Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

В. А. Петрук, М. Б. Ковальчук, Н. В. Сачанюк-Кавецька

ВИЩА МАТЕМАТИКА З КОМП'ЮТЕРНОЮ ПІДТРИМКОЮ. РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2012

УДК 517.958 (075):004.855.5
ББК 22.1я73
П31

Автори:
В. А. Петрук, М. Б. Ковальчук, Н. В. Сачанюк-Кавецька

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямами підготовки «Електромеханіка» та «Електротехніка». Лист № 1/11-1662 від 1 березня 2011 р.

Рецензенти:

Н. Т. Тверезовська, доктор педагогічних наук, професор
С. В. Павлов, доктор технічних наук, професор
О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор

Петрук, В. А.
П31 Вища математика з комп'ютерною підтримкою. Рівняння математичної фізики : навчальний посібник / Петрук В. А., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 157 с.
ISBN 978-966-641-473-4

В посібнику розглянуто достатню кількість рівнянь математичної фізики; теоретичні положення про класифікацію диференціальних рівнянь з переліком класу задач, в яких вони використовуються і програмним варіантом їх розв'язування в системі Maple; методи розв'язування рівнянь. Істотною особливістю даного посібника є розгляд спеціальних функцій математичної фізики.

До кожної теми розроблені питання для самоперевірки та розглянуто по 30 варіантів завдань для самостійної роботи, що дозволяє використовувати посібник для практичних занять.

Посібник розрахований на студентів технічних спеціальностей.

УДК 517. 958 (075):004.855.5
ББК 22.1я73

ISBN 978-966-641-473-4

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Математична фізика – це математичний апарат вивчення фізичних полів. Цей апарат є основою теоретичної гідромеханіки, теорії теплопровідності, теорії пружності, класичної теорії електромагнітного поля.

Математична фізика не обмежується тільки отриманням математичних співвідношень, що описують отримані експериментальним шляхом залежності між фізичними величинами. Розв'язування задач математичної фізики сприяє виникненню нових ідей та теорій. Класичним прикладом тут є історія відкриття античастинок. Як відомо, першим було відкрито позитрон. Його існування було передбачено Полем Діраком у 1926 році як математичний наслідок квантової теорії руху електронів. І тільки у 1932 році позитрони були фактично спостережені.

Побудова та дослідження математичних моделей фізичних явищ складають предмет математичної фізики. Математична фізика розвивалася з часів Н'ютона паралельно з розвитком фізики та математики. У XVIII ст. методи математичної фізики почали формуватись при вивченні коливань струни та стержня, а також при розв'язуванні задач, пов'язаних з акустикою та гідродинамікою. У цей же час закладаються підвалини теоретичної механіки (Ж. Д'Аламбер, Л. Ейлер, П. Лаплас, Д. Бернуллі). У XIX ст. ідеї математичної фізики піднялися на інший виток розвитку у зв'язку з задачами теплопровідності, дифузії, пружності, оптики, електродинаміки. У цей же період створюються теорія потенціалу та теорія стійкості руху (Ж. Фур'є, К. Гаусс, О. Коші, М. В. Остроградський, П. Діріхле, Д. Стокс). У XX ст. до математичної фізики залучаються задачі квантової фізики та теорії відносності, а також нові проблеми газової динаміки, перенесення частинок та фізики плазми.

Основними математичними засобами дослідження усіх цих задач є теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, функціональний аналіз, теорія ймовірностей, наближені методи та обчислювальна математика.

Для кращого розуміння подальшого викладення матеріалу наведемо основні означення.

Означення 1. Диференціальним рівнянням у частинних похідних називається рівняння, яке пов'язує незалежні змінні, їх функцію і частинні похідні від цієї функції.

Наприклад,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \qquad (*)$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{t}} = a^2 \Delta U + f(M,t) \qquad (**)$$

Означення 2. Найвищий порядок частинної похідної, що входить у рівняння, називається порядком диференціального рівняння у частинних похідних.

Наприклад, рівняння (*) є рівнянням другого порядку, а рівняння (**) – першого.

Означення 3. Диференціальне рівняння у частинних похідних називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції і її частинних похідних.

Означення 4. Диференціальне рівняння у частинних похідних називається квазілінійним, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.

Означення 5. Розв’язком диференціального рівняння у частинних похідних називається будь-яка функція, неперервна в області, у якій ставиться задача, всередині області має неперервні частинні похідні, порядок яких відповідає порядку диференціального рівняння, і при підстановці у це рівняння перетворює його на тотожність за незалежними змінними.

