

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

**А. С. Моргун**

**ГЕОТЕХНІЧНИЙ РОЗРАХУНОК  
ФУНДАМЕНТНИХ ПЛИТ З УРАХУВАННЯМ  
ДИЛАТАНСІЇ ТА ФОРМОЗМІНИ ОСНОВИ**

Монографія

Вінниця  
ВНТУ  
2018

---

Замовити цю книгу <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/398>

Видавництво Вінницького національного технічного університету

<https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog>

УДК 519.635:624.044:624.15

M79

*Рецензенти:*

**І. Я. Лучковський**, доктор технічних наук, професор

**М. Ф. Друкований**, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 25.01.2018 р.)

**Моргун, А. С.**

M79 Геотехнічний розрахунок фундаментних плит з урахуванням дилатансії та формозміни основи : монографія / А. С. Моргун. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 104 с.

ISBN 978-966-641-725-4

В роботі пропонується удосконалення адекватної моделі ґрунту для проведення практичних розрахунків плитних фундаментів, наведено теоретичні основи їх розрахунку за сучасним числовим МГЕ з використанням дилатансійної моделі, теорії пластичної течії. Теоретичні питання висвітлені в об'ємі, що дозволяє продумано підійти до оцінки роботи ґрунтів в основах фундаментів і проектування їх за межами пружності. Прикладання числового МГЕ до розв'язків лінійних та нелінійних задач геомеханіки, обґрунтовано теоретичними викладками, підкріплено та проілюстровано даними числового розрахунку. Може бути корисна для інженерів, що працюють в області механіки ґрунтів та її прикладань, а також аспірантів та студентів будівельних спеціальностей.

УДК 519.642:624.044:624.15

ISBN 978-966-641-725-4

© А. Моргун, 2018

Замовити цю книгу <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/398>

Видавництво Вінницького національного технічного університету

<https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog>

## ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ .....	5
ВСТУП .....	6
Розділ 1 ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ СТИСЛИВОСТІ ҐРУНТІВ .....	8
1.1 Головні напруження і деформації. Інваріанти. Октаедричні напруження та деформації .....	8
1.1.1 Глобальні види подання тензора напружень .....	9
1.1.2 Круги Мора для напружень. Тензор напружень в плоскій задачі .....	15
1.2 Основні характеристики стисливості ґрунтів .....	19
1.3 Методи дослідження. Математична модель роботи ґрунтової основи .....	22
Розділ 2 ОПІР ҐРУНТІВ ЗСУВУ .....	32
2.1 Закони термодинаміки в механіці ґрунтів .....	32
2.1.1 Енергія руйнування .....	32
2.1.2 Зворотні та незворотні процеси в ґрунтах .....	34
2.2 Дилатансія і закони незворотного деформування ґрунтів .....	36
Розділ 3 ПЛАСТИЧНА ПОВЕДІНКА ҐРУНТУ .....	45
3.1 Методика розрахунку НДС дискретних середовищ та математична теорія пластичності .....	45
3.2 Теорія пластичного потенціалу (інкрементальна теорія). Неасоційований закон пластичної течії. Кінематичні дилатансійні співвідношення .....	49
3.3 Поверхні текучості .....	53
3.4 Види критеріїв текучості ґрунтового середовища .....	56
3.4.1 Критерій текучості Кулона–Мора (максимальних дотичних напружень) .....	56
3.4.2 Критерій текучості Мізеса–Шлейхера–Боткіна .....	64

Розділ 4. ЧИСЛОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ФУНДАМЕНТНИХ ПЛИТ ЗА МГЕ ТА ЗАЛУЧЕННЯМ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ.....	69
4.1 Прогнозування поведінки фундаментної плити висотної будівлі за МГЕ.....	69
4.2 Оптимізація фундаментної плити висотної 10-ти поверхової будівлі за числовим методом граничних елементів.....	74
4.3 Пружно-пластичне моделювання геотехнічного процесу поведінки фундаментної плити під навантаженням.....	81
4.4 Прогнозування за методом граничних елементів осідання споруди Київстар.....	88
4.5 Вибір оптимального виду фундаментної конструкції для 14-ти поверхової житлової будівлі з підвалом.....	92
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	99

## ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

НДС – напружено-деформований стан

МСЕ – метод скінчених елементів

МГЕ – метод граничних елементів

ПФ – плитний фундамент

$\xi$  – точка прикладення сили  $P=1$

$x$  – точка нагляду

$\Gamma$  – границя досліджуваного елемента

$\sigma_{ij}^*$ ,  $u_{ij}^*$  – напруження та переміщення в фундаментальних рішеннях

Р. Міндліна для півплощини

СЕ – скінчений елемент

ДБН – державні будівельні норми і правила

ПК – програмний комплекс

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь

## ВСТУП

Однією з основних тенденцій сучасного будівництва є збільшення поверховості споруд, що викликає значні навантаження на основу та потребує вирішення різнопланових геотехнічних задач напрацювання нових типів конструктивно надійних і економічно обґрунтованих фундаментів для складних інженерно-геологічних умов. Спорудження висотних будівель викликає потребу при їх проектуванні робити прогнози НДС з використанням новітніх досягнень прикладної геомеханіки в будівництві.

Всі споруди в кінцевому рахунку передають своє навантаження через численні послідовно розташовані елементи будівельних конструкцій на ґрунти. У всіх випадках вирішальне значення має реакція ґрунту на це навантаження. Поведінка ґрунту в значній мірі залежить від попередньої історії його навантаження та ступеня насичення водою.

Ґрунтовий масив в загальному випадку являє собою складний конгломерат компактно розташованих частинок, що мають різну форму та орієнтацію. Установка математичного еквіваленту поведінки ґрунту в порівнянні з рідинами і твердими тілами є не простою задачею.

Одним із конструктивних напрацювань фундаментних конструкцій є плитні фундаменти і, як один із різновидів будівельних конструкцій, вони мають бути в стані стійкої надійної рівноваги. Основні методи їх розрахунку мають це забезпечити та бути достовірними. В будівництві необхідність в оцінці надійності споруд історично виникла раніше, ніж в інших областях техніки.

