Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Н. Р. Кондратенко

КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Вінниця
ВНТУ
2010

УДК 510.6:004(075)
ББК 22.12:32.97я73
К64

Рецензенти:
О. М. Романкевич, доктор технічних наук, професор
І. І. Хаїмзон, доктор технічних наук, професор
Д. Т. Обідник, кандидат технічний наук, доцент

Рекомендовано до видання Міністерством освіти і науки України. Лист № 1/11-220 від 22.01.10.

Кондратенко, Н. Р.
К64 Комп'ютерний практикум з математичної логіки : навчальний посібник / Н. Р. Кондратенко. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 117 с.
ISBN 978-966-641-381-2

В навчальному посібнику викладено базові поняття та методи математичної логіки, які використовуються для проектування комбінаційних схем, автоматів та інших засобів електронно-обчислювальної техніки. Наведено приклади розв'язання задач з математичної логіки за допомогою комп'ютерних пакетів. Розроблено індивідуальні та тестові завдання. Навчальний посібник відповідає вимогам державних стандартів України та навчальній програмі дисципліни «Дискретна математика» і призначений для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 510.6:004(075)
ББК 22.12:32.97я73

ISBN 978-966-641-381-2

Зміст

ПЕРЕДМОВА 4
РОЗДІЛ 1 ФУНКЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ ТА ЇХ ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ 5
1.1 Основні поняття теорії елементарних функцій алгебри логіки 5
1.2 Основні закони алгебри логіки та їх використання для подання одних функцій логіки через інші 9
1.3 Основні властивості функцій алгебри логіки 13
1.4 Вправи для самостійної роботи. Використання середовища Microsoft Excel 19
1.5 Контрольні питання 23
РОЗДІЛ 2 ФОРМИ ПОДАННЯ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ 24
2.1 Досконала диз'юнктивна нормальна форма 24
2.2 Досконала кон'юнктивна нормальна форма 25
2.3 Способи переходу від нормальної до досконалої форми логічної функції 27
2.4 Функціонально повні системи булевих функцій 32
2.5 Вправи для самостійної роботи. Використання середовища Microsoft Excel 35
2.6 Контрольні питання 38
РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ МІНІМІЗАЦІЇ ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЙ 40
3.1 Метод Квайна 40
3.2 Метод Квайна-Мак-Класкі 46
3.3 Метод Блейка-Порецького 50
3.4 Метод Нельсона 52
3.5 Метод карт Карно-Вейча 52
3.6 Мінімізація кон'юнктивних нормальних форм 56
3.7 Мінімізація в базисах І-НЕ та АБО-НЕ 58
3.8 Мінімізація не повністю визначених функцій алгебри логіки 60
3.9 Мінімізація систем булевих функцій 62
3.10 Вправи для самостійної роботи 65
3.11 Контрольні питання 66
РОЗДІЛ 4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ. ВИКОРИСТАННЯ СЕРЕДОВИЩА MATHCAD 67
Список використаної та рекомендованої літератури 98
Глосарій 99
Додаток А. Тестові завдання 100
Додаток Б. Прикладна задача теорії графів 114

ПЕРЕДМОВА

Математична логіка як математична дисципліна почала формуватися в XIX столітті завдяки роботам англійського вченого Дж. Буля (1815-1864). Найбільшого поширення математична логіка досягла у теперішній час в зв’язку з розвитком обчислювальної техніки та інформатики як наука для опису моделей дискретних приладів та в системах штучного інтелекту – для автоматичного доведення теорем, подання знань та отримання нових знань в експертних системах.

У посібнику подаються основні поняття та методи математичної логіки, які використовуються для розв’язання задач, пов’язаних з описом та проектуванням комбінаційних схем, автоматів та інших засобів електронно-обчислюваної техніки.

У першому розділі подаються основні поняття та означення математичної логіки, наводяться доведення основних законів логіки за допомогою таблиць істинності. Також дається опис елементарних логічних функцій, їх основні властивості та базові підходи до реалізації в електронних схемах.

В другому розділі розглядаються форми подання функцій алгебри логіки, способи переходу до нормальних форм, побудова досконалої кон’юнктивної та диз’юнктивної нормальних форм функцій алгебри логіки, функціонально повні системи булевих функцій.

В третьому розділі подані відомості про основні методи мінімізації логічних функцій, методи мінімізації в базисах І-НЕ, АБО-НЕ, методи мінімізації не повністю визначених логічних функцій та методи мінімізації систем булевих функцій. Кожний з вищезгаданих розділів супроводжується багатьма пояснювальними прикладами, вправами для самостійної роботи та контрольними питаннями.

В першому та другому розділах наведено приклади розв’язання задач математичної логіки за допомогою середовища Microsoft Excel; в третьому розділі запропоновано розв’язувати задачі мінімізації логічних функцій за допомогою засобів математичного пакета MathCad. Для самостійного опанування матеріалу розроблені індивідуальні та тестові завдання. В тестові завдання включені задачі математичної логіки та задачі з мінімізації логічних функцій.