Для того, щоб повністю описати той чи інший процес, необхідно, окрім самого рівняння у частинних похідних, задати початковий стан цього процесу (*початкові умови*) та режим роботи на границі області, у якій відбувається процес (*граничні умови*). Математично це пов’язано з нескінченною кількістю розв’язків диференціальних рівнянь. Тому, щоб виділити розв’язок, який описує реальний процес, необхідно задати додаткові умови. Такими додатковими умовами і є *крайові умови* – початкові та граничні. Відповідна задача називається *крайовою задачею* або *задачею математичної фізики*.

Означення 6. Сукупність диференціального рівняння у частинних похідних і додаткових умов (крайових та початкових) становить математичне моделювання фізичної задачі і називається задачею математичної фізики.

Та обставина, що задача математичної фізики повинна моделювати деяке фізичне явище (процес), накладає на неї ряд вимог, часто необов’язкових для суто математичних задач. Так, задача математичної фізики вважається поставленою коректно (правильно), якщо існує її розв’язок, єдиний і стійкий. При цьому, стійкість розв’язку означає, що малим змінам в умові задачі повинні відповідати малі зміни у розв’язку, що дозволить знівелювати похибку експериментальних даних задачі. Природно, що основною проблемою «Теорії рівнянь математичної фізики» є знаходження розв’язку задачі математичної фізики у вигляді, зручному для практики. Знаючи цей розв’язок, можна отримати кількісну характеристику процесу у будь-якій точці середовища і у будь-який момент часу.

ТЕМА 1 РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Широкий клас фізичних процесів описується лінійними диференціальними рівняннями другого порядку

$$AU''_{xx} + 2BU''_{xy} + CU''_{yy} + f(x, y, U, U'_x, U'_y) = 0. \quad (1.1)$$

Розглянемо характерні фізичні процеси, що зводяться до різних крайових задач для диференціальних рівнянь типу (1.1), класифікацію таких рівнянь.

1.1 Рівняння малих поперечних коливань струни

Розглянемо натягнену струну, закріплену на кінцях $x = 0$ та $x = l$. Моделюючи струну будемо нехтувати її товщиною, вважаючи струну ниткою, а також силами, що виникають при згинанні, та силами ваги. Залишаємо тільки сили натягу, які описуються законом Гука: натяг струни пропорційний видовженню. Таким чином, моделлю струни є пружна, невагома й абсолютно гнучка нитка.

За основну величину, що характеризує процес коливання струни, виберемо вектор зміщення точок струни від положення рівноваги. Натяг, що виникає у струні у будь-який момент часу, направлений по дотичній до профілю.

Розглянемо малі відхилення точок струни від положення рівноваги, при яких можна вважати, що рух усіх точок струни відбувається в одній площині і перпендикулярно до осі Ox. При цьому довжина елементарної дуги струни дорівнює її проекції на цю вісь. Отже, за зроблених припущень, видовження струни під час її малих коливань не відбувається. Тоді за законом Гука величина натягу T в кожній точці струни не змінюється з часом.

Знайдемо проекції на вісь $0u$ сил натягу, що діють на елементарну дугу струни $M\overset{\cup}{\ }M'$: $T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi$ (рис. 1.1).

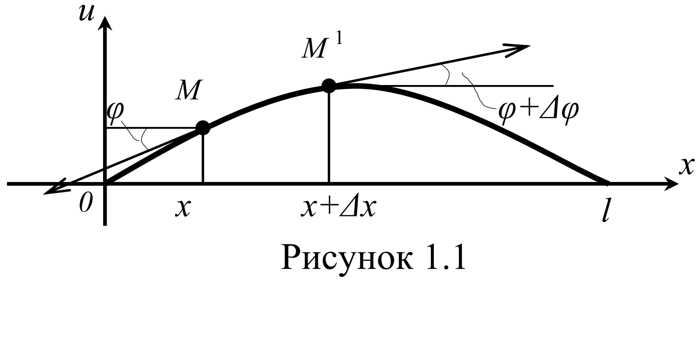

Рисунок 1.1

Оскільки кут φ досить малий, то можна вважати, що $\sin\varphi$ еквівалентний $tg\varphi$.

Тоді

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi \approx Ttg(\varphi+\Delta\varphi)-Ttg\varphi =$$
$$= T\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right),$$

але за теоремою Лагранжа одержуємо

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi = T\,\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x \approx T\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Delta x\,,$$

де $0<\theta<1$.

Для отримання рівняння руху точок струни потрібно зовнішні сили прирівняти до сил інерції. На підставі закону Д'Аламбера всі сили, які діють на ділянку $\overset{\smile}{MM'}$, повинні врівноважуватись.