Методи розрахунку міцності, несучої спроможності будівельних конструкцій регламентовані нормативними будівельними документами. Кошторисна вартість підземної частини споруд складає 10–15 % загальної вартості при звичайних ґрунтових умовах і сягає 40–45 % при складних інженерно-геологічних умовах. Відповідно до світової статистики 80 % усіх аварій споруд відбувається внаслідок аварій та помилок при проектуванні, будівництві та експлуатації основ та фундаментів. Витрати на усунення цих явищ можливо порівняти лише з початковою вартістю будівництва. В зв'язку з цим *цінність розрахункового обґрунтування споруд є дуже високою.*

Обґрунтування проектних рішень багатопараметричної системи «основа–плитний фундамент» можливе лише за допомогою сучасних числових методів, реалізованих за допомогою комп'ютерних програмних комплексів, в яких використовуються сучасні підходи до моделювання таких систем.

Фундаментна плита є найбільш вигідна фундаментна конструкція з точки зору осадок і трудовитрат, оскільки плитні фундаменти дають суттєву економію матеріалу та вартості виконання будівельних робіт. Котловани дешевші ніж окремі шурфи.

До розгляду цієї актуальної задачі фундаментобудування для отримання прийнятної математичної ідеалізації механізму поведінки ґрунту під навантаженням залучено механіку суцільних та пористих середовищ. Найбільш суттєвим штрихом проектної роботи в будівництві є підвищення несучої здатності фундаментної конструкції (в даному випадку плити) за рахунок врахування пластичної роботи ґрунту. В ґрунтах працюють механізми саморегулювання середовища. Напруження з пластичних зон ґрунту передаються на сусідні, менш напружені області.

Врахування цих процесів при проектуванні фундаментних конструкцій дозволяє суттєво скоротити витрати на спорудження підземної частини висотних будівель з додержанням вимог надійності і довговічності будівельних конструкцій.

Поняття «система» широко використовується майже в усіх областях науки та техніки. Реакція системи на зовнішні дії розглядається як динамічна зміна стану системи, в процесі якої вона прагне мінімізувати деяку потенційну функцію. Математичне моделювання дає основу для її числового аналізу, за допомогою якого можна отримати дані не лише числового, але і прогнозного характеру.

Сучасний розвиток ЕОМ дає можливість вивчення НДС системи «основа–фундамент» засобами числового математичного моделювання. Ґрунтова основа – складова цієї системи, найбільш уразливий її елемент. 90 % аварій споруд пов'язані саме з її станом.

Ґрунти – природна субстанція, яку інженер-будівельник може змінити в малій мірі.

## Розділ 1 ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ СТИСЛИВОСТІ ҐРУНТІВ

Загальні механічні властивості ґрунтів, з яких складається наша планета Земля, з метою їх практичного застосування мають бути сформульовані у вигляді визначальних законів (у вигляді рівнянь стану). Ґрунт – несучільний (зернистий і дисперсний) пористий трифазовий матеріал, який *опирається лише стиску і зсуву*.

**Стисливість** – найбільш характерна властивість, що відрізняє ґрунти від твердих тіл, та зумовлюється:

- ущільненням від переупакування частинок ґрунту;
- пружністю кристалічної решітки мінералів ґрунту;
- зменшенням пор та кількості води в них.

Під *міцністю ґрунтів* розуміють їх властивість сприймати вплив зовнішніх зусиль без повного руйнування.

*Границя міцності* – це межа, при перевищенні якої настає повне руйнування ґрунту і він більше не в змозі сприймати додаткові зусилля. Ґрунт перебуває у *міцному стані*, якщо *зусилля*, які він отримує, *менші від границі його міцності*.

Для ґрунтової основи головною характеристикою є її **стисливість**, що визначається *прийнятною теорією міцності*. Для споруди такою характеристикою є жорсткість коробки, яка визначається розрахунковою схемою будівлі.

Напруження, що виникають в окремих точках пружно-пластичного ґрунтового середовища, можуть перебільшувати внутрішні зв'язки (граничну міцність). Це приводить до порушення існуючої рівноваги – втраті стійкості середовища.

Для інженерної практики вельми важливо визначити максимальні напруження, що діють у ґрунтовому середовищі основи, при яких воно буде знаходитись в стані рівноваги.

### 1.1 Головні напруження і деформації. Інваріанти. Октаедричні напруження та деформації

Сучасний стан уявлень про варіанти подання напруженого стану в точках середовища такий:

- глобальні види подання тензора напружень;
- використання еліпсоїда напружень Ламе. Круги Мора.



### 1.1.1 Глобальні види подання тензора напружень

Вирішення проблем міцності фундаментів тісно пов'язане з аналізом їх напружено-деформованого стану (НДС).

Хоча молекулярна природа будови матерії точно установлена, в багатьох дослідженнях поведінки матеріалів важливим є поведінка не окремих молекул, а лише матеріалу як цілого. В цих випадках при поясненні досліджувальних макроскопічних процесів не враховують молекулярну структуру середовища, а вважають, що середовище неперервно розподілене по всьому об'єму і цілком заповнює цей об'єм. Така концепція *суцільності* середовища є основним постулатом механіки суцільних середовищ (континуума). В рамках обмежень, при яких гіпотеза суцільності є виправданою, ця концепція забезпечує основу для єдиного вивчення поведінки твердих тіл, рідин і газів.

Прийняття гіпотези суцільності як основи математичного описання поведінки матеріалів означає, що поля таких величин як напруження, переміщення можна виражати кусочно-неперервними функціями координат і часу.

Однорідним називається матеріал, що має однакові властивості у всіх точках. Матеріал буде ізотропним по відношенню до якоїсь властивості, якщо ця властивість в точці однакова по всіх напрямках. Матеріал є анізотропним по відношенню до тих властивостей, які залежать від напрямку в точці.

Щоб охарактеризувати напружений стан в довільній точці ґрунтового масиву виділяють нескінченно малий об'єм за допомогою трьох взаємно перпендикулярних площин, рис. 1.1. Якщо відомі напруження на трьох взаємно перпендикулярних гранях цього елементарного об'єму (тетраедра), то легко обрахувати напруження на довільній нахиленій площині. Завдання тензора напружень в деякій точці повністю характеризує напружений стан в ній. Другий числовий індекс в компонентах тензора напружень зазвичай позначає напрям нормалі до площини.

