процесами – це системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, які є досить складними для отриманнями аналітичних розв’язків. Як відомо, абсолютна точність є зайвою для багатьох систем реального світу. Не є винятком і вищезгадана крайова задача геомеханіки, розв’язок якої можна отримати одним із потужних сучасних числових методів – МСЕ, МГЕ на швидкодійних ЕОМ.

Успіхи фундаментобудування в цілому зобов’язані його науковій базі – механіці ґрунтів, основи якої закладені в 20–30 роках XX століття в працях К. Терцагі, Н. М. Герсіванова. Надійність будівлі неможливо розглядати окремо від ґрунтових основ, а розгляд системи «основа–фундамент–будівля» ускладнюється тим, що її складові мають різну природу. Наземну частину споруди можливо запроектувати з необхідною для інженерних вимог точністю. Та міцність, стійкість та нормальна експлуатація споруд визначається не лише конструктивними особливостями і міцністю конструктивних матеріалів, а і властивостями ґрунту. Практика експлуатації будівель свідчить про те, що основна частина аварій обумовлена похибками проектування основ і фундаментів, які потребують розвитку та удосконалення наукової бази фундаментобудування – механіки ґрунтів. ***Головною проблемою механіки ґрунтів залишається вибір адекватної теоретичної моделі.*** Рівень розвитку механіки ґрунтів суттєво впливає на економічність та надійність прийнятих рішень.

Умови роботи будь-якої інженерної споруди, її стійкість, довговічність і забезпечення умов експлуатації в суттєво залежать від підземної частини будівлі – фундаментної конструкції та ґрунтової основи, яка має унікальні реологічні властивості. А по різноманіттю і мінливості ґрунти не мають аналогів серед матеріалів, які використовуються в будівництві. Вони завжди неоднорідні та анізотропні. Ґрунти – природна субстанція, яку інженер-будівельник може змінити не завжди і в дуже обмежених межах. При проектуванні фундаментної конструкції необхідно враховувати конкретні інженерно-геологічні характеристики ґрунту і прогноз величин осідань будівлі за сучасними моделями ґрунтових основ з урахуванням нелінійної їх роботи.

Під дією навантаження від наземної частини споруди в ґрунтах з'являються як пружні, так і залишкові деформації і ця обставина для їх визначення потребує залучення до сучасних математичних моделей ґрунту теорії пружності, теорії пластичної течії, дилатансійних кінематичних співвідношень, які базуються на законах термодинаміки. Розвиток пластичної моделі ґрунтів історично збіглося з розповсюдженням асоційованого закону на функцію текучості Кулона. Цей крок був виконаний Друкером та Прагером в 1952 році. Виявилось, що асоційований закон теж приводить до дилатансійного ефекту, причому швидкість дилатансії виявляється рівною коефіцієнту внутрішнього тертя. В наш час з тенденціями підняття навантаження на основи до 1 МПа (16-ти поверхові будівлі і вищі) і необхідністю освоєння підземного простору зростає потреба у використанні при проектуванні основ пружно-пластичних некоаксиальних моделей з використанням неасоційованого закону пластичної течії.

Розділ **1 ВИКОРИСТАННЯ ЗАКОНІВ ТЕРМОДИНАМІКИ В МЕХАНІЦІ ГРУНТІВ**

Термодинаміка – важлива частина фізики, що вивчає макроскопічні явища в тілах, засновується на началах та принципах, що базуються на узагальненні дослідних фактів. Її висновки використовуються в усіх розділах макроскопічної фізики: гідродинаміці, теорії пружності, пластичності, аеродинаміці. Термодинаміка вивчає лише термодинамічні стани рівноваги і повільні процеси, які можна розглядати як практично стани рівноваги, що неперервно слідують один за одним з кінцевими швидкостями. В стані термодинамічної рівноваги об'єм V, тиск P і температура T знаходяться в функціональній залежності для газів і будь-яких фізичних ізотропних тіл.

Цю залежність можна подати як

$$f(P,V,T)=0. \tag{1.1}$$

Виникла термодинаміка в XIX столітті як теоретична основа теплотехніки. Її початкова задача – вивчення закономірностей перетворення тепла в механічну енергію в теплових двигунах та дослідження умов, за яких ці перетворення найбільш оптимальні. Саме таку мету ставив перед собою французький фізик та інженер С. Карно в своїх роботах з закладання основ термодинаміки. В подальшому термодинаміка далеко вийшла за межі вказаної технічної задачі. Центр уваги перемістився на теплові форми руху матерії – хаотичний рух атомів і молекул макроскопічних тіл.

