Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Вінницький національний технічний університет

В. В. Камінський, Б. І. Мокін

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ СЛАБКИХ МНОЖИН

Монографія

Вінниця
ВНТУ
2012

УДК 515.12
ББК 22.12
К18

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 5 від 22 грудня 2011 р.)

Рецензенти:
В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор
С. Д. Штовба, доктор технічних наук, доцент

Камінський, В. В.

Вступ до теорії слабких множин : монографія / В. В. Камінський, Б. І. Мокін. – Вінниця, ВНТУ, 2012. – 128 с.

ISBN 978-966-641-459-8

В монографії розглядаються основоположні поняття запропонованої авторами теорії слабких множин, яка покликана узагальнити існуючі теорії звичайних та нечітких множин. Досліджуються зв'язки між слабкими, нечіткими та звичайними множинами. Розглядаються прикладні аспекти нової теорії як більш універсального інструмента моделювання складних систем в умовах невизначеності даних. Книга може зацікавити студентів, аспірантів і спеціалістів з прикладної математики, економіко-математичного моделювання, теорії систем, теорії прийняття рішень та всіх інших, хто використовує математичні методи для моделювання складних систем в інформаційних ситуаціях з високим рівнем невизначеності.

УДК 515.12
ББК 22.12

ISBN 978-966-641-459-8

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ **5**
ВСТУП **8**
Р О З Д І Л 1 ПЕРЕДУМОВИ ТЕОРІЇ СЛАБКИХ МНОЖИН **12**
Р О З Д І Л 2 ПОНЯТТЯ СЛАБКОЇ МНОЖИНИ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ **19**
2.1 Простір напрямлених рівнів належності 20
2.2 Геометрична інтерпретація простору напрямлених рівнів належності 26
2.3 Означення слабкої множини 30
2.4 Слабкі множини з простором ненапрямлених рівнів належності $M_\alpha = [0; 1]$ 35
2.5 Основні бінарні відношення слабких множин 39
Р О З Д І Л 3 ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ СЛАБКИХ МНОЖИН **46**
3.1 Геометричне зображення слабких множини в звичайних декартових осях координат 47
3.2 Геометричне зображення слабких множин в напрямлених осях координат 49
3.3 Геометрична інтерпретація відношень включення слабких множин 53
Р О З Д І Л 4 МЕТРИКА В ПРОСТОРІ НАПРЯМЛЕНИХ РІВНІВ НАЛЕЖНОСТІ **57**
4.1 Визначення відстані між точками простору напрямлених рівнів належності 57
4.2 Неперервні та спадні функції напрямлених рівнів належності 64
Р О З Д І Л 5 НЕЧІТКІ РЕАЛІЗАЦІЇ СЛАБКИХ МНОЖИН **69**
5.1 Поняття реалізації слабкої множини 70
5.2 Верхні та нижні реалізації слабких множин 72
5.3 Обумовлені множини реалізацій слабких множин 77
5.4 Слабкі множини з одноелементною множиною всіх реалізацій 82

5.5 Види слабких множин в залежності від значень рівнів належності та напрямленостей цих рівнів 87
5.5.1 Позитивно, негативно та змішано напрямлені слабкі множини 87
5.5.2 Класи напрямленостей слабких множин 89
Р О З Д І Л 6 ЗВИЧАЙНІ ФУНКЦІЇ СЛАБКОГО АРГУМЕНТУ 93
6.1 Точні грані підмножини простору напрямлених рівнів належності 95
6.2 Принцип узагальнення для слабких множин 96
6.3 Зв'язок між точними гранями множин напрямлених та ненапрямлених рівнів належності 98
6.4 Приклади використання принципу узагальнення для слабких множин 102
ВИСНОВКИ 113
ЛІТЕРАТУРА 115

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

ОПР – особа, яка приймає рішення;

ТНМ – теорія нечітких множин;

ФНР – функція напрямлених рівнів належності слабкої множини;

$\mathrm{Dom}\,h$ – область визначення відображення h;

$\mathrm{Im}\,h$ – область значень відображення h;

$\forall$ – квантор загальності;

$\exists$ – квантор існування;

$\vee$ – диз'юнкція;

$\wedge$ – кон'юнкція;

$\Leftrightarrow$ – еквівалентно;

$\equiv$ – рівносильно;

$\overset{df}{=}$, $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ – дорівнює та рівносильно за означенням;

♦ – кінець доведення;

$\tilde{A}$, $\tilde{B}$ – загальне позначення нечітких множин;

$\tilde{\tilde{A}}$, $\tilde{\tilde{B}}$ – загальне позначення слабких множин;

χ_A – характеристична функція звичайної множини A;

M_α – простір (множина) ненапрямлених рівнів належності;

S_α, D_α – строгий та нестрогий лінійні порядки на M_α;

E_α, $\overline{E}_\alpha$ – відношення рівності та нерівності на M_α;

$\min M_\alpha$ або $\wedge M_\alpha$ – мінімальний ненапрямлений рівень належності;

$\max M_\alpha$ або $\vee M_\alpha$ – максимальний ненапрямлений рівень належності;

$M_\omega = \{+, -\}$ – простір напрямленостей рівнів належності;

S_ω, D_ω – строгий та нестрогий лінійні порядки на M_ω;

E_ω, $\overline{E}_\omega$ – відношення рівності та нерівності на M_ω;

$\min M_\omega = -$ – мінімальна напрямленість рівнів належності;

$\max M_\omega = +$ – максимальна напрямленість рівнів належності;

$M_{\alpha\omega}$ – простір напрямлених рівнів належності;

$S_{\alpha\omega}, D_{\alpha\omega}$ – строгий та нестрогий лінійні порядки на $M_{\alpha\omega}$;

$E_{\alpha\omega}$, $\overline{E}_{\alpha\omega}$ – відношення рівності та нерівності на $M_{\alpha\omega}$;

$\max M_{\alpha\omega} = 1^+$ – максимальний напрямлений рівень належності;

$\min M_{\alpha\omega} = 0^-$ – мінімальний напрямлений рівень належності;

$\sup M$ або $\vee M$ – верхня точна грань підмножини M простору напрямлених рівнів належності;

$\inf M$ або $\wedge M_{\alpha\omega}$ – нижня точна грань підмножини M простору напрямлених рівнів належності;

$\nu_A : X \to M_{\alpha\omega}$ – функція (напрямлених) рівнів слабкої множини $\approx{A}$;

$\alpha_A : X \to M_{\alpha}$ – функція ненапрямлених рівнів слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\omega_A : X \to M_{\omega}$ – функція напрямленостей слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

card $\tilde{\tilde{A}}$ – потужність (кардинальне число) слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\tilde{\tilde{\varnothing}}$, $\tilde{\tilde{\mathbf{0}}}^{-}$ – пуста слабка множина;

$\tilde{\tilde{X}}$, $\tilde{\tilde{\mathbf{1}}}^{+}$ – повна слабка множина;

supp $\tilde{\tilde{A}}$ – носій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

${}^{-}X_A$, ${}^{+}X_A$ – відповідно класи негативної та позитивної напрямленостей слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

