Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. М. Мізерний

СИСТЕМИ ЗМІШАНОГО ТИПУ У ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ТА КЕРУВАННЯ

Монографія

Вінниця
ВНТУ
2017

Пам’яті
Валерія Мельника *–*
видатного вченого
і справжнього патріота

УДК 517.9
М28

Рекомендовано до друку вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 16 від 22 червня 2017 р.)

Рецензенти:
В. Я. Данилов, доктор технічних наук, професор
П. І. Когут, доктор фізико-математичних наук, професор

Мізерний, В. М.
М28 Системи змішаного типу у задачах аналізу та керування : монографія / В. М. Мізерний. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 80 с.
ISBN 978-966-641-703-2

У монографії представлено дослідження математичних моделей змішаних систем, що являє собою необхідну базу при постановці та розв’язанні задач оптимального керування та оцінювання параметрів станів об’єктів, що описуються інтегральними та диференціальними рівняннями (системами рівнянь) з частинними похідними; при розробленні методів і алгоритмів регуляризації оптимізаційних задач, побудові скінченновимірних апроксимацій, синтезі прикладних систем керування різними процесами тощо.

УДК 517.9

ISBN 978-966-641-703-2
© В. Мізерний, 2017

ЗМІСТ

ВСТУП

Багато важливих з практичної точки зору задач моделювання, керування і оптимізації складних систем, що виникають у різних галузях фізики, механіки, економіки, екології та інших, приводять до математичних моделей, що описуються системами рівнянь різних класів, наприклад, диференціальними та інтегральними, що містять блоки з розподіленими і зосередженими параметрами; багатозв'язні та дискретно-неперервні системи тощо. Кожен тип рівнянь, що входять у математичний опис систем, має свої специфічні методи і підходи досліджень, свою «схему» чи «траєкторію». При цьому вони, найчастіше, не поширюються на інші типи рівнянь. Зазвичай дослідження будь-яких реальних керованих процесів ґрунтується на використанні ідеалізованих математичних моделей, які, як правило, не враховують вплив багатьох (часто несуттєвих) факторів. Однак, будь-яка спроба поліпшити результати керування і підняти рівень адекватності математичних моделей веде до необхідності розглядати все складніші моделі.

У зв'язку з цим далеко нетривіальним є питання розроблення уніфікованого підходу, який би синтезував методи аналізу і керування різних систем і створював передумови для розв'язання задач керування змішаними (комбінованими) системами. Беручи до уваги значний прогрес у розвитку методів нелінійного аналізу, що знайшли застосування в різних галузях математики та практичних додатках [1–3], можна цілком природно зводити вивчення цих моделей до нелінійних операторних, диференціально-операторних рівнянь, варіаційних нерівностей, а також систем, що містять перераховані вище об'єкти, не зважаючи на те, що багато важливих та принципових проблем ще залишаються відкритими. При цьому підході результати для конкретних об'єктів будуть являти собою наслідки операторних методів.

РОЗДІЛ 1
МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ЗМІШАНОГО ТИПУ

При постановці задач моделювання та керування складними системами, що виникають в різних галузях фізики, механіки, хімічної технології, економіки та інших, розроблено підхід, який базується на концепції змішаних систем [1–4]. Численні процеси керування приводять до математичних моделей, що містять системи рівнянь різних класів, наприклад, диференціальні та інтегральні, мають блоки з розподіленими та зосередженими параметрами, багатозв'язними та дискретно-неперервними системами [5–6] тощо.

Значний прогрес у дослідженні математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами зумовлений глибоким розвитком методів нелінійного аналізу, що знайшли застосування в різних галузях математики [3, 7–9]. Тому цілком природно зводити вивчення цих моделей до нелінійних операторних, диференціально-операторних рівнянь, варіаційних нерівностей, а також систем, що містять пераховані вище об'єкти. При такому підході результати для конкретних об'єктів будуть наслідками операторних методів.

Для опису деякого нестаціонарного процесу, який відбувається в просторовій області $\Omega \subset R^N$ протягом часу S, необхідно мати справу з функціями часу та координат, тобто з функціями z, що ставлять у відповідність кожній парі $(t,\omega) \subset S \times \Omega$ дійсне число або вектор $z(t,\omega)$. При цьому змінні t і ω незалежні.

Інший, значно зручніший підхід до математичного опису нестаціонарних процесів дозволяє працювати з функціями, які кожному моменту часу t ставлять у відповідність функцію координат $z(t,\cdot)$, визначену на S, з значенням у деякому просторі Z, тобто $z \in (S \to Z)$.

Розглянемо деякі нестаціонарні задачі, опис яких здійснюється за допомогою систем нелінійних функціональних рівнянь.

Задача 1. Нехай Ω – обмежена область R^N з регулярною границею $\partial\Omega$, інтервалом часу $S=[0,T], T>0$.

$$x(t,\omega)+\int\limits_{\Omega}K(\omega,w)h(w,(z(t,w),x(t,w)))dw=g(t,w)\,, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,\omega)-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial\omega_j}(t,\omega)\right)+Q(\omega,x(t,\omega),z(t,\omega))=f(t,\omega) \tag{1.2}$$

$$\forall(t,\omega)\in S\times\Omega,\quad z(0,\omega)=\gamma(\omega),\;\; z(t,x)\Big|_{\Sigma}=0\;\;\forall t\in S, \tag{1.3}$$

де $\Sigma=\partial\Omega\times S$; коефіцієнти a_{ij} – сталі величини.

Через $z(t,\cdot),\; t\in S$ позначено функцію, визначену на $S\times\overline{\Omega}$, у якої є фіксована змінна t.