В основу посібника покладено матеріал, який пропонувався студентам на лекційних, лабораторних та практичних заняттях з дисципліни “Дискретна математика” для студентів бакалаврських напрямів “Комп’ютерна інженерія” та “Управління інформаційною безпекою” Вінницького національного технічного університету.

Розділ 1 ФУНКЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ ТА ЇХ ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

При проектуванні обчислювальної техніки для формального опису логічних схем використовують математичний апарат алгебри логіки, об'єктом дослідження якого є функції, які набувають, як і їх аргументи, тільки два значення – 0 та 1. Вивчення властивостей таких функцій є дуже важливим для успішного розв'язання задач, які виникають перед фахівцями з проектування засобів обчислювальної техніки.

1.1 Основні поняття теорії елементарних функцій алгебри логіки

Функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка набуває тільки значення 0 або 1, як і її аргументи, прийнято називати логічною функцією або булевою функцією. Аргументи булевої функції також називають булевими.

Довільна булева функція задається одним із трьох способів: табличним, геометричним та аналітичним.

Оскільки аргументи логічних функцій можуть набувати лише двох значень, область визначення будь-якої логічної функції скінченна. Тому будь-яка функція алгебри логіки може бути задана таблицею її значень залежно від значень аргументів.

В табл. 1.1 задані дві логічні функції трьох аргументів $f(x_1, x_2, x_3)$ і $\phi(x_1, x_2, x_3)$.

Таблиця 1.1

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x_1, x_2, x_3)$	0	1	0	1	0	0	0	1
$\phi(x_1, x_2, x_3)$	1	0	0	1	0	1	1	0

Сукупність значень аргументів називається набором функції. Функції f і φ, задані в табл. 1.1, визначені на восьми наборах. Функція $f(x_1, x_2, x_3)$ набуває значення, що дорівнюють одиниці на наборах (0, 0, 1), (0, 1, 1) і (1, 1, 1), а на решті дорівнює нулю. Функція $\phi(x_1, x_2, x_3)$ дорівнює одиниці на чотирьох наборах (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), а на решті - дорівнює нулю. До основних властивостей логічних функцій відносяться такі:

а) будь-яка логічна функція n аргументів визначена на 2^n наборах.

Відомо, що кількість різних n-розрядних чисел дорівнює 2^n, якщо кожному набору аргументів можна поставити у відповідність двійкове *n*-розрядне число. Так, наприклад, подані в табл. 1.1 логічні функції визначені на 8 наборах: (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1);

б) число різних логічних функцій n аргументів скінченне і дорівнює 2^{2^n}.

Оскільки логічна функція n аргументів визначена на 2^n наборах, то можна поставити у відповідність кожній логічній функції двійкове число, що містить 2^n розрядів. При цьому кількість різних двійкових 2^n-розрядних чисел дорівнює 2^{2^n}, таким чином і кількість різних логічних функцій дорівнює 2^{2^n}.

в) кількість логічних функцій *n* аргументів різко зростає зі збільшенням *n* (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

Кількість аргументів	1	2	3	4	5
Число перемикаючих функцій	4	16	256	65536	$4{,}3 \cdot 10^9$

Логічна функція одного аргументу подана в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

x	0	1	Умовне позначення	Найменування функції
$f_0(x)$	0	0	0	Константа нуля
$f_1(x)$	0	1	x	Змінна
$f_2(x)$	1	0	$\overline{x}$	Інверсія
$f_3(x)$	1	1	1	Константа одиниці

Логічні функції двох аргументів подані в табл. 1.4. Наведені булеві функції дозволяють будувати нові булеві функції за допомогою узагальненої операції, яка називається операцією суперпозиції. Операція суперпозиції полягає в підстановці замість аргументів інших булевих функцій (зокрема аргументів) [9].

Таблиця 1.4

Функція	0 0	0 1	1 0	1 1	Назва функції	Позна- чення	Функція, що виконується
$f_0(x,y)$	0	0	0	0	константа нуль	0	
$f_1(x,y)$	0	0	0	1	Добуток (кон'юнкція)	$x \wedge y$	$x \cdot y$
$f_2(x,y)$	0	0	1	0	f заборона по y	$x\Delta y$	$x\,\overline{y}$
$f_3(x,y)$	0	0	1	1	змінна x	x	X
$f_4(x,y)$	0	1	0	0	f заборона по x	$y\Delta x$	$\overline{x}\,y$
$f_5(x,y)$	0	1	0	1	змінна y	y	Y
$f_6(x,y)$	0	1	1	0	сума за модулем 2	$x \oplus y$	$\overline{x}y \vee \overline{y}x$
$f_7(x,y)$	0	1	1	1	диз'юнкція	$x \vee y$	$x \vee y$
$f_8(x,y)$	1	0	0	0	операція Пірса (функція Вебба)	$x \downarrow y$	$\overline{x \vee y}$
$f_9(x,y)$	1	0	0	1	логічна рівнозначність	$x \sim y$	$x \equiv y$
$f_{10}(x,y)$	1	0	1	0	інверсія y	$\overline{y}$	$\overline{y}$
$f_{11}(x,y)$	1	0	1	1	імплікація від y до x	$y \to x$	$x \vee \overline{y}$
$f_{12}(x,y)$	1	1	0	0	інверсія x	$\overline{x}$	$\overline{x}$
$f_{13}(x,y)$	1	1	0	1	імплікація від x до y	$x \to y$	$\overline{x} \vee y$
$f_{14}(x,y)$	1	1	1	0	операція Шеффера (штрих Шеффера)	$x\,/\,y$	$\overline{x} \vee \overline{y} = \overline{xy}$
$f_{15}(x,y)$	1	1	1	1	константа одиниці	1	

Існує 16 різних логічних функцій двох аргументів (x і y), кожна з яких визначена на 4-х наборах.

