

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

В. Х. Власюк

**ЕЛЕКТРОВИХРОВІ ТЕЧІЇ
І ПОШУК ЕКСТРЕМУМУ**

Монографія

Вінниця
ВНТУ
2012

УДК 537.84:669.18
ББК 30.125:34.3
В58

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 4 від 24.11.2011 р.)

Рецензенти:

Компан Я. Ю., доктор технічних наук, професор

Михалевич В. М., доктор технічних наук, професор

Власюк, В. Х.

В58 Електровихрові течії і пошук екстремуму: монографія / В. Х. Власюк. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 400 с.

ISBN 978-966-641-494-9

На основі чисельного моделювання течій електропровідної рідини в технологічних процесах при великих значеннях параметрів виконано аналіз структури, геометрії течій, спричинених об'ємними силами: електромагнітними – від взаємодії робочого струму із власним магнітним полем, а також зовнішнім магнітним полем, однорідним і неоднорідним, і гравітаційним. Досліджені особливості перенесення тепла і речовини. Методами нелінійного і стохастичного програмування розв'язані мінімаксні задачі із споріднених областей механіки суцільного середовища.

УДК 537.84:669.18
ББК 30.125:34.3

ISBN 978-966-641-494-9

© В. Х. Власюк, 2012

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	6
1 ЕЛЕКТРОВИХРОВІ ТЕЧІЇ	8
1.1 Прикладення теорії електровихрових течій.....	8
1.2 Постановка задачі	12
1.3 Вибір методу дослідження.....	14
1.4 Чисельні методи	17
2 ПРОЦЕСИ ПЕРЕНЕСЕННЯ В ЕЛЕКТРОВИХРОВИХ ТЕЧІЯХ.....	22
2.1 Прийняті припущення. Безіндукційне і електродинамічне наближення. Розрахунок електричного і магнітного полів. Побудова електромагнітної сили	22
2.2 Гідродинаміка шлакової ванни. Вплив радіуса електрода, глибини ванни	30
2.3 Форма ванни	50
2.4 Перенесення тепла і маси.....	54
2.5 Нестационарне перенесення	65
2.6 Порівняння розрахунків течії з фізичним експериментом. Перерахунок чисельних результатів на експериментальні	68
2.7 Чутливість перенесення тепла електровихровою течією до межових умов. Порівняння з фізичним експериментом	71
3 ВПЛИВ ПОЗДОВЖНЬОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ НА ПРОЦЕСИ ПЕРЕНЕСЕННЯ	83
3.1 Гідродинаміка.....	83
3.2 Тепломасоперенесення.....	88
3.3 Нестационарне перенесення	102
4 СТІЙКІСТЬ ЕЛЕКТРОВИХРОВИХ ТЕЧІЙ В ЗОВНІШНЬОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ	108
4.1 Властивості класу досліджуваних течій.....	109
4.2 Розрахунок магнітного поля	113
4.3 Розрахунок гідродинаміки	116
4.4 Безіндукційне наближення для ЕВТ в шарі	127
4.5 Характеристики конвективних елементів	139

4.6	Падіння каплі рідини на поверхню розділу	143
5	ТУРБУЛЕНТНІ ЕЛЕКТРОВИХРОВІ ТЕЧІЇ.....	148
5.1	Аналіз моделей турбулентності	148
5.2	Результати розрахунків по різних моделях.....	157
5.3	Вибір моделі, придатної для ЕВТ	171
5.4	Порівняння з фізичним експериментом	172
6	ПЕРЕНЕСЕННЯ СУМІСНОЮ ЕЛЕКТРОВИХРОВОЮ І ГРАВІТАЦІЙНОЮ КОНВЕКЦІЄЮ	180
6.1	Умови теплообміну в ЕВТ з природною конвекцією	180
6.2	Турбулентні розв'язки нестационарних рівнянь Нав'є–Стокса	183
6.3	Співвідношення електровихрової і природної конвекцій	189
7	ЕЛЕКТРОВИХРОВІ ТЕЧІЇ В ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ.....	198
7.1	Вторинні ЕВТ в двошарових рідинах	198
7.2	Властивості вторинної течії. Автомодельність	202
7.3	Аналогія між ЕВТ в двошаровому середовищі і деякими гідродинамічними течіями.....	208
7.4	Перенесення завихреності електровихровою течією в двошарових рідинах	213
7.5	Критичні значення параметрів електровихрових течій в двошарових рідинах	225
8	ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ТЕЧІЇ В ПРИРОДНИХ ЗМІННИХ.....	247
8.1	Поле тиску ЕВТ при змінному струмі	247
8.2	Порівняння з експериментом	258
8.3	Моделювання МГД-течії, індукованої перепадом тиску, методом в природних змінних.....	259
8.4	Течія в каналі у зовнішньому магнітному полі. Гідравлічний удар в нульовому наближенні	268
8.5	Характеристики течії в каналі з кюветою	272
8.6	Геометрична інтерпретація процесу розв'язання.....	276
9	ПРОЕКТУВАННЯ НАПРАВЛЕНИХ ВІДГАЛУЖУВАЧІВ НВЧ ПОШУКОВИМИ МЕТОДАМИ	280
9.1	Діапазони частот і особливості проектування пристроїв НВЧ.....	280

9.2	Постановка задачі синтезу пристроїв НВЧ. Фільтри і відгалужувачі	282
9.3	Характеристики шлейфових відгалужувачів. Синтез шлейфових відгалужувачів.....	284
9.4	Покращення метрологічних характеристик спрямованих відгалужувачів із сильним зв'язком	292
9.5	Синтез шлейфових напрямлених відгалужувачів з врахуванням можливостей конструктивної реалізації.....	300
9.6	Багатокритеріальні задачі синтезу направлених відгалужувачів.....	302
9.7	Амплітудний метод розрахунку направлених відгалужувачів.	304
10	СТОХАСТИЧНИЙ СИНТЕЗ АНТЕН.....	309
10.1	Постановка задач стохастичного синтезу антен.....	309
10.2	Прямі методи стохастичного програмування.....	312
10.3	Варіанти синтезу антенних решіток	313
10.4	Синтез різницевих діаграм направленості	317
10.5	Синтез різницевих діаграм направленості в умовах невизначеності	321
10.6	Визначення поля випромінювання по заданих джерелах	323
10.7	Загальні властивості алгоритмів породження випадкових чисел.....	329
11	СТОХАСТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ	342
11.1	Задачі стабілізації системи диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною	342
11.2	Рівняння для статистичних характеристик розв'язків систем	345
11.3	Оптимізація нелінійної динамічної системи.....	352
11.4	Постановка задачі стохастичної оптимізації	354
11.5	Оптимальна стабілізація фазової траєкторії в просторі станів	355
11.6	Нестаціонарне збурення системи.....	360
11.7	Генерація випадкових векторів і процесів	365
11.8	Характерні властивості стохастичного інтегрування	370
	Література	378

ПЕРЕДМОВА

Електрошлакове зварювання і переплавка, плавка в дугових печах, характеризуються великими значеннями електричного струму: від одного до декількох десятків кА. При таких значеннях струму електромагнітна сила від взаємодії струму з власним магнітним полем може принципово змінити характер подібного електротехнологічного процесу, відносно того, що був би при помірних значеннях струму. Течія «робочої» рідини в полі цієї електромагнітної сили, з ненульовим ротором, називається електровихровою течією (ЕВТ) [1, 2].

В теорії електровихрових течій основним параметром є параметр електровихрової течії $S = \mu_0 I^2 / \rho v^2$. Для реальних технологічних процесів параметр S досягає значень $10^8 \dots 10^{10}$ і вище. Таким чином, реальна модель процесів, що відбуваються в замкнутих об'ємах сильнострумових електротехнологічних установок, повинна містити великий параметр S .

Частина розрахунків в теорії ЕВТ, і не тільки аналітичними методами, була проведена при малих значеннях параметра, які не перевищували кількох тисяч, що пов'язано із загальною проблемою великого параметра. Важливість дослідження електровихрових течій в'язкої нестискуваної електропровідної рідини при великих значеннях параметра S визначається потребами практики в отриманні даних про гідродинаміку, які необхідні при проектуванні оптимальних технологій, конструкцій і режимів роботи установок.

Теорію ЕВТ потрібно розглядати не тільки як один з розділів магнітної гідродинаміки, але й загальної гідродинаміки, в якому досліджується рух в своєрідному полі об'ємної електродинамічної сили.

Навіть при великих струмах індукція власного магнітного поля струму не перевищує декількох сотих Тл. Струми, індуковані рухом рідини в такому полі, є вторинними і відносно основного струму малі. У випадку, коли ніяк не враховуються ці струми, то розрахунки виконуються в електродинамічному наближенні.

Розраховувалась і течія в шарі рідини в безіндукційному наближенні, коли нехтують впливом індукованого електричного струму в електропровідній течії на магнітне поле, але враховують індукований струм в електромагнітній силі.

Вивчення ЕВТ в сукупності з іншими явищами, що впливають на гідродинаміку в робочих об'ємах електротехнологічних процесів, вплив форми цих об'ємів є також важливою частиною роботи.

Актуальність досліджень ЕВТ і їх значення для загальної гідродинаміки обумовлені і особливостями задачі перенесення тепла в ЕВТ. Із відомих об'ємних сил в загальній гідродинаміці найбільш повно досліджено течію в полі об'ємної сили тяжіння, проявом якої є природна конвекція, що викликається неоднорідністю межових умов. Своєрідність ЕВТ полягає в тому, що проходження електричного струму викликає джоулеве тепловиділення, неоднорідно розподілене по об'єму рідини. Дослідження електровихрових течій в сукупності з тепловою задачею є важливою прикладною задачею загальної гідродинаміки.

Результати автора 1983–1987 років з тлумаченням фізичних аспектів чисельного моделювання ЕВТ представлені в монографіях [2], [3] і кандидатській дисертації автора [4]. В цій монографії здійснюється спроба дещо змістити акценти на особливості дослідження електровихрових течій чисельними методами, на екстремальні властивості структури цих течій, на зв'язок методів обчислювальної гідродинаміки з методами пошуку екстремуму. Виконано аналіз основних методів розрахунку течії в природних змінних – швидкість і тиск. Показана їх належність до класу екстремальних задач з обмеженнями, придатність для розв'язання важливих задач магнітної гідродинаміки.

Вивчались транспортні властивості течії, властивості перенесення ЕВТ домішок в рідині, а також ЕВТ в присутності зовнішнього магнітного поля. Досліджувались умови і характер нестійкості електровихрової течії в магнітному полі кілець з електричним струмом, розміщених зовні, на поверхні робочої області.