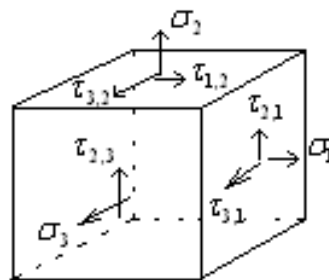


Рисунок 1.1 – Елементарний тетраедр

Під кутом  $45^\circ$  до головних осей на площадках будуть знаходитися максимальні та мінімальні дотичні напруження, рис.1.2:

$$\begin{aligned} \tau_{1,3}^{\max} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; & \tau_{1,3}^{\min} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \\ \tau_{1,2}^{\max} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; & \tau_{1,2}^{\min} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; & ; & (1.1) \\ \tau_{2,3}^{\max} &= \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; & \tau_{2,3}^{\min} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \end{aligned}$$

а самі ці площадки – це площадки головних дотичних напружень.

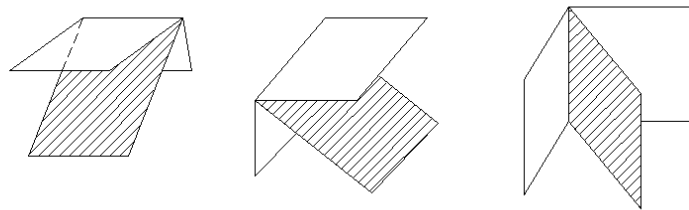


Рисунок 1.2 – Площинки головних дотичних напружень

Поняття напруження пов'язано з напрямком площадки, на якій це напруження діє, а оскільки через будь-яку точку можна провести нескінчену кількість площадок, то і напруження в цій точці може мати нескінчену кількість значень.

При зміні напрямку площадки кінець вектора напружень описує центральну поверхню другого порядку, а саме – еліпсоїд, який називають еліпсоїдом напружень Ламе.

Із аналітичної геометрії відомо, що коли сумістити початок координат з центром еліпсоїда, а осі координат направити по осях симетрії, то еліпсоїд сповна визначиться трьома величинами, а саме – його головними півосями, які відповідно рівні головним напруженням  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Таким чином, *еліпсоїд напружень є геометричним зображенням тензора напружень*. Півосі еліпсоїда зображують нормальні компоненти тензора напружень чи вектора напружень.

Якщо брати в якості осей координат три головні напрямки еліпсоїда Ламе, то тензор напружень в точці можна подати квадратною матрицею виду:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}. \quad (1.2)$$

В теорії пластичності зазвичай тензор напружень подають у вигляді суми двох складових: шарового тензора напружень та девіатора напружень, вони мають особливе значення і в механіці суцільного середовища.

Тензор напружень можна подати складовим (рис. 1.3) із тензора девіаторного та шарового тензора:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{vmatrix}, \quad (1.3)$$

де

$$\sigma_n = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33});$$

$$T_{\sigma} = H_{\sigma} + D_{\sigma}; \quad T_{\varepsilon} = H_{\varepsilon} + D_{\varepsilon}.$$

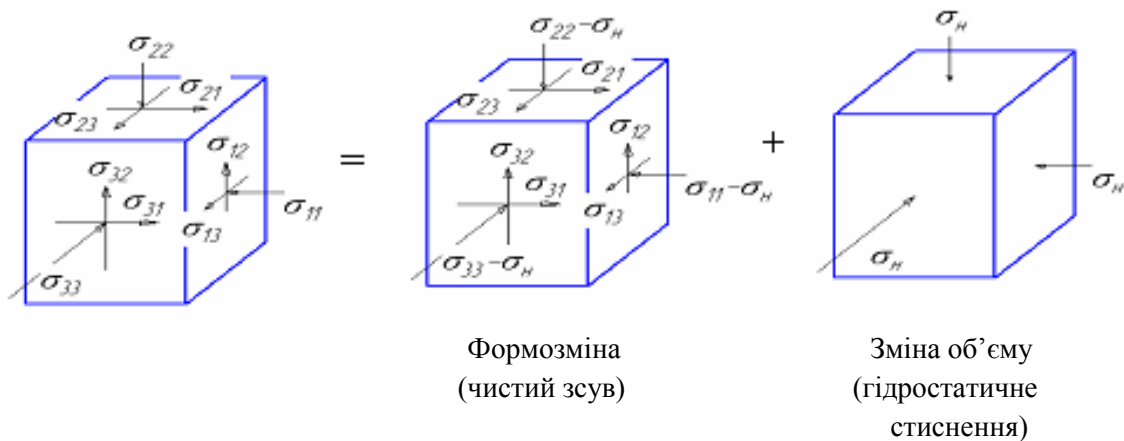


Рисунок 1.3 – Девіаторна та шарова складові тензора напружень

Шаровий тензор та девіатор грають особливу роль в механіці суцільних середовищ. Шаровий тензор напружень та шаровий тензор деформацій пов'язані лише із зміною об'єму, а девіатор напружень та девіатор деформацій – із зміною форми.

Деформацією називають зміну форми континуума, це реакція (відповідь) матеріалу на прикладені навантаження. Варіанти подання деформацій континуума :

- міра Коші  $\varepsilon^c = \Delta l / l_0$  ;
- міра Генкі  $\varepsilon^H = \lg \lambda = (\lambda - 1) - \frac{1}{2}(\lambda - 1)^2 + \dots$  ;
- міра Сквейгера  $\varepsilon^s = 1 - \frac{1}{\lambda}$  ;
- міри Гріна  $\varepsilon^G = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)$  ;
- міри Алмансі  $\varepsilon^A = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\lambda^2})$  ,

де  $l_0$  – початкова довжина елемента до деформацій;  $l$  – кінцева довжина елемента після деформацій;  $\frac{l}{l_0} = \lambda$  – головна частина деформацій.

У всіх випадках, коли деформації не можна вважати нескінченно малими і потрібно враховувати деформації другого і більш високих порядків малості виникає геометрична нелінійність. Міри Алмансі і Гріна використовуються для описання великих (кінцевих) пружних деформацій.

Для описання пластичних деформацій і течії потрібно користуватись мірою Генкі.

Щоб визначити тензор напружень в точці середовища потрібно шість параметрів.