З 16-ти функцій, які подані в табл. 1.4, 6 функцій

$f_0(x,y)=0$; $\quad f_5(x,y)=y$; $\quad f_{12}(x,y)=\overline{x}$;
$f_3(x,y)=x$; $\quad f_{10}(x,y)=\overline{y}$; $\quad f_{15}(x,y)=1$

є константами або функціями одного аргументу. Решта десять функцій залежать від двох аргументів і мають свої загальноприйняті позначення і назви.

Функція $f_1(x,y)$ називається кон'юнкцією, логічним множенням або логічним І. Для її позначення використовуються: знак множення $\cdot$ - $x \cdot y$; знак кон'юнкції $\wedge$ - $x \wedge y$; знак логічного І - $\&$ - $x \& y$.

Функція $f_7(x,y)$ носить назву диз'юнкції, логічного додавання, логічного АБО. Для позначення використовується знак $\vee$: $f_7(x,y) = x \vee y$, іноді для зручності $x + y$.

Функція $f_6(x,y)$ називається функцією нерівнозначності або сумою за модулем 2:

$$f_6(x,y) = x \oplus y.$$

Функція $f_9(x,y)$ називається функцією рівнозначності або еквівалентності:

$$f_9(x,y) = x \equiv y.$$

Функція $f_{14}(x,y)$ називається штрихом Шеффера або запереченням кон'юнкції:

$$f_{14}(x,y) = x / y$$

або

$$f_{14}(x,y) = \overline{xy}.$$

Останнє позначення показує, що функція може бути отримана шляхом суперпозиції, кон'юнкції та інверсії.

Функція $f_8(x,y)$ називається запереченням диз'юнкції, функцією Пірса або стрілкою Пірса:

$$f_8(x,y) = x \downarrow y$$

або

$$f_8(x,y) = \overline{x \vee y}.$$

Функції $f_{11}(x,y)$ і $f_{13}(x,y)$ називаються імплікацією:

$$f_{11}(x,y) = y \to x \text{ і } f_{13}(x,y) = x \to y$$

або

$$f_{11}(x,y) = x \vee \overline{y} \text{ і } f_{13}(x,y) = \overline{x} \vee y.$$

Функція $f_2(x,y)$ і $f_4(x,y)$ називається функцією заборони або заперечення імплікації:

$$f_2(x,y) = x\,\overline{y} \text{ і } f_4(x,y) = \overline{x}\,y.$$

1.2 Основні закони алгебри логіки та їх використання для подання одних функцій логіки через інші

Вперше логічні функції були використані в алгебрі логіки, початок якій покладено працями англійського математика Дж. Буля, її також називають булевою алгеброю або алгеброю висловлень.

Під висловленням розуміється будь-яке твердження, яке може бути істинним або хибним.

Істинному висловленню приписується 1, хибному – 0. Висловлення можуть бути простими і складними. Складні висловлення складаються з простих.

Для об'єднання простих висловлень в складні використовуються логічні зв'язки, що відповідають логічним функціям, аргументами яких є прості висловлення.

Логічний зв'язок "І" (кон'юнкція). Кон'юнкцією називають складне висловлення, що містить 2 або більше простих висловлень і яке є істинним тоді і лише тоді, коли істинними є прості висловлення, і хибним, якщо хоч одне з простих висловлень хибне.

Кон'юнкція являє собою логічний зв'язок "І" (див. табл. 1.5).

З'єднання двох висловлень читається як "x і y". Позначається xy або $x \wedge y$.

Таблиця 1.5

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
$x \cdot y = x \wedge y$	0	0	0	1

Логічний зв'язок "АБО" (диз'юнкція). Диз'юнкцією називають складне висловлення, що містить декілька простих висловлень і яке є істинним тоді, коли істинним буде хоч одне з простих висловлень, які входять в це складне висловлення, і хибним, якщо всі прості висловлення хибні.

Диз'юнкція являє собою логічний зв'язок "АБО" (табл. 1.6) і позначається $x \vee y$. Читається "x або y".

Таблиця 1.6

x	y	$x \vee y$ = "x або y"
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логічний зв'язок "НЕ" (заперечення). Логічний зв'язок "НЕ" означає заперечення висловлення і читається "НЕ x", позначається $\overline{x}$ або $\neg x$ (табл. 1.7)

Таблиця 1.7

x	0	1
$\overline{x}$	1	0

Запереченням висловлення x називають складне висловлення "НЕ x", яке є істинним, коли x хибне, і хибним, коли x істинне.