В останніх розділах розглянуті задачі проектування в технічній електродинаміці, що вимагають розв'язання екстремальних задач і достатньо повно характеризують відповідні методи. Суцільне середовище [5], континуальна математика єднають частинні задачі цих розділів із задачами попередніх.

Сильний зв'язок хвилеводів в направлених відгалужувачах є своєрідною проблемою великого параметра. Потрібно забезпечити перехід значної частини потужності у вторинний хвилевід.

Стохастичний синтез антен вимагає врахування в екстремальній задачі синтезу антен ще одного критерію. Розрахунки елементів області зв'язку відгалужувача, елементів антени значною мірою ґрунтуються на аналогії з гідродинамікою, з поширенням звуку. Теорія екстремальних задач є основою оптимальної стохастичної стабілізації динамічних систем.

В роботах і в монографії автор порівнював свої чисельні результати з результатами фізичних експериментів інших авторів.

1 ЕЛЕКТРОВИХРОВІ ТЕЧІЇ

1.1 Прикладення теорії електровихрових течій

Терміном «електровихрові течії» (ЕВТ) стали виділяти групу течій магнітної гідродинаміки, коли було накопичено достатньо експериментальних і теоретичних даних про поведінку рідини з електричним струмом. Походження терміну пов'язане з тим, що ці течії збуджуються, по-перше, електричним струмом, по-друге, вони виникають через вихровий характер електромагнітної сили взаємодії струму з власним магнітним полем.

Початок вивчення гідромеханіки рідини з електричним струмом є, мабуть, 1907 рік, коли було опубліковано статтю Нортрупа [1], в якій описувались досліди Герінга. При проходженні порівняно великого змінного струму через рідкий провідник в лотку, рідина стискується в поперек і спучується по довжині лотка. Герінг жартома назвав таку дію електромагнітних сил «пінч-ефектом».

Наступний етап – перехід від вивчення статички рідини зі струмом до вивчення її руху пов'язаний з появою і розвитком **електродугового зварювання**. Виявилось, що струмінь плазми в дузі, що є, як з'ясувалось пізніше, результатом дії електромагнітних сил, має велику швидкість.

Першим, хто помітив, що електромагнітна сила, яка виникає при просторово розбіжному **електричному розряді**, не може бути скомпенсована силами тиску і, як наслідок, розряд повинен викликати ежекцію газу, ймовірно був Жигульов в 1960 році [6].

У 60 рр. з'явилися роботи з **обтікання тіл електричним струмом**, зокрема, по задачах про передню критичну точку, про диск, що обертається, які мають відношення до електровихрових течій.

В 1961 році Гроздовський з співавторами побудували **наближений розв'язок** для кінчного розряду в нев'язкій рідині. В 1969 році Лунквіст опублікував *стоксовий розв'язок* для ЕВТ з точковим джерелом електричного струму, що рівномірно розтікається в півпростір, заповнений електропровідною рідиною і обмежений металевою поверхнею. Цю ж електровихрову течію дещо пізніше, однак вже на *основі повних рівнянь руху*, дослідили Шеркліф, Созоу, Шилова і Щербінін.

Далі в теорії електровихрових течій починається інтенсивний розвиток, який відображено в багатьох публікаціях [1, 2].

Відомо декілька напрямів теорії, що є цікавими і в прикладному плані, і з точки зору нових фізичних явищ. Сфера її використання досить велика. Пояснення деяких природних явищ, таких, як торнадо, блискавка, електричні струмені в магнітосфері, збудження магнітного поля Землі і космічних тіл, містять ЕВТ як одну з можливих причин свого виникнення (наприклад, стаття Щербініна в журналі «Техника молодежи» 1978, №7 (54) Э. Щербинин – Факты и гипотезы о смерчах). Проте найбільш важливими є використання ЕВТ для технологічних процесів із сильними струмами.

На електровихрових течіях базується опис гідродинаміки багатьох сильнострумових технологічних процесів: електричні дуги, електрошлакове зварювання і переплавка, електролітичні методи отримання металів, МГД-сепарація, виробництво композитних матеріалів та інше.

В **МГД-сепараторах**, які дозволяють сортувати частинки за щільністю і електропровідністю, дія циркуляційного руху ЕВТ на перемішування частинок суттєво ускладнює процес сепарації. При виробництві композитних матеріалів в схрещених електричному і магнітному полях, що необхідно для отримання однорідного складу з двох металів, які відрізняються щільністю і електропровідністю, ускладнюється отримання «невагомості».

Електровихрові рухи поблизу частинок в рідині зі струмом інтенсифікують і тепломасоперенесення.

Електрошлакова технологія бере початок в роботах 50-х років, виконаних в Інституті електрозварювання ім. Є. О. Патона. Пошук оптимальних з точки зору продуктивності і якості зварного шва режимів зварювання необхідно вести в сполученні з глибоким аналізом магнітогідродинамічних явищ в зварній ванні.

Схема електрошлакового зварювання містить плавкий електрод, шлакову ванну (або флюс), який відіграє подвійну роль. По-перше, внаслідок великого електроопору саме тут виділяється основна частина джоулевого тепла, що приводить до високої температури шлаку і плавленню металу в шлаковій ванні. По-друге, так як плав-

лення електродного дроту відбувається без контакту з атмосферою, то практично відсутній угар металу і забезпечується його чистота. Між зварним швом і шлаковою ванною є перехідна рідиннометалева зона, процеси в якій в значній мірі визначають якість зварного шва.

ЕВТ при електрошлаковому зварюванні створює нерівномірний тиск на дно шлакової ванни, тобто, на поверхню розділу шлак–рідкий метал. Струменева течія, яка формується біля плавкого електрода, може проявляти суттєвий силовий вплив на профіль поверхні розділу. Профілі поверхні при зварюванні титаном під флюсом, отримані на основі розрахунків з використанням емпіричних залежностей, роблять зрозумілими явища, що супроводжують форсований режим зварювання [1, 2].

Із зростанням швидкості подачі електрода, що еквівалентно збільшенню сили струму зварювання і зменшенню відстані між електродами, збільшується прогин поверхні розділу. Найбільш нагріті об'єми шлаку переносяться ЕВТ від епіцентру виділення тепла поблизу плавкого електрода вглиб кратера шлакової ванни, викликаючи глибоке осьове проплавлення зварного шва. В результаті фронт кристалізації рухається до осі в радіальному напрямку і може захопити частину шлакового кратера при його достатній глибині.

Технологія електрошлакового переплавлення (ЕШП) металу не має принципової відмінності від електрошлакового зварювання – змінюється лише призначення процесу, а саме: електрошлаковий переплав призначений для отримання високоякісних зливків металу. Виплавка металів в електропечах дозволяє сумістити процес виплавки з отриманням заготовок потрібної форми. При цьому під високою якістю зливка розуміємо не тільки якість металу, але й якість поверхні зливка, що дозволяє звести до мінімуму його подальшу обробку.

Відмінність технологій ЕШЗ і ЕШП полягає в масштабному факторі. Так, наприклад, якщо розмір зварного шва, як правило, 50...100 мм, то розмір відливок, отримуваних при електрошлаковому переплавленні, досягає 2 м. Відповідно необхідний для нормального процесу переплавлення струм складає декілька десятків кА. Величина струму зварювання має порядок 1..2 кА. На відміну від електрошлакового зварювання коефіцієнт заповнення кристалізатора при переплавленні

металу $k^2=d^2/D^2$ (d – діаметр плавкого електрода, D – діаметр зливка) нерідко має значення, близьке до одиниці. З подальшого розгляду випливає, що вказана відмінність має суттєвий вплив на гідродинаміку розплаву.

В ЕШП гідродинаміка шлаку впливає на гідродинаміку рідинно металеві ванни в більшій мірі перерозподілом теплових потоків, ніж визначає робочий режим плавлення і кристалізації. Гідродинаміка шлакової ванни має також суттєвий вплив на процеси рафінування в перегрітому синтетичному шлаку, які залежать від тепло-масоперенесення.

Наступною сферою застосування теорії ЕВТ є **електричні дуги**. Вони присутні в найрізноманітніших технологічних операціях (від отримання ультрадисперсійних порошків – до нанесення тонких металізованих покриттів); гідродинаміка електричної дуги може справляти вирішальний вплив на хід технологічного процесу.

До технології електричної дуги тісно примикає технологія **вакуумно-дугового переплавлення**.

Принципова відмінність вакуумно-дугового переплавлення (ВДП) від електрошлакового полягає в тому, що електрод плавиться за рахунок теплової енергії дуги, що горить між плавким електродом і дзеркалом рідиннометалевої ванни у вакуумі або в середовищі інертного газу. Друга особливість, що відрізняє ВДП від ЕШП, полягає в тому, що через високу температуру дуги і внаслідок дзеркала рідкого металу глибина рідинно металеві ванни виявляється суттєво більшою, ніж при ЕШП.

Електровихрова течія в рідиннометалевій ванні бере участь у формуванні фронту кристалізації, перенесенні легуючих домішок, а при взаємодії з електровихровою течією дуги – в рафінуванні, транспортуючи до поверхні газу і домішки. Очищення сприяє суттєвому підвищенню якості, надійності, довговічності виробів з так званих надсплавів і високоміцних легованих конструкційних сталей.

Як і в будь-якій стадії металургійного виробництва в електротехнологічних процесах ЕШЗ, ЕШП, і ВДП для їх вдосконалювання необхідно **комплексне дослідження** гідродинаміки, тепло- і масоперенесення. В залежності від гідродинаміки процес кристалізації може

мати складний характер і призводити до неоднорідності металу, погіршення якості.

Стає необхідним **дослідження можливостей керування** електровихровими течіями. Представляють самостійний інтерес ЕВТ, які збуджуються не електричним струмом технологічного процесу, а створюються спеціально для управління. Накладання зовнішнього магнітного поля може значно вплинути на структуру течії, дозволяє добиватися необхідної якості зливка.

Основу спецметалургії складає ЕШП. Слідом за ним йде ВДП. Це пояснюється головними перевагами ЕШП перед іншими переплавними процесами: простотою обладнання і високою економічною ефективністю при якості електрошлакового металу, практично рівноцінній вакуумно-дуговому. Такими показниками як фізична і хімічна однорідність металу обумовлюється однорідність механічних властивостей, їх надзвичайно висока ізотропність. При будь-якому з переплавних процесів якість зливка завжди буде тим вища, чим чистіший початковий метал (задачі технології розлиття, використання внутрішніх кристалізаторів та схема ЕШП розглянуті в [7]).