${}^{-}D_A$, ${}^{+}D_A$ – відповідно класи негативної та позитивної напрямленостей звичайної множини D відносно слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\wp(\tilde{\tilde{\mathbf{1}}}^{+})$ – множина всіх слабких підмножин довільного універсума;

$\wp(\tilde{\tilde{X}})$ – множина всіх слабких підмножин універсума X;

$\wp(\tilde{\tilde{A}})$ – множина всіх слабких підмножин слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$]a; b[$, $[a; b]$ – числовий інтервал та числовий відрізок;

$]\alpha^{\omega}; \beta^{\psi}[$ – інтервал напрямленої осі координат;

$[\alpha^{\omega}; \beta^{\psi}]$ – відрізок напрямленої осі координат;

$\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M \rangle$ – метричний простір з метрикою ρ_M, заданий на множині напрямлених рівнів належності $M_{\alpha\omega}$;

ρ_M – метрика в просторі напрямлених рівнів належності;

ρ_R – звичайна евклідова метрика на множині дійсних чисел;

$O_M(\alpha_0^{\omega_0}, \varepsilon)$ – відкритий шар метричного простору $\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M \rangle$ з центром в точці α_0^{ω} і радіусом ε;

$O_M[\alpha_0^{\omega_0}, \varepsilon]$ – замкнений шар метричного простору $\langle M_{\alpha\omega}, \rho_M \rangle$ з центром в точці α_0^{ω} і радіусом ε;

$O_M(\alpha^{\omega}, \varepsilon)$ – ε-окіл напрямленого рівня належності α^{ω};

$R(\tilde{\tilde{A}})$ – множина всіх реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\overline{R}(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{B})$ – множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, обумовлена зверху нечіткою реалізацією $\tilde{B}$;

$\underline{R}(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{B})$ – множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, обумовлена знизу нечіткою реалізацією $\tilde{B}$;

$\overline{\underline{R}}(\tilde{\tilde{A}}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ – множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$, обумовлена зверху нечіткою реалізацією $\tilde{A}_1$ та знизу нечіткою реалізацією $\tilde{A}_2$;

$K(\tilde{\tilde{A}})$ – довільна множина реалізацій слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\overline{A}$, $\underline{A}$ – верхня та нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\tilde{\overline{A}}$, $\underline{\tilde{A}}$ – верхня та нижня нечіткі реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\overline{A}^K$, $\underline{A}^K$ – відповідно верхня та нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$ на множині реалізацій K;

$\overline{\overline{A}}$, $\underline{\underline{A}}$ – обумовлена верхня та обумовлена нижня реалізації слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\sup A$, $\inf A$ – верхня та нижня точні грані множини A;

$\sup\limits_{x \in D} \nu_A(x)$ – верхня точна грань напрямлених рівнів належності елементів множини D відносно слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$\inf\limits_{x \in D} \nu_A(x)$ – нижня точна грань напрямлених рівнів належності елементів множини D відносно слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

$M_{\alpha A}$, $M_{\omega A}$ – множина рівнів та множина напрямленостей слабкої множини $\tilde{\tilde{A}}$;

f^{-1} – обернена функція;

$\mathrm{f}^{-1}(A)$ – повний прообраз множини A при відображенні f;

N – множина всіх натуральних чисел;

R – множина дійсних чисел;

R_+ – множина додатних дійсних чисел;

R_{+0} – множина додатних дійсних чисел з нулем ($\mathrm{R}_{+0} = \{0\} \cup \mathrm{R}_+$);

${}^+\tilde{\tilde{A}}$, ${}^-\tilde{\tilde{A}}$, ${}^\pm\tilde{\tilde{A}}$ – позитивно, негативна та змішано напрямлені слабкі множини.

ВСТУП

В цій роботі автори пропонують основні засади нової теорії слабких множин, яка покликана узагальнити існуючі теорії звичайних (канторових) та нечітких множин і, з цієї точки зору, може здобути важливе загальнотеоретичне значення.

В останні роки стрімко зростають роль та можливості інформаційних технологій і тому з'являються додаткові можливості для постановки та розв’язання актуальних для науки та практики нових задач в умовах недостатності та недовизначеності даних [1], які традиційно вважаються одними із найбільш складних.

Проблеми математичного моделювання та розв'язання таких задач випливають із того, що, як часто відзначав Ю. Б. Гермейєр [2, 3], існує тільки один об’єктивний та строгий математичний результат, який можна отримати за максимінним принципом [4–6]. Якщо цей принцип або результат його використання неприйнятний для особи, яка приймає рішення (ОПР), то залишається використовувати експертні оцінки та суб’єктивні гіпотези щодо невизначених параметрів об’єкта моделювання. З цією метою в останні десятиліття широко застосовуються нечіткі множини та лінгвістичні змінні, які дозволяють зменшити невизначеність даних за рахунок використання їх нечітких описів. Але теорія нечітких множин (ТНМ) має такі особливості, які призводять до низки принципових проблем у процесі використання нечітких множин як інструменту моделювання невизначених параметрів складних систем. На ці проблеми неодноразово звертали увагу як прихильники, так і супротивники цієї теорії [7]. Основні із цих проблем пов’язані з тим, що:

1. Аксіоматичні основи ТНМ не дозволяють знайти таку інтерпретацію ступенів належності нечіткій множині, щоб одержати якесь об’єктивне джерело (або розрахунковий алгоритм) для визначення їх значень. Тому експертні оцінки становлять єдине джерело для одержання функцій належності нечітких множин.

2. Аксіоматика ТНМ реалізована так, що ТНМ не має істотних формальних засобів для обмеження впливу суб’єктивних рішень експерта на результат визначення функції належності й формального контролю несуперечності цих рішень.

3. Між станом недовизначеності (коли відомі тільки границі простору невизначеності) і станом нечіткого подання невизначеного параметра (коли стають відомими значення ступенів належності всіх елементів простору невизначеності) існує істотний логічний розрив, що значно ускладнює роботу експерта.

Тому є доцільною та актуальною передбачена в цій роботі розробка нових підходів до математичного моделювання складних систем в умовах невизначеності даних, які дозволять зняти або значно зменшити гостроту відзначених проблем, а також дозволять моделювати невизначені параметри складних систем в умовах відсутності не тільки числових, а навіть нечітких та лінгвістичних значень цих параметрів.

Звичайно, нічого не може заважати використанню теорії слабких множин, як і будь-якої іншої математичної теорії, для розв'язування різних прикладних задач за умови адекватної та зручної інтерпретації цих задач за допомогою аксіом та теоретичних понять нової теорії. Однак автори розглядають нову теорію в першу чергу як інструмент моделювання складних систем в умовах невизначеності даних. Тому виклад формальних математичних положень теорії та доведення теорем по можливості орієнтовані не тільки на професійних математиків, але й на спеціалістів прикладних галузей науки, які цікавляться математичним моделюванням складних систем в інформаційних ситуаціях з високим рівнем невизначеності вихідних даних.