Нехай ρ – лінійна густина струни, тоді маса елемента струни дорівнює $\rho\Delta x$. Прискорення елемента струни дорівнює $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Тоді за законом Д'Аламбера маємо:

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\,. \tag{1.2}$$

З формули (1.2), враховуючи, що $a^2=\frac{T}{\rho}$, одержуємо рівняння малих поперечних коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

з *крайовими умовами*

$$u(0,t)=u(l,t)=0 \tag{1.4}$$

та *початковими умовами*

$$u(x,0)=f(x)\,, \tag{1.5}$$

де $f(x)$ – форма струни у початковий момент;

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi(x)\,, \tag{1.6}$$

де $\varphi(x)$ – швидкість у кожній точці струни у початковий момент.

1.2 Рівняння малих поздовжніх коливань стержня

Розглянемо стержень, розташований вздовж осі Ox.

Введемо такі позначення:

S(x) – площа перерізу стержня площиною, перпендикулярною до осі Ox і проведеною через точку *X*;

K(x) – модуль Юнга;

ρ(x) – густина у перерізі стержня з абсцисою *x*;

U(x,t) – величина відштовхування (вздовж стержня) перерізу стержня з абсцисою *x* в момент часу *t*.

Припустимо, що величина відштовхування всіх точок фіксованого розрізу однакова. Зрозуміло, що в межах даної моделі повздовжні коливання повністю описуються функцією *U(x,t)*.

Малими коливаннями називаються такі повздовжні коливання, в яких натяги, що виникають в процесі коливання, відповідають закону Гука.

Підрахуємо відносне видовження площі пластини *(x; x+Δx)* в момент часу *t*. Координати кінців цієї частини площі: *x+ U(x,t), x+ Δx+ U(x+Δx, t)*.

Відносне видовження частини площі:

$$\frac{\{[x+\Delta x+U(x+\Delta x,t)]-[x+U(x,t)]\}-\Delta x}{\Delta x}=\frac{x+\Delta x+U(x+\Delta x,t)-x-U(x,t)-\Delta x}{\Delta x}=$$
$$=\frac{U(x+\Delta x,t)-U(x,t)}{\Delta x}=U_x(x+\theta\Delta x,t),$$

де $0<\theta<1$.

Таким чином, відносне видовження в точці *X* в момент часу *t* дорівнює $U_x(x,t)$, а величина натягу *T* за законом Гука:

$$T=K(x)S(x)U_x(x,t).$$

Візьмемо *f(x,t)* – густина рівнодійних зовнішніх сил, які діють на переріз з абсцисою *X* вздовж осі *x*.

Згідно з другим законом Н'ютона на відрізку $[x_1,x_2]$ за час $\Delta t=t_2-t_1$ маємо:

$$\int_{x_1}^{x_2}(U_t(\xi,t_2)-U_t(\xi,t_1))\rho(\xi)S(\xi)d\xi=\int_{t_1}^{t_2}(S(x_2)K(x_2)U_x(x_2,\tau)-S(x_1)K(x_1)U_x(x_1,\tau))d\tau+\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

– рівняння малих повздовжніх коливань ділянки стержня $[x_1,x_2]$ у інтегральній формі.

Припустимо існування неперервних похідних другого порядку функції *U(x,t)* і неперервної першої похідної функцій *K(x)* та *S(x),* знайдемо диференціальні рівняння малих повздовжніх коливань стержня:

$$\frac{\partial}{\partial x}(S(x)K(x)U_x(x.t))+f(x,t)=\rho(x)S(x)U_{tt}(x,t). \qquad (1.7)$$

Якщо *S(x), K(x)* та *ρ(x)* – сталі, то припущення існування U_{xx} та U_{tt} достовірне і рівняння (1.7) зведемо до вигляду:

$$a^2U_{xx} + F(x,t) = U_{tt},$$
$$a^2 = \frac{K}{\rho}, \tag{1.8}$$
$$F(x,t) = \frac{f(x,t)}{\rho S}.$$

1.3 Рівняння малих поперечних коливань мембрани

Мембраною називається тонка натягнута плоска плівка, що не чинить опір згину і зсуву, але чинить опір розтягуванню.

$$\rho(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}) + F(x,t), \qquad x = (x_1, \ x_2). \tag{1.9}$$

Якщо густина ρ постійна, то рівняння коливань мембрани

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \upsilon^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}) + f(x,t), \qquad \upsilon^2 = \frac{T_0}{\rho}, \ \ f = \frac{F}{\rho}$$

називається двовимірним хвильовим рівнянням.