Перспективність сильнострумівих технологічних процесів підтверджують і міркування, що пов'язані з охороною навколишнього середовища, і те, що деякі метали (алюміній, магній) в основному отримують **електролітичним** шляхом в силу особливостей їх існування в природних умовах. Тому, для **вдосконалення технології і обладнання** доцільно досліджувати закономірності електровихрових течій.

1.2 Постановка задачі

В спільних роботах [8, 9], виконаних співробітниками лабораторії магнітної гідравліки Інституту фізики АН Латвійської РСР і Обчислювального центру Латвійського держуніверситету, *якісно* вивчені основні властивості електровихрових течій в замкнутих об'ємах. Для циліндричної ємності з висотою, рівною радіусу, і електродами в торцях розрахунки течій проводились у відносно невеликому інтервалі зміни параметра електровихрової течії S ($S \sim I^2$), що не перевищував 10^3 . Було з'ясовано як впливають на тороїдальну електровихрову течію струми, індуковані рухом рідини у власному магнітному полі.

Знайдено, що індуковані струми призводять до повільнішого зростання швидкості, ніж пропорційно S .

Вплив зовнішнього магнітного поля досліджувався на прикладі ЕВТ в циліндричній ємності з висотою рівною діаметру, поміщеній в однорідне осьове магнітне поле. Поле викликає диференціальне обертання рідини, яке, в свою чергу, породжує вторинний тороїдальний рух, зворотний до електровихрового. В такому ж діапазоні параметра електровихрової течії ($S \leq 10^3$) була помічена зміна інтенсивності обертання рідини навколо осі симетрії зі зміною S . Виявилось, що кінетична енергія меридіанної електровихрової течії частково передається обертальному руху, підживлюючи його.

Як і у випадку оцінювання впливу індукованого струму, необхідний для розуміння фізики явища результат був отриманий в **обчислювальному експерименті**. Значення низки інтегральних характеристик, які при цьому були проаналізовані, в фізичному експерименті знайти було б складно. З допомогою методів обчислювальної гідродинаміки отримано якісні особливості перебудови структури течії зі збільшенням зовнішнього магнітного поля.

В розглянутих роботах відсутнє дослідження тепло- масоперенесення, яке необхідне у всіх випадках з ЕВТ. Використані значення параметра S далекі від значень в реальних сильнострумових технологічних процесах, де вони досягають величин $10^8 \div 10^{10}$.

В. Ю. Сандлер (ВНИИЭТО) виконав розрахунки електро-вихрових течій в циліндричній ємності для різних заглиблень плавкого електрода в рідиннометалеву ванну зі зміною параметра S в діапазоні від 450 до $4,5 \cdot 10^6$ [10]. Було отримано, що зі збільшенням S *максимум швидкості зміщується з осі симетрії*. На основі розрахунку гідродинаміки шлакової ванни в [10] також вказується на можливість різних ситуацій при спільній електровихровій і тепловій конвекції.

Таким чином, актуальною є задача дослідження електровихрових течій в замкнутих об'ємах при великих значеннях параметра S , відповідних параметрам реальних електротехнологічних процесів.

Важлива прикладна задача полягає у вивченні властивостей не тільки електровихрових течій, що виникають від взаємодії струму з власним магнітним полем, але й ЕВТ із зовнішнім магнітним полем, а

також ЕВТ з тепловою конвекцією, викликаною джоулевым тепловиділенням, співвідношення і частинного вкладу всіх джерел руху рідини в сильнострумових процесах. Для рідких об'ємів, найбільш характерних для практики форм, при цьому необхідно вивчити основні властивості перенесення тепла і маси електровихровими течіями.

При великих значеннях параметра S в рідині може виникнути турбулентний рух. В роботах [11, 12], де була спроба наблизитись до умов реального процесу, використовувалась двопараметрична $k\sim W$ модель, вибір найкращої для електровихрових течій моделі не проводився. Також було відсутнє порівняння з експериментом.

В спільній роботі [13] співробітниками Інституту фізики АН Латвійської РСР, Інституту електрозварювання ім. Є. О. Патона і Масачусетського технологічного інституту виконано порівняння розрахункової, за $k\sim\varepsilon$ моделлю, і експериментальної залежностей максимальної середньої швидкості від струму. Похибка склала 10–20 %.

Наявні тепер **експериментальні дані** для швидкостей турбулентних ЕВТ в ртутній моделі [14] дозволяють здійснити подальший розвиток теорії турбулентних ЕВТ, зробити вибір математичної моделі турбулентності, яка найбільш придатна для ЕВТ, її емпіричних констант.

У відповідності зі сказаним вище, задачею нашого дослідження є продовження теоретичних робіт з вивчення електровихрових течій, отримання їх адекватного опису, необхідного для правильного розуміння і використання гідродинаміки сильнострумових технологічних процесів.

1.3 Вибір методу дослідження

Серед методів теоретичного дослідження ЕВТ виразно проглядаються два методи. Один з них, більш ранній, пов'язаний з отриманням точних рішень. Під **точними рішеннями** тут розуміють такі, які отримані з повних рівнянь руху без попереднього оцінювання і подальшого відкидання тих чи інших членів рівнянь (це не стосується електродинамічних величин, відносно яких для спрощення можуть бути прийняті припущення) [1].

Точний розв'язок $\Theta(x, y)$ називається **автомодельним**, якщо при зміні y він зазнає тільки перетворення подібності по осях x і Θ . Для цього досить, щоб він мав вигляд

$$\Theta(x, y) = \alpha(y) \cdot F[\beta(y)x].$$

Нелінійний характер рівнянь Нав'є–Стокса призводить до того, що число їх точних розв'язків вкрай обмежене. В основному, точні аналітичні розв'язки отримуються при розгляді течій, інваріантних вздовж деякого напрямку в просторі, тобто зі зменшенням *вимірності* початкового простору задачі і течій, для опису яких можна перейти від початкової системи рівнянь в частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь (автомодельні розв'язки), тобто понизити порядок задачі.

Цінність точних розв'язків полягає не тільки в безпосередній інформації, яку вони дають, але й в можливості їх використання для перевірки справедливості припущень, що приймаються при побудові наближених розв'язків, або як тестів при чисельному розв'язанні задач.

Оптимальний метод дослідження знаходиться всередині області можливих підходів. Так, при математичному формулюванні задачі Ландау віддає перевагу її зведенню до звичайних диференціальних рівнянь, Фок розглядає рівняння в частинних похідних, інші дослідники намагаються звести її до алгебраїчних рівнянь. Навіть з врахуванням психологічних особливостей при аналітичних дослідженнях в задачах гідромеханіки підхід Ландау є найкращим з точки зору простоти результату без втрати його фізичної загальності.

При викладенні основ теорії бажано обмежуватися спрощеними адекватними моделями явищ, що розглядаються [15]. Але математичне дослідження спрощеної моделі не оптимальне у вказаному вище сенсі, тобто не є прийнятним при розв'язанні практичних задач, коли звичайно не можна обійтись розглядом тільки простої або тільки складної моделі і однією з них не можна замінити іншу.

В ЕВТ задача розрахунку течії розв'язувалась в основному аналітично. Знаходились автоматичні розв'язки, які в сферичній системі координат можна отримати, або розділяючи змінні в рівняннях, або вводячи деяку нову змінну, складену у вигляді комбінації координат системи. Другий підхід практикується при постановці задач в декартових і циліндричних координатах, перший – в циліндричних і сферичних координатах. Точні розв'язки дозволяють відчувати якісні особли-

вості електровихрових течій. Однак, як тільки робиться спроба описати реальні процеси або ускладнити задачу перенесенням тепла і маси, зовнішнім магнітним полем, можливості істотно зменшуються. Хоча якісні оцінки можливі і в таких випадках.

Так, наприклад, задача дослідження течії поблизу малого електрода, якій присвячена велика кількість робіт, належить одному з добре відомих класів точних розв'язків в гідродинаміці в сферичних координатах. Однак, при її розв'язанні несподівано виникла проблема нелінійного розв'язку, суть якої полягає в тому, що розв'язки в'язких нелінійних рівнянь для меридіанних ЕВТ часто дають нерегулярне поле швидкості вже при порівняно малих значеннях струму, що пропускається через рідину.

Оскільки при аналітичному дослідженні всього згаданого різноманіття сторін ЕВТ: ламінарного і турбулентного режимів, присутності зовнішнього магнітного поля, впливу геометрії замкнутого об'єму і так далі можуть зустрітися непереборні труднощі, задача нашого дослідження розглядалась в рамках обчислювальної гідродинаміки.

В обчислювальній гідродинаміці оптимальним методом є метод різницевих схем [16]. В низці робіт розглядається метод кінцевих елементів – нестандартний метод отримання різницевих схем, що є одним з видів варіаційно-різницевих методів. Другий різновид варіаційно-різницевого методу представлений в [17]. Задача розрахунку течії при цьому зводиться до задачі математичного програмування і розв'язується відомими в цій області методами оптимізації. Метод різницевих схем не тільки значно простіший, але й розв'язок при використанні методу отримується більш природно. В подальшому застосовуються його різноманітні варіанти.

Далі наведена класифікація методів введення схемної в'язкості при розрахунку течії в'язкої нестискуваної рідини і опис методів обчислювальної гідродинаміки, більшість з яких були випробувані на електровихрових течіях – новому класі течій в замкнутих об'ємах, які викликаються полем внутрішніх сил. Особливості вибору і застосування чисельних методів описуються додатково у відповідних розділах. Наприклад, вибір методу розв'язання системи зі змінною в'язкістю викладено в розділі 5.

1.4 Чисельні методи

Гідродинамічна частина всіх розглянутих в [4] задач розв'язувалась в змінних вихор швидкості – функція гідродинамічного струму ($\omega-\psi$). Застосовувався нестационарний підхід, як найбільш природний, навіть у випадку знаходження стаціонарного розв'язку, коли можливий і інший, безпосередній, ітераційний розв'язок системи еліптичного типу [18, 19].

На кожному кроці в часі для рівняння перенесення вихору рівняння для функції струму ітерувалось до збіжності. ψ -рівняння розв'язувалось методом змінних напрямів з оптимальними по Жордану ітераційними параметрами [16] (або, в залежності від представлення нестационарного члена, взаємно оберненими до них [20]). Задача знаходження цих параметрів розв'язана, мабуть, ще Золотарьовим [21].

Спосіб отримання оптимального релаксаційного параметра, формула Янга для розв'язку методом послідовної верхньої релаксації міститься, наприклад, в [22, 17, 23].