В першому розділі монографії розглянуті передумови теорії слабких множин. Показано, що теорія слабких множин як інструмент моделювання складних систем в умовах невизначеності даних, за задумом авторів, повинна заповнити прогалину між станом повної невизначеності параметрів задачі, коли на універсумі цих параметрів не задано ніяких математичних структур окрім самого універсума, та станом їх нечіткого опису, який може бути здійснений засобами теорії нечітких множин. Новий стан опису невизначених параметрів, який повинен передувати стану нечіткого опису цих параметрів, названо авторами слабким. Дослідження, виконані авторами, показують, що такий опис може бути самодостатнім для остаточного прийняття рішень в умовах невизначеності даних.

В другому розділі роботи вводяться основні поняття нової теорії, зокрема поняття напрямленого рівня належності та простору напрямлених рівнів належності. Розглядаються властивості введених понять та порівнюються з аналогічними, властивостями звичайних та нечітких множин. Розглядаються також властивості слабких множин, які не мають аналогів серед властивостей звичайних та нечітких множин. Вводяться основні бінарні відношення слабких множин, доводяться теореми про властивості цих відношень.

В третьому розділі пропонується геометрична інтерпретація слабких множин, вводяться необхідні для такої інтерпретації нові поняття та наводяться приклади геометричного зображення слабких множин в звичайних декартових та спеціально введених напрямлених осях координат. Вводиться геометрична інтерпретація відношення включення слабких множин в звичайних декартових та напрямлених осях координат. Наводяться рекомендації щодо використання звичайних декартових та напрямлених осей координат для геометричного зображення слабких множин.

В четвертому розділі вводиться поняття відстані між напрямленими рівнями належності слабкій множині, що дає можливість означити метричні характеристики слабких множин та, зокрема, поняття їх неперервності.

П'ятий розділ роботи присвячений вивченню особливостей зв'язку між звичайними, нечіткими та слабкими множинами. Для розкриття сутності цього зв'язку вводяться важливі для теорії слабких множин поняття нечіткої та звичайної реалізацій слабкої множини та розглядаються їх властивості. Вводяться та розглядаються також різні види слабких множин в залежності від їх властивостей.

В шостому розділі представлено принцип узагальнення для слабких множин та розглянуті звичайні функції слабкого аргументу. Доведені теореми, які дозволяють для реалізації розрахунків з використанням введеного принципу узагальнення для слабких множин використовувати відомі методи пошуку верхніх (нижніх) граней звичайних множин, а також методів мінімізація (максимізації) скалярних функцій. Наведені приклади визначення образів слабких множин при звичайних відображеннях.

Текст монографії написаний В. В. Камінським з використанням матеріалів його кандидатської дисертації [8], виконаної під керівництвом професора Б. І. Мокіна, та результатів, отриманих авторами в роботах [9–23], написаних як до, так і після захисту дисертації. В монографію включено також нові результати. Зокрема розглянуто новий підхід до формалізації простору напрямлених рівнів належності слабких множин, розглянуті основні бінарні відношення слабких множин, показано, що їх властивості збігаються із аналогічними властивостями звичайних та нечітких множин, виконано детальний аналіз зв’язку між слабкими, нечіткими та звичайними множинами, доведено низку нових теорем.

Загальне редагування книги здійснено професором Б. І. Мокіним.

Автори висловлюють подяку доценту кафедри моделювання та моніторингу складних систем А. В. Камінському за участь в обговоренні основних положень теорії слабких множин, корисні поради та ідеї, які допомогли довести низку найбільш складних теорем.

Автори висловлюють також подяку С. Ш. Кациву та І. М. Романюку за багатолітні плідні дискусії в заснованому ними спільно з В. В. Камінським математичному семінарі «КаКаРо», завдяки якому були створені необхідні передумови для розробки теорії слабких множин.

Р О З Д І Л 1
ПЕРЕДУМОВИ ТЕОРІЇ СЛАБКИХ МНОЖИН

За останні 30–40 років методами математичного моделювання, теорії систем [24–39] та теорії ідентифікації систем [40–47] отримана значна кількість результатів з дослідження та оптимізації складних систем в умовах різного забезпечення необхідними даними. Створені методи математичного моделювання та оптимізації складних систем в умовах як детермінованих [2, 48–60], так і стохастичних даних [61–67], зроблені значні кроки в напрямку розв’язання задач з невизначеними даними [3–6, 67, 68]. Розроблені математичні методи та моделі широко використовуються в різних галузях науки та техніки [69–76].

З появою теорії нечітких множин вона почала активно використовуватись як засіб моделювання складних систем в умовах невизначеності даних. З’явилась можливість використовувати нечіткий опис невизначених параметрів таких систем, який став проміжним між станом невизначеності числових значень параметрів системи та відомими їх числовими значеннями. Нечіткі множини та лінгвістичні змінні стали інструментом опису параметрів гуманістичних систем, в яких традиційний числовий опис міг викликати значні труднощі або бути неможливим взагалі.

Теорія нечітких множин має також важливе загальне теоретичне значення. Це пов’язано з тим, що поняття множини є одним із основних первинних понять, на яких базується сучасна математика [77–79]. Тому поява в 1965 році роботи Л. Заде [80], в якій введено більш загальне поняття нечіткої множини, обумовила бурхливий розвиток теорії нечітких множин та перегляд багатьох математичних фундаментальних понять, теорій і концепцій з метою розширення їх на більш загальний випадок нечітких множин.

Таке розширення основоположних математичних понять привело фактично до створення математики нечіткості, яка в окремому випадку переходить в межі звичайних математичних теорій, що базуються на понятті звичайної (чіткої) множини у відповідності до того, як нечітка множина в окремому випадку її функції належності переходить в звичайну множину.

Математичні теорії прийняття рішень та автоматичного керування в умовах невизначеності даних одними із перших сприйняли та почали використовувати концепції теорії нечітких множин. З точки зору цих теорій з'явилась можливість в просторі невизначеності параметрів задачі задати нечіткий опис цих невизначених параметрів та в результаті його використання отримати деякий нечіткий розв'язок (дивись, наприклад, [81–87]).

Таким чином Л. Заде поширив математичний формалізм до рівня, коли чіткі значення параметрів в деякому універсумі задачі не існують, або не сформовані, або невідомі, але обов'язково існують їх нечіткі описи у вигляді нечітких множин із заданими їх функціями належності. Тим самим між станом повної невизначеності параметрів задачі, коли на універсумі цих параметрів не задано ніяких математичних структур, окрім самого універсума, та станом визначеності, коли в універсумі задані чіткі значення параметрів, з'явився проміжний стан нечітко заданих параметрів.

Математика нечіткості розробляє методи роботи з такими нечіткими об'єктами, але її формалізм не має ніякого відношення до того, де взялися ці нечіткі об'єкти.

Це типова і законна ситуація для математичних теорій. Наприклад, математичні теорії та методи традиційної математики працюють там, де задані деякі детерміновані дані. Математичний формалізм не має ніякого відношення до того, як їх отримати. Це залишається концептуальною проблемою, в окремому випадку – проблемою фізичних вимірів.

Теорія ймовірностей працює тільки там, де відомі ймовірності випадкових подій, функції розподілу ймовірностей випадкових величин, точок, векторів тощо.