Наведемо виведення рівняння (1.9). Розглядатимемо малі поперечні коливання мембрани, в яких відбувається зсув перпендикулярно до площини мембрани, за яку ми приймемо площину Oxy. Нехай $u = u(x, y, t)$ – величина зсуву точки з координатами (x, y) у момент часу t. Критерієм малості коливань слугують умови

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << 1, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 << 1.$$

Нехай ds — елемент дуги деякого контура, що лежить на поверхні мембрани, M — точка цього елемента. На цей елемент діють сили натягу Tds. Відсутність опору мембрани згину і зсуву математично виражається у тому, що вектор натягу T лежить в площині, дотичній до поверхні мембрани в точці М, і перпендикулярний до елемента ds, а натяг T в цій точці не залежить від напряму елемента ds, що містить точку М. З припущення про малість коливань випливає:

– проекція T_{np} вектора натягу $\vec{T}$ на площину (x, y) рівна T;

– натяг T не залежить від часу t.

Дійсно, $T_{np} = T\cos\alpha$, де α - кут між вектором $\vec{T}$ і площиною (x, y).

Але α не більше кута γ між дотичною площиною до поверхні мембрани, в якій лежить вектор $\vec{T}$, і площиною (x, y): $\alpha \le \gamma$. Тому

$$\cos(\alpha) \ge \cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}} \approx 1.$$

Отже, $\cos(\alpha) \approx 1$, і значить, $T_{np} \approx T$.

Далі розглянемо ділянку S незбуреної мембрани. Її площа дорівнює

$$\iint\limits_{S} dxdy.$$

Площа цієї ділянки у момент часу t дорівнює

$$\iint\limits_{S} \frac{dxdy}{\cos(\gamma)} \approx \iint\limits_{S} dxdy.$$

Таким чином, площа фіксованої ділянки мембрани не змінюється з часом, тобто ділянка не розтягується. Тому за законом Гука і T не змінюється з часом. З того, що вектор T направлений по перпендикуляру до елемента дуги ds, випливає, що T не залежить також від x і y.

Розглянемо елемент мембрани, для якого точка *N(x,y,u)* — середня. На цей елемент, окрім сил натягу $\vec{T}$, діє зовнішнє розподілене по поверхні навантаження *q(x,y,t)*, розраховане на одиницю площі і перпендикулярне до поверхні мембрани (рис. 1.2). Рівнодійна зовнішніх сил буде дорівнювати *q(x,y,t) dxdy*. Рівнодійна сил натягу

$$\left[\mathrm{Tdy}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)\Big|_{\mathrm{x}+\frac{\mathrm{dx}}{2}} - Tdy\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\mathrm{x}+\frac{\mathrm{dx}}{2}} \right] + \left[Tdx\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{\mathrm{y}+\frac{\mathrm{dy}}{2}} - Tdx\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{\mathrm{y}-\frac{\mathrm{dy}}{2}} \right] =$$

$$= \mathrm{Tdy}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2}dx + Tdx\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy = T(\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy.$$

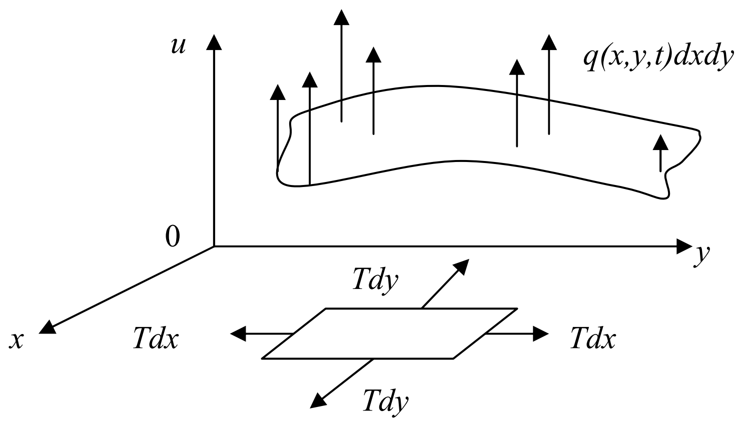

Рисунок 1.2 – Натягнута мембрана

Позначимо через $\rho(x, y)$ поверхневу густину мембрани (густину, розраховану на одиницю площі). Тоді маса даного елемента мембрани буде $\rho(x, y)\,dxdy$. Таким чином, згідно з законами Ньютона, ми можемо написати рівняння

$$\rho(x, y)dxdy\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} = q(x, y, t)dxdy + T(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})dxdy \Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} =$$
$$= (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + \frac{q(x, y, t)}{T}, \quad \upsilon = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{1.10}$$

Величина υ має розмірність швидкості. Вона характеризує швидкість поширення коливань. В окремому випадку може бути $q(x, y, t) = 0$, тоді ми маємо рівняння вільних коливань мембрани

$$\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2} = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}). \tag{1.11}$$

Для завершення постановки задачі про коливання мембрани задамо початкові і крайові умови.