Базові особливості використаних схем дискретизації рівнянь перенесення розглянемо на прикладі наступної одновимірної модельної крайової задачі:

$$\begin{aligned} Lf = f'' + v(x)f' &= -\varphi \\ f(0) = f_1, \quad f(1) &= f_N, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де член з першою похідною відповідає конвективній складовій, φ – джерельний член. Заміною при дискретизації першої похідної f' центральними різницями $f_{\bar{x}}$ отримаємо **центральню-різницеву схему** (ЦР). Вона застосовується при моделюванні руху малої інтенсивності (при малих числах Рейнольдса) і відносно малих кроках сітки h [24]. Схема має *другий порядок* апроксимації. На границі застосовності (по «швидкості» v) вона породжує осцилюючі розв'язки.

Схема з односторонніми різницями (правою різницевою похідною f_x при $v > 0$ і лівою $f_{\bar{x}}$ при $v < 0$ для апроксимації f') монотонна (схема з коефіцієнтами $A_i > 0$, $B_i > 0$, $C_i - A_i - B_i \geq 0$), однак має *перший порядок* точності [16]. Схема з **різницями проти потоку** (СРПП) – схема з

односторонніми різницями тільки при від'ємному знаку v в (1.1). Широко використовується СРПП, отримана методом контрольного об'єму [25] із рівняння з дивергентним записом конвективного члена $-(vf)'$. (Дивергентний запис використовується і для ЦР схеми.)

Є також так звана **друга схема** з різницями проти потоку [26]. Її переваги продемонстровані Торрансом [24].

Представимо v у вигляді суми [16]

$$v = v^+ + v^-, \quad v^+ = \frac{1}{2}(v + |v|) \geq 0, \quad v^- = \frac{1}{2}(v - |v|) \leq 0.$$

Тоді для схеми з різницями проти потоку отримаємо вираз

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{\bar{x}x} + v^+ f_x + v^- f_{\bar{x}} = f_{\bar{x}x} + v f_{\bar{x}} + (\frac{1}{2}h|v|f_{\bar{x}x} + O(h^2)) = \\ &= (1+R)f_{\bar{x}x} + v f_{\bar{x}} + O(h^2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

де $R = \frac{1}{2}h|v|$ – «різницеве число Рейнольдса», головний член помилки апроксимації СРПП, коефіцієнт **штучної, схемної в'язкості** (h – крок сітки).

Щоб зберегти переваги СРПП і зменшити додаткову схемну в'язкість, Самарський запропонував використати для розв'язання задачі (1.1) **монотонну різницеву схему** з односторонніми різницевиими похідними для рівняння зі збуреними коефіцієнтами [16]

$$\hat{L}f = -\varphi, \quad \hat{L}f = \chi f'' + v f', \quad (1.3)$$

де $\chi = 1/(1+R)$.

В результаті отримуємо **однорідну** схему (СС)

$$\hat{\Lambda}f = \chi f_{\bar{x}x} + v^+ f_x + v^- f_{\bar{x}}, \quad (1.4)$$

похибка апроксимації задачі (1.1) якою рівна

$$\begin{aligned} (\hat{\Lambda} - L)f &= (\chi - 1)f'' + Rf'' + O(h^2) = R^2/(1+R)f'' + \\ &+ O(h^2) = O(h^2) \quad (\text{оскільки } R = O(h)). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Така ж похибка буде й при центрально-різницевій схемі $\tilde{\Lambda}$, яка апроксимує диференціальний оператор

$$\tilde{L}f = (1 + \chi)f'' + v f', \quad (1.6)$$

де $\chi = R^2/(1+R)$.

Загальне формулювання дискретного аналога з направленими різницями і корегуванням *множенням* (1.4) дано в [27], де в табл. 4.2 містяться корегуючі функції різних схем. Зокрема, для степеневі схеми, апроксимації експоненти

$$\chi = \max \left(0, \left(1 - \frac{1}{k} |R| \right)^k \right),$$

де $k = 5$ (краще $k = 8$).

Запишемо центрально-різницеву схему для (1.6)

$$\tilde{\Lambda} f = (1 + R^2 / (1 + R)) f_{\bar{x}x} + \nu f_{\tilde{x}}. \quad (1.7)$$

В'язкість в схемі (1.7) корегується *доданням* відповідного члена, тому далі таку схему будемо називати **адитивною схемою Самарського** (АСС). З точністю до другого порядку така схема збігається з мультиплікативною формою (СС).

Загальне формулювання класу схем з центральними різницями і з корегуванням додаванням *тензорної* (в багатовимірному випадку) в'язкості дав Фрязінов [28, 29, 30]. В подальшому розвитку схем цього класу [31] локально перевіряється *необхідність корегування* в кожній точці течії.

Корегування додаванням для схем з різницями проти потоку полягає в знаходженні оператора загального вигляду [32, с. 36]

$$\tilde{\Lambda}_x(\nu_i) f_i = \sum_{j=-1}^1 \lambda_j f_{i+j},$$

де $\lambda_j = a_j \nu_{i+1} + b_j \nu_i + c_j \nu_{i-1}$, i – індекс вузла.

Довільні коефіцієнти визначаються з умови придушення осциляцій, отримання монотонності і другого порядку точності. Знайдено наступний вираз для χ в \tilde{L} (1.6):

$$\chi = -R + \alpha h^2 |\nu_{\tilde{x}}| + \beta h^3 |\nu_{\bar{x}x}|, \quad (1.8)$$

де α і β – додатні константи, що визначають штучну в'язкість.

В [32, с. 37] наведено також диференціальне рівняння, яке апроксимує схема з (1.8), вказані додаткові доданки, які можна було б включити в (1.8).

Схеми з центральними різницями і корегуванням в'язкості додатковим *множником* розглянуті в [33].

До схем цього класу (**схем експонентної підгонки**) належить схема Ільїна [34, 33] (і χ в аналітичних дослідженнях – [35]):

$$\tilde{L}f = \chi f_{\bar{x}x} + \nu f_{\bar{x}\bar{x}} \quad (1.9)$$

де $\chi = R \cdot \text{cth}R$ ($R > 0$).

Вплив штучної дифузії проявляється при нахилі потоку по відношенню до лінії сітки [36]. До схем, що враховують багатовимірність потоку, нахил вектора швидкості до сіткових ліній, належить і так звана **коса схема**, запропонована Рейнтбі [27, 37]. На кожній грані контрольного об'єму в косій схемі величина f , що переноситься, розраховується з врахуванням вектора (а не його компоненти) швидкості. Схема 9-ти точкова, різницеві рівняння містять значення невідомої в 9-ти точках. При знаходженні значень в додаткових (до звичайних 5-ти точкового шаблону) 4-х точках вони розраховуються по відомих з попередньої ітерації значенням.

Межові умови для вихору на твердій стінці при розв'язанні системи Нав'є–Стокса в змінних вихор, функція струму (ω – ψ) мають важливе значення. В основному застосовувались **межові умови Тома** [24] і **Грязнова–Полежаєва** [38]. При нульовому значенні ψ на границі умови Тома в ортогональній криволінійній системі координат зводяться до

$$\omega_{\Gamma} = 2\psi_{\Gamma+1}/h^2 H_n^2,$$

де h – крок сітки біля стінки по координаті, нормальній до стінки; H_n – коефіцієнт Ламе по цій координаті; $\psi_{\Gamma+1}$ – значення функції струму в точці, розміщеній на відстані кроку від стінки.

Суть апроксимації Грязнова–Полежаєва полягає в тому, що для виконання різницевого аналогу умови прилипання $(\partial\psi/\partial n)_{\Gamma} = 0$ на кожному кроці в часі для ω підправляється поле функції струму поблизу границі. Розрахункові області для вихору і функції струму не збігаються. Межові умови для вихору на границі області Ω_1 визначаються, виходячи з рівняння для функції струму. Область Ω_1 розміщена всередині основної області на відстані одного кроку сітки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Электровихревые течения / [Бояревич В. В., Фрейберг Я. Ж., Шилова Е. И., Щербинин Э. В.]. – Рига : Зинатне, 1985. – 315 с.
2. Electrically induced vortical flows / [Bojarevičs V., Freibergs Ja., Shilova E.I., Shcherbinin E.V.]. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 380 p.
3. Компан Я. Ю. Электрошлаковые сварка и переплав с управляемыми МГД-процессами / Я. Ю. Компан, Э. В. Щербинин. – М. : Наука, 1989. – 271 с.
4. Власюк В. Х. Численное моделирование электровихревых течений в замкнутых объемах : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Власюк В. Х. – Саласпилс. – 1988. – 193 с.
5. Седов Л. И. Механика сплошной среды / Седов Л. И. – М. : Наука. – Т. 1 – 1983. – 528 с., Т. 2 – 1984. – 560 с.
6. Жигулев В. Н. О явлении эжекции электрическим разрядом / Жигулев В. Н. // ДАН СССР. – 1960. – Т. 130, № 2. – С. 280–283.
7. Медовар Л. Б. Слиток / Медовар Л. Б., Чепурной А. А., Шукстунский Б. И. // Новое в науке, технике и производстве. – К. : Знание – 1986. – 48 с.
8. МГД-течения в замкнутых жидких объемах при неоднородном растекании тока / [Буциниекс И. Э., Петерсон Л. Е., Шарамкин В. И., Щербинин Э. В.]. // Магнитная гидродинамика. – 1976. – № 1. – С. 92–97.
9. Жигулев В. Н. О влиянии продольного магнитного поля на электровихревое течение в цилиндрической емкости / В. Н. Жигулев, В. И. Шарамкин, Э. В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1980. – № 1. – С. 81–85.
10. Сандлер В. Ю. Численное исследование полей температуры и скорости в шлаковой ванне / Сандлер В. Ю. // Магнитная гидродинамика. – 1982. – № 2. – С. 113–119.
11. Шекли Дж. Математическое описание явлений тепло- и массопереноса при электрошлаковом рафинировании / Дж. Шекли, А. Г. Дилавери // Проблемы специальной электрометаллургии. – Ма-

териалы советско-американского симпозиума – К. : Наукова думка. – 1979. – С. 45–66.

12. Kreyenberg J. Stirring velocities and temperature field in the slag during electroslag remelting / J. Kreyenberg, K. Schwerdtfeger // Arch. Eisenhüttenwesen. – 1979. – bd. 50. – No 1. – S. 1–6.

13. Сравнение результатов физического и математического моделирования поля скоростей потоков в шлаковой ванне при ЭШП / [Б. И. Медовар, Ю. Г. Емельяненко, Э. В. Щербинин и др.]. // Проблемы спец. электрометаллургии. – 1982. – Вып. 17. – С. 9–15.