Для зручності подальших викладок використаємо позначення: "$\cdot$" – кон'юнкція, "$\vee$" – диз'юнкція і "$\overline{\ }$" – заперечення.

Булевою алгеброю називається множина M, що складається не менше ніж з двох елементів, на якій визначені три операції – диз'юнкції ($x \vee y$), кон'юнкції (xy), заперечення ($\overline{x}$). Для будь-яких елементів $x, y, z \in M$ виділяємо набір незалежних властивостей, які вважають аксіомами булевої алгебри, а саме:

– закон комутативності:

$$\left.\begin{array}{l} x \vee y = y \vee x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{array}\right\}; \tag{1.1}$$

– закон асоціативності:

$$\left.\begin{array}{l} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\ (xy)z = x(yz) \end{array}\right\}; \tag{1.2}$$

– закон дистрибутивності:

$$\left.\begin{array}{l} x(y \vee z) = xy \vee xz \\ x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z) \end{array}\right\}; \tag{1.3}$$

для спрощення формул крім аксіом використовують такі співвідношення або закони алгебри логіки:

– логічне додавання до нуля:

$$x \vee 0 = x; \tag{1.4}$$

– логічне додавання до одиниці:

$$x \vee 1 = 1; \tag{1.5}$$

– логічне множення на 0:

$$x \cdot 0 = 0; \tag{1.6}$$

– логічне множення на 1:

$$x \cdot 1 = x; \tag{1.7}$$

– закон протиріччя:

$$x \cdot \overline{x} = 0; \tag{1.8}$$

– закон виключеного третього:

$$x \vee \overline{x} = 1. \tag{1.9}$$

Всі інші закони є наслідком зазначених вище:

– закон ідемпотентності:

$$\left.\begin{aligned} x \vee x \vee x = x \\ x \cdot x \cdot x = x \end{aligned}\right\};\tag{1.10}$$

– закон подвійного заперечення:

$$\bar{\bar{x}} = x\,;\tag{1.11}$$

– закон поглинання (x поглинає y):

$$\begin{aligned} x \vee xy = x \\ (x \vee y)x = x \end{aligned};\tag{1.12}$$

– закон де Моргана:

$$\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y};\tag{1.13}$$

$$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y};\tag{1.14}$$

– наслідки законів де Моргана:

$$x \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}\,;\tag{1.15}$$

$$xy = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}\,.\tag{1.16}$$

За допомогою розглянутих співвідношень можна виконувати різні тотожні перетворення булевих виразів.

При цьому порядок виконання дій такий:

При відсутності дужок виконуються операції заперечення, потім кон’юнкції, останніми – диз’юнкції.

Подання одних функцій алгебри логіки через інші

1. Операція заборони:

$$x_1 \Delta x_2 = x_1 \cdot \overline{x_2}\,.\tag{1.17}$$

Для доведення цього і наступних співвідношень будемо підставляти в ліву і праву частини виразу окремі значення аргументів і перевіряти правильність рівності.

Таблиця 1.8

x_1	x_2	$x_1 \Delta x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Таблиця 1.9

x_1	x_2	$\overline{x_2}$	$x_1 \cdot \overline{x_2}$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0

2. Сума за модулем 2:

$$x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_2 = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}). \tag{1.18}$$

Таблиця 1.10

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Таблиця 1.11

x_1	x_2	$x_1 \cdot \overline{x_2}$	$\overline{x_1} \cdot x_2$	$x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_2$
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

3. Операція Пірса:

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} \text{ (операція АБО-НЕ).} \tag{1.19}$$

Таблиця 1.12

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	$(x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	0	0

Таблиця 1.13

x_1	x_2	$x_1 \downarrow x_2$	$\overline{x_1 \vee x_2}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

4. Логічна рівнозначність:

$$x_1 \sim x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2} = x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = (\overline{x_1} \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2}). \tag{1.20}$$

Справедливість першої рівності може бути встановлена безпосередньо по таблицях істинності функції логічної рівнозначності і суми по модулю 2; наступних рівностей - шляхом інвертування лівої і правої частин виразу і перетворення за формулами де Моргана.

5. Імплікація:

$$x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2. \tag{1.21}$$

Таблиця 1.14

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблиця 1.15

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1} \vee x_2$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

6. Функція Шеффера:

$$x_1 / x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} \text{ (операція І-НЕ).} \qquad (1.22)$$

Таблиця 1.16

x_1	x_2	x_1 / x_2
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Таблиця1.17

x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$	$\overline{x_1 \cdot x_2}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

1.3. Основні властивості функцій алгебри логіки

Функції кон'юнкції та диз'юнкції мають ряд властивостей, аналогічних властивостям звичайних операцій множення та додавання. Легко переконатися в тому, що для цих функцій мають місце: комутативний закон для кон'юнкції та диз'юнкції (1.1):

$$x_1 x_2 = x_2 x_1 ;$$
$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 .$$

Для доведення цього закону необхідно замість аргументів підставляти відповідно значення 0 або 1, а потім робити порівняння стовпців в таблицях для функцій, що знаходяться в лівій та правій частинах розглядуваного співвідношення.

Функції кон'юнкції та диз'юнкції підпорядковуються асоціативному закону (1.2):

$$x_1 (x_2 x_3) = (x_1 x_2) x_3 ;$$

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 .$$

Дистрибутивний закон (1.3):

$$x_1 (x_2 \vee x_3) = (x_1 x_2) \vee (x_1 x_3) ;$$
$$x_1 \vee (x_2 x_3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3) .$$

Перевіримо справедливість цього закону для диз'юнкції відносно кон'юнкції шляхом порівняння стовпців в таблицях для функцій, що знаходяться в лівій та правій частинах розглядуваного співвідношення:

Таблиця 1.18

x_1	x_2	x_3	$x_2 x_3$	$x_1 \vee (x_2 x_3)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Таблиця 1.19

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee x_3$	$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Збіг крайніх стовпців в побудованих таблицях 1.18, 1.19 доводить наше твердження.

Розглянемо тепер ряд простих, але вельми важливих для функцій кон'юнкції та диз'юнкції співвідношень, які в подальшому будемо використовувати в задачах мінімізації логічних функцій:

– закони логічного додавання та множення з константою одиниці (1.6), (1.8):

$$\left.\begin{aligned} x \vee 1 = 1; \\ x1 = x. \end{aligned}\right\}$$

Таблиця 1.20

x	1	$x \vee 1$
0	1	1
1	1	1

Таблиця 1.21

x	1	$x1$
0	1	0
1	1	1

– закони логічного додавання та множення з константою нуля (1.5), (1.7):

$$\left.\begin{aligned} x \vee 0 = x; \\ x0 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Таблиця 1.22

x	0	$x \vee 0$
0	0	0
1	0	1

Таблиця 1.23

x	0	$x0$
0	0	0
1	0	0

– закон ідемпотентності (1.4):

$$\left.\begin{aligned} x \vee x = x; \\ xx = x. \end{aligned}\right\}$$

Таблиця 1.24

x	x	$x \vee x$
0	0	0
1	1	1

Таблиця 1.25

x	x	xx
0	0	0
1	1	1

– закон виключеного третього та закон протиріччя (1.9), (1.10):

$$\left.\begin{aligned} x \vee \overline{x} &= 1; \\ x\overline{x} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Таблиця 1.26

x	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$
0	1	1
1	0	1

Таблиця 1.27

x	$\overline{x}$	$x\overline{x}$
0	1	0
1	0	0

– закон подвійного заперечення (1.11):

$$\overline{\overline{x}} = x .$$

Таблиця 1.28

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

– формули де Моргана (1.13), (1.14):

$$\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y};$$

$$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}.$$

Доведення правила де Моргана наведені в табл. 1.29.

Таблиця 1.29

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}\,\overline{y}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

З таблиці 1.29 видно, що при різних значеннях x і y права і ліва частини однакові. Формули де Моргана можна використовувати і для випадку, коли функція має більше двох аргументів, нижче наведені відповідні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n &= \overline{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n}; \\
x_1 x_2 \ldots x_n &= \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \ldots \vee \bar{x}_n}
\end{aligned}
\qquad (1.23)
$$

Аналогічним чином доводяться інші тотожності.

Властивості функції додавання за модулем 2 та функції імплікації часто бувають корисними при аналізі та синтезі різних дискретних приладів.

Для функції додавання за модулем 2 мають місце переставний та сполучний закони, а також розподільний закон відносно кон'юнкції:

$$
\begin{gathered}
x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1 ; \\
x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 ; \\
x_1 \,\&\, (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) \oplus (x_1 \,\&\, x_3) .
\end{gathered}
\qquad (1.24)
$$

Мають місце також очевидні співвідношення:

$$
\left.
\begin{aligned}
x \oplus x &= 0 ; \\
x \oplus 0 &= x ; \\
x \oplus 1 &= \bar{x} ; \\
x \oplus \bar{x} &= 1 .
\end{aligned}
\right\}
\qquad (1.25)
$$

Крім того, має місце формула

$$
x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 . \qquad (1.26)
$$

На відміну від усіх розглянутих раніше функцій для імплікації не мають місця переставний та сполучний закони:

$$
\left.
\begin{gathered}
x \to x = 1 ; \\
x \to \bar{x} = \bar{x} ; \\
x \to 1 = 1 ; \\
x \to 0 = \bar{x} ; \\
0 \to x = 1 ; \\
1 \to x = x ; \\
x_1 \to x_2 = \bar{x}_2 \to \bar{x}_1 ; \\
x_1 \to x_2 \to x_1 = x_1 .
\end{gathered}
\right\}
\qquad (1.27)
$$

Функції диз'юнкції та кон'юнкції можуть бути виражені через імплікацію таким чином:

$$x_1 \vee x_2 = \overline{x_1} \to x_2 \; ; \qquad (1.28)$$
$$x_1 x_2 = \overline{x_1 \to \overline{x_2}} \; .$$

Доведення співвідношень (1.28) наведені в табл. 1.30 та 1.31.

Таблиця 1.30

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1} \to x_2$
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	0	1

Таблиця 1.31

x_1	x_2	$x_1 x_2$	$\overline{x_2}$	$x_1 \to \overline{x_2}$	$\overline{x_1 \to \overline{x_2}}$
0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1

З таблиць 1.30, 1.31 видно, що при різних значеннях x та y права і ліва частина формул (1.28) однакові.

Для функцій штрих Шеффера і операція Пірса має місце переставний закон

$$x_1 / x_2 = x_2 / x_1 \; ; \qquad (1.29)$$
$$x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1 \; .$$

Сполучний закон для них не виконується:

$$x_1 / \left(x_2 / x_3 \right) \neq \left(x_1 / x_2 \right) / x_3 \; ;$$
$$x_1 \downarrow \left(x_2 \downarrow x_3 \right) \neq \left(x_1 \downarrow x_2 \right) \downarrow x_3 \; .$$

Мають місце такі очевидні співвідношення:

$$\left.\begin{array}{ll} x / x = \overline{x}\,; & x \downarrow x = \overline{x}\,; \\ x / \overline{x} = 1\,; & x \downarrow \overline{x} = 0\,; \\ x / 1 = \overline{x}\,; & x \downarrow 1 = 0\,; \\ x / 0 = 1\,; & x \downarrow 0 = \overline{x}\,; \\ \multicolumn{2}{l}{x_1 / x_2 = \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}\,;} \\ \multicolumn{2}{l}{x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1}\,\overline{x_2}.} \end{array}\right\} \qquad (1.30)$$

В силу відсутності сполучного закону дії розкриття дужок та винесення за дужки для функцій штрих Шеффера і операція Пірса специфічні та виконуються за такими правилами:

$$\left.\begin{aligned}
&(x_1 / x_2) / (x_1 / x_3) = \overline{x_1 / (\overline{x_2} / \overline{x_3})} = \overline{x_1} \downarrow (x_2 \downarrow x_3);\\
&(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_3) = \overline{x_1 \downarrow (\overline{x_2} \downarrow \overline{x_3})} = \overline{x_1} / (x_2 / x_3);\\
&(x_1 / x_2) \downarrow (x_1 / x_3) = \overline{x_1 / (\overline{x_2} \downarrow \overline{x_3})} = \overline{x_1} \downarrow (x_2 / x_3);\\
&(x_1 \downarrow x_2) / (x_1 \downarrow x_3) = \overline{x_1 \downarrow (\overline{x_2} / \overline{x_3})} = \overline{x_1} / (x_2 \downarrow x_3);\\
&(x_1 / x_2) \downarrow (x_3 / x_4) = \overline{x_1} \downarrow \overline{\overline{x_2} \downarrow \overline{\overline{x_3} \downarrow \overline{x_4}}};\\
&(x_1 \downarrow x_2) / (x_3 \downarrow x_4) = \overline{x_1} / \overline{\overline{x_2} / \overline{\overline{x_3} / \overline{x_4}}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.31)$$

Доведення справедливості цих співвідношень аналогічне. Доведемо, наприклад, справедливість рівності

$$\left(x_1 \downarrow x_2\right) / \left(x_1 \downarrow x_3\right) = \overline{x_1 \downarrow \left(\overline{x_2} / \overline{x_3}\right)}.$$

Використовуючи два останніх співвідношення з (1.30), перетворимо обидві частини цього співвідношення таким чином:

$$\begin{aligned}
&\left(x_1 \downarrow x_2\right) / \left(x_1 \downarrow x_3\right) = \overline{x_1 \vee x_2} / \overline{x_1 \vee x_3} = \\
&= \left(x_1 \vee x_2\right) \vee \left(x_1 \vee x_3\right) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \quad ;\\
&\overline{x_1 \downarrow \left(\overline{x_2} / \overline{x_3}\right)} = x_1 \vee \left(\overline{x_2} / \overline{x_3}\right) = x_1 \vee \left(x_2 \vee x_3\right) = x_1 \vee x_2 \vee x_3 .
\end{aligned}$$

Збіг лівої та правої частин після проведення еквівалентних перетворень доводить рівність.

Функції штрих Шеффера і операція Пірса пов'язані між собою співвідношеннями, аналогічними до формул де Моргана для функцій кон'юнкції та диз'юнкції:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 / x_2 &= \overline{\overline{x_1} \downarrow \overline{x_2}};\\
x_1 \downarrow x_2 &= \overline{\overline{x_1} / \overline{x_2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.32)$$

Для доведення справедливості першого з цих співвідношень зазначимо, що на основі двох останніх рівностей з (1.30) можна перше зі співвідношень (1.31) переписати у такому вигляді:

$$\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2};$$

$$x_1 x_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}.$$

Оскільки отримане співвідношення є формулою де Моргана, то перше зі співвідношень (1.31) справедливе. Для другого співвідношення доведення аналогічне.

1.4 Вправи для самостійної роботи. Використання середовища Microsoft Excel

Вправа 1. Скласти таблицю істинності таких логічних функцій (Блок А).

Вправа 2. Скласти таблицю істинності таких логічних функцій (Блок Б) та з’ясувати, які з заданих логічних функцій є функціями - тавтологіями або функціями - суперечностями.

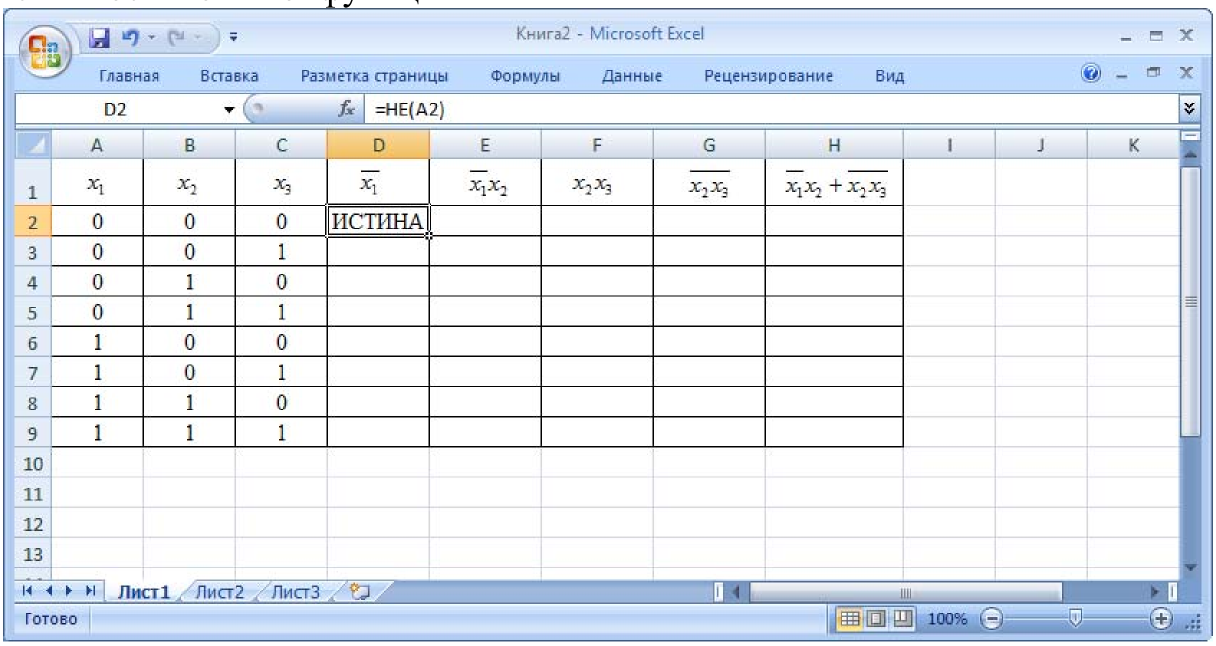
Приклад виконання завдання 1.

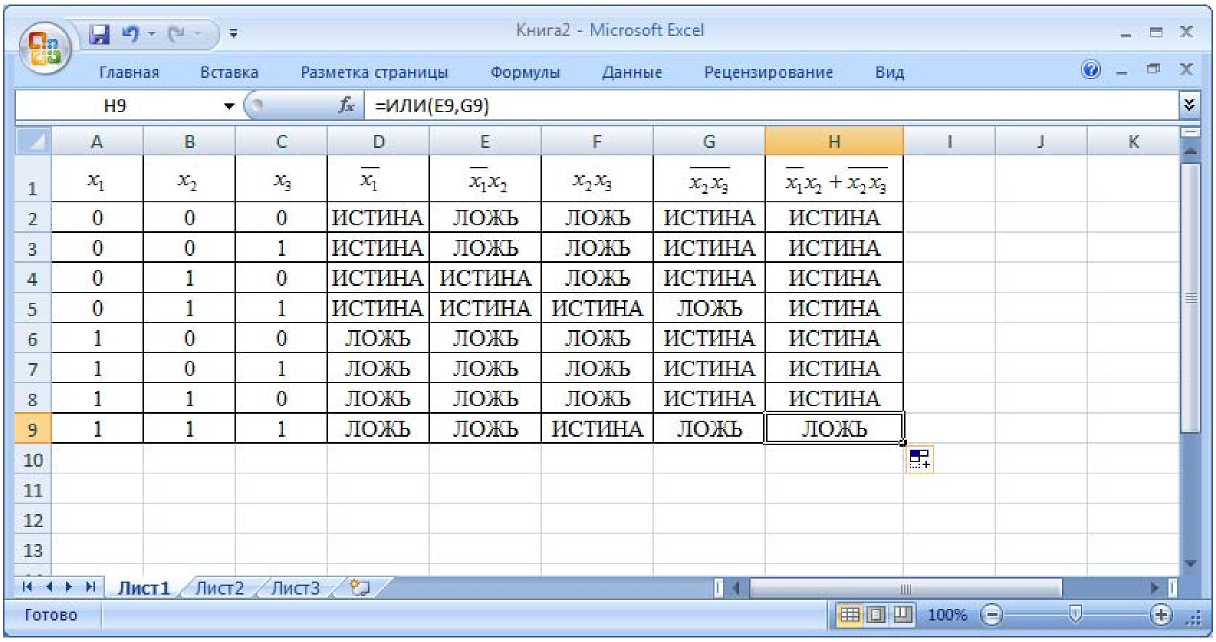
Задана функція $y(x_1,x_2,x_3,)=\overline{x_1}x_2+\overline{x_2x_3}$. Таблиця 1.32 є таблицею істинності для заданої логічної функції.

Таблиця 1.32

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}x_2$	x_2x_3	$\overline{x_2x_3}$	$\overline{x_1}x_2+\overline{x_2x_3}$
0	0	0	істина	хибність	хибність	істина	істина
0	0	1	істина	хибність	хибність	істина	істина
0	1	0	істина	істина	хибність	істина	істина
0	1	1	істина	істина	істина	хибність	істина
1	0	0	хибність	хибність	хибність	істина	істина
1	0	1	хибність	хибність	хибність	істина	істина
1	1	0	хибність	хибність	хибність	істина	істина
1	1	1	хибність	хибність	істина	хибність	хибність

Використання середовища Microsoft Excel для побудови таблиці істинності логічної функції





	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_1}x_2$	x_2x_3	$\overline{x_2x_3}$	$\overline{x_1}x_2+\overline{x_2x_3}$
2	0	0	0	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
3	0	0	1	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
4	0	1	0	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
5	0	1	1	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
6	1	0	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
7	1	0	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
8	1	1	0	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ИСТИНА
9	1	1	1	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
10								
11								
12								
13								

Блок А

1. $f = \overline{\overline{x_1\overline{\overline{x_2}x_3x_4}} + \overline{x_1}\,\overline{x_2\overline{x_3}x_4} + \overline{x_2}\,\overline{x_3}}$;

2. $f = \overline{x_1\overline{x_2x_3x_4} + x_1\overline{x_2x_3}x_4} + \overline{x_1\overline{\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4}}$;

3. $f = \overline{\overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2x_3\overline{x_4}}}} + x_1\overline{x_2x_3x_4}} + \overline{\overline{\overline{x_1}x_2x_3}\,\overline{x_4}}$;

4. $f = \overline{\overline{x_1x_2x_3x_4} + x_1\overline{x_2}x_3x_4} + \overline{\overline{x_1x_2}\,\overline{x_3\overline{x_4}}}$;

5. $f = \overline{\overline{\overline{x_1}x_2x_3x_4} + x_1\overline{\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4}} + \overline{x_1\overline{x_2\overline{x_3x_4}}}$;

6. $f = \overline{\overline{\overline{x_1}x_2x_3x_4} + x_1\overline{x_2}x_3x_4} + \overline{x_1\overline{x_2x_3}x_4}$;

7. $f = \overline{\overline{x_1}x_2\overline{x_3x_4} + x_1\overline{x_2x_3}x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2x_3}\,\overline{x_4}$;

8. $f = \overline{\overline{\overline{x_2}x_3x_4} + \overline{x_1}\,\overline{\overline{x_2}x_3}x_4 + \overline{x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}}} + x_1x_2$;

9. $f = x_1\overline{\overline{x_2}\,\overline{x_3\overline{x_4}}} + \overline{\overline{x_1\overline{x_2}x_4} + \overline{\overline{x_1}x_2}x_3\overline{x_4}}$;

10. $f = \overline{x_1\overline{x_2x_3}x_4 + \overline{x_1x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1x_2x_3}\,\overline{x_4}}$;

11. $f = \overline{x_1}x_2x_3x_4 + \overline{\overline{x_1\overline{x_2}}x_3}x_4 + x_1\overline{x_2x_3}x_4$;

12. $f = \overline{x_1}x_2\overline{\overline{x_3}x_4} + x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1\overline{x_2x_3}}x_4$;

13. $f = \overline{\overline{x_1\overline{x_2x_3x_4} + x_1\overline{x_2x_3}x_4} + x_1x_2\overline{x_3x_4}}$;

14. $f = \overline{x_1\overline{x_2}x_3x_4 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3x_4} + \overline{x_1x_2}\,\overline{x_3}}$;

15. $f = \overline{\overline{\overline{x_1x_2}x_3\overline{x_4}} + \overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}}\,\overline{x_4}}} + \overline{x_1}\,\overline{\overline{x_3}\,\overline{x_4}}$;

Навчальне видання

Наталія Романівна Кондратенко

КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Навчальний посібник

Редактор Т. Старічек
Оригінал-макет підготовлено Н. Кондратенко

Підписано до друку 18.10.2010 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 7,50.
Наклад 300 прим. Зам. № 2010-166

Вінницький національний технічний університет,
науково-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК №3516 від 01.07.2009 р.