Під класичним розв’язком системи (1.1)–(1.2) розуміють функції $x(t,\omega),\, z(t,\omega)$, визначені на $S\times\overline{\Omega}$, при чому функція $z(t,\omega)$ має бути неперервно- диференційована по t і двічі диференційована по ω та задовольняти умови (1.3).

Функція $x(t,\omega)$ диференційована по ω.

Доведення теорем існування класичного розв’язку задачі (1.1)–(1.3), як правило, вимагає застосування складної математичної техніки.

Тому логічним є перехід від класичної задачі (1.1)–(1.3) до відповідної їй задачі у функціонально-аналітичній постановці.

Для цього введемо до розгляду деякі простори функцій з $(S\to Z)$ [5] та такі позначення:

$$y(t)=x(t,\cdot);\;\; \psi(t)=z(t,\cdot);$$

$$By(t)=(Dy)(t,\cdot);\;\; (Dy)(t,\omega)=\int\limits_{\Omega}K(\omega,w)x(t,w)dw;$$

$$F(\psi(t),y(t))=h(\cdot,z(t,\cdot),x(t,\cdot));\;\; b(t)=g(t);$$

$$G(y(t),\psi(t))=Q(\cdot,x(t,\cdot),z(t,\cdot));$$

$$L\psi(t)=Ez(t,\cdot);\; (Ez)(t,\omega)=-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial\omega_j}(t,\omega)\right), \tag{1.4}$$

$$\psi'(t)=\frac{\partial z}{\partial t}(t,\cdot);\;\; \psi(0)=\gamma(\cdot);\;\; \varphi(t)=f(t,\cdot)\,.$$

Виходячи з цього, систему (1.1), (1.2) з початковими і граничними умовами можна представити у вигляді системи операторних рівнянь:

$$y(t)+FB(\psi(t),y(t))=b(t), \tag{1.5}$$

$$\psi'(t)+L\psi(t)+G(y(t),\psi(t))=\phi(t) \tag{1.6}$$

$$\psi(0)=\gamma(\cdot). \tag{1.7}$$

Припустимо також, що абстрактні функції належать до класів $y(t)\in(S\to L_p(\Omega))$, $\psi(t)\in(S\to W_p^m(\Omega))$; $\psi(t)\in\left(S\to\left[W_p^m(\Omega)\right]^*\right)$,

а оператори, які входять до (1.5), (1.6), діють за правилами:

$$F: W_p^m(\Omega)\times L_p(\Omega)\to L_q(\Omega),$$

$$B: L_p(\Omega)\to L_q(\Omega),$$

$$L: W_p^m(\Omega)\to\left[W_p^m(\Omega)\right],$$

$$G: L_p(\Omega)\times W_p^m(\Omega)\to\left[W_p^m(\Omega)\right],$$

де G і F – нелінійні відображення; L, B – лінійні; $L_p(\Omega)$ – простір вимірних інтегрованих в степені p функцій; $W_p^m(\Omega)$ – простір С. Л. Соболєва [5], $\left[W_p^m(\Omega)\right]^*$ – спряжений простір.

Зазначимо, що оператори F, B, L, G не залежать явно від змінної t.

<u>Задача 2.</u> Замість системи (1.1), (1.2) розглянемо таку:

$$x(t,\omega)+\int_\Omega K(\omega,w)h(w,(z(t,w),x(t,w)))dw=g(t,w), \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,\omega)-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial\omega_j}(t,\omega)\right)+Q(\omega,x(t,\omega),z(t,\omega))=f(t,\omega) \tag{1.9}$$

$$\forall(t,\omega)\in S\times\Omega;\ \ z(0,\omega)=\gamma(\omega);\ \ z(t,x)\big|_\Sigma=0\ \ \forall t\in S, \tag{1.10}$$

де коефіцієнти a_{ij} – сталі величини.

Введемо деякі позначення:

$$y(t) = x(t,\cdot);\ \psi(t) = z(t,\cdot);\ \psi'(t) = \frac{\partial z}{\partial t}(t,\cdot),$$

$$B(t)y(t) = D(t,\cdot)Y(t,\cdot);\quad D(t,\omega)Y(t,\omega) = \int\limits_{\Omega} K(\omega,\cdot,w)x(t,w)dw,$$

$$F(t)(\psi(t), y(t)) = h(t,\cdot,z(t,\cdot),x(t,\cdot));\ \ b(t) = g(t,\cdot),$$

$$G(t)(y(t),\psi(t)) = Q(t,\cdot,x(t,\cdot),z(t,\cdot)),$$

$$L\psi(t) = (Ez)(t,\cdot),(Ez)(t,\omega) = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial\omega_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial\omega_j}(t,\omega)\right),$$

$$\psi(0) = \gamma(\cdot);\ \ \phi(t) = f(t,\cdot)$$

і від (1.8)–(1.10) перейдемо до системи операторних рівнянь:

$$y(t) + B(t)F(t)(\psi(t), y(t)) = b(t), \tag{1.11}$$

$$\psi'(t) + L\psi(t) + G(t)(y(t),\psi(t)) = \phi(t), \tag{1.12}$$

$$\psi(0) = \gamma, \tag{1.13}$$

де оператори, що діють на абстрактні функції, явно залежать від змінної *t*. *B*(*t*), *F*(*t*), *G*(*t*) – сімейство операторів, що діють у просторах, визначених задачею (1.5)–(1.7).

У даному випадку $Z' \in (S \to Z^*)$ розуміється як похідна від *Z* по *t* у сенсі простору розділу $D^*(S, Z^*)$ може бути представлена з допомогою функції $(S \to Z^*)$ [5].