14. Экспериментальное исследование скоростей в осесимметричном электровихревом течении в цилиндрическом контейнере / [В. Г. Жилин, Ю. П. Ивочкин, А. А. Оксман и др.]. // Магнитная гидродинамика. – 1986. – № 3. – С. 110–116.

15. Половин Р. В. Основы магнитной гидродинамики / Р. В. Половин, В. П. Демуцкий – М. : Энергоиздат. – 1987. – 208 с.

16. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М. : Наука. – 1983. – 616 с.

17. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ / Темам Р. – М. : Мир. – 1981. – 408 с.

18. Мажорова О. С. Матричный итерационный метод численного решения двумерных уравнений Навье–Стокса / О. С. Мажорова, Ю. П. Попов // ДАН СССР. – 1981. – Т. 259. – С. 526–530.

19. Roache P. J. The LAD, NOS and split NOS methods for the steady-state Navier–Stokes equations / Roache P. J. // J. Computers and Fluids. – 1975. – Vol. 3, P. 179–195.

20. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / Самарский А. А., Николаев Е. С. – М. : Наука. – 1978. – 592 с.

21. Лебедев В. И. О задаче Золотарева в методе переменных направлений / Лебедев В. И. // ЖВМ и МФ. – 1977. – Т. 17, № 2. – С. 349–366.

22. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения / Стренг Г. – М. : Мир. – 1980. – 456 с.

23. Хейгеман Л. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг. – М. : Мир. – 1986. – 448 с.

24. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / Роуч П. – М. : Мир. – 1980. – 616 с.
25. Численные методы исследования течений вязкой жидкости / [Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К. и др.]. – М. : Мир. – 1972. – 326 с.
26. Torranc K. E. Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from instability / K. E. Torranc, J. A. Rockett // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 36, No 1. – P. 33–54.
27. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / Патанкар С. – М. : Энергоатомиздат. – 1984. – 150 с.
28. Бакирова М. И. Консервативные монотонные разностные схемы для уравнений Навье–Стокса / Бакирова М. И., Старшинова И. В., Фрязинов И. В. // Дифференц. уравн. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 1144–1150.
29. Математическое моделирование. Получение монокристаллов и полупроводниковых структур / Ответст. ред. : А. А. Самарский, Ю. П. Попов, О. С. Мажорова. – М. : Наука. – 1986. – 200 с.
30. Фрязинов И. В. Консервативные разностные схемы для уравнений несжимаемой вязкой жидкости в криволинейных ортогональных координатах в переменных вихрь-функция тока- момент вращения / Фрязинов И. В. // Препринт ИПМ АН СССР. – № 120. – М. – 1980. – 25 с.
31. Гончаров А. Л. Метод введения локальной искусственной вязкости в сеточные уравнения / Гончаров А. Л. // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 1275–1278.
32. Пейре Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Д. Тейлор – Л. : Гидрометеоиздат. – 1986. – 351 с.
33. Дулан Э. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем / Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. – Пер. с англ. – М. : Мир. – 1983. – 200 с.
34. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной / Ильин А. М. // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, вып. 2. – С. 237–248.

35. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач / Ильин А. М. – М. : Наука. – 1989. – 336 с.
36. Герасимов Б. П. Методы подавления схемной вязкости при решении уравнений Навье–Стокса / Герасимов Б. П., Елизарова Т. Г., Турчанинов В. И. // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 1275–1278.
37. Турбулентные сдвиговые течения : сб. статей / Пер. с англ. под ред. А. С. Гиневского. – М. : Машиностроение. – Т. 1, 1982. – 432 с. – Т. 2, 1983. – 419 с.
38. Полежаев В. И. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье–Стокса в переменных «Вихрь – функция тока» / В. И. Полежаев, В. Л. Грязнов // ДАН СССР. – 1974. – Т. 219, № 2. – С. 301–304.
39. Пасконов В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов А. А. – М. : Наука. – 1984. – 285 с.
40. Вабищевич П.Н. Реализация краевых условий при решении уравнений Навье–Стокса в переменных ψ - ω / Вабищевич П. Н. // ДАН СССР. – 1983. – Т. 273, № 1. – С. 22–26.
41. Вабищевич П. Н. Неявные разностные схемы для нестационарных уравнений Навье–Стокса в переменных функция тока – вихрь / Вабищевич П. Н. // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 2, № 7. – С. 1135–1144.
42. Четверушкин Б. Н. Об одном итерационном алгоритме решения разностных уравнений / Четверушкин Б. Н. // ЖВМ и МФ. – 1976. – Т. 16, № 2. – С. 519–524.
43. Мажорова О. С. О методах численного решения уравнений Навье–Стокса / О. С. Мажорова, Ю. П. Попов // ЖВМ и МФ. – 1981. – Т. 21, № 5. – С. 1180–1191.
44. Люмкис Е. Д. Об увеличении шага по времени при интегрировании уравнений Навье–Стокса в переменных вихрь – функция тока / Люмкис Е.Д. // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 7. – С. 1208–1217.

45. Власюк В. Х. О влиянии вертикального магнитного поля на тепло- и массообмен в параболической жидкометаллической ванне с током / В. Х. Власюк, В. И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1987. – Т. 23, № 2. – С. 112–118.
46. Vlasyuk V. Kh. Effect of a vertical magnetic field on heat and mass transfer in a parabolic liquid-metal bath with current / V. Kh. Vlasyuk and V. I. Sharamkin // Magnetohydrodynamics. – 1987. – Vol. 23, No 2. – P. 211–216.
47. Власюк В. Х. О влиянии радиуса переплавляемого электрода на электровихревое течение в цилиндрической емкости / Власюк В. Х. // Магнитная гидродинамика. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 101–106.
48. Vlasyuk V. Kh. Effects of fusible-electrode radius on the electrovortex flow in a cylindrical vessel / Vlasyuk V. Kh. // Magnetohydrodynamics. – 1987. – Vol. 23, No 4. – P. 434–439.
49. Самарский А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М. : Наука. – 1976. – 351 с.
50. Щербинин Э. В. Электровихревое течение в сфероидальном контейнере / Э. В. Щербинин, Е. Е. Яковлева // Магнитная гидродинамика. – 1986. – № 4. – С. 64–69.
51. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Лойцянский Л. Г. – М. : Наука. – 1987. – 640 с.
52. Власюк В. Х. Электровихревые течения в емкостях различной глубины / Власюк В. Х. // Магнитная гидродинамика. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 63–68.
53. Vlasyuk V. Kh. Electro vortex flows in vessels of various depths / Vlasyuk V. Kh. // Magnetohydrodynamics. – 1989. – Vol. 25, No 2. – P. 195–200.
54. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа / Ван-Дайк М. – М. : Мир. – 1986. – 186 с.
55. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М. : Мир. – 1976. – 632 с.
56. Власюк В. Х. Исследование тепло- и массообмена при электровихревой конвекции в замкнутых объемах / Власюк В. Х. // Двена-

дцатое Рижское совещание по МГД. – Саласпилс, 1987. – Т. 1. – С. 219–222.

57. Власюк В. Х. Численное исследование осесимметричных электровихревых течений / В.Х. Власюк, В.И. Шарамкин // Одиннадцатое Рижское совещание по МГД. – Саласпилс, 1984. – Т. 1. – С. 71–74.

58. Власюк В. Х. Численное исследование тепло-массообмена при электровихревом течении в продольном магнитном поле. I. Постановка задачи и расчет теплообмена в цилиндрической емкости / В. Х. Власюк, В. И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1986. – Т. 22, № 3. – С. 78–84.

59. Vlasyuk V. Kh. Numerical study of heat and mass transfer in an electrovortical flow in a longitudinal magnetic field. I. Formulation of the problem and calculation of the heat transfer in a cylindrical container / V. Kh. Vlasyuk and V. I. Sharamkin // Magnetohydrodynamics. – 1986. – Vol. 22, No 3. – P. 294–300.

60. Власюк В. Х. Численное исследование тепло-массообмена при электровихревом течении в продольном магнитном поле. II. Массоперенос в цилиндрической емкости / В.Х. Власюк, В. И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 86–90.

61. Vlasyuk V. Kh. Numerical study of heat and mass transfer in an electrovortical flow in a longitudinal magnetic field. II. Mass transfer in a cylindrical container / V. Kh. Vlasyuk and V. I. Sharamkin // Magnetohydrodynamics. – 1987. – Vol. 23, No 1. – P. 74–77.

62. Власюк В. Х. Возможности численного моделирования процессов тепло- и массообмена при ЭВТ / В. Х. Власюк, В. И. Шарамкин // Двенадцатое Рижское совещание по МГД. – Саласпилс, 1987. – Т. 1. – С. 215–218.

63. Голиков И. Н. Дендритная ликвация в стали / Голиков И. Н. – М. : Металлургиздат. – 1958. – 206 с.

64. Власюк В. Х. Нестационарный массообмен в цилиндрической емкости при электровихревом течении в продольном магнитном поле / В. Х. Власюк, В. И. Шарамкин // Магнитная гидродинамика. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 97–100.

65. Vlasyuk V. Kh. Nonstationary mass transfer in a cylindrical vessel with electrovortex flow in a longitudinal magnetic field / V. Kh. Vlasyuk and V. I. Sharamkin // *Magnetohydrodynamics*. – 1987. – Vol. 23, No 3. – P. 313–316.

66. Полежаев В. И. Гидродинамические эффекты концентрационного расслоения в замкнутых объемах / В. И. Полежаев, А. И. Федюшкин // *Изв. АН СССР. – МЖГ*. – 1980. – № 3. – С. 11–18.

67. Власюк В. Х. Чувствительность теплопереноса электровихревым течением к граничным условиям / Власюк В. Х. // *Магнитная гидродинамика*. – 1992. – Т. 28, № 4. – С. 83–88.

68. Vlasyuk V. Kh. Sensitivity of heat transfer by electrovortex flow to the boundary conditions / Vlasyuk V. Kh. // *Magnetohydrodynamics*. – 1992. Vol. 28, No 4. – P. 393–397.

69. Себиси Т. Конвективный теплообмен / Т. Себиси, П. Брэдшоу – М. : Мир. – 1987. – 592 с.

70. Бояревич В. В. Усиление азимутального вращения в меридиональном электровихревом течении в полусфере / В. В. Бояревич, Р. Миллере // *Магнитная гидродинамика*. – 1982. – № 4. – С. 51–56.

71. Бертела. Ламинарное течение в цилиндрической полости с вращающейся крышкой / Бертела, Гори. // *Теоретич. основы инж. расчетов*. – 1982. – Т. 104, № 1. – С. 85–93.