Аксіоматична теорія ймовірностей [88–91], як формальна математична теорія, не має ніякого відношення до того, де взялися ці ймовірності та функції розподілу ймовірностей. Проблеми отримання функцій розподілення ймовірностей лежать за межами цієї теорії і вимагають виконання масових експериментів за умови наявності їх статистичної стійкості, що дає можливість інтерпретувати ймовірність як частоту появи тієї чи іншої випадкової події в статистичному експерименті. Якщо виконання відповідного експерименту неможливе з тієї чи іншої причини, або відсутня статистична стійкість його результатів, то для визначення функцій розподілу ймовірностей залишається можливість використовувати експертні оцінки. Але в цьому випадку ймовірність повинна бути інтерпретована як суб'єктивний ступінь впевненості експерта в можливості настання тієї чи іншої випадкової події.

При цьому слід звернути особливу увагу на той факт, що аксіоматика теорії ймовірності реалізована так, що дозволяє досить суттєво обмежити суб'єктивні експертні оцінки значень функції розподілу ймовірності та співвідношень між ними. Дійсно, експертні оцінки функції розподілу ймовірностей повинні відповідати всім аксіомам теорії ймовірностей [88–92], як окремому випадку теорії міри [93, 94]. А це означає, що свобода експерта вже на чисто формальному рівні досить суттєво обмежена, і це дозволяє формально контролювати можливі принципові помилки експерта і тим самим уникнути їх. Наприклад, експерт не може задати диференціальний закон розподілення ймовірностей настільки довільно, що його інтеграл по області можливих значень випадкової величини не буде дорівнювати одиниці. За цих та інших подібних умов на чисто формальному рівні вже можна буде прийти до висновку, що експертні оцінки утримують помилку.

У випадку теорії нечітких множин її формальні закони не дозволяють зробити нічого подібного – значення функції належності в межах відрізка [0; 1] та співвідношення між ними формально можуть бути довільними. Тому теорія нечітких множин не має суттєвих формальних засобів для обмеження впливу суб'єктивних рішень експерта на результат визначення функції належності і формального контролю несуперечності цих рішень. Крім того її аксіоматичні основи не дозволяють знайти таку інтерпретацію ступенів належності нечіткій множині, щоб одержати якесь об'єктивне джерело (або розрахунковий алгоритм) для визначення їх значень, як це має місце, наприклад, у тієї ж таки теорії ймовірності.

В цьому зв'язку відзначимо, що тут ми не беремо до уваги наукові роботи, в яких нечіткі множини розглядаються як проекції випадкових множин [95–98]. В цьому випадку ступінь належності $\mu_A(x)$ елемента x нечіткій множині $\widetilde{A}$ інтерпретується як ймовірність того, що елемент x належить деякій випадковій множині B, для якої нечітка множина $\widetilde{A}$ є проекцією, тобто $\mu_A(x) = P(x \in B)$. В такому випадку з'являється можливість, використовуючи частотну інтерпретацію ймовірності, визначати належність елемента x нечіткій множині $\widetilde{A}$ на основі статистичного експерименту. Однак при цьому втрачається інтерпретація ступеня належності нечіткій множині, як ступеня відповідності елемента x визначальній властивості множини $\widetilde{A}$, а саме така інтерпретація формально відповідає класичному розумінню нечіткості. Крім того, що дуже важливо, однозначний перехід від нечіткої до випадкової множини неможливий – різні випадкові величини можуть мати однакову проекцію. З цих причин в цій роботі інтерпретація нечітких множин як проекцій випадкових множин не розглядається.

Таким чином, в рамках класичного розуміння нечіткості суб'єктивні експертні оцінки на цей час є єдиним джерелом для визначення функцій належності нечітких множин. Тому отримані з їх допомогою результати можуть значною мірою залежати як від самого експерта, так і від методу проведення експертної процедури. А для того, щоб задати нечітке значення невизначеного параметра, необхідно призначити кожному елементу його простору невизначеності ступінь належності нечіткому значенню цього параметра. Якщо невизначений параметр моделюється лінгвістичною змінною [99], то те саме необхідно зробити для всіх нечітких множин, які відповідають лінгвістичним значенням цього параметра. У передмові до роботи [82] М. М. Моісеєв справедливо зазначив, що отримані таким способом функції належності завжди залишаються тільки гіпотезами.

Із наведеного вище випливає, що між станом повної невизначеності (коли відомі тільки границі простору невизначеності) і станом нечіткого подання невизначеного параметра (коли стають відомими значення ступенів належності всіх елементів простору невизначеності) існує істотний логічний розрив, який значно ускладнює роботу експерта. Тому, з означених причин, важливо між станом повної невизначеності та станом нечіткого подання невизначених параметрів ввести такий проміжний стан, досягнення якого було б значно простішим для експерта.

Такий стан надалі будемо називати станом слабкого опису невизначених параметрів. Цей стан повинен передувати нечіткому стану, і в ньому повинні формуватись більш загальні, в порівнянні з нечіткими множинами, математичні структури, та діяти деякі формальні закони, які обмежували б суб'єктивні рішення експерта в процесі переходу від слабкого до нечіткого стану невизначеного параметра та контролювали несуперечність такого переходу.

Більше того було б доцільно забезпечити можливість чисто формального (без участі експерта) переходу від стану слабкого до стану нечіткого опису невизначеного параметра. Це дало б можливість на заключній стадії формування нечіткого опису невизначеного параметра різко обмежити рамки суб'єктивних рішень експерта або навіть повністю їх усунути.

З теоретичної та практичної точки зору було б доцільно, щоб слабкий опис мав також самостійне значення, тобто міг складати повноцінну альтернативу нечіткому опису невизначеного параметра і міг використовуватись незалежно від останнього, якщо з його допомогою може бути досягнута мета, поставлена дослідником, або у випадку, коли нечіткий опис з деяких причин взагалі неможливий, недоцільний чи пов'язаний із значними труднощами.

Із викладеного вище випливає, що одна із основних задач, поставлених в цій роботі, яка полягає в розробці засад теорії, котра дозволила б досягнути такої мети, є актуальною та може мати велике теоретичне і практичне значення.

Наступні розділи роботи присвячено розробці засад теорії слабких множин, яка у кінцевому підсумку повинна давати можливість:

- моделювати параметри складних систем на такому високому рівні їх невизначеності, коли невідомі не тільки детерміновані, але навіть і нечітко задані значення цих параметрів;
- використовувати слабкий рівень опису невизначених параметрів складних систем, як проміжний між повною невизначеністю та нечітким поданням цих параметрів;
- обмежувати суб'єктивний вплив експерта на результат переходу від слабкого до нечіткого стану невизначеного параметра та забезпечити формальний контроль несуперечності такого переходу;

- забезпечити можливість чисто формального несуперечного переходу від стану слабкого до стану нечіткого опису невизначеного параметра без участі експерта взагалі;
- використовувати слабкий рівень опису невизначених параметрів складних систем як самодостатній для розв'язування задач оптимального проектування та керування складними системами в умовах невизначеності частини необхідних вихідних даних;
- забезпечити можливість створення слабкого опису невизначених параметрів складної системи без використання суб'єктивних експертних оцінок цих параметрів, базуючись лише на об'єктивних даних про відомі параметри системи.