В ізотропному середовищі орієнтація тензора напружень не грає ніякої ролі і його можна подати в тривимірному просторі головних напружень точкою  $P$  з координатами  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Часто буває зручніше використовувати іншу систему координат, однією із осей якої є вісь  $\Delta$ , яка визначається рівнянням  $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  і є віссю потрібної симетрії для тригранного координатного кута, бісектрисою між осями  $o\sigma_1, o\sigma_2, o\sigma_3$ .

Це вісь гідростатичного тиску  $p$  та перпендикулярної до неї осі – девіатора.

Девіаторна вісь проходить в октаедричній (девіаторній) площині, яка перпендикулярна до гідростатичної осі.

Октаедрична площадка складає рівні кути з головними напрямками напружень (рис. 1.4, 1.5).

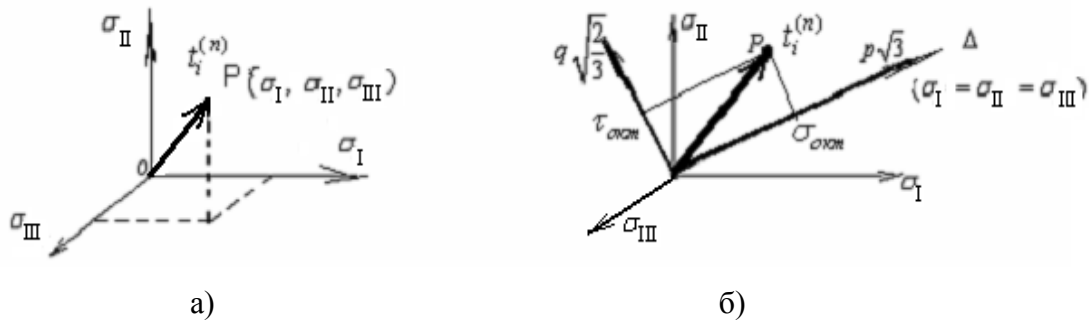


Рисунок 1.4 – а) простір головних напружень;  
б) осі гідростатичного тиску та девіатора

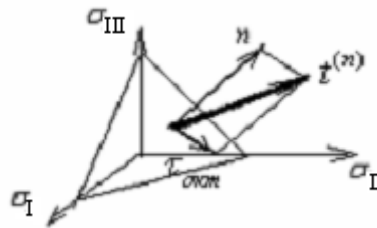


Рисунок 1.5 – Октаедрична площадка та нормаль  $n$  до неї

В процесі розв’язання практичних задач великий інтерес викликають площадки, рівнонахилені до всіх трьох головних осей – октаедричні площадки. Якщо провести їх в кожному із координатних вузлів, так, щоб вони відсікали на осях рівні відрізки, отримаємо октаедр, рис. 1.6. Згідно з поняттями механіки суцільних середовищ, на цих площадках будуть діяти нормальні октаедричні напруження, рівні гідростатичному тиску

$$\sigma_{окт} = \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \quad (1.4)$$

і октаедричні дотичні напруження

$$\begin{aligned} \tau_{окт} &= \frac{2}{\sqrt{6}} \sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{1,2}^2 + \tau_{3,2}^2 + \tau_{1,3}^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\tau_{окт} = G \cdot \gamma_{окт},$$

де  $\sigma_m, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  відповідно гідростатичний тиск та головні напруження;  $I_2(D_\sigma)$  – другий інваріант девіатора напружень.

В ґрунтах об'ємна незворотна деформація виникає одночасово від дії як інтенсивності дотичних напружень  $\tau_i$ , так і від інтенсивності нормальних напружень (узагальнених напружень)  $\sigma_i$ , які є інваріантами як девіатора напружень, так і тензора напружень і часто знаходять використання в математичних моделях роботи ґрунту.

Інваріанти тензора напружень  $T_\sigma$  і тензора деформацій  $T_\varepsilon$  – основні характеристики напружено-деформованого стану (НДС) в точці, оскільки вони не залежать від вибору системи координат (інваріантні до перетворення координат, а  $T_\sigma$  і  $T_\varepsilon$  залежать від прийнятої системи координат).

Зміна об'єму ґрунту може йти лише при дисипації механічної енергії, яку враховує дилатансійна теорія пористих середовищ.

$$\tau_i = \sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (1.6)$$

$$\sigma_i = \sqrt{3} \cdot \sqrt{I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (1.7)$$

Октаедричні деформації об'єму на девіаторній площині (деформації по нормалі)

$$\nu \rightarrow \varepsilon_{окт} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{\theta}{3}. \quad (1.8)$$

та октаедричний зсув (деформації по дотичній)

$$\rightarrow \gamma_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (1.9)$$

Інтенсивність деформацій форми

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2)}, \quad (1.10)$$

де  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – максимальні головні деформації зсувів.

Октаедричні площадки мають низку особливостей, які спрощують розгляд напружень на них при аналізі умов руйнування.

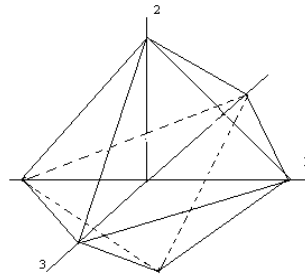


Рисунок 1.6 – Октаедр

Вище наведені різні способи глобального описання тензора напружень в точці. В деяких випадках необхідно знати величину і вигляд тензора напружень незалежно від площадки, на якій діють напруження. Тоді в просторі головних напружень чи в площині можна подати «траекторію», що показує зміну тензора напружень, який виникає в матеріалі в процесі навантаження.

### 1.1.2 Круги Мора для напружень. Тензор напружень в плоскій задачі

Крім глобальних видів подання тензора напружень (див. рис. 1.3) Мором досліджувалась також більш зручна методика, заснована на використанні еліпсоїда напружень Ламе. Круги Мора є основою більшості практичних розрахунків в механіці ґрунтів при залученні теорії пластичності. При зміні положень площадки, де знаходиться точка  $P$ , кінець вектора напружень описує центральну поверхню другого порядку, а саме – еліпсоїд Ламе, який є геометричним зображенням тензора напружень чи вектора напружень.

Зручне двовимірне графічне подання тривимірного граничного стану в точці дають відомі круги Мора. Для роз'яснення цього питання знов візьмемо в якості осей координат головні осі тензора напружень в точці  $P$ , рис. 1.7.