72. Гори. К вопросу об аналогии ламинарного течения в цилиндрическом стакане с вращающейся крышкой / Гори. // *Теоретич. основы инж. расчетов*. – 1985. – Т. 107, № 4. – С. 181–184.

73. Хьюн. Течение в открытом сосуде со свободной поверхностью, индуцированное вращением дна / Хьюн // *Теоретические основы инженерных расчетов*. – 1985. – Т. 107, № 4. – С. 272–279.

74. Блум Э. Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле / Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озолс Р. Я. – Рига: Зинатне. – 1980. – 354 с.

75. Исследование потока примеси в рафинировочном аппарате САНД и выбор математической модели потока / [Новиков В. Н., Колотыркин И. Я., Смирнов В. И., Обьедков А. П.]. // *Теория металлургических процессов*. – М. : Металлургия. – 1977. – № 5. – С. 48–54.

76. Жидкометаллические теплоносители / [Борщанский В. М., Кутателадзе С. С., Новиков И. И., Федынский О. С.]. – М. : Атомиздат. – 1976. – 328 с.

77. Колесников Ю. Б. Экспериментальное исследование двумерной турбулентности за решеткой / Ю. Б. Колесников, А. Б. Цинобер // Изв. АН СССР. – МЖГ. – 1974. – № 4. – С. 146–150.

78. Патон Б. Е. О некоторых «старых-новых» задачах ЭШП / Патон Б. Е., Медовар Л. Б., Саенко В. Я. // Современная электрометаллургия. – 2004. – № 3. – С. 7–10.

79. Исследование дегазации стали при электродуговой плавке и циркуляционном вакуумировании / [Чепурной А. Д., Разинкин Б. И., Церцек А. Б. и др.]. // Современная электрометаллургия. – 2004. – № 3. – С. 46–49.

80. Чепурной А. Д. Перспективы применения электрошлаковой технологии в производстве ответственных изделий машиностроения / Чепурной А. Д. // Проблемы специальной электрометаллургии. – 2001. – № 4. – С. 11–16.

81. V. Kh. Vlasjuk. Stability of an electrically induced vortical flow in an external magnetic field / V. Kh. Vlasjuk, E. V. Shcherbinin // Magnetohydrodynamics. – 2004. – Vol. 40, No 3. – P. 223–236.

82. Цеберс А. О. Численное моделирование неустойчивости Саффмена–Тейлора намагничивающихся жидкостей / Цеберс А. О. // Магнитная гидродинамика. – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 15–23.

83. Cebers A. Numerical simulation of the Saffmen–Taylor instability of magnetized liquids / Cebers A. // Magnetohydrodynamics. – 1987. – Vol. 23, No 1. – P. 13–19.

84. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости / Джозеф Д. – М. : Мир, 1981. – 640 с.

85. Бабенко К. И. Основы численного анализа / Бабенко К. И. – М. : Наука, 1986. – 744 с.

86. Moffatt H. K. Liquid metal MHD and the geodynamo / Moffatt H. K. – Liquid Metal Magnetohydrodynamics. Mechanics of fluids and transport processes. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 1989. – Vol. 10. – P. 403–412.

87. Смирнов Б. М. Проблема шаровой молнии / Смирнов Б.М. – М. : Наука, 1988. – 208 с.
88. Берже П. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / Берже П., Помо И., Видаль К. – М. : Мир, 1991. – 368 с.
89. Блум Э. Я. Магнитные жидкости / Э. Я. Блум, А. О. Цеберс – М. : Знание, 1989. – 64 с.
90. Шимони К. Теоретическая электротехника / Шимони К. – М. : Мир, 1964. – 775 с.
91. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии : в 2-х томах / Клейн Ф. – Т. 1. – М. : Наука, 1989. – 456 с.
92. Справочник по специальным функциям. / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
93. Математическое моделирование конвективного теплообмена на основе уравнений Навье–Стокса / [В. И. Полежаев, А. К. Бунэ, Н. А. Вerezуб и др.]. – М. : Наука, 1987. – 272 с.
94. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / Бэтчелор Дж. – М. : Мир, 1973. – 778 с.
95. Поттер Д. Вычислительные методы в физике / Поттер Д. – М. : Мир, 1975. – 392 с.
96. Питер Поллак. Из истории фотографии / Питер Поллак. – М. : Планета, 1983. – 176 с.
97. Колпаков Н. Ю. Нелинейные режимы электровихревых течений несжимаемой жидкости. 1. Электровихревые течения в автомодельном классе Кармана / Н. Ю. Колпаков, В. И. Колесниченко // Магнитная гидродинамика. – 1990. – Т. 26, № 4. – С. 89–95.
98. Щербинин Э. В. О безындукционном приближении в теории электровихревых течений / Щербинин Э. В. // Магнитная гидродинамика. – 1991. – Т. 27, № 3. – С. 82–86.
99. Власюк В.Х. Безындукционное приближение для электровихревого течения в слое / Власюк В.Х. // Магнитная гидродинамика. – 1996. – Т. 32, № 3. – С. 307 – 312.
100. V. Kh. Vlasyuk. Inductionless approximation for electrovortical flow in a layer / V. Kh. Vlasyuk // Magnetohydrodynamics. – 1996. – Vol. 32, No 3. – P. 281–285.

101. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума / Уайлд Д. Дж. – М. : Наука, 1967. – 268 с.
102. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти – М. : Мир, 1982. – 583 с.
103. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / На Ц. – М. : Мир, 1982. – 296 с.
104. Мак-Кракен Д. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе / Д. Мак-Кракен, У. Дорн – М. : Мир, 1977. – 584 с.
105. Воеводин В. В. Матрицы и вычисления / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов – М. : Наука, 1984. – 320 с.
106. Физические основы МГД и тепловых явлений в индукционных канальных печах / [Буцениекс И. Э., Левина М. Я., Столов М. Я., Щербинин Э. В.]. // Препр. ИФ АН ЛатвССР. – 1980. – 49 с.
107. Математическая энциклопедия // Гл. ред. И. М. Виноградов ; Т. 5 – М. : Советская энциклопедия, 1985. – 1247 стб.
108. Турбулентность. / Под ред. П. Брэдшоу ; пер. с англ. – М. : Машиностроение, 1980. – 343 с.
109. Launder B. E. Lectures on mathematical models of turbulence / B. E. Launder, D. V. Spalding. – London : Acad. Press, 1972. – 169 p.
110. Методы расчета турбулентных течений / Пер. с англ. под ред. А. Д. Хонькина. – М. : Мир, 1984. – 463 с.
111. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика / Колмогоров А. Н. – М. : Наука, 1985. – 470 с.
112. Ханджалик. Учет безвихревых напряжений в уравнении диссипации турбулентной энергии / Ханджалик, Лондер // Теоретич. основы инж. расчетов. – 1980. – Т. 102, № 1. – С. 149–157.
113. Фарук. Свободная конвекция от горизонтального цилиндра – турбулентный режим / Фарук, Гюцери // Теплопередача. – 1982. – № 2. – С. 7–15.
114. Хабиб. Характеристики ограниченных коаксиальных струй / Хабиб, Уайтлоу // Теоретич. основы инж. расчетов. – 1979. – Т. 101, № 4. – С. 226–234.
115. Пейтел В. К. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми параметрами Рейнольдса : обзор / Пейтел

В. К., Роди В., Шойерер Г. // *Аэрокосмическая техника*. – 1986. – № 2. – С. 183–197.

116. Чжен К.-Ю. Расчет течений в каналах и пограничных слоях на основе модели турбулентности, применимой при низких числах Рейнольдса / Чжен К.-Ю. // *Ракетная техника и космонавтика*. – 1982. – Т. 20, № 2. – С. 30–37.

117. Launder B. E. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure / Launder B. E., Reece G. J., Rodi W. // *J. Fluid Mech.* – 1975. – Vol. 68, Part 3. – P. 537–566.

118. Монин А. С. Статистическая гидромеханика. Ч. 1–2 / А. С. Монин, А. М. Яглом. – М. : ГРФМЛ, 1965–1967. – С. 378, 407.

119. Власюк В. Х. Турбулентные электровихревые течения в цилиндрической емкости / Власюк В. Х. // *Магнитная гидродинамика*. – 1988. – Т. 24, № 3. – С. 76–82.

120. Vlasyuk V. Kh. Turbulent electrovortex flows in a cylindrical space / Vlasyuk V. Kh. // *Magnetohydrodynamics*. – 1988. – Vol. 24, No 3. – P. 328–333.

121. Брановер Г. Г. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред / Г. Г. Брановер, А. Б. Цинобер. – М. : Наука, 1970. – 380 с.

122. Launder B. E. The numerical computation of turbulent flows / B. E. Launder, D. B. Spalding // *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* – 1974. – P. 269–289.

123. Modelling of electrically induced flows for studying current carrying melts of electrometallurgical devices / [A. Ju. Chudnovsky, S. B. Dementev, E. V. Shcherbinin et al.]. – *Liquid Metal Magnetohydrodynamics. Mechanics of fluids and transport processes*. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 1989. – Vol. 10. – P. 187–194.

124. Аmano. Численное исследование турбулентной осесимметричной струи при ее натекании на плоскую пластину и истечении в осесимметричную полость / Аmano, Брандт. // *Теоретич. основы инж. расчетов*. – 1984. – Т. 106, № 4. – С. 158–165.

125. Аmano. Численное исследование турбулентной осесимметричной струи, истекающей в замкнутую цилиндрическую полость / Аmano // Энергетические машины и установки. – 1987. – № 1. – С. 99–104.

126. Илегбуси. Усовершенствованный вариант $k\sim W$ -модели турбулентности / Илегбуси, Сполдинг. // Теплопередача. – 1985. – № 1. – С. 56–64.

127. Vlasyuk V. Kh. Turbulent electrically induced vortical flows / V. Kh. Vlasyuk, E. V. Shcherbinin. – Advances in Turbulence Studies. Progress in Astronautics and Aeronautics. – Washington : American Institute of Aeronautic and Astronautic, Inc., 1992. – Vol. 149 – P. 210–220.

128. Грязнов В. Л. Численное решение нестационарных уравнений Навье–Стокса для турбулентного режима естественной конвекции / В. Л. Грязнов, В. И. Полежаев // Препринт ИПМ АН СССР. – № 81. – М. – 1977. – 56 с.

129. Дайковский А. Г. Численное моделирование переходного и турбулентного режимов конвекции на основе нестационарных уравнений Навье–Стокса / Дайковский А. Г., Полежаев В. И., Федосеев А. И. // Препринт ИПМ АН СССР. – № 101. – М. – 1978. – 65 с.

130. Власюк В. Х. Соотношение электровихревой и гравитационной конвекций / Власюк В. Х. // Магнитная гидродинамика. – 1988. – Т. 24, № 4. – С. 75–80.

131. Vlasyuk V. Kh. The relationship between electrovortex and gravitational convection / Vlasyuk V. Kh. // Magnetohydrodynamics. – 1988. – Vol. 24, No 4. – P. 459–464.

132. Марчук Г. И. Введение в проекционные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М. : Наука, 1981. – 416 с.

133. Orszag S. A. Numerical simulations of incompressible flows within simple bondaris. 1. Galerkin (spectral) representation / Orszag S. A. // Studies Appl. Math. – 1971. – Vol. 50, No 4. – P. 293–327.

134. Спектры плоского течения Пуазейля и проблема решения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса / [Левитан Ю. Л., Моисеенко Б. Д., Рождественский Б. Л., Сидорова В. К.]. // ЖВМ и МФ. – 1978. – Т. 18, № 1. – С. 252–258.

135. Ковалев В. А. Применение метода типа Галеркина для исследования устойчивости течений с большими градиентами скорости / В. А. Ковалев, А. Е. Орданович // Вестник МГУ, сер. 1, мат., мех. – 1981. – № 1. – С. 75–78.
136. Рождественский Б. Л. Моделирование турбулентных течений в плоском канале / Б. Л. Рождественский, И. Н. Семакин // ЖВМ и МФ. – 1985. – Т. 25, № 1. – С. 96–121.
137. Методы численного моделирования турбулентного течения жидкости в канале / [Левитан Ю. Л., Моисеенко Б. Д., Приймак В. Г. и др.]. // ЖВМ и МФ. – 1981. – Т. 21, № 3. – С. 737–747.
138. Власюк В. Х. Электровихревые течения в двухслойной жидкости / В. Х. Власюк, Э. В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 17–27.
139. Vlasyuk V. Kh. Electrically induced vortical flows in a two-layer fluid / V. Kh. Vlasyuk and E. V. Shcherbinin // Magnetohydrodynamics. – 1999. – Vol. 35, No 1. – P. 13–20.
140. Власюк В. Х. О переносе завихренности электровихревым течением в двухслойных жидкостях / В. Х. Власюк, Э. В. Щербинин // Магнитная гидродинамика. – 2000. – Т. 36, № 3. – С. 219–232.
141. Vlasiuk V. Kh. Vorticity transport by electrically induced vortical flows in two-layer fluids / V. Kh. Vlasiuk and E. V. Shcherbinin // Magnetohydrodynamics. – 2000. – Vol. 36, No 3. – P. 180–189.
142. Vlasyuk V. Kh. Critical values of electrovortex flow parameters in two-layer fluids / Vlasyuk V. Kh. // Magnetohydrodynamics. – 2004. – Vol. 40, No 3. – P. 237–249.
143. Moffat H. K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner / Moffat H. K. // J. Fluid Mech. – 1964. – Vol. 18, Part 1. – P. 1–18.
144. Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 880 с.
145. Щербинин Э. В. Теория осесимметричного пограничного слоя в гидродинамике и магнитной гидродинамике / Щербинин Э. В. // Магнитная гидродинамика. – 1995. – Т. 31, № 2. – С. 151–168.

146. Föttinger H. Strömungen in Dampfkesselanlagen / Föttinger H. // Mitteilungen der Vereinigung der Groß-Kesselbesitzer. – 10.9.1939. – Heft 73. – S. 151–169.
147. Чжен П. Отрывные течения / Чжен П. – М. : Мир, Т. 1, 1972. – 300 с.
148. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Шлихтинг Г. – М. : Наука, 1974. – 712 с.
149. Власюк В.Х. Численное исследование давления при электровихревом течении / Власюк В. Х. // Тринадцатое Рижское совещание по МГД. – Саласпилс, 1990. Т. 1. – С. 43–44.
150. Власюк В. Х. Поле давления электровихревого течения при переменном токе / Власюк В. Х. // Магнитная гидродинамика. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 73–78.
151. Vlasyuk V. Kh. The pressure field of an alternating-current induced electrovortex flow / Vlasyuk V. Kh. // Magnetohydrodynamics. – 1992. – Vol. 28, No 1. – P. 65–69.
152. Characteristic Properties of MHD Flow in Magneto-dynamic Pumps / [V. Polischuk, R. Horn, V. Dubodelov, et al.]. – Liquid Metal Magnetohydrodynamics. Mechanics of fluids and transport processes. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 1989. – Vol. 10. – P. 255–261.
153. Vlasyuk V. Kh. Modelling of magnetohydrodynamics flows induced by pressure drop by method of natural variables / Vlasyuk V. Kh. // Magnetohydrodynamics. – 2010. Vol. 46, No 3. – P. 289–298.
154. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости / Флетчер К. – Т. 2. – М. : Мир, 1991. – 552 с.
155. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой жидкости / Ладыженская О. А. – М. : Наука, 1970. – 288 с.
156. Ермольев Ю. М. Методы решения нелинейных экстремальных задач / Ермольев Ю. М. // Кибернетика. – 1966. – № 4. – С. 1–17.
157. Вазов В. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных / В. Вазов, Дж. Форсайт. – М. : Изд. иностр. лит., 1963. – 488 с.

158. Гельфгат Ю. М. Жидкий металл под действием электромагнитных сил / Гельфгат Ю. М., Лиелаусис О. А., Щербинин Э. В. – Рига : Зинатне, 1976. – 230 с.
159. Некрасов Б. Б. Гидравлика / Некрасов Б. Б. – М. : Воениздат. Минобороны СССР. – 1964. – 264 с.
160. Оптимизация режимов затвердевания непрерывного слитка. / Под ред. Я. Я. Клявиня. – Рига : Зинатне, 1977. – 148 с.
161. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации / Вайнштейн Л. А. – М. : Сов. радио, 1966. – 432 с.
162. Golio Mike. The RF and Microwave Handbook / Golio Mike. – Boca Raton: CRC Press LLC, 2001. – 1338 pp.
163. Фельдштейн А. Л. Справочник по элементам волноводной техники / Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р., Смирнов В. П. – М. : Сов. радио, 1967. – 652 с.
164. David M. Pozar. Microwave Engineering / David M. Pozar. – N.Y. : John Wiley and Sons, Inc. 3rd Edition, 2005. – 720 pp.
165. Лебедев И. В. Техника и приборы СВЧ. – Том 1. Техника СВЧ / Лебедев И. В. – М. : Высшая школа, 1970. – 440 с.
166. Маттей Д. Л. Согласующие цепи и цепи связи. – Т. 1 / Маттей Д. Л., Янг Л., Джонс Е. М. Т. – М. : Связь, 1971. – 440 с.
167. Levy R. Zolotarev Branch-Guide Couplers / Levy R. – // IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques. – 1973. – Vol. MTT-21, № 2. – P. 95–99.
168. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены / Суетин П. К. – М. : Наука, 1976. – 328 с.
169. Малорацкий Л. Г. Проектирование и расчет СВЧ элементов на полосковых линиях / Л. Г. Малорацкий, Л. Р. Явич. – М. : Советское радио, 1972. – 232 с.
170. Levy R. A Generalized Design Technique for Practical Distributed Reciprocal Ladder Networks / Levy R. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – Aug. 1973. – Vol. MTT-21. – P. 519–526.
171. Levy R. Tapered Corrugated Waveguide Low-Pass Filters / Levy R. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – Aug. 1973. – Vol. MTT-21. – P. 526–532,

172. Фельдштейн А. Л. Синтез четырехполосников и восьмиполосников на СВЧ / А. Л. Фельдштейн, Л. Р. Явич. – М. : Связь, 1971. – 388 с.
173. Levy R. Synthesis of symmetrical branch-guide directional couplers / R. Levy and L. F. Lind // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. – Feb. 1968. – Vol. MTT-16, №2. – P. 80–89.
174. Рид. Метод исследования симметричных цепей с четырьмя выводами / Рид, Уилер // Вопросы радиолокационной техники. – 1957. – № 4 (39). – С. 24–33. (Reed J., Wheeler G. // Trans. IRE. – October 1956. – MTT-4, № 4. – P. 246–252.).
175. Лейкин В. Ю. Вопросы оптимального синтеза ответвляющих устройств / Лейкин В. Ю. – // Радиотехника, вып. 21. – Харьков : Изд-во Харьковского университета, 1971.
176. Сосунов В. А. Направленные ответвители и их применение / В. А. Сосунов, А. А. Шibaев. – Саратов : Приволжское книжное издательство, 1969. – 88 с.
177. Демьянов В. Ф. Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 368 с.
178. Bandler J. W. On the Conditions for Optimality in Least p -th Approximation with $p \rightarrow \infty$ / J. W. Bandler, C. Charalambous // Journal of Optimisation Theory and Application. – 1973. – Vol. 11, No 5. – P. 556–566.
179. Власюк В. Х. Машинная реализация нелинейных задач синтеза направленных ответвителей с сильной связью / В. Х. Власюк, Л. Н. Гейвандов. // Электроника и моделирование. – вып. 12. – К., 1976. – С. 14–16.
180. Нурминский Е. А. Исследование одной регулировки шага в квазиградиентном методе минимизации слабо выпуклых функций / Е. А. Нурминский, А. А. Желиховский // Кибернетика. – 1974, № 6. – С. 101–105.
181. Справочник по волноводам : Пер. с англ. / Под ред. Я. Н. Фельда. – М. : Сов. Радио, 1952. – 431 с.
182. Карманов В. Г. Математическое программирование / Карманов В. Г. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 272 с.

183. Власюк В. Х. Изыскание путей построения направленных ответвителей для измерения побочных колебаний в волноводных трактах. Отчет по НИР № 3107, шифр "Еж-1", № гос. регистрации 76095854, раздел IV, июнь 1977.

184. Власюк В. Х., Гейвандов Л. Н. Численный синтез направленных ответвителей СВЧ. Деп. рукопись № 1053, УкрНИИИТИ, Киев; указ. ВИНТИ, 1978, № 9 /83/, с. 133.

185. Береснев В. В. Проектирование направленных ответвителей поисковыми методами / Береснев В. В., Власюк В. Х., Гейвандов Л. Н. // Радиоизмерительная техника. Материалы конференции. – Вильнюс, 1976. – С. 16–17.

186. Nelder I. A. A Simplex Method for Function Minimization / I. A. Nelder, R. Mead // Computer Journal. – 1964. – Vol. 7, No 3. – P. 308–313.

187. Д. Химмельблау. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 536 с.

188. Власюк В. Х., Гейвандов Л. Н. Численный синтез направленных ответвителей модифицированным методом деформируемого многогранника. Деп. рукопись № 2455, УкрНИИИТИ, Киев; указ. ВИНТИ, 1981, № 3 /113/, с. 88.

189. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем / Моисеев Н. Н. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 528 с.

190. Власюк В. Х. Синтез шлейфовых направленных ответвителей с учетом конструктивной реализуемости / Власюк В. Х. // Радиоизмерительная техника. Материалы конференции. – Вильнюс, 1976. – С. 18–19.

191. Dewilde P. Generalized Darlington Synthesis / Dewilde P. // IEEE Trans. on Circuits and Systems–I: Fundamental Theory and Applications. – January 1999. – Vol. 45, No 1. – P. 41–58.

192. Основы теории цепей / [Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В.]. – М. : Энергия, 1975. – 752 с.

193. Батищев Д. И. Поисковые методы оптимального проектирования / Батищев Д. И. – М. : Сов. Радио, 1975. – 216 с.

194. Подиновский В. В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В. В. Подиновский, В. М. Гаврилов. – М. : Сов. радио, 1975. – 192 с.
195. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М. : Наука, 1974. – 480 с.
196. Власюк В.Х. Многокритериальные задачи синтеза направленных ответвителей. // XXXII Всесоюзная научная сессия, посвященная Дню радио. – М., 1977.
197. Власюк В. Х., Гейвандов Л. Н. Синтез направленных ответвителей с характеристиками Баттерворта. Деп. рукопись № 2454, УкрНИИНТИ, Киев; указ. ВИНТИ, 1981, № 3 /113/, с. 88.
198. Власюк В. Х. К вопросу о методике синтеза направленных ответвителей с сильной дискретной связью / В. Х. Власюк, Л. Н. Гейвандов // Радиоизмерения. Материалы V-й научно-технической конференции. – Т.1. – Каунас, 1973. – С. 68–71.
199. Исследование возможностей создания модоселективных ответвителей и ответвителей суммарной многомодовой мощности в волноводных трактах. Отчет по НИР № 87, шифр “Икар-2/30”, № гос. регистрации 2243447(С), 1973.
200. Колмогоров А. Н. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции / Колмогоров А. Н. // УМН. – 1948. – Т. 3, № 1(23). – С. 216–221.
201. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций / Гончаров В. Л. – М. : Гостехиздат, 1954. – 325 с.
202. Paul I. Richards. Resistor-Transmission-Line Circuits / Paul I. Richards // Proceedings of the I.R.E. – February, 1948. – Vol. 36. – P. 217–220.
203. Osaki H. Synthesis of Transmission-Line Networks and Design of UHF Filters / H. Osaki and J. Ishii // I.R.E. Transactions-Circuit Theory. – December, 1955. – Vol. CT-2. – P. 325–336.
204. Механников А. И. Синтез неэквидистантных СВЧ устройств / Механников А. И. // Вопросы радиоэлектроники, серия РТ.– 1971. – Вып. 1. – С. 94–100.

205. Гейвандов Л. Н. Методика синтеза направленных ответвителей со слабой связью из направленных элементов / Л. Н. Гейвандов, Р.И. Тиновските // Вопросы радиоэлектроники, серия РТ. – 1970. – Вып. 6. – С. 3–7.
206. Мещанов В. П. Автоматизированное проектирование направленных ответвителей СВЧ / В. П. Мещанов, А. Л. Фельдштейн. – М. : Связь, 1980. – 144 с.
207. Фуско В. СВЧ цепи, анализ и автоматизированное проектирование / Фуско В. – М. : Радио и связь, 1990. – 288 с.
208. Тиновските Р. И. Учет собственной направленности элементов связи при синтезе направленных ответвителей с сильной связью / Тиновските Р. И. // Радиоизмерительная техника. Материалы конференции. – Вильнюс, 1976. – С. 22–23.
209. Бахрах Л. Д. Синтез излучающих систем (теория и методы расчета) / Л. Д. Бахрах, С. Д. Кременецкий. – М. : Сов. радио, 1974. – 232 с.
210. Шифрин Я. С. Вопросы стохастической теории антенн / Шифрин Я. С. – М. : Сов. радио, 1970. – 384 с.
211. Катковник В. Я. Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. Метод параметрических операторов усреднения / Катковник В. Я. – М. : Наука. – Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 488 с.
212. Вольман В. И. Техническая электродинамика / В. И. Вольман, Ю. В. Пименов. – М. : Связь, 1971. – 487 с.
213. Скороход А. В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів / Скороход А. В. – К. : Вища школа, 1975. – 296 с.
214. Ермольев Ю. М. Стохастические модели и методы оптимизации / Ермольев Ю. М. // Кибернетика. – К., 1975. – № 4. – С. 109–119.
215. Власюк В. Х., Гейвандов Л. Н. Стохастический синтез антенн. – Деп. рукопись № 4017 Ук-Д82, УкрНИИНТИ, Киев; указ. ВИНТИ, 1983, № 4 (138) б/о 775.
216. Марков Г. Т. Антенны / Г. Т. Марков, Д. М. Сазонов. – М. : Энергия, 1975. – 528 с.
217. Зелкин Е. Г. Методы синтеза антенн / Е. Г. Зелкин, В. Г. Соколов. – М. : Советское радио, 1980. – 296 с.

218. Мартынов Н. А. Применение математического программирования к синтезу антенных решеток / Мартынов Н. А., Устинов Э. Д., Царапкин С. А. // Антенны ; сб. ст. под ред. А. А. Пистолькорса. – 1968. – Вып. 3. – С. 17–29.
219. В. Х. Власюк. Синтез разностных диаграмм направленности в условиях неопределенности. – Электромагнитная совместимость и устройства СВЧ ; тезисы научной конференции. – К., 1977.
220. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации / Вайнштейн Л. А. – М. : Советское радио, 1966. – 432 с.
221. Пименов Ю. В. Излучение элементарного электрического вибратора, расположенного в центре идеально проводящего круглого диска / Пименов Ю. В. // Антенны ; сб. ст. под ред. А. А. Пистолькорса. – 1968. – Вып. 3. – С. 93–102.
222. Герман Вейль. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. – М. : Наука, 1984. – 510 с.
223. Гренандер У. Краткий курс вычислительной вероятности и статистики / У. Гренандер, В. Фрайбергер. – М. : Наука, 1978. – 192 с.
224. Соболев И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара / Соболев И. М. – М. : Наука, 1969. – 288 с.
225. Соболев И. М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб / Соболев И. М. // Математика, кибернетика. – 1985. – № 2 – 33 с.
226. Боровков А. А. Теория вероятностей / Боровков А. А. – М. : Наука, 1976. – 352 с.
227. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Вентцель Е. С. – М. : Наука, 1969. – 576 с.
228. Ширяев А. Н. Вероятность / Ширяев А.Н. – М. : Наука, 1980. – 576 с.
229. Фазовая синхронизация. Под ред. В. В. Шахгильдяна, Л. Н. Белюстиной. – М. : Связь, 1975. – 288 с.
230. Кляцкин В. И. Стохастическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами / Кляцкин В. И. – М. : Наука, 1975. – 240 с.

231. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Хасьминский Р. З. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
232. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. // Под ред. В. С. Королюка. – К. : Наукова думка, 1978. – 584 с.
233. Солин Н. Н. Об определении оптимальных параметров нелинейных колебательных динамических систем, совершающих броуновское движение. Краткое сообщение / Солин Н. Н. // Радиотехника и электроника. – июнь 1975. – Т. XX, вып. 6. – С. 1298–1301.
234. Сизых В. В. Некоторые методы анализа статистической динамики фазовой автоподстройки на основе численного решения уравнения ФПК / Сизых В.В. // Радиотехника. – 2009. – № 12. – С. 75–126.
235. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы / Рытов С. М. – М. : Наука, 1976. – 495 с.
236. Самойло К. А. Метод анализа колебательных систем второго порядка / . Самойло К. А. – М. : Советское радио, 1976. – 208 с.
237. Основы статистической радиофизики : учебное пособие / Калинингр. ун-т. ; сост. В. Е. Захаров. – Калининград, 1997. – 82 с.
238. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования / Ермольев Ю. М. – М. : Наука, 1976. – 286 с.
239. Волков П. В. Оптимальная стабилизация стохастических динамических систем / П. В. Волков, В. Х. Власюк // Электронная техника, сер. Микроэлектронные устройства. – 1980. – Вып. 2. – С. 64–69.
240. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / Степанов В. В. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 468 с.
241. Корн Г. Справочник по математике : для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1974. – 832 с.
242. Day J. T. A one-step method for the numerical integration of the differential equation $y''=f(x)y+g(x)$. / Day J. T. // The Computer Journal. – October 1964. – Vol. 7, No 3. – P. 314–317.
243. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике / Быков В. В. – М. : Советское радио. – 1971. – 328 с.

244. Касти Дж. Методы погружения в прикладной математике / Дж. Касти, Р. Калаба – М. : Мир, 1976. – 224 с.
245. Ермольев Ю. М. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления / Ю. М. Ермольев, В. П. Гуленко, Т. И. Царенко. – К. : Наукова думка, 1978. – 164 с.
246. Яглом А. М. Корреляционная теория процессов со стационарными n -ми приращениями / Яглом А. М. // Математический сборник (новая серия). – 1955. – Т. 37(79), № 1. – С. 141–196.
247. Ито К. Диффузионные процессы и их траектории / К. Ито и Г. Маккин. – М. : Мир, 1968. – 395 с.
248. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов / Вентцель А. Д. – М. : Наука, 1975. – 320 с.
249. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках / Гардинер К. В. – М. : Мир, 1986. – 527 с.
250. Скороход А. В. Вероятность вокруг нас / Скороход А. В. – К. : Наукова думка, 1980. – 196 с.
251. Лихтенберг А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. – М. : Мир, 1984. – 528 с.
252. Вентцель А. Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин. – М. : Наука, 1979. – 424 с.

Наукове видання

Власюк Василь Харитонович

ЕЛЕКТРОВИХРОВІ ТЕЧІЇ І ПОШУК ЕКСТРЕМУМУ

Монографія

Редактор С. Малішевська
Оригінал-макет підготовлено автором

Підписано до друку 15.10.2012 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. др. Арк. 23,1
Наклад 100 прим. Зам № 2012-156

Вінницький національний технічний університет,
КІВЦ ВНТУ,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-81-59
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.