Пояснення того, як можна інтерпретувати формалізм теорії слабких множин в процесі моделювання невизначених параметрів складних систем, дано в розділі 5, де розглянуто зв'язок між слабкими та нечіткими множинами.

В розділі 6 будуть наведені приклади слабкого опису невизначених параметрів задачі та визначення значень звичайних функцій зі слабко заданими аргументами.

На завершення зробимо зауваження з приводу правомірності та доцільності використання терміну «множина» в назві нового поняття «слабка множина», яке вводиться авторами в цій роботі.

Як відомо, на множині всіх підмножин будь-якої універсальної множини X діють закони булевої алгебри з основними операціями об'єднання, перетину та доповнення множин. Саме цей факт асоціюється з терміном множина.

Для нечітких підмножин універсума X із заданими для них аналогічними операціями закони булевої алгебри в повному обсязі не виконуються, але виконуються всі закони квазібулевої алгебри, яку ще називають алгеброю Де Моргана [100].

В алгебрі Де Моргана в загальному випадку не виконуються закони виключеного третього та суперечності:

$$\widetilde{A} \cap \neg \widetilde{A} = \varnothing;$$

$$\widetilde{A} \cup \neg \widetilde{A} = X,$$

де $\widetilde{A}$ – довільна нечітка підмножина універсума X, $\varnothing$ – пуста множина.

Додатково до законів алгебри Де Моргана для будь-яких нечітких підмножин $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ універсума X виконується умова Кліні

$$(\widetilde{A} \cap \neg \widetilde{A}) \subseteq (\widetilde{B} \cup \neg \widetilde{B}),$$

яку можна також записати у вигляді тотожності:

$$(\widetilde{A} \cap \neg \widetilde{A}) \cap (\widetilde{B} \cup \neg \widetilde{B}) = (\widetilde{A} \cap \neg \widetilde{A}).$$

Останню рівність називають умовою нормальності.

Нормальна квазібулева алгебра називається алгеброю Кліні [100–102].

Таким чином, алгеброю нечітких множин є алгебра Кліні, в якій виконуються всі закони булевої алгебри, окрім законів виключеного третього та суперечності, які ослабляються до умови нормальності. На цій підставі цілком виправдовується використання терміну «множина» в назві нечітких множин.

В цій роботі вводиться новий більш універсальний клас множин – слабкі множини, розглядаються зв'язки між звичайними, нечіткими та слабкими множинами, але алгебра слабких множин, як така авторами не розглядається. Її буде присвячена наступна монографія, в якій буде також показано, що слабкі множини підкоряються всім законам алгебри Кліні, а також мають деякі притаманні тільки їм особливості. Це дозволяє стверджувати, що слабкі множини є повноцінними представниками класу множин.

Р О З Д І Л 2
ПОНЯТТЯ СЛАБКОЇ МНОЖИНИ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ

Як відомо, звичайна множина A в універсумі X повністю задається своєю характеристичною функцією $\chi_A : X \to \{0; 1\}$, де $\{0;\ 1\}$ – двоелементна множина – область прибуття функції χ_A.

Назвемо цю область простором ступенів належності звичайної множини A. Цей простір складається із двох лінійно упорядкованих елементів, один із яких (елемент 0) є мінімальним та одночасно найменшим елементом простору $\{0;\ 1\}$, а другий (елемент 1) – максимальним і одночасно найбільшим елементом цього простору.

Будь-який елемент x універсума X належить множині A тоді та тільки тоді, коли його ступінь належності дорівнює найбільшому значенню належності, тобто $\chi_A(x) = 1$, що записують у вигляді $x \in A$. Для того, щоб довільний елемент $x \in X$ не належав множині A необхідно і достатньо, щоб його ступінь належності дорівнював найменшому ступеню належності, тобто $\chi_A(x) = 0$, що звичайно записується у вигляді $x \notin A$. Таким чином ступінь належності елемента універсума звичайній множині може мати тільки два значення: або найбільше, яке відповідає випадку належності елемента множині A, або найменше, яке відповідає випадку неналежності елемента множині A.

Нечітку множину $\widetilde{A}$ в універсумі X можна ототожнити з її функцією належності $\mu_A : X \to L$, де L – простір ступенів належностей нечіткої множини $\widetilde{A}$.

В найпростішому випадку $L = [0;\ 1]$. При цьому ступені належності в просторі L лінійно упорядковані звичайним чином, а мінімальний $\min L$ та максимальний $\max L$ елементи цього простору відповідно дорівнюють $\min L = 0$, $\max L = 1$. Елемент $\min L$ є одночасно найменшим, а елемент $\max L$ – найбільшим в просторі L.

В якості простору належностей нечіткої множини використовують також відрізок $[-1;\ +1]$ (дивись, наприклад, роботу [103]), числову вісь [104], дистрибутивну ґратку [105, 106] та інші множини, наділені деякою структурою [106–110].

Для того, щоб забезпечити можливість виконання основних операцій перетину та об'єднання нечітких множин із збереженням властивостей цих операцій, притаманних алгебрі звичайних множин, простір L повинен бути частково упорядкованим, а для будь-якої пари елементів цього простору повинні існувати верхня та нижня точні грані (в окремому випадку це можуть бути найменший та найбільший і одночасно мінімальний та максимальний елементи). А для того, щоб в універсумі X могли існувати елементи, які повністю належать або повністю не належать нечіткій множині $\widetilde{A}$, в просторі L повинні існувати найбільший $\vee L$ та найменший $\wedge L$ елементи, які одночасно будуть його мінімальним $\min L$ та максимальним $\max L$ елементами.

В такому випадку можна прийняти, що довільний елемент x універсума X не належить нечіткій множині тільки тоді, коли його ступінь належності дорівнює найменшому елементу простору L, тобто виконується умова $\mu_A(x)=\min L$. В усіх інших випадках елемент універсума в тій чи іншій мірі буде належати нечіткій множині $\widetilde{A}$. Повну належність елемента x нечіткій множині $\widetilde{A}$ можна пов'язати з виконанням умови $\mu_A(x)=\max L$.

Таким чином, ступені належності елементів універсума нечіткій множині можуть приймати більше двох значень.

Далі буде показано, що слабку множину теж можна ототожнити з деякою векторною функцією виду $\nu_A : X \to M$, де M – простір рівнів належності елементів універсума слабкій множині.

Перед означенням слабкої множини спочатку формалізуємо поняття простору рівнів належності M, який буде виступати аналогом поняття простору ступенів належності L елементів універсума нечіткій множині, але буде відрізнятись від останнього як формально, так і семантично.