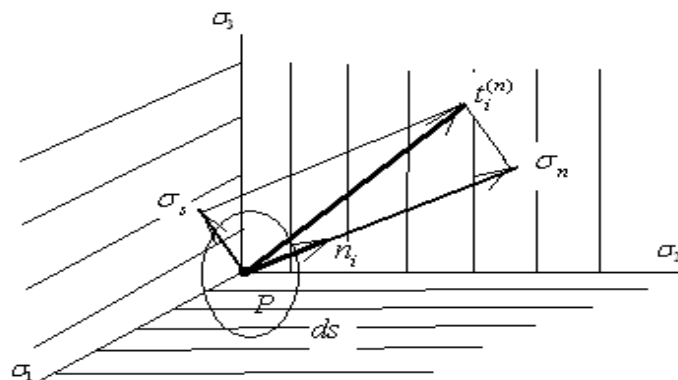


Рисунок 1.7 – Вектор напружень  $t_i^{(n)}$  в точці  $P$  на довільно орієнтованій площині  $ds$

Вектор напружень  $t_i^{(n)}$  в т. Р має нормальну і дотичну компоненти

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \sigma_n^2 + \sigma_s^2 &= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2\end{aligned}\quad (1.11)$$

де  $n_i$  – одиничний напрямний вектор зовнішньої нормалі (напрямний косинус зовнішньої нормалі). Комбінуючи рівності (1.11) з тотожністю  $n_i n_i = 1$  і розв’язуючи відносно напрямних косинусів отримаємо

$$\begin{aligned}(n_1)^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \sigma_s^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} & (n_2)^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) + \sigma_s^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ (n_3)^2 &= \frac{(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \sigma_s^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}\end{aligned}\quad (1.12)$$

На цих рівностях засновується побудова кругів Мора на площині напружень, де вісь  $\sigma_n$  є віссю абсцис, а вісь  $\sigma_s$  віссю ординат. Кожна точка напружень (пара величин  $\sigma_n$  і  $\sigma_s$ ) на площині напружень  $(\sigma_n, \sigma_s)$  відповідає вектору напружень  $t_i^{(n)}$ , а напружений стан в точці Р можна подати затіненою областю, обмеженою кругом Мора для напружень. Зсувні  $\sigma_s$  (дотичні) напруження на цьому графіці подаються векторами, направленими вертикально вгору. Ці вектори беруть початок на кінцях векторів, що зображують нормальні напруження, а не з початку координатної системи. Всі нормальні напруження відкладаються векторами по горизонталі від початку координат. Вектори, що являють собою  $\sigma_n$  і  $\sigma_s$  по площадках проміжного напрямку, знаходяться у взаємному зв’язку між собою.

При цьому відрізок, що з’єднує кінець  $\sigma_s$  з кінцем вектора меншого головного напруження  $\sigma_3$  цілком відповідає величині повного напруження, що діє по площадках проміжного напрямку і визначає собою орієнтацію лінії його дії відносно вектора нормальних напружень.

Кут між нормаллю до площадки і вектором повного напруження відомий під назвою кута відхилення повного напруження  $\alpha$ . Якщо провести таку побудову для ряду проміжних напрямків, то отримаємо, що при визначених значеннях головних напружень кінці векторів, що є зсувними напруженнями  $\sigma_s$  по площадках, пов’язаних з проміжним напрямком, ляжуть на деяке коло. Це коло і є круг напружень Мора.



Діаметр кругів Мора  $\sigma_1 - \sigma_3$  називають деколи девіатором напружень. І так, побудований таким чином круг – це *геометричне місце* векторів зсувних напружень.

Побудова на рис. 1.8 підтверджує, що максимальне напруження зсуву рівне  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ .

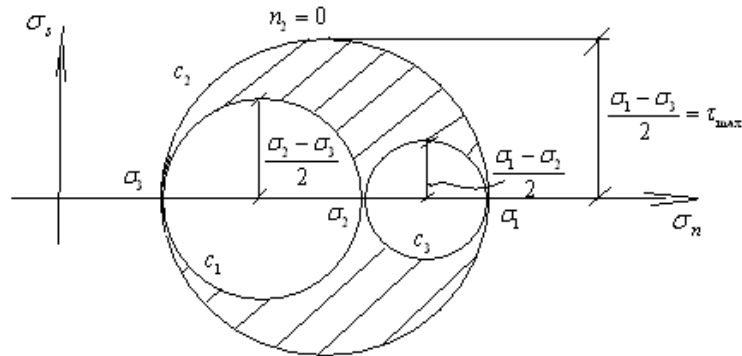


Рисунок 1.8 – Гранична крива Мора

Нехай в точці М середовища на деякій площадці діє вектор напружень під кутом  $\alpha$  до площадки. Якщо інтенсивність цього напруження збільшується, а нахил залишається, то пластичні деформації виникатимуть при проковзуванні по площині площадки коли інтенсивність напружень досягне деякого критичного значення.

Точка, що відповідає напруженню в площині Мора (рис. 1.9), переміщатиметься вдовж ОЕ до тих пір, поки не досягне точки Р, що відповідає межі пружності і початку пластичної течії.

Крива  $R$  (гранична крива) не залежить від площадки, на якій діє напруження, якщо середовище ізотропне. Вона не залежить також і від точки М, якщо середовище однорідне. В такому випадку крива  $R$  повністю характеризує поведінку матеріалу в довільній точці і називається **граничною кривою**. Якщо середовище знаходиться в рівновазі, то кожна його точка відповідає точці на кругу Мора.

Якщо цей круг знаходиться всередині граничної поверхні і не дотикається до неї, **має місце надлишок рівноваги** і малі прирости напружень викликають малі прирости деформацій.

Круг Мора має дотикатися граничної кривої в точці, що відповідає критичному напруженню (кожний із кругів Мора задається абсцисою його центра  $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$  і радіусом  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ). В цьому випадку **говорять про граничну рівновагу**, коли навіть невеликий приріст напружень може привести до великих деформацій, а деколи до пластичної течії.



Деякі комбінації інваріантів тензорів напружень та деформацій

$$I_1 = \sigma_{ij} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad I_1 = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad (1.16)$$

$$2I_2 = \sigma_{ij}\sigma_{ji} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2; \quad 2I_2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2; \quad (1.17)$$

$$3I_3 = \sigma_{ij}\sigma_{ik}\sigma_{ki} = \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3; \quad 3I_3 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki} = \varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 + \varepsilon_3^3. \quad (1.18)$$

## 1.2 Основні характеристики стисливості ґрунтів

Кінцева перевірка будь-якої теорії в техніці базується на її спроможності *передбачити поведінку споруди*, а ступінь прийнятності рішень залежить і від вхідних параметрів. Несуча здатність фундаментної конструкції зумовлюється *тільки ґрунтовою основою*.