Задача (1.1)–(1.3) або (1.8)–(1.10) з початковими та крайовими умовами і відповідні їм задачі (1.5)–(1.7) та (1.11)–(1.13) у деякому розумінні еквівалентні.

Це можна довести, використавши таку лему:

Лема 1 [5]. Формула

$$\psi(t) = z(t,\cdot)\quad \forall t \in S \tag{1.14}$$

встановлює взаємно однозначну відповідність $Z \to \psi$ між функціями $z \in C(S \times \overline{\Omega})$ і функціями $\psi \in C(S;C(\overline{\Omega}))$. Функція $z \in C(S \times \overline{\Omega})$ має частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial t} \in C(S \times \overline{\Omega})$ у випадку, коли відповідна їй за формулою (1.14) функція належить $C^1(S;C(\overline{\Omega}))$, тобто $\frac{\partial z}{\partial t}(t,\cdot) = \psi'(t)$ для кожного $t \in S$.

Далі розглянемо умови можливої реалізації моделей змішаних об'єктів, які описуються системами нелінійних інтегральних рівнянь та еволюційних рівнянь з інтегро-диференціальним оператором.

Нехай Ω – обмежена область в евклідовому просторі R^N, X, Z – банахові простори дійсних функцій на Ω з нормою $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Z$ і $S = [0,T]$, $T > 0$.

Розглянемо систему рівнянь

$$x(t,\omega) + \int_{\Omega} K(\omega,w)h(t,w,z(t,w),x(t,w))dw = g(t,\omega), \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial z(t,\omega)}{\partial t} - \int_{\Omega} L(\omega,w)Q(t,\omega,x(t,w),z(t,w),\frac{\partial z}{\partial w_1},\dots \\ &\dots,\frac{\partial z}{\partial w_N},\frac{\partial^2 z}{\partial w_1^2},\dots,\frac{\partial^2 z}{\partial w_N^2})dw = p(t,\omega) \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\forall (t,\omega) \in S \times \Omega,\ z(0,\cdot) = Z_0 \in Z,\ z(t,\omega)\big|_{\Sigma} = 0,\ \Sigma = (0,T) \times \partial\Omega, \tag{1.17}$$

яку, використавши [5], запишемо в операторному вигляді

$$y(t) + BF(t)(\psi(t), y(t)) = \varphi(t), \tag{1.18}$$

$$\psi'(t) + G(t)(y(t),\psi(t)) = f(t) \qquad \forall t \in S \tag{1.19}$$

з початковою умовою $\psi(0) = \gamma$.

Слід відмітити, що в першому рівнянні змінна *t* виступає як параметр.

Тут $F=\{F(t)\}$, $G=\{G(t)\}$, $t\in S$ – сімейство нелінійних операторів, що діють в просторах $F(t): Z\times X\to X^*$, $G(t): X\times Z\to Z$ $\forall t\in S$, а оператор $B: X^*\to X$ – лінійний. Функції $t\to y(t)$ та $t\to\psi(t)$ визначені для $t\in S$ і належать просторам $C(S; X)$ і $C(S; Z)$ відповідно.

Допустимо, що сімейство операторів $F=\{F(t)\}$, $G=\{G(t)\}$ задовольняє такі умови:

а) при кожному $y\in X$ і $\psi\in C(S;Z)$ функція $S\ni t\mapsto F(t)(\psi(t),y)\in X^*$ класу $C(S; X^*)$;

б) при кожному $z\in Z$ і $h\in C(S;X)$ функція $S\ni t\mapsto G(t)(h(t),z)\in Z$ класу $C(S; Z)$;

в) оператори $F(t)(\psi,\cdot)\in(X\to X^*)$ і $G(t)(y,\cdot)\in(Z\to Z)$ рівномірно неперервні, тобто існують такі незалежні від t постійні r_1 та r_2, що виконуються умови:

$$\|F(t)(\psi,y_1)-F(t)(\psi,y_2)\|_{X^*}\le r_1\|y_1-y_2\|_X \quad \forall\psi\in Z,\forall y_1,y_2\in X$$

і

$$\|G(t)(y,\psi_1)-G(t)(y,\psi_2)\|_Z\le r_2\|\psi_1-\psi_2\|_Z \quad \forall y\in X,\forall\psi_1,\psi_2\in Z.$$

Застосуємо деякі допоміжні твердження.

Припустимо, що $G(y,t)=\{G(t)(y(t),\psi(t))\}$.

Лема 2. Нехай сімейство операторів $G=\{G(t)\}$ задовольняє умови ***б***), ***в***) $\forall y\in C(S;X)$ і $\psi\in C(S;Z)$.

Тоді $G(y,\psi)\in C(S;Z)$.

Доведення. Нехай $\{t_n\}\subset S$ – довільна послідовність, що сходиться, $t_n\to t_0$ при $n\to\infty$. В силу виконання умови ***в***)

$$\begin{aligned}&\|G(t_n)(y(t_n),\psi(t_n))-G(t_o)(y(t_o),\psi(t_o))-\\&-G(t_n)(y(t_n),\psi(t_o))+G(t_n)(y(t_n),\psi(t_o))\|_z\le\\&\le r_2\|\psi(t_n)-\psi(t_o)\|_z+\|G(t_n)(y(t_n),\psi(t_o))-G(t_o)(y(t_o),\psi(t_o))\|_z.\end{aligned}$$

При $t_n \to t_o$ перший доданок у правій частині прямує до нуля в наслідок неперервності функції ψ, а другий доданок прямує до нуля згідно з умовою ***б***).

Це і є доведенням леми.

Аналогічну лему можна сформулювати і відносно сімейства операторів $F = \{F(t)\}$.

<u>Лема 3</u> [5]. (C, k) – норми, визначені для $\psi \in C(S;Z)$ формулою

$$\|\psi\|_{(C,k)} = \sup_{t \in S}\left\{e^{-kt}\|\psi(t)\|_Z\right\}, \quad \mathrm{k} \geq 0, \qquad (1.20)$$

еквівалентні нормі

$$\|\psi\|_{C(S;Z)} = \sup_{t \in S}\|\psi(t)\|_Z .$$

<u>Теорема 1.</u> Нехай виконуються умови а)÷в) відносно сімейства операторів F, G і оператор B – лінійний та неперервний, норма якого задовольняє нерівність

$\|B\| < \dfrac{1}{r_1}$, де r_1=const – постійна Ліпшиця з умови ***в***).

Тоді задача

$$y(t) + BF(t)(\psi(t), y(t)) = \varphi(t),$$

$$\psi'(t) + G(t)(y(t), \psi(t)) = f(t)$$

з початковою умовою $\psi(0) = \gamma$ має розв'язок для будь-яких $\varphi \in C(S;Z)$, $f \in (S;Z)$ і $\gamma \in Z$.

<u>Доведення</u>. Проведемо його використовуючи принцип нерухомої точки. Інтегруючи друге рівняння системи на відрізку [*0*; *t*], отримаємо

$$\psi(t) = \gamma - \int_o^t \left[G(s)(y(s), \psi(s)) - f(s)\right]ds. \qquad (1.21)$$

Тут інтеграл розуміється як інтеграл Бохнера. Позначимо

$$(U\psi)(t) = \gamma - \int_o^t \left[G(s)((s), \psi(s)) - f(s)\right]ds, \qquad (1.22)$$

$$U_o(t)y(t) = \varphi(t) - BF(t)(\psi(t), y(t)). \qquad (1.23)$$

В силу леми 2 і диференційованості невизначеного інтегралу Бохнера [5] оператор U діє з $C(S;X)\times C(S;Z)$ в $C^1(S;Z)$.

Покажемо, що при кожному $y\in C(S;X)$ відображення U при деякому $k\geq 0$ є стислим в (C; k) – нормі простору C(S; Z).

Згідно з ***в***) із (1.22) виходить, що для довільних $\psi_1,\psi_2\in C(S;Z)$

$$\left\|(U\psi_1)(t)-(U\psi_2)(t)\right\|_Z\leq\int_o^t\left\|G(s)(y(s),\psi_1(s))-\right.$$

$$\left.-G(s)(y(s),\psi_2(s))\right\|_Z\cdot e^{-ks}e^{ks}ds\leq r_2\int_o^t\left\|\psi_1-\psi_2\right\|_Z\cdot e^{-ks}e^{ks}ds\leq$$

$$\leq r_2\left\|\psi_1-\psi_2\right\|_{(C,k)}\cdot\left(\frac{e^{kt}-1}{k}\right).$$

Звідси

$$\left\|(U\psi_1)(t)-(U\psi_2)(t)\right\|_Z\cdot e^{-kt}\leq\frac{r_2}{k}(1-e^{-kt})\left\|\psi_1-\psi_2\right\|_{(C,k)}\leq$$

$$\leq\frac{r_2}{k}(1-e^{-kt})\left\|\psi_1-\psi_2\right\|_{(C,k)}.$$

Беручи в лівій частині верхню границю по $t\in S$, отримаємо

$$\left\|U\psi_1-U\psi_2\right\|_Z\leq\frac{r_2}{k}(1-e^{-kt})\left\|\psi_1-\psi_2\right\|_{(C,k)}.$$

Якщо вибрати $k\geq r_2$, то відображення U буде стислим. Значить для кожного $y\in C(S;X)$ існує елемент $\psi_o\in C(S;Z)$, який є нерухомою точкою відображення U, тобто $\psi_o=U\psi_o$.

В силу (1.22) маємо

$$\psi_o(t)=\gamma-\int_o^t\left[G(s)(y(s),\psi(s))-f(s)\right]ds\quad\forall\mathrm{t}\in\mathrm{S}.\qquad(1.24)$$

Враховуючи, що права частина цього виразу має неперервну похідну по t, то $\psi_o\in C^1(S;Z)$ і

$$\psi_o(t)+G(t)(y(t),\psi_o(t))=f(t)\quad\forall\mathrm{t}\in\mathrm{S},$$

причому $\psi_o(0)=\gamma(\omega)$.

Далі розглянемо оператор U_o при фіксованому ψ. Згідно з ***в***) із (1.23) випливає, що для $\forall y_1, y_2 \in C(S;X)$

$$\|U_o(t)y_1(t) - U_o(t)y_2(t)\|_X = \|BF(t)(\psi(t), y_1(t)) - BF(t)(\psi(t), y_2(t))\|_X =$$
$$= \|B[F(t)(\psi(t), y_1(t)) - F(t)(\psi(t), y_2(t))]\|_X \le \|B\| \cdot \|F(t)(\psi(t), y_1(t)) -$$
$$- F(t)(\psi(t), y_2(t))\|_{X^*} \le \|B\| \cdot r_1 \cdot \|y_1(t) - y_2(t)\|_X .$$

Якщо

$$\|B\| \cdot r_1 < 1, \tag{1.25}$$

то оператор U_o буде стислим в просторі $C(S;\ X)$ при кожному $\psi \in C(S;Z)$.

У системі рівнянь

$$y(t) = \varphi(t) - BF(t)(\psi(t), y(t)), \tag{1.26}$$

$$\psi(t) = \gamma - \int_o^t [G(s)(y(s), \psi(s)) - f(s)]ds, \tag{1.27}$$

яка отримана із задачі (1.18), (1.19) з початковою умовою $\psi(0) = \gamma$, припускаючи, що $y = y_1$, $\psi = \psi_1$, де $(y_1;\ \psi_1)$ – довільна пара з $C(S;X) \times C(S;Z)$, маємо

$$y_2(t) = \varphi(t) - BF(t)(\psi_1(t), y_1(t)).$$

Тепер пару $(y_2;\ \psi_2)$ підставимо у рівняння (1.27). В результаті отримаємо

$$\psi_2(t) = \gamma - \int_o^t [G(s)(y_2(s), \psi_1(s)) - f(s)]ds .$$

Далі пару $(y_2;\ \psi_2)$ підставимо в (1.26). Знайшовши y_3, підставимо пару $(y_3;\ \psi_2)$ в (1.27). Далі знаходимо ψ_3. Послідовно повторюючи попередню процедуру, отримаємо ітераційний процес

$$y_{n+1}(t) = \varphi(t) - BF(t)(\psi_n(t), y_n(t)) \tag{1.28}$$

і

$$\psi_{n+1}(t) = \gamma - \int_o^t [G(s)(y_n(s), \psi_n(s)) - f(s)]ds . \tag{1.29}$$

Доведемо, що послідовності $\{y_n\},\{\psi_n\}$ сходяться до нерухомої точки (y_0; ψ_0), яка є розв'язком системи (1.26)–(1.27) і, як наслідок, системи (1.18)–(1.19).

Дійсно, при будь-якому n маємо

$$\begin{aligned}
&\left\|y_{n+1}(t)-y_n(t)\right\|_X=\left\|U_o(t)y_n(t)-U_o(t)y_{n-1}(t)\right\|_X=\\
&=\left\|BF(t)(\psi_n(t),y_n(t)-BF(t)(\psi_{n-1}(t),y_{n-1}(t)))\right\|_X=\\
&=\left\|B\left[F(t)(\psi_n(t),y_n(t))-F(t)(\psi_{n-1}(t),y_{n-1}(t))\right]\right\|_X\le\\
&\le\|B\|\cdot\left\|F(t)(\psi_n(t),y_n(t))-F(t)(\psi_{n-1}(t),y_{n-1}(t))\right\|_{X^*}\le\\
&\le\|B\|\cdot r_1\cdot\left\|y_n(t)-y_{n-1}(t)\right\|_X=\alpha\cdot\left\|y_n(t)-y_{n-1}(t)\right\|_X,
\end{aligned}$$

де $\alpha=\|B\|\cdot r_1<1$.

Взагалі, справедливий такий ланцюжок нерівностей:

$$\left\|y_{n+1}(t)-y_n(t)\right\|\le\alpha\left\|y_n(t)-y_{n-1}(t)\right\|_X\le\ldots\le\alpha^{n-1}\left\|y_2(t)-y_1(t)\right\|_X.$$

Покажемо, що послідовність $\{y_n\}$ – фундаментальна в $C(S; X)$. Використовуючи нерівність трикутника і попередні нерівності при $m>n$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&\|y_m-y_n\|_{C(S;X)}=\|y_m-y_{m-1}+y_{m-1}-y_{m-2}+y_{m-2}-\ldots+y_{n+1}-y_n\|_{C(S;X)}\le\\
&\le\|y_m-y_{m-1}\|_{C(S;X)}+\|y_{m-1}-y_{m-2}\|_{C(S;X)}+\ldots+\|y_{n+1}-y_n\|_{C(S;X)}\le\\
&\le\alpha^{m-2}\|y_2-y_1\|_{C(S;X)}+\alpha^{m-3}\|y_2-y_1\|_{C(S;X)}+\ldots+\alpha^{n-1}\|y_2-y_1\|_{C(S;X)}=\\
&=(\alpha^{m-2}+\alpha^{m-3}+\ldots+\alpha^{n-1})\cdot\|y_2-y_1\|_{C(S;X)}.
\end{aligned}$$

Позначимо вираз у круглих дужках через

$$\Sigma_1=\alpha^{n-1}+\alpha^n+\ldots+\alpha^{m-3}+\alpha^{m-2}.$$

Аналогічно через

$$\Sigma_2=\alpha^{n-1}+\alpha^n+\ldots+\alpha^{m-3}+\alpha^{m-2}+\alpha^m+\ldots.$$

позначимо нескінченну суму.

При цьому

$$\Sigma_1<\Sigma_2=\Sigma_1+\alpha^{m-1}+\alpha^m+\ldots,$$

де Σ_2 – сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії, першим членом якої є α^{n-1} зі знаменником $\alpha < 1$.

Як відомо, $\Sigma_2 = \dfrac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}$, тому

$$\|y_m - y_n\|_{C(S;X)} \le \Sigma_1 \cdot \|y_2 - y_1\|_{C(S;X)} \le \Sigma_2 \cdot \|y_2 - y_1\|_{C(S;X)} \le$$

$$\le \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha} \cdot \|y_2 - y_1\|_{C(S;X)}.$$

Враховуючи, що при $n \to \infty$ величина в правій частині нерівності прямує до нуля при будь-якому $m > n$, то $\|y_m - y_n\|_{C(S;X)} \to 0$ і, таким чином, послідовність $\{y_n\}$ – фундаментальна. В банаховому просторі $C(S; X)$ фундаментальна послідовність $\{y_n\}$ має границю y_o. Аналогічним чином отримаємо послідовність $\{\psi_n\}$, фундаментальну в $C(S; Z)$ з границею ψ_o.

Переходячи до границі при $n \to \infty$ в рівняннях (1.28)–(1.29) з урахуванням умови ***a***), яка необхідна в умові цієї теореми, та, використовуючи те, що оператор B у першому рівнянні і інтегральний оператор в другому рівнянні є лінійними і неперервними, отримаємо:

$$y_o = \varphi(t) - BF(t)(\psi_o(t), y_o(t)),$$

$$\psi_o = \gamma - \int_o^t \left[G(s)(y_o(s), \psi_o(s)) - f(s) \right] ds.$$

Теорему доведено.

Далі розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$x(t,\omega) + \int_\Omega K(t,\omega,w) h(t,w,z(t,w),x(t,w)) dw = g(t,\omega), \qquad (1.30)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,\omega) - \int_\Omega L(\omega,w) Q \begin{pmatrix} t, w, x(t,w), z(t,w), \dfrac{\partial z}{\partial w_1}, \ldots \\ \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial w_N}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial w_1^2}, \ldots \dfrac{\partial^2 z}{\partial w_N^2} \end{pmatrix} dw = p(t,\omega) \qquad (1.31)$$

$$\forall (t,\omega) \in S \times \Omega, \quad z(0,\cdot) = \gamma \in Z, \quad z(t,\omega)\big|_{\Sigma} = 0, \tag{1.32}$$

або в операторному вигляді

$$y(t) + B(t)F(t)(\psi(t), y(t)) = \varphi(t), \tag{1.33}$$

$$\psi'(t) + G(t)(y(t), \psi(t)) = f(t), \quad \forall t \in S \tag{1.34}$$

з початковою умовою $\psi(0) = \gamma$.

Необхідно відмітити, що у першому рівнянні змінна t виступає як параметр.

Сімейства нелінійних операторів

$$F = \{F(t)\}, \quad G = \{G(t)\}, \quad t \in S$$

такі ж, як в (1.4)–(1.5).

$B(t): X^* \to X$ явно залежить від $t \in S$.

Нехай F і G задовольняють умови ***а***)–***в***), а сімейство операторів $B(t)$ таке, що $\|B(t)\| < \frac{1}{r_1} \quad \forall t \in S$, де постійна r_1 з умови ***в***).

Для системи (1.33)–(1.34) з початковою умовою $\psi(0)=\gamma$ справедливе таке твердження.

<u>Теорема 2.</u> Нехай виконуються умови ***а***)–***в***) відносно сімейства операторів $F(t)$, $G(t)$ і норма сімейства лінійних операторів $B(t)$ задовольняє нерівність

$$\|B(t)\| < \frac{1}{r_1} \quad \forall t \in S,$$ де r_1=const з умови ***в***).

Тоді диференціально-операторна система

$$y(t) + B(t)F(t)(\psi(t), y(t)) = \varphi(t);$$

$$\psi'(t) + G(t)(y(t), \psi(t)) = f(t)$$

з початковою умовою $\psi(0)=\gamma$ має розв'язок у $C(S;X) \times C(S;Z)$ для будь-яких $\varphi \in C(S;X), \quad f \in C(S;Z)$ і $\gamma \in Z$.

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно доведенню теореми 1.

Далі розглянемо умови можливої реалізації моделей змішаних об'єктів, які містять еволюційні рівняння другого порядку.

В обмеженій області $\Omega \subset R^n$ з границею $\partial\Omega$ на проміжку $S=(0,T)$ досліджується система рівнянь

$$x(t,\omega)+\int_{\Omega} K(\omega)h\big(t,w,z(t,w),x(t,w)\big)dw = g(t,\omega); \tag{1.35}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 z(t,\omega)}{\partial t^2}-\int_{\Omega} L(\omega,w)Q\left(t,\omega,x(t,w),z(t,w),\frac{\partial z}{\partial w_1},\ldots\right.\\ \left.\ldots,\frac{\partial z}{\partial w_N},\frac{\partial^2 z}{\partial w_1^2},\ldots,\frac{\partial^2 z}{\partial w_N^2}\right)dw = p(t,\omega),\end{gathered} \tag{1.36}$$

де $(t,\omega)\in S\times\Omega$, з початковими та граничними умовами

$$z(0,\omega)=\gamma_0(\omega),\ \frac{\partial z}{\partial t}(0,\omega)=\gamma_1\omega, \tag{1.37}$$

$$z(t,\omega)\big|_{\Sigma}=0,\ \Sigma = S\times\partial\Omega. \tag{1.38}$$

У першому рівнянні змінна t виступає як параметр. Як і в [6] через X, Z позначимо дійсні функціональні простори і розглянемо сімейства $F=\{F(t),t\in S\}$, $G=\{G(t),\ t\in S\}$ нелінійних операторів, які діють у просторах $F(t): Z\times X\to X^*$, $G(t): X\times Z\to Z$. За аналогією з попередніми випадками задачу (1.35)–(1.38) перепишемо в операторному вигляді

$$y(t)+B(t)F(t)\big(\psi(t),y(t)\big)=\varphi(t), \tag{1.39}$$

$$\psi''(t)+G(t)\big(y(t),\psi(t)\big)= f(t),\ \forall t\in S \tag{1.40}$$

з початковими умовами

$$\psi(0)=\gamma,\ \ \psi'(0)=\gamma_1, \tag{1.41}$$

де $B(t): X^*\to X$ – сімейство лінійних відображень.

Задача (1.39), (1.40) з початковими умовами (1.41) може бути зведена до задачі, яка розглядалася у теоремі 2, введенням позначення $\psi'(t)=q(t)$. Але тепер замість сімейств операторів $F(t)$, $G(t)$, $B(t)$, які діють $F(t): X\to X^*$, $B(t): X^*\to X$, $G(t): Z\to Z$, необхідно розглядати також оператори типу $G:(S\to Z)\to(S\to Z)$ з $\left(L_p(S;Z)\to L_q(S;Z)\right)$, $p>q$, $1/p+1/q=1$.

Таким чином, отримуємо більш загальну постановку задачі, враховуючи, що кожному сімейству $\{G(t)\}$ операторів з $(Z\to Z)$ можна поставити у відповідність один «траєкторний» оператор $G\in\left((S\to Z)\to(S\to Z)\right)$ за правилом $(Gz)(t)=G(t)z(t)\ \ \forall t\in S$.

При цьому не кожен оператор $G:(S\to Z)\to(S\to Z)$ допускає таке представлення. До операторів, що не допускають такого представлення, відносяться так звані оператори Вольтерри $G\in\left((S\to Z)\to(S\to Z)\right)$, які відіграють важливу роль у різних практичних додатках. Вони характеризуються тим, що значення $(Gz)(t)$ може залежати від значень функції z в інтервалі [0; t], тобто від «передісторії».

Наведемо модифіковану, враховуючи вищесказане, постановку задачі. Нехай $Z-$рефлексивний банаховий простір, неперервно і щільно вкладений у гільбертовий простір H і оператор Вольтерри G діє

$$G:L_p(S;Z)\to L_q(S;Z^*),\ p>1,\ 1/p+1/q=1,\quad f\in L_q(S;Z^*).$$

Тоді коректною буде така постановка задачі:

$$\psi'+G\psi=f,\ \psi(0)=\gamma\in H,\ \psi\in L_p(S;Z).$$

Дійсно, враховуючи що $Z\subset H\subset Z^*$ [5], з $\psi\in L_p(S;Z)$ випливає $\psi\in D^*(S;Z^*)$. Тому рівняння $\psi'+G\psi=f$ можна розуміти як рівняння в $D^*(S;Z^*)$. Якщо $\psi\in L_p(S;Z)$ задовольняє це рівняння, то $\psi'\in L_q(S;z^*)$ і тому $\psi\in C(S;H)$ [5], тобто початкова умова $\psi(0)=\gamma\in H$ має сенс. Результати теорем 1, 2 можна узагальнити на той випадок, коли замість операторів із сімейства $\{G(t)\}$, $t\in S$ стоять оператори Вольтерри. Поняття цього оператора більш широко можна подати так.

<u>Означення 1</u> [5]. Нехай Z_1, Z_2 – лінійні простори і $S=[0;T]$, $T>0$. Відображення $G\in\left(D(G)\to(S\to Z_2)\right)$, $D(G)\subset(S\to Z_1)$

називається оператором Вольтерри, якщо з рівняння $\psi(s)=\varphi(s)$ для майже всіх $s\in[0;t]$, $t\in S$ випливає, що $(G\psi)(s)=(G\varphi)(s)$.

Перш за все розглянемо оператори Вольтерри, які відображають простір $C(S;Z)$ в себе. Для цього випадку в означенні 1 необхідно покласти $Z_1=Z_2=Z$ і $D(G)=C(S;Z)$, а вираз «для майже всіх» замінити на «для всіх».

В цьому випадку умова Ліпшиця для оператора Вольтерри G має такий вигляд:

$$\forall\,\psi_1,\psi_2\in C(S;Z)$$

$$\|G\psi_1-G\psi_2\|_{C(S;Z)}\le r_2\|\psi_1-\psi_2\|_{C(S;Z)},\ r_2=\text{const}. \tag{1.42}$$

Відносно системи операторних рівнянь, які розглядаються, узагальненням умов ***а***) і ***б***) є:

г) для кожного $y\in C(S;X)$ і $\psi\in C(S;X)$ функції $t\to F(t)(\psi(t),y(t))$ і $t\to G(t)(y(t),\psi(t))$ визначені $\forall t\in S$ і належать $C(S;X^*)$, $C(S;Z)$ відповідно.

д) для $y\in C(S;X)$, $\psi\in C(S;Z)$ оператори $G(y,\cdot)\in(C(S;Z)\to C(S;Z))$, $F(\psi,\cdot)\in(C(S;X)\to C(S;X^*))$ і рівномірно ліпшицеві, тобто існують такі постійні r_1 і r_2, що виконуються умови:

$$\|F(\psi,y_1)-F(\psi,y_2)\|_{C(S;X^*)}\le r_1\|y_1-y_2\|_{C(S;X)}\ \ \forall\psi\in C(S;Z),\ \forall y_1,y_2\in C(S;Z),$$

$$\|G(y,\psi_1)-G(y,\psi_2)\|_{C(S;Z)}\le r_2\|\psi_1-\psi_2\|_{C(S;Z)}\ \ \forall y\in C(S;X),\ \forall\psi_1,\psi_2\in C(S;Z).$$

Наведемо відоме твердження, яке використовується при застосуванні принципу нерухомої точки до задач, що розглядаються.

<u>Лема 4</u> [5]. Якщо оператори G задовольняють умови (1.42), то для будь-яких $\psi_1,\psi_2\in C(S;Z)$ і $\forall t\in S$

$$\|G\psi_1-G\psi_2\|_{C([0;t];Z)}\le r_2\|\psi_1-\psi_2\|_{C([0;t];Z)},\quad r_2=\text{const}\,.$$

Наведемо приклади операторів Вольтерри, які задовольняють (1.42).

1. Нехай $h\in C(S)$, $0\le h(t)\le t$ для $\forall t\in S$ і $\{Q(t),\,t\in S\}$ – сімейство операторів з $X\to X$, яке задовольняє умови:

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Akbarov D. Optimization problems for the objects described by the system of operating equations of the Hammerstein type / D. Akbarov, V. Mizerny // Modelling and optimization of distributed parameter systems with applications to engineering. – Warsaw, Poland, 1995. – P. 6–7.

2. Мизерный В. Задачи и методы управления смешанными системами. / В. Мизерный, В. Ясинский // Контроль і управління в складних системах (КУСС-99) : Матеріали 5-ої міжнародної науково-технічної конференції. –Вінниця, 1999. – Т. 1. – С. 89–93.

3. Згуровский М. З. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами / М. З. Згуровский, В. С. Мельник. – К. : Наукова думка, 1999. – 630 с.

4. Мізерний В. М. Аналіз задач оптимального керування сингулярними змішаними системами / В.М. Мізерний // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2005. – № 2. – С. 41–47.

5. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М. : Мир, 1978. – 336 с.

6. Иваненко В. И. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В. И. Иваненко, В. С. Мельник. – К. : Наукова думка, 1988. – 288с.

7. Акбаров Д. Е. Методы управления смешанными системами. Операторный подход / Д. Е. Акбаров, В. С. Мельник, В. В. Ясинский. – К. : Вирій, 1998. – 224 с.

8. Згуровский М. З. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями / М. З. Згуровский, В. С. Мельник, А. Н. Новиков. – К. : Наукова думка, 2004. – 590 с.

9. Zgurovsky M. Z. Nonlinear Analysis and Control of Physical Processes and Fields / M. Z. Zgurovsky, V. S. Mel’nik. – Berlin; Heidenberg; New York : Springer-Verlag, 2004. – 508 p.

10. Мокин Б. И. Восстановление сигналов в многосвязных системах управления / Б. И. Мокин, В. Н. Мизерный // Автоматика. – 1986. – № 6. – С. 73–77.

11. Красносельский М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 417 с.

12. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов / М. М. Вайнберг. – М. : Наука, 1972.

13. Акбаров Д. Е. Об экстремальных задачах для уравнений типа Гаммерштейна / Д. Е. Акбаров, В. И. Иваненко // ДАН СССР, 1991. – Т. 320.

14. Barander J. Non convexes optimisation problems depending on a parameter / Barander J., Temam R. // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1975. – № 30:3. – P. 495–521.

15. Мельник В. С. Об оптимизации квазилинейных распределенных систем / В. С. Мельник, В. Н. Мизерный // Адаптивные САУ. – 1988. – № 16.

16. Акбаров Д. Е. Методы регуляризации и условия оптимальности экстремальных задач для объектов контроля, описываемых интегральными уравнениями с ограничениями / Д. Е. Акбаров, В. Е.Мизерный // Контроль и управление в технических системах : тезисы докладов НТК. – Винница, 1992.

17. Мизерный В. Н. Об идентификации многосвязных систем управления, описываемых нелинейными интегральными уравнениями / В. Н. Мизерный // Контроль и управление в технических системах : тезисы докладов НТК. –Винница, 1992.

18. Лионс Ж. Л. Управление сингулярными распределенными системами. / Ж. Л. Лионс. – М. :Наука, 1987.

19. Згуровский М. З. Оценивание параметров физических процессов с неизвестными границами методом дискретной регуляризации / М. З. Згуровский, А. Н. Новиков // Автоматика. – 1993. – № 33. – С. 15–25.

20. Данилов В. Я. Математичні моделі та методи оптимізації в гідроакустиці : автореферат дисертації на здобуття наукового ступеню доктора технічних наук, спеціальність 05.13.16 «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання та математичних методів в наукових дослідженнях» / В. Я. Данилов. – Вінниця, 1993.

21. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. – М. : Мир, 1972.

22. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1981. – 542 с.

23. Алексеев В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1979. – 430 с.

24. Куфнер А. Нелинейные дифференциальные уравнения / А. Куфнер, С. Фучик. – М. : Наука, 1988. – 304 с.

25. Мізерний В. М. Про керування змішаними операторними системами / В. М. Мізерний. Доповіді НАН України. – 2005. – № 4. – С. 63– 67.

26. Мізерний В. М. Дослідження математичних моделей змішаних керованих систем. Частина І / В. М. Мізерний, Д. Є. Акбаров. // Вісник Вінницьконо політехнічного інституту. – 2002. – № 2. – С. 81– 84.

27. Мізерний В. М. Дослідження математичних моделей змішаних керованих систем. Частина II / В. М. Мізерний, Д. Є. Акбаров. // Вісник Вінницьконо політехнічного інституту. – 2002. – № 5. – С. 91–96.

28. Мізерний В. М. Дослідження математичних моделей змішаних керованих систем. Частина III / В. М. Мізерний, Д. Є. Акбаров. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – № 2. – С. 120–125

29. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. / А. В. Фурсиков. – Новосибирск : Научная книга, 1999. – 350 с.

30. Мізерний В. М. Про екстремальні розвязки деяких операторних систем / В. М. Мізерний, Л. Тоскано. // Доповіді НАН України. – 2005. – № 5. – С. 55–59.

31. Рид М. Методы современной математической физики / М. Рид, Б. Саймон. – М. : Мир, 1977. Т. 1. – 257 с.

Наукове видання

Мізерний Віктор Миколайович

СИСТЕМИ ЗМІШАНОГО ТИПУ У ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ТА КЕРУВАННЯ

Монографія

Редактор С. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено В. Мізерним

Підписано до друку 10.08.2017 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. др. арк. 4,62.
Наклад 300 (1-й запуск 1–75) пр. Зам № В2017-23

Вінницький національний технічний університет,
ІРВЦ ВНТУ,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
press.vntu.edu.ua; *email*: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано ФОП Барановська Т. П.
21021, м. Вінниця, вул. Порика, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4377 від 31.07.2012 р.