2.1 Простір напрямлених рівнів належності

Множину M_α, яка утримує найменший та найбільший елементи відносно заданого на ній бінарного відношення нестрогого досконало-

ЛІТЕРАТУРА

1. Нариньяни А. С. Недоопределённость в системе представления и обработки знаний / А. С. Нариньяни // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1986. – № 5. – С. 3–28.
2. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций / Ю. Б. Гермейер. – М. : Наука, 1971. – 384 с.
3. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. Теория принятия решений при неполном единстве / Ю. Б. Гермейер. – М. : Изд. МГУ. – 1972. – 186 с.
4. Нейман Дж. фон. К теории стратегических игр / Дж. фон. Нейман // Матричные игры. – М. : Физматгиз, 1961. – С. 121–137.
5. Демянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс / В. Ф. Демянов, В. Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
6. Федоров В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 380 с.
7. Танака К. Итоги рассмотрения факторов неопределенности и неясности в инженерном искусстве / К. Танака // Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения : Пер. с англ. / [под ред. Р. Р. Ягера]. – М. : Радио и связь, 1986. – 408 с.
8. Камінський Вячеслав Вікторович. Математичні моделі квазідетермінізації процесів в складних системах : дис. … канд. техн. наук: 06.10.06 / Камінський Вячеслав Вікторович. – Вінниця, 2006. – 234 с.
9. Мокін Б. І. Нетрадиційні операції та принципи узагальнення в теорії нечітких множин (основні ідеї та перспективи застосування в прикладних задачах) / Мокін Б. І. Камінський В. В., Кацив С. Ш. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2000. – № 5. – С. 83–88.
10. Мокін Б. І. Властивості слабких операцій в теорії нечітких множин / Мокін Б. І., Камінський В. В., Кацив С. Ш. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2001. – № 5. – С. 106–113.

11. Мокін Б. І. Нетрадиційні операції та принципи узагальнення теорії нечітких множин в задачах квазідетермінізації процесів в складних системах / Мокін Б. І., Камінський В. В., Кацив С. Ш. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2001. – № 6. – С. 173–175.

12. Мокін Б. І. Математичне моделювання процесів пошуку оптимальних рішень з використанням нечітких слабко заданих вхідних параметрів та їх граничних значень / Мокін Б. І. Камінський В. В. // Контроль і управління в складних системах (КУСС–2003) : VII міжнар. наук.-техн. конф, 8–11 жовтня 2003 р. : тези доп. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – С. 14.

13. Мокін Б. І. Математичне моделювання процесів пошуку оптимальних рішень з використанням слабко заданих вхідних параметрів / Мокін Б. І., Камінський В. В. // Книга за матеріалами VII міжнародної науково–технічної конференції «Контроль і управління в складних системах (КУСС – 2003)» : доповіді / Мокін Б. І., Камінський В. В. – м. Вінниця, 8–11 жовтня 2003 року. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2003. – С. 7–10.

14. Мокін Б. І. Слабкі множини та їх застосування до розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності даних / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Вісник Віницького політехнічного інституту. – 2004. – № 3. – С. 102–108.

15. Мокин Б. И. Основы теории слабых множеств и её прикладные аспекты / Мокин Б. И. Каминский В. В. // Автоматика 2005 : 12-я междунар. науч.-техн. конф., 30.05 – 03.06 2005 г. : тезисы докл. Т1. – Харьков, 2005. – С. 22–23.

16. Мокін Б. І. Математичне моделювання невизначених параметрів режиму електромереж з допомогою слабких множин / Мокін Б. І. Камінський В. В. // Контроль і управління в складних системах (КУСС–

2005) : VIII міжнар. наук.-техн. конф, 24–27 жовтня 2005 р. : тези доп. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – С. 171.

17. Мокін Б. І. Математичне моделювання невизначених параметрів режиму електромереж з допомогою слабких множин / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Вісник Віницького політехнічного інституту. – 2005. – № 6. – С. 89 – 96.

18. Мокін Б. І. Слабкі множини як альтернатива використанню нечітких множин у моделюванні складних систем / Мокін Б. І. Камінський В. В. // Автоматика 2006 : 13-а міжнар. наук.-техн. конф, 25–28 вересня 2006 р. : тези доп. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. – С. 8.

19. Мокін Б. І. Геометрична інтерпретація слабких множин та їх систем нечітких реалізацій / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2006. – № 4. – С. 34 – 47.

20. Мокін Б. І. Слабкі множини як альтернатива нечітким множинам в моделюванні невизначених параметрів складних систем / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2006. – № 6. – С. 226–230.

21. Мокін Б. І. Метрика в просторі напрямлених рівнів належності слабко заданих параметрів складних систем / Б. І. Мокін В. В. Камінський // Контроль і управління в складних системах (КУСС–2008) : IX міжнар. наук.-техн. конф, 24–25 жовтня 2005 р. : тези доп. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – С. 1.

22. Мокін Б. І. Метрика в просторі напрямлених рівнів належності слабко заданих параметрів складних систем [Електронний ресурс] / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Наукові праці ВНТУ. – 2009. – № 2. – 6 с.: Режим доступу до журналу – http://www.nbuv.gov.ua/e–journals/VNTU/2009–2/2009–2.files/uk/09bimocs_ua.pdf.

23. Мокін Б. І. Загальні принципи створення методів побудови функцій рівнів слабких множин навантаження у вузлах електропостачальних систем [Електронний ресурс] / Б. І. Мокін, В. В. Камінський // Наукові праці ВНТУ. – 2011. – № 1. – 6 с.: Режим доступу до журналу – http://www.nbuv.gov.ua/e–journals/VNTU/2011_1/2011–1.files/uk/ 11bimpss_ ua.pdf.

24. Casti J. Dynamical Systems and Their Applications: Linear Theory / J. Casti. – Academic Press, New York. – 1977.

25. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев. – М. : Наука, 1975. – 526 с.

26. Ивахненко А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем / А. Г. Ивахненко. – К. : Наукова думка, 1981. – 296 с.

27. Шрейдер Ю. А. Системы и модели / Ю. А. Шрейдер, А. А. Шаров. – М. : Радио и связь, 1982. – 152 с.

28. Калман Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. – М. : Мир, 1971. – 400 с.

29. Бусленко Н. П. Лекции по теории сложных систем / Н. П. Бусленко, В. В. Калашников, И. Н. Коваленко. – М. : Советское радио, 1973. – 440 с.

30. Gigch John P van. Applied general systems theory. Second edition / Gigch John P van. – New York, Hagerstown, San Francisco, London : Harper & Row, Publishers, 1978, 731 p.

31. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа / Н. Н. Моисеев – М. : Наука, 1981, – 488 с.

32. Дружинин В. В. Системотехника / В. В. Дружинин, Д. С. Конторов. – М. : Радио и связь, 1985. – 200 с.

33. Дружинин В. В. Введение в теорию конфликта / В. В. Дружинин, Д. С. Конторов, М. Д. Конторов. – М. : Радио и связь, 1989. – 288 с.

34. Сейдж Э. П. Оптимальное управление системами / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт ; пер. с англ. ; [под ред. Б. Р. Левина]. – М. : Радио и связь, 1982. – 392 с.

35. Николаев В. Н. Системотехника: методы и приложения / В. Н. Николаев, В. М. Брук. – Л. : Машиностроение, 1985. – 199 с.

36. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы: пер. с англ / Дж. Касти. – М. : Мир, 1982. – 216 с., ил.

37. Теория систем. Математические методы и моделирование. Т44: Сборник статей : пер. с англ. ; [под ред. А. Н. Колмогорова, С. П. Новикова]. – М. : Мир, 1989. – 384 с.

38. Бутковский А. Г. Кибернетика и структуры / А. Г. Бутковский // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 1–2. – С. 8–20.

39. Дружинин В. В. Проблемы системологии (проблемы теории сложных систем) / В. В. Дружинин, Д. С. Конторов. – М. : Советское радио, 1976. – 296 с.

40. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. – М. : Наука, 1984. – 320 с.

41. Sage A. P. System Identification / A. P. Sage, J. L. Melsa. – N. Y. : Academic Press, 1971. – 302 p.

42. Идентификация динамических систем / [Арбачаускене Н., Балтрунас И., Немура А., и др.]. – Вильнюс : Минитис, 1974. – 294 с.

43. Гроп Д. Методы идентификации систем : пер. с англ. / Д. Гроп. – М. : Мир, 1976. – 302 с.

44. Дейч А. М. Методы идентификации динамических объектов / А. М. Дейч. – М. : Энергия, 1979. – 272 с.

45. Современные методы идентификации систем / [Под ред. П. Эйкхоффа]. – М. : Мир, 1983. – 400 с.

46. Ljung L. System identification: Theory for The user / L. Ljung. – Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1991. – 435 p.

47. Сильвестров А. Н. Два альтернативных подхода к идентификации реальных объектов / А. Н. Сильвестров // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 6. – С. 54-65.

48. Розен В. В. Цель - оптимальность - решение (математические модели принятия оптимальных решений) / В. В. Розен. – М. : Радио и связь, 1982. – 168 с.

49. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. – М. : Наука, 1982. – 432 с.

50. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М. : Наука 1983. – 384 с.

51. Муртаф Б. Современное линейное программирование : пер. с англ. / Б. Муртаф. – М. : Мир, 1984, – 224 с.

52. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа : пер. с англ. / Д. Бертсекас. – М. : Радио и связь, 1987. – 400 с.

53. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы : пер. с англ. / М. Базара, К. Шетти. – М. : Мир, 1982. – 583 с.

54. Теория выбора и принятия решений / [И. М. Макаров, Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. В. Соколов]. – М. : Наука, 1982. – 328 с.

55. Подиновский В. В. Парето - оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 256 с.

56. Хоменюк В. В. Элементы теории многоцелевой оптимизации / В. В. Хоменюк. – М. : Наука, 1983. – 125 с.

57. Дубов Ю. А. Многокритериальные задачи формирования и выбора вариантов систем / Ю. А. Дубов, С. И. Травкин, В. Н. Якимец. – М. : Наука, 1986. – 296 с.

58. Банди Б. Методы оптимизации: пер. с англ. / Б. Банди – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.

59. Шоломов Л. А. Логические основы исследования дискретных моделей выбора / Л. А. Шоломов – М. : Наука, 1989. – 288 с.

60. Айзерман М. А. Выбор вариантов. Основы теории / М. А. Айзерман, Ф. Т. Алескеров. – М. : Наука, 1990. – 240 с.

61. Вентцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Вентцель – М. : Советское радио, 1972. – 552 с.

62. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин – М. : Советское радио, 1974. – 400 с.

63. Вагнер Г. Основы исследования операций : в 3-х томах : пер. с англ. / Г. Вагнер – М. : Мир, 1973. – Т. 3. – 504 с.

64. Баранов В. В. Рекуррентные методы оптимальных решений в стохастических системах / В. В. Баранов – Харьков : Вища школа, 1981. – 145 с.

65. Бертсекас Д. Стохастическое оптимальное управление : пер. с англ. / Д. Бертсекас, С. Шрив – М. : Наука, 1985. – 280 с.

66. Семесенко М. П. Случайные процессы в системах управления / М. П. Семесенко – К., Донецк : Вища школа, 1986. – 192 с.

67. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев – М. : Наука, 1981, 258 с.

68. Теория прогнозирования и принятия решений / [Саркисян С. А., Каспин В. И., Лисичкин В. А.и др.] ; под. ред. Саркисяна С. А. – М. : Высшая школа, 1977. – 351 с.

69. Канторович Л. В. Оптимальные решения в экономике / Л. В. Канторович, А. Б. Горстко. – М. : Наука, 1972. – 231 с.

70. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование : пер. с англ. / Д. Химмельблау. – М. : Мир, 1975. – 534 с.

71. Исследование операций. В 2-х томах. : Модели и применения : пер. с англ. / [Под ред. Дж. Моулера, С. Элмаграби.] – М. : Мир, 1981. Т. 2. – 677 с.

72. Реклейтис Г. Оптимизация в технике. В 2-х томах : пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Регсдел. – М. : Мир, 1986. – Т. 1. – 352 с.

73. Реклейтис Г. Оптимизация в технике. В 2-х томах : пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Регсдел. – М. : Мир, 1986. – Т. 2. – 320 с.

74. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1988. – 480 с.

75. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Наука, 1991. – 386 с.

76. Петров Е. Г. Методи і засоби прийняття рішень у соціально-економічних системах / Е. Г. Петров, М. В. Новожилова, І. В. Гребеннік. – К. : Техніка, 2004. – 256 с.

77. Кантор Георг. Труды по теории множеств / Георг Кантор ; [изд. подг. А. Н. Колмогоров, Ф. А. Медведев, А. П. Юшкевич ; отв. ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич] – М. : Наука, 1985. – 431 с.

78. Н. Бурбаки. Основные структуры анализа. Ч. 1. Теория множеств. Кн. 1 : перевод с франц. Г. Н. Поварова, Ю. А. Шихановича / Н. Бурбаки [под. ред. В. А. Успенского]. – М. : Мир, 1965. – 468 с.

79. Куратовский К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский [пер. с англ. М. И. Кратко] ; [под ред. А. Д. Тайманова]. – М. : Мир, 1970. – 417 с.

80. Zadeh L. Fuzzy sets / L. Zadeh // Information and control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353.

81. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев. – М. : Наука, 1981. – 258 с.
82. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
83. Пономарьов О. С. Нечеткие множества в задачах автоматизирванного управления и принятия решений / О. С. Пономарьов. – Харків : НТУ «ХПІ», 2005. –232 с.
84. Прикладные нечеткие системы / [Асаи К., Ватада Д., Иван С. и др.] ; под. ред. Т. Терано, К. Асаи, М. Сугено ; [пер. с япон.] – М. : Мир, 1993. – 368 с.
85. Бочарников В. П. Fuzzy–технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике / В. П. Бочарников. – СПб. : Наука РАН, 2001. – 328 с.
86. А. Н. Павлов. Принятие решений в условиях нечеткой информации / А. Н. Павлов, Б. В. Соколов. – СПб., 2006. –72 с.
87. Круглов В. В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети / В. В. Круглов, М. И. Дли, Р. Ю. Голунов. – М. : Изд. физ.-мат. литературы , 2001. – 224 с.
88. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1974. – 127 с.
89. Ширяев А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1989. – 640 с.
90. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей / В. Н. Тутубалин. – М. : Изд. Московского университета, 1972. – 230 с.
91. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко – М. : Наука, 1988. – 448 с.
92. Адомиан Дж. Стохастические системы : пер. с англ. / Дж. Адомиан. – М. : Мир, 1987. – 378 с.

93. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1981.– 744 с.
94. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры / К. Партасарати ; [пер. с англ. А. В. Прохорова] ; [под ред. В. В. Сазонова] – М. : Мир, 1983. – 345 с.
95. Дюбуа Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад ; [пер.с фр. В. Б. Тарасова] ; [под ред. С. А. Орловского]. – М. : Радио и связь, 1990. – 288 с.
96. Орлов А. И. Задачи оптимизации и нечеткие переменные / А. И. Орлов. – М. : Знание, 1980. 64 с.
97. Орлов А. И. Устойчивость в социально–экономических моделях / А. И. Орлов. М. : Наука, 1979. – 288 с.
98. Орлов А. И. Прикладная статистика / А. И. Орлов. М. : Экзамен, 2004. – 320 с.
99. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде [пер. с англ. Н. И. Ринго] ; [под ред. Н. Н. Моисеева, С. А. Орловского] – М. : Мир, 1976. – 168 с.
100. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / [А. Н. Аверкин, И. З.Батыршин, А. Ф. Блишун и др.] ; под. ред. Д. А. Поспелова. – М. : Наука, 1986. – 312 с.
101. Mukaidano M. A set of independent and complete axioms for a fuzzy algebra (Kleene algebra) / M. Mukaidano // International symposium on multiple-valued logic, 11th. N.Y., 1981. – P. 27–34.
102. И. З. Батыршин. Основные операции нечеткой логики и их обобщения / И. З. Батыршин. – Казань : Отечество, 2001. – 100 с.
103. Mc Visar-Whelan P. J. Fuzzy and multivalued logic / Mc P. J. Visar-Whelan // 7th International Symposium on Multivalued Logic, N. C., 1977, P. 98–102.

104. Cai Wen. Introduction of extension set / Wen Cai // BUSEFAL, 1984, Ete, No. 19. P. 49–57.
105. Биркгоф Г. Теория решеток : пер. с англ. / Г. Биркгоф ; [под. ред. Л. А. Скорнякова]. – М. : Наука, 1984. – 568 с.
106. Goguen J. A. L-fuzzy sets / J. A. Goguen // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1967. – V. 18. – P. 145–174.
107. Goguen J. A. Concept representation in natural and artificial language: axioms, extensions and applications for fuzzu sets / J. A. Goguen // International Journal of Man–Machine Studies, 1974. – V. 6, P. 513–561.
108. Arbib M. A. Semiring languages / M. A. Arbib. – Stanford : Stanford University; Electrical Engineering Department. – 197 p.
109. Wechler W. Analyse and synthese zeitvariabler R-Fuzzy automaten / W. Wechler. – ZKJ Information, 1974. – V. 1. – P. 32–366.
110. Ralescu D. A. Fuzzy subobjects in a category and theory of C-sets / D. A. Ralescu // Fuzzy Sets and Systems, 1978. – V. 1. – P. 193–202.
111. Биркгоф Г. Современная прикладная алгебра : пер. с англ. / Г. Биркгоф, Т. Барти – М. : Мир, 1976. – 400 с.
112. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок / Ю. А. Шрейдер. – М. : Наука, 1971. – 256 с.
113. Юдин Д. Б. Вычислительные методы теории принятия решений / Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1989. –320 с.
114. Колмогоров А. Н. Введение в математическую логику / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин – М. : Издательство МГУ, 1982. – 120 с.
115. Колмогоров А. Н. Математическая логика. Дополнительные главы / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин – М. : Издательство МГУ, 1984. – 120 с.
116. Никольская И. Л. Математическая логика : учебник / И .Л. Никольская – М. : Высшая школа, 1981. – 127 с.

117. Синюков Н. С. Топология / Н. С. Синюков, Т. И. Матвеенко. – К. : Вища школа, 1984. – 264 с.
118. Зорич В.А. Математический анализ, часть I. – М. : Наука, 1981. – 544 с.
119. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов – М. : Наука, 1984. – 752 с.
120. Математический анализ / [И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда]. – К.: Вища школа 1983. – Ч. 1. – 495 с.
121. Зорич В. А. Математический анализ, часть II / В. А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.
122. Зорич В. А. Математический анализ, часть I / В. А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.
123. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров : пер. с англ. / Г. Корн, Т. Корн ; под общ. ред. И. Г. Арамовича. – М. : Наука, 1977. – 832 с.
124. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев – М. : Наука, 1986. – 544 с.
125. Rasiowa H. An algebraic approach to non-classical logics / H. Rasiowa // Studies in Logics and the Foundations of Mathematics, vol. 78. – North-Holland, Amsterdam, 1974.
126. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств : пер. с франц. / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.
127. Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 448 с.
128. Ротштейн А. П. Интеллектуальные технологии идентификации: нечеткие множества, генетические алгоритмы, нейронные сети / А. П. Ротштейн. – Винница : УНИВЕРСУМ-Винница, 1999. – 320 с.

129. Ротштейн О. П. Нечітка модель футбольного прогнозування з генетико-нейронною настройкою / О. П. Ротштейн, Г. Б. Ракитянська // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 2. – С. 68– 78.
130. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. / С. Д. Штовба. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с.
131. Мелихов А. Н. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой / А. Н. Мелихов, Л. С. Бернштейн, С. Я. Коровин – М. : Наука, 1990. – 272 с.
132. Zadeh L. A. A fuzzy-sets-theoretic interpretation of linguistic hedges / L. A. Zadeh // J. Gybern. – 1972. – Vol. 2. – P. 4–34.
133. Гуров С. И. Упорядоченные множества и универсальная алгебра (вводный курс) : Учебное пособие / С. И. Гуров. – М. : Издательский отдел ф-та ВМИК МГУ, 2004. – 104 с.
134. Математический энциклопедический словарь / [гл. ред. Ю. В. Прохоров ; ред. кол.: С. И. Адян, Н. С. Бахвалов, В. И. Битюцков, А. П. Ершов, Л. Д. Кудрявцев, А. Л. Онищик, А. П. Юшкевич]. – М. : Сов. энциклопедия, 1988. – 848 с.
135. Дороговцев А. Я. Математический анализ : Справочное пособие / А. Я. Дороговцев. – К. : Вища школа, 1985. – 528 с.

Наукове видання

Камінський Вячеслав Вікторович
Мокін Борис Іванович

ВСТУП ДО ТЕОРІЇ СЛАБКИХ МНОЖИН

Монографія

Редактор Н. Мазур
Оригінал-макет підготовлено В. В. Камінським

Підписано до друку 11.04.2012 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. др. арк. 7,39
Наклад 100 прим. Зам № 2012-047

Вінницький національний технічний університет,
КІВЦ ВНТУ,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-81-59
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.