Про стисливість матеріалів судять по зміні їх об'єму при прирості навантаження.

Деформації частинок (зерен) ґрунту – пружні. Найбільш повне уявлення про роботу і стан ґрунту дають його фізико-механічні характеристики.

Показники властивості породи мають прикладне значення та грають роль числових вхідних параметрів і саме вони визначають ступінь надійності і точності виконуваних розрахунків з теоретичного передбачення стисливості ґрунтових основ. Проведено систематизацію та отримано залежності для фізико-механічних характеристик ґрунтів, які слугують вхідними параметрами сучасних розрахункових нелінійних моделей, що дають можливість максимально використовувати природну несучу здатність ґрунтів.

При стисканні ґрунту відбувається безперервне перегрупування його частинок, йде поступовий процес дренажу (витіснення із пор води і повітря), стиснення скелету, води, повітря і передача напружень на скелет ґрунту. Скелет ґрунту та вода, будучи практично нестикуваними, не можуть здійснити під навантаженням значного впливу на зменшення об'єму зразка ґрунту. Тому важливо віднести це явище за рахунок витіснення води та повітря із пор.

Із вище сказаного можна зробити висновок, що здатність ґрунту стискатись, в незначній мірі визначається стискуваністю матеріалу, з якого складається скелет. Швидше – це функція рухомості цього матеріалу, тобто залежить від жорсткості зв'язків та розміщення часток ґрунту, а в дрібнозернистих ґрунтах – від ступеня зв'язності окремих частинок (це

пластичні деформації). Відносно зміщення частинок ґрунту після зняття тиску не приводить до відновлення початкового положення.

Згідно з трифазовою моделлю К. Терцагі (1925 р.) [13] ґрунт складається із скелету та пор, які можуть бути заповнені водою (рис. 1.10):

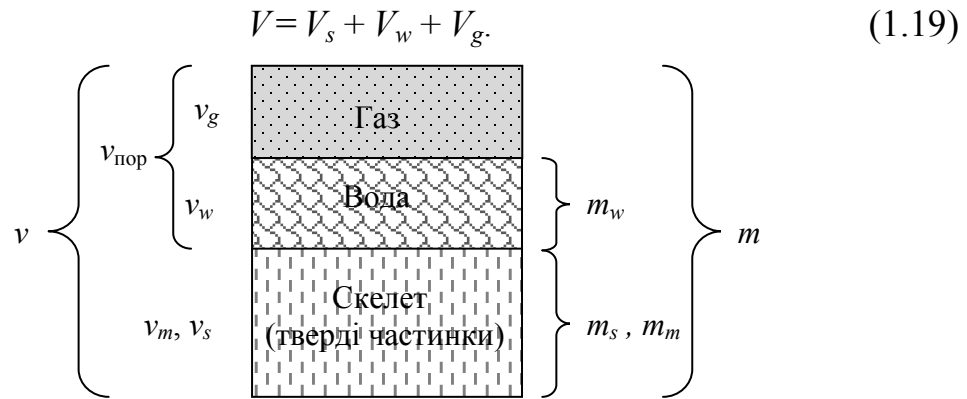


Рисунок 1.10. – Графічна схема ґрунту як трифазної системи (спрощена ідеальна модель К. Терцагі)

Рис. 1.10 розглядається як наочна схема, оскільки в дійсності такого розподілу не буває, та при ознайомленні з окремими складовими (фазами) ґрунту зображення надає суттєву допомогу.

В механіці ґрунтів отримало широке розповсюдження співвідношення об'ємів, до числа яких відносяться:

- пористість:

$$n = \frac{V_{пор}}{V} = \frac{\rho_s - \rho_{dry}}{\rho_s} 100\% ; \quad (1.20)$$

- ступінь вологості:

$$Sr = \frac{V_w}{V_{пор}} = \frac{\rho_s - \rho_{dry}}{\rho_w} \cdot V_{пор} ; \quad (1.21)$$

- коефіцієнт пористості:

$$e = \frac{V_{пор}}{V_s} . \quad (1.22)$$

Коефіцієнт пористості  $e$  знаходить широке використання завдяки тому, що при стисненні зразка ґрунту знаменник ( $V_s$ ) залишається незмінним.

На рис. 1.10 позначено масу зразка (проби) ґрунту –  $m$ , масу скелету –  $m_s$ , масу води –  $m_w$ . Співвідношення цих мас складає вологість ґрунту

$$W = m_w / m_s. \quad (1.23)$$

Основними показниками фізичних властивостей ґрунту, що визначаються експериментально із монолітів, які відбираються в процесі інженерно-геологічних вишукувань, є:

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алейников С. М. МГЕ в контактных задачах для упругих пространственно-неоднородных оснований / С. М. Алейников. – М. : АСВ, 2000. – 754 с.
2. Балсон Ф. С. Заглублённые сооружения: статическая и динамическая прочность / Ф. С. Балсон. – М. : Стройиздат, 1991. – 241 с.
3. Барвашов В. А. Чувствительность системы «основание–сооружение» / В. А. Барвашов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2008. – № 3. – С. 10–14.
4. Бартоломей Л. А. Прогноз осадок сооружений с учетом совместной работы основания, фундамента и надземных конструкций : автореф. дис. на соискание науч. степени док. техн. наук : спец. 05.23.02 «Основания и фундаменты» / Л. А. Бартоломей. – Пермь, 2003.
5. Бишоп А. У. Параметры прочности при сдвиге ненарушенных и перемятых образцов грунта / А. У. Бишоп ; пер. с англ. под ред. В. Н. Николаевского // Механика. Новости в зарубежной науке. Определяющие законы механики грунтов. – 1975. – № 2. – С. 7–75.
6. Бойко І. П. Напружено-деформований стан ґрунтового масиву при прибудові нових фундаментів поблизу існуючих будинків / І. П. Бойко, В. О. Сахаров // Основи і фундаменти : міжвідомчий науково-технічний збірник. – К. : КНУБА, 2004. – Вип. 28. – С. 3–10.
7. Бойко И. П. Напряженно-деформированное состояние упруго-пластического дилатирующего основания свайных фундаментов / И. П. Бойко // Основания и фундаменты. – 1986. – Вып. 19. – С. 7–9.
8. Бойко И. П. Теоретические основы проектирования свайных фундаментов на упруго-пластическом основании / И. П. Бойко // Основания и фундаменты. – 1985. – № 18. – С. 11–18.
9. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Телес, Л. Вроубел : пер. с англ. Л. Г. Корнейчука под ред. Э. И. Григолюка. – М. : Мир, 1987. – 524 с.
10. Верюжский Ю. В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики / Ю. В. Верюжский. – К. : Вища школа, 1978. – 183 с.
11. Верюжский Ю. В. Методы анализа безопасности объекта «Укрытие» / Ю. В. Верюжский // Проблемы чернобыльской зоны відчуження : науково-технічний збірник. – 1998. – Вип. 6. – С. 58–70.