Початкові умови:

$$\mathrm{u}\Big|_{\mathrm{t}=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x, y). \tag{1.12}$$

Крайові умови на контурі Г:

$$\mathrm{u}\Big|_{\Gamma} = 0. \qquad (1.13)$$

Задача про рівновагу мембрани

Якщо вважати, що *q=q(x,y),* тобто, зовнішнє поперечне навантаження не залежить від часу, то можна ставити задачу про рівновагу мембрани. Рівняння рівноваги можна вивести безпосередньо або його можна одержати з рівняння коливань. Рівняння рівноваги мембрани має вигляд

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = -\frac{\mathrm{q(x,y)}}{\mathrm{T}}. \qquad (1.14)$$

Це рівняння належить інтегрувати з крайовою умовою, наприклад, з умовою вигляду (1.13). Початкові умови не ставляться.

Задача про сталі синусоїдні коливання мембрани

Нехай *q=q(x,y,t)* залежить від часу спеціальним чином

$$q(x,y,t) = Q(x,y)\cos(\omega t),$$

або

$$q(x,y,t) = Q(x,y)\sin(\omega t),$$

де ω – частота зовнішньої збурювальної сили.

В цьому випадку і розв’язання задачі доцільно шукати у вигляді

$$u(x,y,t) = U(x,y)\cos(\omega t),$$

або

$$u(x,y,t) = U(x,y)\sin(\omega t),$$

відповідно.

Після підстановки цих функцій *u(x,y,t)* в рівняння коливань мембрани одержимо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{\upsilon^2}\mathrm{U} = -\frac{\mathrm{Q(x,y)}}{\mathrm{T}}, \qquad (1.15)$$

яке належить інтегрувати за крайових умов, наприклад, у вигляді (1.13).

1.4 Телеграфне рівняння

Як ще один приклад хвильового рівняння розглянемо телеграфне рівняння, яке застосовується в теорії поширення квазістаціонарних електричних коливань по кабелях.

Якщо протяжність електричного ланцюга велика (наприклад, телеграфні лінії або лінії передачі енергії), то такий ланцюг не можна характеризувати зосередженими параметрами (опором, ємністю, котушкою самоіндукції). У найпростішому випадку, коли електричний ланцюг має велику протяжність, можна говорити про лінії з розподіленими параметрами. При вивченні таких ліній враховують опір проводів, індуктивність лінії, витік струму в атмосферу внаслідок відсутності ізоляції між проводами (або між проводом і землею). Ми розглядатимемо однорідну лінію, тобто лінію, для якої опір, індуктивність, витік і ємність розподілені уздовж проводу безперервно і рівномірно; для наочності вважатимемо лінію двопроводовою (рис. 1.3).

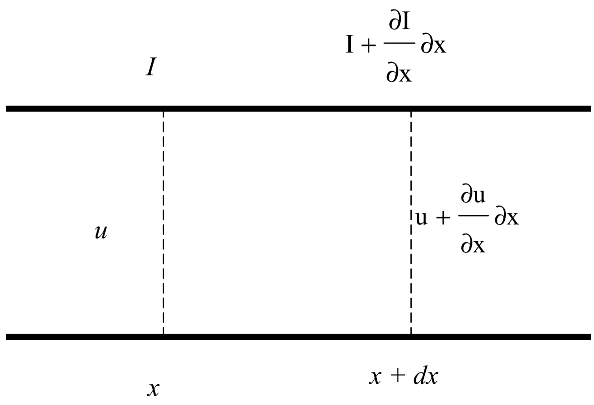

Рисунок 1.3 – Лінія електропередач

Припустимо, що лінія електропередачі характеризується омічним опором R, самоіндукцією L, ємністю C і витоком ізоляції g, розрахованими на одиницю довжини. Нехай напруга між проводами і струм на відстані *x* від початку лінії $x = 0$ у момент часу t рівні, відповідно, $u(x,t)$ і $I(x,t)$. Ці функції і є шуканими; вони пов'язані двома диференціальними рівняннями, які ми зараз виведемо.