За термодинамічну систему в механіці деформованих середовищ береться мала підобласть суцільного середовища, яка все ж таки включає достатньо велику кількість атомів і молекул для того, щоб основні гіпотези механіки неперервних (суцільних) середовищ залишались дійсними [11]. Надамо параметрам стану термодинамічної системи нескінченно малі прирости і виміряємо кількість різних видів енергії, що притікають до системи при цих змінах параметрів стану. Повний притік енергії dE можна подати в вигляді трьох складових

$$dE=\delta A^{e}+\delta Q^{e}+\delta Q^{**}, \tag{1.2}$$

де δA^{e} – притік механічної енергії, тобто робота зовнішніх масових і поверхневих сил; δQ^{e} – притік теплоти; δQ^{**} – об'єднує всі інші притоки енергій, які відрізняються від механічної і теплової.

Це розбиття обумовлене тим, що найбільш важливу роль в задачах прикладної механіки деформованого твердого тіла відіграють притоки δA^e і δQ^e та переходи теплової енергії в механічну і навпаки [11].

Перше начало термодинаміки виражає ***принцип збереження енергії***. У замкненому процесі повний притік енергії до системи рівний нулю.

В механіці енергія складається із кінетичної енергії макроскопічного руху та потенціальної енергії у зовнішніх силових полях. В механіці доведено, що для ізольованої системи повна механічна енергія зберігається. Але це дійсно, коли всі сили є консервативними. При наявності дисипативних сил (сил тертя) механічна енергія замкненої системи зменшується. *Дослідні дані показали, що робота дисипативних сил завжди супроводжується виділенням тепла.* Тоді принцип збереження енергії залишається справедливим і при наявності дисипативних сил за умови розширення поняття енергії введенням нової її форми (*теплової енергії* хаотичного атомно-молекулярного руху).

Суть загального начала термодинаміки – який би не був початковий стан ізольованої системи, в ній все ж наступить термодинамічна рівновага, в якій зупиняться всі макроскопічні процеси. Прикладом може бути факт, що коли в склянку з водою покласти кусок цукру, отримаємо нерівномірну термодинамічну систему. Через деякий час, коли процес розчинення завершиться, це вже буде рівноважна термодинамічна система. Процеси, що описуються співвідношеннями, в які не входять величини швидкостей зміни параметрів стану, називають рівноважними [11].

Перше начало термодинаміки не дає ніяких вказівок *відносно напрямку,* в якому можуть здійснюватись процеси в природі. Для ізольованих систем перше начало термодинаміки потребує лише, щоб при всіх процесах енергія системи залишалась постійною.

Другий закон термодинаміки і пов’язане з ним рівняння балансу ентропії враховують напрям і швидкість протікання фізичних процесів.

Згідно з другим законом термодинаміки існує *функція стану* системи S, названа ентропією. Це така функція, для якої для довільного незворотного процесу, що пов’язує два нескінченно близьких стани, має місце співвідношення

$$TdS = \delta Q^e + \delta Q' \quad , \tag{1.3}$$

де T – температура (параметр стану); δQ^e – притік теплоти; $\delta Q'$ – некомпенсована теплота, $\delta Q' \geq 0$. (1.4)

Рівняння (1.3) – рівняння балансу ентропії. Формули (1.3), (1.4) це математичне формулювання другого закону термодинаміки. Якщо це процес зворотний, то $\delta Q' = 0$, але цієї умови недостатньо для того, щоб стверджувати, що процес зворотний.

Таким чином*,* *друге начало термодинаміки* пов'язане з поняттям *ентропії*, і дозволяє судити про напрям процесів, вирішує питання про кількісну міру температури. Друге начало термодинаміки є по суті сукупністю низки положень, що відносяться до станів рівноваги і до процесів, що проходять в фізичних системах. Історично воно виникло з аналізу роботи теплових машин (С. Карно, 1827 р.). Суть другого закону термодинаміки – ***теплота (внутрішня енергія тіла) не може спонтанно переходити від тіла менш нагрітого до тіла більш нагрітого.***

Формулювання Клаузиуса [21]: неможливо яким би то не було способом забрати тепло від тіла менш нагрітого, повністю передати його тілу більш нагрітому, причому таким чином, щоб в природі не відбулося більше ніяких змін.

Ентропія є функцією стану. Різниця ентропій в двох рівноважних станах (I і II) рівна приведеній кількості тепла, яке потрібно надати системі, щоб перевести її із першого в другий стан по довільному квазістатичному шляху. Приведену кількість тепла (кількість отриманого системою тепла, поділеного на температуру, при якій воно отримане – $\frac{\delta Q}{T}$) називають ентропією

$$S_1 - S_2 = \int_{I \to II} \frac{\delta Q}{T}. \tag{1.5}$$

Фізичний зміст має не сама ентропія, а лише різниця ентропій. Згідно з феноменологічною термодинамікою всі процеси в замкненій системі проходять в напрямку ***зростання ентропії.*** В кінці кінців система переходить в рівноважний стан, в якому ***ентропія сягає максимуму*** і всі процеси в системі закінчуються.

Використання в механіці ґрунтів моделей суцільного середовища дозволяє зразу ж перенести до неї низку рішень, отриманих в механіці суцільних середовищ. В межах обмежень, при яких гіпотеза суцільності виправдовується, вона забезпечує основу для єдиного вивчення поведінки твердих тіл, рідин та газів.

Прийняття гіпотези суцільності як основи для математичного описання означає, що поля таких величин, як напруження і переміщення подаються кусково-неперервними функціями координат і часу.

В механіці суцільних середовищ прийнято розглядати поведінку середовища під дією різних впливів як порушення початкового стану рівноваги між взаємодіючими внутрішніми елементами середовища і як перехід її до нового стану рівноваги в результаті зміни сил, що діють між елементами. Розв'язок задачі отримується із міркувань, що мають задовольнятись умови рівноваги (статичні рівняння) для нескінченно малих елементів середовища. Додатковою умовою є не порушення суцільності середовища, не має бути внутрішніх розривів (геометричні рівняння). Зв'язок між напруженнями та деформаціями в механіці в лінійній стадії роботи системи пов'язується з законом Гука (фізичні рівняння стану). Цей метод розв'язання задач механіки має назву *локального.*

В багатьох випадках такий локальний підхід до розв'язання задач механіки, який потребує запису рівнянь рівноваги стану, геометричних рівнянь та фізичних рівнянь, пов'язаний із значними труднощами, оскільки потребує інтегрування отриманої системи із 15 розрахункових диференційних рівнянь в частинних похідних.

Простішим може стати термодинамічний (*енергетичний*) метод, в якому зміни в системі розглядаються з точки зору поглинання чи виділення енергії, перетворення одних видів енергії в інші.

Виразити стан довільної системи та дати кількісну оцінку властивостей системи дозволяють *рівняння стану* – математичні співвідношення. Кількісні характеристики властивостей системи називають параметрами системи. Зміна стану системи визначається зміною деяких характеристик параметрів системи (лінійних переміщень, кутів повертання, кількості руху, об'єму, щільності, температури і т. д.) – координат стану.

Експерименти доводять, що довільний *процес взаємодій* в системах пов'язаний з деякими фізичними величинами, при ***рівності*** яких зовні і всередині системи ***цей вид взаємодії неможливий.*** Такі *фізичні величини називають* ***потенціалами,*** це може бути температура, тиск, енергія, електричний струм, хімічний потенціал. Різниця величин потенціалів цього виду зовні і всередині системи є причиною зміни координат стану. Тому потенціали називають іноді рухомими силами, їх величина характеризує інтенсивність процесу.

Термодинамічні методи широко використовують і в механіці ґрунтів, вони відносяться до енергетичних методів вивчення явищ природи, дозволяють встановити загальний напрям процесу, знайти кінцевий стан системи, але не дають можливість розглянути плин процесу, методи управління ним.

Задати стан термодинамічної системи (в нашому випадку континууму) – значить повністю охарактеризувати систему. Це можна зробити, записавши параметри стану. Якщо параметри стану змінюються, то проходить термодинамічний процес. *Між параметрами стану існують функціональні зв'язки, які виражаються рівняннями стану.*

При дослідженнях пластичних деформацій як конструктивних матеріалів (сталей), так і деформацій ґрунтових основ необхідно розглядати термопластичні аспекти залишкових деформацій, а саме, пов'язану з ними генерацію тепла. Питання про те, чи проходить дисипація в формі теплової енергії енергія, що витрачається на пластичне деформування, іншими словами, чи потрібно її враховувати, є одним із головних. Промисловість потребує швидких відповідей на питання, що виникають, а це приводить до створення окремих, часткових прийомів рішень.

Так експериментальні дослідження Баушингера в 80-х роках XIX сторіччя (1886 р.) при простому навантаженні виявили явище пам'яті матеріалу. Ці експерименти підтвердили вплив часу на збільшення величини межі пружності; зменшення до нуля і повільне повернення межі пружності після перебільшення межі пружності σ_T; зниження рівня межі пружності при достатньо високій температурі; вплив на σ_T циклічних навантажень. При дослідженнях сталей в області пластичності, в яких, за даними експериментів, при кінцевих деформаціях переходить в тепло 95 % енергії, виникає складна задача зіставлення надмірно різних діаграм механічних властивостей матеріалів при навантаженні і розвантаженні. Невідома термічна і механічна попередня історія досліджуваних матеріалів достатня для того, щоб бути причиною дуже багатьох суперечливих та плутаних результатів, які були отримані різними дослідниками опору матеріалів. Термічна передісторія матеріалів значно впливає на результати експериментів, в літературі навіть виникали питання «банкрутства» рівнянь механічного стану.

Енергія, що витрачається на пластичні деформації, приводить до дисипації її в формі теплової енергії.

Як відомо, перший закон термодинаміки – закон збереження енергії – постулює взаємний перехід тепла і роботи в кінетичну та внутрішню (потенціальну) енергію під час термодинамічного процесу. *В ізольованій системі енергія не створюються і не пропадає, а в будь-якому процесі взаємодії систем проходить обмін енергії між ними.*

Таким чином, енергія є найбільш загальною кількісною характеристикою руху.

Механічною енергією називають енергію механічного руху і взаємодії тіл, вона складається із кінетичної і потенціальної частин

$$W=K+П. \tag{1.6}$$

Кінетична енергія K виміряється енергією, яку потрібно затратити, щоб загальмувати тіло, що рухається, до повної зупинки,

$$K = \int_{V_0}^{V} mvdv = \frac{m(v^2 - {v_0}^2)}{2}\,. \tag{1.7}$$

Енергія взаємодії тіл, що залежить від їх відносного положення – це потенціальна енергія. Вона визначає спроможність тіла здійснювати роботу.

Стійке положення** частинок ґрунту **завжди** пов'язане з **мінімумом потенціальної енергії системи. Для отримання максимальних потенціальних значень енергії частинок ґрунту (що забезпечить їх переміщення), потрібно «взяти» потенціальний бар'єр [6]. Енергія, якою потрібно наділити частинку ґрунту для подолання *потенціального бар'єру*, називається *енергією активації*. При нескінченно малому русі потрібно *долати лише опір сил тертя.* ***Подолання потенціальних бар'єрів характерно для випадків, коли під впливом зовнішніх факторів здійснюється перебудова структури тіла.*** Таким чином, *механізм взаємодії між тілами в механіці ґрунтів проявляється в зміні об'єму і форми – в зміні **структури** тіла*.

До зовнішніх впливів (факторів) на ґрунтову основу споруд відносяться поверхневі та об'ємні сили. Поверхневі навантаження – це навантаження від споруд, що передаються через фундаменти на ґрунт. Прикладом об'ємних сил є гравітаційні, відцентрові сили, гідродинамічні сили, фільтраційний тиск, сейсміка.

На початку зовнішнє навантаження від споруди діє безпосередньо на поверхневі частинки ґрунту, розташовані на площадці контакту ґрунту з навантаженням, а потім ці частинки ґрунту переміщуючись, в свою чергу здійснюють вплив на сусідні, і переміщення поступово з деякою швидкістю розповсюджується від точки до точки в глибину ґрунтового середовища.

Перехід під дією навантаження окремих точок тіла в нове положення в просторі називають переміщенням цих точок відносно їх нового положення. Переміщення вздовж осей X, Y, Z відповідно позначають u, v, w.

Під дією зовнішнього навантаження в ґрунтах виникають внутрішні сили. Згідно з III законом Ньютона – «*сила дії дорівнює силі протидії*». В процесі деформування, коли між зовнішніми і внутрішніми силами настає рівновага, деформації зупиняються. Якщо внутрішні сили не в змозі врівноважити зовнішні, тіло отримує постійні зміни, які називають течією (коли частинки часто «змінюють своїх сусідів»). Якою б не була деформація тіла, її завжди можна розділити на дві складові: об'ємну деформацію і формозміну.

В теорії суцільних середовищ вважають, що при деформації як і при течії суцільність тіла не порушується, а ***поява тріщин свідчить про руйнування тіла***. Потенціальна енергія в кінці тріщини переходить в кінетичну енергію руху. Якщо деформації настільки малі, що квадратами їх добутків можна знехтувати в порівнянні з першими ступенями, то їх можна розглядати як нескінченно малі деформації, що суттєво полегшує математичний аналіз задачі.

Якщо після закінчення циклічного процесу система повертається до початкового стану, це зворотний процес. Всі реальні процеси в природі незворотні, та в низці випадків без особливих похибок можна незворотні процеси розглядати як зворотні, що суттєво спрощує їх аналіз. Зворотні процеси являють собою дуже корисну ідеалізацію, бо в багатьох ситуаціях дисипацію енергії можна приймати нехтуючи малою. Прикладом незворотних процесів є вирівнювання в системах температур, тисків, процеси тертя, пластичне деформування, в'язка течія і т. д. Та перший закон термодинаміки залишає без відповіді питання, чи є цей перехід зворотний чи незворотний.

Основний критерій незворотності міститься в другому законі термодинаміки – *неможливий спонтанний перехід тепла від більш холодного тіла до більш теплого.*

II закон термодинаміки постулює існування двох різних функцій стану – абсолютної температури T і ентропії $dS = \frac{dQ}{T}$ – *в ізольованій* *системі можливі процеси, коли ентропія зростає* $dS > 0$, де Q – термічна робота.

Ентропія системи може змінюватись чи в результаті взаємодії з навколишнім середовищем, чи в результаті змін, що проходять в середині самої системи

$$ds = ds^e + ds^i, \tag{1.8}$$

де ds – приріст питомої ентропії. В механіці суцільного середовища вводять питому ентропію на одиницю маси так, що повна ентропія $S = \int_V \rho s dV$; ds^e – приріст, викликаний взаємодією з зовнішнім середовищем; ds^i – внутрішні зміни, які при $ds^i > 0$ викликають незворотні процеси, а при $ds^i = 0$ – зворотні процеси.

Умовою настання ***рівноваги*** *в закритій системі є досягнення* ***максимуму ентропії.***

В ***механіці*** суцільних середовищ тензор напружень розкладають на шарову та девіаторну частини

$$\sigma_{ij} = \sigma^{шар}{}_{ij} + \sigma^{дев}{}_{ij}, \tag{1.9}$$

де $\sigma^{шар}{}_{ij}$ – тензор консервативних напружень, $\sigma^{дев}{}_{ij}$ – тензор дисипативних напружень.

Скаляр $\sigma_{ij} \cdot \varepsilon^{дев}{}_{ij}$ – дисипативна функція > 0.

Для істинного напруженого стану потужність дисипації не менша ніж для будь-якого допустимого стану σ^*_{ij}, тому мають виконуватись нерівності:

$$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon^p_{ij} \ge \sigma^*_{ij} \cdot \varepsilon^p_{ij} \quad \text{або} \quad (\sigma_{ij} - \sigma^*_{ij}) \cdot \varepsilon^p_{ij} \ge 0, \tag{1.10}$$

отже, робота по замкнутому шляху не від'ємна $\oint (\sigma_{ij} - \sigma^*_{ij}) \cdot d\varepsilon^p_{ij} \ge 0$.

Розділ **2 ВАРІАНТИ ПОДАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ СЕРЕДОВИЩА. СУЧАСНІ УЯВЛЕННЯ**

2. 1 Глобальні види подання тензора напружень

Вирішення проблем міцності фундаментів тісно пов’язане з аналізом їх напружено-деформованого стану (НДС).

Хоча молекулярна природа будови матерії точно встановлена, в багатьох дослідженнях поведінки матеріалів важливим є поведінка не окремих молекул, а лише матеріалу як цілого. В цих випадках при поясненні досліджуваних макроскопічних процесів не враховують молекулярну структуру середовища, а вважають, що середовище неперервно розподілене по всьому об’єму і цілком заповнює цей об’єм. Така концепція ***суцільності*** середовища є основним постулатом механіки суцільних середовищ (континууму). В рамках обмежень, при яких гіпотеза суцільності оправдана, ця концепція забезпечує основу для єдиного вивчення поведінки твердих тіл, рідин і газів.

Прийняття гіпотези суцільності як основи математичного описання поведінки матеріалів означає, що поля таких величин, як напруження, переміщення можна виражати кусково-неперервними функціями координат і часу.

Однорідним називається матеріал, що має однакові властивості у всіх точках. Матеріал буде ізотропним по відношенню до якоїсь властивості, якщо ця властивість в точці однакова по всіх напрямках. Матеріал є анізотропним по відношенню до тих властивостей, які залежать від напрямку в точці.

Щоб охарактеризувати напружений стан в довільній точці ґрунтового масиву виділяють нескінченно малий об’єм за допомогою трьох взаємно перпендикулярних площин, рис. 2.1. Якщо відомі напруження на трьох взаємно перпендикулярних гранях цього елементарного об’єму (тетраедра), то легко обрахувати напруження на довільній нахиленій площині. Завдання тензора напруг в деякій точці повністю характеризує напружений стан в ній. Другий числовий індекс в компонентах тензора напруг зазвичай позначає напрям нормалі до площини.

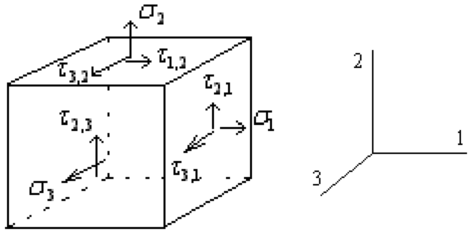


Рисунок. 2.1 – Елементарний тетраедр

Під кутом 45^o до головних осей на площадках (рис. 2.2) будуть знаходитись максимальні та мінімальні дотичні напруження:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; \qquad \tau_{1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};$$
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \qquad \tau_{1,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \qquad (2.1)$$
$$\sigma_{2,3} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; \qquad \tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},$$

а ці площадки – це площадки головних дотичних напружень.

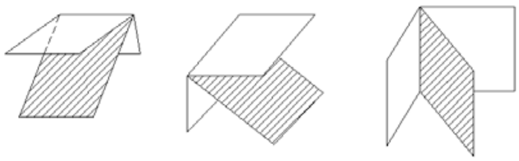


Рисунок 2.2 – Площадки головних дотичних напружень

Поняття напруження пов'язано з напрямком площадки на якій вона діє, а оскільки через будь-яку точку можна провести нескінченну кількість площадок, то і напруження в цій точці може приймати нескінчену кількість значень.

При зміні напрямку площадки кінець вектора напружень описує центральну поверхню другого порядку, а саме – еліпсоїд, який називають еліпсоїд напружень.

Із аналітичної геометрії відомо, що коли сумістити початок координат з центром еліпсоїда, а осі координат направити по осях симетрії, то еліпсоїд сповна визначиться трьома величинами, а саме – його головними півосями, які відповідно рівні головним напруженням $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Таким чином, *еліпсоїд напружень є геометричним зображенням тензора напружень.* Півосі еліпсоїда зображують нормальні компоненти тензора напружень чи вектора напружень.

Якщо прийняти в якості осей координат три головні напрямки еліпсоїда Ламе, то тензор напружень в точці можна подати квадратною матрицею виду:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.2)$$

Цей тензор розкладається на складові тензора таким відомим чином

$$T_\sigma = p\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}+d_1\begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}+d_2\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{vmatrix}, \qquad (2.3)$$

де $p=(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$; $d_1=\frac{1}{3}(\sigma_2-\sigma_3)$; $d_2=\frac{1}{3}(\sigma_3-\sigma_1)$; $d_3=\frac{1}{3}(\sigma_1-\sigma_2)$.

Перший тензор – це шаровий тензор, що відповідає гідростатичному тиску інтенсивності *p*. Три інші тензори називаються девіатором, суми елементів на головних діагоналях кожного з них рівна нулю. Шаровий тензор та девіатор грають особливу роль в механіці суцільних середовищ. Шаровий тензор напруг та шаровий тензор деформацій пов’язані лише із зміною об’єму, а девіатор напруг та девіатор деформацій – із зміною форми.

Деформацією називають зміну форми континууму, це реакція (відповідь) матеріалу на прикладені навантаження. Деформацію континууму можна подати за допомогою:

- міри Коші $\varepsilon^c = \Delta l / l_0$;
- міри Сквейгера $\varepsilon^S = 1-\frac{1}{\lambda}$;
- міри Генкі $\varepsilon^H = \lg\lambda = (\lambda-1)-\frac{1}{2}(\lambda-1)^2+\ldots$;
- міри Гріна $\varepsilon^G = \frac{1}{2}(\lambda^2-1)$;
- міри Алмансі $\varepsilon^A = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\lambda^2})$,

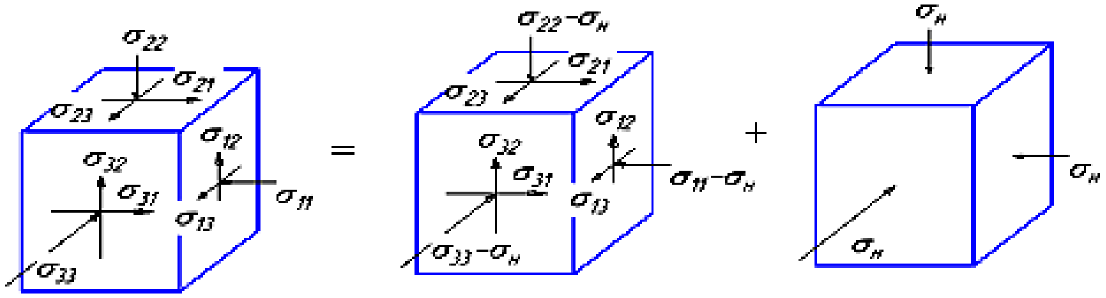
де l_0 – початкова довжина елемента до деформації; l – кінцева довжина елемента після деформації; $\frac{l}{l_0}=\lambda$ – головна частина деформації.

У всіх випадках, коли деформації не можна вважати нескінченно малими і потрібно враховувати деформації другого і більш високих порядків малості виникає геометрична нелінійність. Міри Алмансі і Гріна використовуються для описання великих (кінцевих) пружних деформацій. Для описання пластичних деформацій і течії потрібно користуватись мірою Генкі.

Тензор напруг можна ще подати складовим (рис. 2.3) із тензора девіаторного та шарового тензора:

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{vmatrix}. \qquad (2.4)$$

$$\sigma_n = \frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}); \qquad T_\sigma = H_\sigma + D_\sigma; \qquad T_\varepsilon = H_\varepsilon.$$



Формозміна (чистий зсув)

зміна об'єму (гідростатичне стиснення)

Рисунок 2.3 – Девіаторна та шарова складові тензора напружень

Щоб визначити тензор напружень в точці потрібно шість параметрів. В ізотропному середовищі орієнтація тензора напружень не грає ніякої ролі і його можна подати в тривимірному просторі головних напружень точкою Р з координатами з $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Часто буває зручніше використовувати іншу систему координат, однією із осей якої є вісь Δ, яка визначається рівнянням $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ і є віссю потрійної симетрії для тригранного координатного кута, бісектрисою між осями $o\sigma_1$, $o\sigma_2$, $o\sigma_3$.

Це вісь гідростатичного тиску р та перпендикулярної до неї осі – девіатора. Девіаторна вісь проходить в октаедричній (девіаторній) площині, яка перпендикулярна до гідростатичної осі.

Октаедрична площадка складає рівні кути з головними напрямками напружень, рис.2.4, 2.5.

а) б)

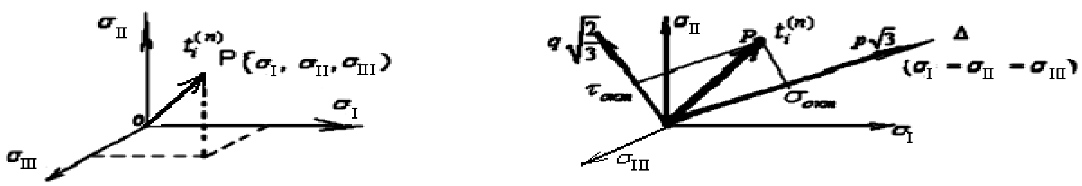


Рисунок 2.4 – а) простір головних напружень;
б) осі гідростатичного тиску та девіатора

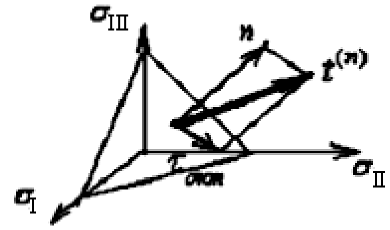


Рисунок 2.5 – Октаедрична площадка та нормаль n до неї

В процесі розв’язання практичних задач великий інтерес викликають площадки, рівноскісні до всіх трьох головних осей – октаедричні площадки. Якщо провести їх в кожному із координатних вузлів, так, щоб вони відсікали на осях рівні відрізки, отримаємо октаедр, рис. 2.6. Згідно з поняттями механіки суцільних середовищ, на цих площадках будуть діяти нормальні октаедричні напруження, рівні гідростатичному тиску $\sigma_{окт} = \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, (2.5)

де σ_m, σ_1, σ_2, σ_3 – відповідно гідростатичний тиск та головні напруження; і октаедричні дотичні напруження

$$\tau_{окт} = \frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{1,2}^2+\tau_{3,2}^2+\tau_{1,3}^2}; \qquad (2.6)$$

$$\tau_{окт} = G \cdot \gamma_{окт},$$

де $I_2(D_\sigma)$ – другий інваріант девіатора напружень.

Часте використання в математичних моделях роботи ґрунту знаходять σ_i – інтенсивність дотичних напружень та τ_i – інтенсивність нормальних напружень (узагальнене напруження):

$$\tau_i = \sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}; \qquad (2.7)$$

$$\sigma_i = \sqrt{3}\cdot\sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}. \qquad (2.8)$$

Октаедричні деформації об’єму на девіаторній площині (деформації по нормалі):

$$\upsilon \to \varepsilon_{окт} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) = \frac{\theta}{3} \qquad (2.9)$$

та октаедричний зсув (деформації по дотичній):

ЛІТЕРАТУРА

1. Алейников С. М. Метод граничних элементов в контактных задачах для упругих пространственно-неоднородных оснований. / С. М. Алейников– М. : Изд. АСВ, 2000 – 754 с.

2. Бойко И. П. Свайные фундаменты на нелинейно-деформируемом основании : автореф. дис. … д-ра т. н. :05.23.02 / И. П. Бойко. – М. : НИИОСП, 1989. – 45с.

3. Бойко И. П. Теоретические основы проектирования свайных фундаментов на упруго-пластическом основании / И. П. Бойко. // Основания и фундаменты. – 1985. – № 18. – С. 11–18.

4. Бреббия К. Методы граничних елементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. ; пер. с англ. Л. Г. Корнейчука. – М. : Мир, 1987. – 524с.

5. Вялов С. С. Реологические основы механіки грунтов / С. С. Вялов. – М. : Высшая школа, 1983. – 352 с.

6. Гольдштейн М. Н. Механические свойства грунтов / М. Н. Гольдштейн. – М. : Стройиздат, 1979. – 304 с.

7. Зарецкий Ю. К. К расчету ленточных фундаментов на нелинейно-деформируемом основании / Ю. К. Зарецкий. // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1965. – № 1. – С. 10–14.

8. Інженерна геологія. Механіка ґрунтів, основи та фундаменти / М. Л. Зоценко, В. І. Коваленко, А. В. Яковлєв [та ін.]. – Полтава, 2004. – 562 с.

9. Косте Ж. Механика грунтов. Практический курс / Ж. Косте, Г. Санглера ; пер. с франц. В. А. Барвашова под. ред. Б. И. Кулачкина. – М. : Стройиздат, 1981. – 455 с.

10. Клепиков С. Н. Расчет сооружений на деформируемом основании / С. Н. Клепиков. – К. : НИИСК,1996. – 202 с.

11. Кушнер С. Г. Расчет деформаций зданий и сооружений / С. Г. Кушнер. – Запорожье, 2008. – 496 с.

12. Колкунов М. А. Прикладная механика деформируемого твёрдого тела / Колкунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. – М. : Высшая школа, 1983. – 352 с.

13. Леонардс Д. А. Основания и фундаменты / Д. А. Леонардс. – М. : Из-во литературы по строительству, 1968. – 505 с.

14. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М. : Мир, 1974. – 318 с.

15. Моргун А. С. Пластична задача механіки руйнувань ґрунтової основи будівель за методом граничних елементів / А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич. // Збірник НДіБК. – 2008. – № 71. – С. 88–92.

16. Моргун А. С. Моделювання дилатансійного середовища ґрунту системи «паля–основа» за МГЕ / А. С. Моргун. // Основы и фундаменты. – К. : КНУБА, 2007. – Вип. 27. – С. 84–89.

17. Моргун А. С. Застосування методу граничних елементів у розрахунках паль в пластичному середовищі ґрунту / А. С. Моргун. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2001. – 132 с.

18. Моргун А.С. Застосування інструменту числового МГЕ в прикладних дослідженнях поведінки плитно-пальового фундаменту висотної будівлі. / А. С. Моргун, А. В. Ніцевич. // Основы и фундаменты. – К. : КНУБА, – 2011. – Вип. 32. –С. 62–71.

19. Моргун А.С. Компютерні технології розрахунку фундаментних конструкцій на основі методу граничних елементів / А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 162 с.

20. Николаевский В. Н. Дилатансия и законы необратимого деформирования грунтов / В. Н. Николаевский. // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1979. – № 5. – С. 29–31.

21. Николаевский В. Н. Современные проблемы механики грунтов / В. М. Николаевский. // Определяющие законы механики грунтов. – М. : Стройиздат, 1975. – С. 210–227.

22. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. : учеб. пособие для вузов / Ю. Н. Работнов. – 2-е изд., испр. – М. : Наука, 1988. – 712 с.

23. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная фізика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. Литературы, 1979. – 552 с.

24. Флорин В. А. Основы механики грунтов : в 2 т. Т. 1. / В. А. Флорин. – Л.-М. : Стройиздат, 1961.

25. Соломин В. И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментних конструкций / В. И. Соломин, С. В. Шматков. – М. : Стройиздат, 1986. – 209 с.

26. Сахаров В. О. Моделювання багатоповерхового будинку на нелінійній основі в умовах прибудови / В. О. Сахаров. // Світ геотехніки. – 2006. – № 4, – С. 25–28.

27. Сегерлинд Л. Применение метода конечных елементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир,1979. – 392с.

28. Соколовский В. В. Теория пластичности / В. В.Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.

29. Терцаги К. Теория механики грунтов / К. Терцаги. – М. : Госстройиздат, 1961. – 508 с.

30. Харр М.Е. Основы теоретической механики грунтов / М. Е. Харр. – М. : Мир, 1971. –320 с.

31. Хоу Б. К. Основы инженерного грунтоведения / Б. К. Хоу. – М. : Из-во литературы по строительству, 1966. – 460 с.

32. Шукле Л. Реологические проблемы механики грунтов / Л. Шукле. – М. : Стройиздат, 1976. – 485 с.

Наукове видання

Моргун Алла Серафимівна

ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ В МЕХАНІЦІ ГРУНТІВ

Монографія

Редактор С. А. Малішевська
Оригінал-макет підготовлено А. С. Моргун

Підписано до друку 17.04.2013 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. др. арк. 6,24
Наклад 300 (1-й запуск 1–75) Зам № 12-01

Вінницький національний технічний університет,
КІВЦ ВНТУ,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано ФОП Барановська Т. П.
21021, м. Вінниця, вул. Порика, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4377 від 31.07.2012 р.