12. Визначення основних параметрів геологічної ситуації основи / А. С. Моргун, А. В. Ніцевич, І. М. Меть, О. Е. Тимошенко // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві : збірник наукових праць ІнБТЕГП. – 2007. – № 4. – С. 8–12.

13. Гольдштейн М. Н. Механические свойства грунтов / М. Н. Гольдштейн. – М. : Стройиздат, 1971. – 368 с.

14. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.

15. Городецкий А. С. Информационные технологии расчёта и проектирования строительных конструкций : учебное пособие / А. С. Городецкий, В. С. Шмуклер, А. В. Бондарев. – Харьков : НТУ ХПИ, 2003. – 889 с.

16. Жемочкин Б. М. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. М. Жемочкин, А. П. Сеницын. – М. : Стройиздат, 1962. – 239 с.

17. Зоценко М. Л. Підсилення основ і фундаментів при реконструкції будівель / М. Л. Зоценко, Ю. Л. Винников, О. В. Борт // Бетон і железобетон в Україні. – 2006. – № 1. – С. 2–8.

18. Ильюшин А. А. Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность / сост. Е. А. Ильюшина, М. Р. Короткина. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 480 с.

19. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.

20. Криксунов Э. З. О расчетных моделях сооружений и возможностях их анализа. CAD Master [Электронный ресурс] / Э. З. Криксунов, А. В. Перельмутер. – 2000. – № 3. – С 38–43. – Режим доступа до журналу. : [http://csf.ru/file/tpxiMsktagvovrpv7790842/cm\\_03\\_rasch\\_modeli.pdf](http://csf.ru/file/tpxiMsktagvovrpv7790842/cm_03_rasch_modeli.pdf).

21. Мангушев Р. А. Плитно-свайный фундамент для здания повышенной этажности / Р. А. Мангушев, А. Б. Фадеев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2008. – № 1. – С. 15 – 19.

22. Метод конечных элементов: теория и численная реализация. Программный комплекс «ЛПА-Windows» / А. С. Городецкий, И. Д. Евзеров, Е. Б. Стрелец-Стрелецкий [и др.]. – К. : ФАКТ, 1997. – 138 с.

23. Моделювання за МГЕ процесу підсилення стрічкового фундаменту палями / А. С. Моргун, І. В. Маєвська, А. В. Ніцевич, Н. В. Блащук // Вісник ВПІ. – 2008. – № 3. – С. 4–8.

24. Моргун А. С. Врахування перерозподілу зусиль під час дослідження напружено-деформованого стану сумісної роботи системи



«основа–фундамент–будівля» [Електронний ресурс] / А. С. Моргун, І. М. Меть // Наукові праці ВНТУ. – 2009. – № 2. – С. 2–5. – Режим доступу до журн.: [http://www.nbuu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009\\_2\\_ua/2009-2.files/uk/09asmbfc\\_ua.pdf](http://www.nbuu.gov.ua/e-journals/VNTU/2009_2_ua/2009-2.files/uk/09asmbfc_ua.pdf)

25. Моргун А. С. Діагностування напружено-деформованого стану каркасної монолітної будівлі за методами скінченних та граничних елементів / А. С. Моргун, В. О. Попов, І. М. Меть // Вісник ВПІ. – 2007. – № 6. – С. 3–7.

26. Моргун А. С. Ідентифікація несучої здатності паль методами нечіткої логіки й методом граничних елементів [Електронний ресурс] / А. С. Моргун, Д. І. Кательніков, І. А. Моргун // Наукові праці ВНТУ. – 2008. – № 2. – С. 1–7. – Режим доступу до журн. : [http://www.nbuu.gov.ua/e-journals/VNTU/2008-2/2008-2.files/uk/08masmbe\\_uk](http://www.nbuu.gov.ua/e-journals/VNTU/2008-2/2008-2.files/uk/08masmbe_uk).

27. Моргун А. С. Комп'ютерні технології розрахунку фундаментних конструкцій на основі методу граничних елементів : монографія / А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 162 с.

28. Моргун А. С. Комп'ютерна технологія розрахунку паль пальового поля висотних будівель із збільшеним кроком паль / А. С. Моргун, А. В. Ніцевич, І. А. Моргу // Вісник ВПІ. – 2007. – № 5. – С. 41–44.

29. Моргун А. С. Метод граничних елементів в розрахунках паль / А. С. Моргун. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2000. – 130 с.

30. Моргун А. С. Моделювання дилатансійного середовища ґрунту системи «паль–основа» за МГЕ / А. С. Моргун // Основи і фундаменти : міжвідомчий науково-технічний збірник. – К. : КНУБА. – 2002. – Вип. 27. – С. 84–89..

31. Моргун А. С. Пластична задача механіки руйнувань ґрунтової основи будівель за методом граничних елементів / А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич // Збірник НИИСК. – К., 2008. – № 71, книга І. – С. 88–92.

32. Моргун А. С. Прогнозування взаємодії паль пальового поля будівлі за методом граничних елементів / А. С. Моргун, А. В. Ніцевич, І. А. Моргу // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві : збірник наукових праць ІнБТЕГП. – 2007. – № 4. – С. 23–28.

33. Моргун А. С. Прогнозування впливу води на напружено-деформований стан лесової основи пальових фундаментів / А. С. Моргун, І. А. Моргун // Вісник ВПІ. – 2007. – № 3. – С. 20–23.