Нагадаємо, що самоіндукція L — коефіцієнт пропорційності, що зв'язує електрорушійну силу самоіндукції зі швидкістю зміни струму, тобто, $\mathrm{u}_{\mathrm{C}} = \frac{L\partial I}{\partial t}$. Ємність C — коефіцієнт пропорційності між струмом зсуву і швидкістю зміни напруги, тобто $I_{CM} = \frac{C\partial u}{\partial t}$. Останню рівність отримуємо диференціюванням співвідношення $q = Cu$, де q — кількість електрики, яка залишається на ділянці проводу, що розглядається як обкладка конденсатора, а u – напруга. Нарешті, виток g є коефіцієнтом пропорційності між струмом витоку і напругою.

Для складання диференціальних рівнянь, яким повинні задовольняти функції $u(x,t)$ і $I(x,t)$, виділимо ділянку проводу від точки з абсцисою x до точки з абсцисою $x + dx$. Якщо напруга і струм в точці x у момент часу t рівні, відповідно, $u(x,t)$ і $I(x,t)$, то в точці $x+dx$ в той же момент часу значення цих величин (з точністю до нескінченно малих вищих порядків у порівнянні з dx) будуть рівні $u + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx$ і $I + \left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)dx$. Падіння напруги на даній ділянці викликатиметься втратою напруги в проводі, тобто величиною RdxI, і виникненням протидіючої електрорушійної сили самоіндукції. Тому

$$u - \left(u + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx\right) = RdxI + Ldx\frac{\partial I}{\partial t},$$

тобто,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + L\frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0. \qquad (1.16)$$

Далі зміна струму на цій же ділянці обумовлена струмом витоку і струмом зсуву. Отже,

$$I - \left(I + \frac{\partial I}{\partial x}dx\right) = gdxu + Cdx\frac{\partial U}{\partial t},$$

звідки

$$\frac{\partial I}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial t} + gu = 0. \qquad (1.17)$$

Велике значення мають початкові і крайові умови, які повинні виконуватися на кінцях лінії. *Початкові умови* в загальному випадку формулюються так:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ I\big|_{t=0} = \psi(x).$$

Користуючись рівняннями (1.16) і (1.17), легко знайти $\frac{\partial u}{\partial t}$ і $\frac{\partial I}{\partial t}$ при $t = 0$.

Якщо на початку лінії $x=0$ включено джерело живлення з електрорушійною силою E, а на кінці $x = l$ є приймач струму з опором R_l, то *крайові умови* будуть

$$u\big|_{x=0} = E(t),\ u\big|_{x=l} = R_l I\big|_{x=l}.$$

Зокрема, якщо один кінець $x=0$ підтримується під напругою E, а інший $x = l$ коротко замкнутий, ми маємо

$$u\big|_{x=0} = E(t),\ u\big|_{x=l} = 0.$$

Якщо, наприклад, кінець $x = 0$ лінії відкритий, то в цьому кінці ми повинні мати

$$I\big|_{x=0} = 0.$$

Взагалі, якщо в кінці ($x = l$) лінії включені зовнішня електрорушійна сила E, опір R і самоіндукція I, то в ньому ми повинні мати

$$u\big|_{x=l} = (E + RI + L\frac{\partial I}{\partial t})\Big|_{x=l}.$$

Зрозуміло, можна розглядати будь-яку комбінацію умов при $x=0$ і $x=l$. Вилучимо струм з рівнянь (1.16) і (1.17), одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}+(Lg+CR)\frac{\partial u}{\partial t}+Rgu, \quad \upsilon=\frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{1.18}$$

Рівняння (1.18) називається *телеграфним рівнянням*; υ— швидкість передачі сигналу кабелем.

Через симетрію рівнянь (1.16) і (1.17) аналогічне рівняння виходить і для струму I (заміною в (1.17) напруги *u* на струм I).

Якщо вважати $\mathrm{R}=0$, $\mathrm{g}=0$, то замість рівняння (1.18) ми матимемо рівняння для лінії без втрат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial t^2}.$$

1.5 Рівняння теплопровідності

Процес поширення тепла або дифузії частинок у середовищі описується таким загальним рівнянням:

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t}=div(\rho gradU)-qU+F(x,t). \tag{1.19}$$

Отримаємо його для випадку поширення тепла.

Позначимо $U(M,t)$ температуру середовища в точці $M(x,y,z)$ у момент часу *t*. Середовище будемо вважати ізотропним. Виділимо всередині тіла деякий об’єм *V*, обмежений гладкою або кусково-гладкою поверхнею *S*, в об’єм *V* надходить кількість тепла (потік тепла)

$$\Delta Q=\oiint_S k\left|\frac{\partial U(M,t)}{\partial n}\right|dS\cdot\Delta t, \tag{1.20}$$

де *n* – зовнішня нормаль до поверхні S у точці M;
k – коефіцієнт теплопровідності.

Оскільки

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

– похідна за напрямком, яку можна розглядати як скалярний добуток двох векторів

$$grad \quad U = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$$

та

$$\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\},$$

то

$$Q_1 = \Delta Q = \oiint_S (\kappa \text{gradU}, \vec{\text{n}}) dS \cdot \Delta t .$$

Позначивши

$$\vec{n} dS = \overrightarrow{dS} ,$$

матимемо:

$$Q_1 = \Delta Q = \oiint_{\text{S}} k \text{gradU} \overrightarrow{\text{dS}} \cdot \Delta t . \qquad (1.21)$$

Застосуємо до правої частини рівності (1.21) формулу Остроградського-Гаусса, за якою

$$Q_1 = \oiint_{\text{S}} \kappa \text{gradU} \overrightarrow{\text{dS}} \cdot \Delta t = \iiint_{\text{V}} \text{div(kgradU)} dV \cdot \Delta t . \qquad (1.22)$$

Якщо є теплові джерела, то в об’ємі V виникає тепло, яке дорівнює

$$Q_2 = \iiint_V F(M,t) dV \cdot \Delta t , \qquad (1.23)$$

де $F(M,t)$ – питома потужність джерела.

Щоб вивести рівняння теплопровідності, складемо рівняння теплового балансу. Виділення тепла з об’єму V повинно супроводжуватися зменшенням температури точок тіла. Якщо температура у точці M в момент часу t була $U(M,t)$, то в момент $t + \Delta t$ вона дорівнюватиме $U(M, t + \Delta t)$. З курсу фізики відомо, яка кількість тепла виділяється тілом масою m, якщо його температура змінюється на ΔU і дорівнює

$$\gamma m \cdot \Delta U ,$$

де γ – теплоємність.

Тоді в усьому об’ємі ця кількість тепла дорівнюватиме

$$Q_3 = \iiint_V \gamma\rho [U(M,t+\Delta t) - U(M,t)] dV = \iiint_V \gamma\rho \Delta U \cdot dV . \qquad (1.24)$$

Запишемо рівняння теплового балансу:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 . \qquad (1.25)$$

Підставимо знайдені значення $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ з (1.21), (1.23) і (1.24) у рівняння (1.25), матимемо:

$$\iiint_V \gamma\rho\Delta U\cdot dV=\iiint_V div(k\mathrm{grad}U)dV\cdot\Delta t+\iiint_V F(M,t)dV\cdot\Delta t. \qquad (1.26)$$

Поділимо обидві частини рівності (1.26) на Δt і перейдемо до границі за умови, що $\Delta t\to 0$, дістанемо:

$$\iiint_{\mathrm{V}} div(k\mathrm{gradU})dV+\iiint_V F(M,t)dV-\iiint_V \gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}dV=0,$$

або

$$\iiint_V [div(k\mathrm{gradU})-\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}+F(M,t)]dV=0. \qquad (1.27)$$

Для неперервних функцій і їх частинних похідних матимемо, що

$$div(k\mathrm{gradU})-\gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}+F(M,t)=0. \qquad (1.28)$$

Рівняння (1.28) називається рівнянням теплопровідності.

Якщо середовище однорідне, то $\rho=\mathrm{const}$, $k=\mathrm{const}$, $\gamma=\mathrm{const}$. Тоді рівняння теплопровідності матиме вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a^2\Delta U+f(M,t), \qquad (1.29)$$

де $a^2=\dfrac{k}{\gamma\rho}$,

Δ – оператор Лапласа, $\Delta=\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$,

$\Delta\mathrm{U}=\nabla^2 U=div(gradU)$,

$f(M,t)=\dfrac{1}{\gamma\rho}F(M,t)$.

1.6 Рівняння поширення тепла в стержні

Розглянемо однорідний стержень довжиною *l.* Будемо вважати, що бічна поверхня стержня теплонепроникна і що в усіх точках поперечного перерізу стержня температура однакова. Вивчимо процес поширення тепла в стержні.

Розмістимо вісь *Ox* так, щоб один кінець стержня збігався з точкою $x=0$, а другий – з точкою $x=R$.

Нехай $U(x,t)$ - температура в перерізі стержня з абсцисою x у момент часу t. Кількість тепла, яке проходить через поперечний переріз стержня з абсцисою x за одиницю часу визначається за формулою:

$$q=-k\frac{\partial U}{\partial x}S\,, \tag{1.30}$$

де S – площа перерізу стержня;
k – коефіцієнт теплопровідності.

Розглянемо елемент стержня, що міститься між перерізами з абсцисами x_1 та x_2 $(x_1–x_2=\Delta x)$. Кількість тепла, що проходить через переріз стержня з абсцисою x, за час Δt дорівнює:

$$\Delta Q_1=-k\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\cdot S\cdot\Delta t\,, \tag{1.31}$$

а для перерізу з абсцисою x_2:

$$\Delta Q_2=-k\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_2}\cdot S\cdot\Delta t\,. \tag{1.32}$$

Приріст кількості тепла $\Delta Q_1-\Delta Q_2$ в елементі стержня за час Δt дорівнюватиме:

$$\Delta \mathrm{Q}_1-\Delta Q_2=-k\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\cdot S\cdot\Delta t+k\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_2}\cdot S\cdot\Delta t=k(\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_2}-\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_1})\cdot S\cdot\Delta t\cdot$$

При малих Δx $(\Delta \mathrm{x}\to 0)$ вираз у дужках замінимо диференціалом:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_2}-\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial x})\Delta x=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\Delta x\,.$$

Тоді

$$\Delta Q_1-\Delta Q_2=k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot\Delta x\cdot S\cdot\Delta t\,. \tag{1.33}$$

Цей приріст тепла за час Δt також витрачається на підвищення температури елемента стержня на величину ΔU.

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 = c\rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta U, \tag{1.34}$$

або

$$\Delta Q_1 - \Delta Q_2 \approx c\rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \Delta t, \tag{1.35}$$

де c – теплоємність речовини стержня;

ρ – густина речовини стержня;

$\rho \Delta x S$ – маса елемента стержня.

Прирівнюючи вирази (1.34) і (1.35) для однієї і тієї ж кількості тепла $\Delta Q_1 - \Delta Q_2$, дістанемо:

$$k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \Delta x \cdot S \cdot \Delta t = c\rho \cdot \Delta x \cdot S \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \Delta t,$$

або

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Позначимо через

$$a^2 = \frac{k}{c\rho},$$

матимемо рівняння:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{1.36}$$

Це і є рівняння поширення тепла в однорідному стержні.

Задамо ще *крайові умови*:

$$U(x,t)\big|_{x=0} = \psi_1(t)$$

$$U(x,t)\big|_{x=l} = \psi_2(t) \tag{1.37}$$

та *початкову умову* (для $0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T}$):

ЛІТЕРАТУРА

1. Арсенин В. Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции / Арсенин В. Я. – М. : Физматгиз, 1966. – 368 с.
2. Будак Б. М. Сборник задач по математической физике / Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. – М. : ГИТТЛ, 1956. – 684 с.
3. Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику / Бутенин Н. В. – М. : Наука, 1974. – 264 с.
4. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель / Васильев. А. Н. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. – 352 с.
5. Вища математика. Спеціальні розділи : підручник у двох книгах. [Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.]; [за ред. Г. Л. Кулініча] – Книга 2. – К. : Либідь, 1996. – 336 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / Владими-ров В. С. – [4-е изд.]. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики : учебник для вузов / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – [2-е изд., стереотип.]. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.
8. Голоскоков Д. П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple : учебник для вузов / Голоскоков Д. П. – СПб. : Питер, 2004. – 539 с.
9. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. – М. : Высш. шк., 1970. – 712 с.
10. Очан Ю. С. Методы математической физики / Очан Ю. С. – М. : Высш. шк., 1965. – 384 с.
11. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / Петровский И. Г. – М. : Физматгиз, 1961. – 400 с.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4, Ч. 1 / Смирнов В. И. – М. : Наука, 1974. – 336 с.
13. Снеддон И. Преобразования Фурье / Снеддон И. – М. : ИЛ, 1955. – 668 с.
14. Соболев С. Л. Уравнения математической физики / Соболев С. Л. – М. : Наука, 1966. – 444 с.
15. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / Тихонов А. Н., Самарский А. А. – [5-е изд.]. – М. : Наука, 1977. – 736 с.
16. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М. : ИЛ, 1962. – 352 с.
17. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Эльсгольц Л. Э. – М. : Наука, 1965. – 424 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Навчальне видання

Петрук Віра Андріївна

Ковальчук Майя Борисівна

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна

Вища математика з комп'ютерною підтримкою Рівняння математичної фізики

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна

Оригінал-макет підготовлено М. Ковальчук

Підписано до друку 9.07.2012 р.
Формат 29.7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 10,2.
Наклад 300 (1-й запуск 1-100) прим. Зам. № 2012-084.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к.114.
Тел.(0432)59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.