34. Моргун А. С. Формування матриці впливу методу граничних елементів при врахуванні дії вертикальних і горизонтальних напружень [Електронний ресурс] / А. С. Моргун, А. В. Ніцевич, І. М. Меть // Наукові праці ВНТУ. – 2007. – № 1. – С. 1–5. – Режим доступу до журн. : <http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2007-1/ukr/07masorp>.
35. Моргун А. С. Деформативність ґрунту при пластичній формозміні та дилатансії : монографія / А. С. Моргун. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 107 с.
36. Моргун А. С. Пружно-пластичні аспекти прогнозу за МГЕ деформування основи буронабивних та буроін'єкційних паль : монографія / А.С. Моргун. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 118 с.
37. Навантаження і впливи : ДБН В 1.2-2:2006. – [Чинний від 2007–01–01]. – К. : МІНБУД України, 2006. – 60 с.
38. Николаевский В. Н. Современные проблемы механики грунтов / В. Н. Николаевский // Определяющие законы механики грунтов. – М. : Стройиздат, 1975. – С. 210–227.
39. Оксанович Л. В. Невидимый конфликт / Л. В. Оксанович. – М. : Стройиздат, 1981. – 191 с.
40. Основания зданий и сооружений : СНиП 2.02.01-83. – [Действителен с 1985. 01. 01]. – М. : Стройиздат, 1984. – 49 с.
41. Основи і фундаменти будівель та споруд : ДБН В.2.1–10–2009. – [Чинний від 2009–07–01]. – К. : МІНБУД України, 2009. – 199 с.
42. Пилягин А. В. Проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений : уч. пособие / А. В. Пилягин. – М. : АСВ, 2006. – 248 с.
43. ПК ЛИРА, версія 9.0. Программный комплекс для расчета и проектирования конструкций : справочно-теоретическое пособие / под ред. академика АИН Украины А. С. Городецкого. – К. , 2003. – 464 с.
44. Проблеми ресурсу фундаментних конструкцій при реконструкції будівель / А. С. Моргун, А. В. Ніцевич, І. М. Меть, І. А. Моргун // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві : збірник наукових праць ІнБТЕГП. – 2006. – № 3. – С. 28–35.
45. Сахаров В. О. Моделювання багатоповерхового будинку на нелінійній основі в умовах прибудови / В. О. Сахаров // Світ геотехніки. – 2006. – № 4. – С. 25–28.
46. Свайные фундаменты : СНиП 2.02.03 – 85 [Действителен с 1987–01–01]. – М. : Стройиздат, 1985. – 92 с.
47. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.



48. Седов Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1970. – 540 с.
49. Трофимчук А. Н. Надёжность систем сооружения – грунтовое основание в сложных инженерно-геологических условиях / А. Н. Трофимчук, В. Г. Черный, В. И. Черный. – К. : Полиграфконсалтинг, 2006. – 248 с.
50. Улицкий В. М. Геотехническое сопровождение реконструкции городов / В. М. Улицкий, В. Г. Шашкин. – М. : ABC, 1999. – 327 с.
51. Харр М.Е. Основы теоретической механики грунтов / М. Е. Харр. – М. : Мир, 1971. – 320 с.
52. Хоу В. К. Основы инженерного грунтоведения / В. К. Хоу. – М. : Стройиздат, 1966. – 460 с.
53. Abovskiy N. P. Energy principle and its application for the creation of controlled structures / Spatial structures in new and renovation projects of Building and construction // Proceeding international congress ICSS. – Moscow. Russia, 1998. – P. 307–311.
54. Drucker D. C. Soil mechanics and plastic analysis or limit design / D. C. Drucker, W. Prager // Quarterly Applied Mathematics. – 1952. – № 2.
55. Drucker D. C. Soil mechanic and work – hardening theories of plasticity / D. C. Drucker, R. E. Gibson, D. S. Henkel. – Frans. Amer. Soc. Civ. Eng., 1957
56. Robinson J. Element evaluation. A set of assessment parts and tests / J. Robinson // Proceeding of Finite Element Methods in the commercial environment. – 1978. – V. 1.
57. Timoshenko S. Theorie des constructions / S. Timoshenko, D. H. Young. – Paris : Librairie Polytechnique Beranger, 1949. – P. 412–416.
58. Timoshenko S. Resistance des matériaux : T. 1 / S. Timoshenko. – Paris : Librairie Polytechnique Beranger, 1949.
59. Melan E. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im innern beanspruchten Halbscheibe / E. Melan. Z. Angew. Math. Mech. 12, – P. 343–346. (1932).
60. Mindlin R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid / R. D. Mindlin // Physics. – 1936. – No. 7. – P. 195–202.
61. Owen D. Finite elements in plasticity: Theory and Practice / D. Owen, E. Hinton. – Svansia : U. K. – 1900.
62. Reisner H. Initial stresses and sources of initial stresses / H. Reisner // ZAMP. – 1931. – BdII. – S. 1–8.

*Наукове видання*

**Моргун Алла Серафимівна**

**ГЕОТЕХНІЧНИЙ РОЗРАХУНОК ФУНДАМЕНТНИХ ПЛИТ  
З УРАХУВАННЯМ ДИЛАТАНСІЇ ТА ФОРМОЗМІНИ ОСНОВИ**

Монографія

Редактор С. Малішевська  
Оригінал-макет А. Моргун

Підписано до виготовлення 6.04.2018 р.

Системні вимоги:

процесор Pentium; 512 Mb RAM;

Windows XP,7,8,10; Acrobat Reader 6.0+.

Один електронний оптичний диск (CD-ROM); Обсяг даних 4,1 Мб.

Наклад 100 (1-й запуск 1–30) прим. Зам. № E2018-01

Видавець та виготовлювач – Вінницький національний технічний університет,

Інформаційний редакційно-видавничий центр.

Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ, ГНК, к. 114,

м. Вінниця, 21021, тел.: (0432) 59-85-32, 59-81-59.

[press.vntu.edu.ua](http://press.vntu.edu.ua); *email*: [kivc.vntu@gmail.com](mailto:kivc.vntu@gmail.com).

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

---

Замовити цю книгу <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/398>

Видавництво Вінницького національного технічного університету

<https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog>