

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич

**КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ
РОЗРАХУНКУ
ФУНДАМЕНТНИХ КОНСТРУКЦІЙ
НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ
ЕЛЕМЕНТІВ**

Монографія

ВНТУ Вінниця
2009

Замовити цю книгу <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/491>

Видавництво Вінницького національного технічного університету

<https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog>

УДК 519.642:624.044:624.15

М 79

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 1 від 30.08.2008 р.)

Рецензенти:

І. П. Бойко, доктор технічних наук, професор

О. І. Голоднов, доктор технічних наук, старший науковий співробітник

Моргун, А. С.

М 79 Комп'ютерні технології розрахунку фундаментних конструкцій на основі методу граничних елементів : монографія / А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич. — Вінниця : ВНТУ, 2009. — 162 с.

ISBN 978-966-641-313-3

В монографії викладено сучасні комп'ютерні технології розрахунку фундаментних конструкцій на основі методу граничних елементів. Прикладення потужного числового МГЕ до розв'язання лінійних та нелінійних задач геомеханіки та процесу осідання ґрунтових основ і допустимих навантажень на них обґрунтовано теоретичними викладками, підкріплено та проілюстровано даними числових розрахунків. Сподіваємось, викладений матеріал стимулюватиме подальші теоретичні та прикладні дослідження використання МГЕ в механіці ґрунтів та розвитку проблеми заглиблених споруд в цілому.

УДК 519.642:624.044:624.15

ISBN 978-966-641-313-3

© А. Моргун, І. Меть, А. Ніцевич, 2009

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	5
ВСТУП	6
Розділ 1. РОЗРОБКА МЕТОДОЛОГІЧНИХ ОСНОВ ЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОБОТИ ПАЛЬ ЧИСЛОВИМ МГЕ. КОМПОНОВКА МАТРИЦІ ВПЛИВУ МГЕ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗКІВ МІНДЛІНА.	14
1.1. Етапи розвитку задач геомеханіки.	14
1.2. Розрахункові моделі ґрунтів.	15
1.3. Основні співвідношення лінійної теорії пружності та види напружених станів, що виникають в ґрунтах	17
1.4. Елементи теорії потенціалів	24
1.5. Основне інтегральне співвідношення МГЕ. Фундаментальний розв'язок МГЕ.	28
1.6. Матричне формулювання основного співвідношення МГЕ	33
1.7. Числова реалізація основного співвідношення МГЕ. Основні етапи	36
1.8. Методика використання МГЕ в розрахунках основ і фундаментів	37
1.9. Система алгебричних рівнянь	39
1.10. Врахування переміщення тіла як цілого при визначенні коефіцієнтів c_i	40
Розділ 2. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ФОРМАЛІЗАЦІЯ ЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ НЕСУЧОЇ СПРОМОЖНОСТІ ПАЛІ. РОЗРОБКА ТЕОРЕТИЧНИХ ЗАДАЧ ПОБУДОВИ РОЗРАХУНКОВОЇ МЕТОДИКИ ПРИКЛАДАННЯ МГЕ ДО РОЗРАХУНКУ СИСТЕМ ФУНДАМЕНТНИХ КОНСТРУКЦІЙ.	41
2.1. Визначення опору одиночних призматичних та пірамідальних палей	41
2.2. Розв'язок в загальному вигляді	44
2.3. Розв'язок для абсолютно жорсткої палі	46
2.4. Інтеграл формул Р. Міндліна при формуванні матриць K_{ij} в розрахунках призматичних та пірамідальних палей	47
2.5. Структура і алгоритм програми для ЕОМ	51
2.6. Вплив коефіцієнтів розрахункової матриці МГЕ на несучу спроможність палей при врахуванні виникнення горизонтальних напружень від дії вертикальних навантажень	60
Розділ 3. МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТУ ВЗАЄМОДІЇ ПАЛЬ ПАЛЬОВОГО ПОЛЯ ВИСОТНИХ БУДІВЕЛЬ ЧИСЛОВИМ МГЕ	66
3.1. Аналіз останніх досягнень. Сучасні числові методи досліджень НДС будівельних споруд	66
3.2. Пошук резервів несучої здатності пальового поля. Методологічні основи лінійної задачі роботи палей числовим МГЕ	74

3.3.	Дослідження перерозподілу навантаження між палями в фрагменті пального поля будівлі та оптимальної відстані між палями поля	81
3.4.	Числові дослідження опору фрагмента пального поля будівлі із збільшеним кроком паль	91
3.5.	Опір пального поля 10-ти поверхової житлової будівлі	96
Розділ 4. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ГЕОМЕХАНІКИ.		100
4.1.	Поверхні текучості та руйнування	100
4.2.	Прикладення МГЕ до нелінійних задач фундаментобудування	111
4.3.	Проблеми ресурсу фундаментних конструкцій при реконструкції будівель	115
4.4.	Порівняння ідентифікації несучої здатності паль методами граничних елементів та нечіткої логіки	121
4.5.	Прогнозування впливу води на напружено-деформований стан лесової основи числовим МГЕ	128
4.6.	Числове моделювання процесу взаємодії штамп з пружно-пластичним середовищем ґрунту числовим МГЕ	133
4.7.	Моделювання числовим МГЕ процесу підсилення стрічкового фундаменту палями	141
4.8.	Моделювання числовим МГЕ плитного варіанта фундаменту висотної будівлі	149
ВИСНОВКИ		153
ЛІТЕРАТУРА.		154

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ДБНіП – державні будівельні норми і правила;
НДС – напружено-деформований стан;
МГЕ – метод граничних елементів;
МСЕ – метод скінченних елементів;
МСР – метод скінченних різниць;
СПФ – стрічковий пальовий фундамент.

Вступ

Стародавні будівельники були позбавлені одного дуже важливого знаряддя – наукових знань («яснобачення» в будівництві – істин механіки). За емпіризм, інтуїтивність та відсутність знань в будівництві потрібно було платити дуже дорогою ціною – неймовірними запасами стійкості, міцності будівельних матеріалів, перевитратами людської праці. Загальновідомі єгипетські піраміди, котрими ми начебто маємо захоплюватися, з конструктивної точки зору зовсім не цікаві.

Масивне тіло піраміди не залишає місця для проблем стійкості, міцності та деформацій. Із багатьох можливостей каменя використовується 1/100. Прообразом нинішніх фундаментних плит в палаці Харсабаде в Месопотамії (міжріччя Тигру і Євфрата, 720 р. до н.е.) був здоровенний фундамент із сирої цегли.

Уявлення Леонардо да Вінчі, якого можна назвати першим інженером-будівельником, про наукові знання є сучасними:

«В науке не может быть никакой достоверности, если отсутствует почва для приложения математики. Всякая практика должна опираться на теорию. Наука – полководец, а практика воин.» [54].

...Щоб споруди були міцними, а аварії та катастрофи не були незмінними супутниками будівельної практики необхідно:

- добре продумати конструктивне рішення;
- потрібно знати, які сили діють в самій конструкції і, яка несуча спроможність її елементів.

Галілео Галілей був впевнений, що «книга природи ще буде написана ... на мові математики ... »

Після цього був закон Гука – новий ключ до пояснення природи твердих тіл – вони пружні, чинять опір зовнішнім впливам, мають особливості поведінки.

Едме Маріотт помітив, що згин – це своєрідний симбіоз розтягу і стиснення.

Кулон (1776 р.) першим зареєстрував наявність незворотних пластичних деформацій в реальних твердих тілах.

Вимоги часу обумовили стрімкий розвиток науки. В XVIII, XIX століттях пройшов справжній бум в цій застійній області людських знань. З'явилась якісно нова уможливлена форма абстрактної розумової діяльності людини – диференціальне та інтегральне числення. Гук, Маріотт, Бернуллі, Кулон, Юнг, Лагранж, Пуассон, Клапейрон, Максвелл, Ейлер, Нав'є – крім вкладу в фізику – вони були і механіками, і інженерами, і будівельниками, а також забезпечили обчислювальну базу тодішнього інженера.

Фундаментальні висновки про живу і мертву природу, зроблені з інженерних позицій біля п'яти століть назад, звучать приблизно так:

«Матеріали мають деякі граничні несучі можливості, які не можуть бути перевищені. Величина об'єкта обумовлена зусиллями і напруженнями, які можуть викривляти її скелет, також деформаціями, що не мають бути платнею за функціонування організму чи цілісність об'єкта.»

Закон Гука (1675р., Англія) ліг в основу багатьох інженерних теорій, він є наче стовпом, на якому тримається майже весь сучасний інженерно-теоретичний апарат.

«Яке подовження, така й сила» – цей закон Гука, що з давнини лежить в основі технічних розрахунків людства, сталений прут, із арматури класу А-І, що розтягується явно чи таємно, нас переслідує повсюди (рис. 1.1).

Сила, з якою будь-яке тіло опирається навантаженню, прагнучи повернути свою початкову форму, пропорційна деформації, яку викликає зовнішня сила. Зовнішня сила – це дія навантаження, яке частіше всього обумовлено земним тяжінням. А внутрішня сила (як її ще називають – внутрішній опір) обумовлена молекулярною побудовою тіла, когезією внутрішніх частинок.

Коли мова йде про внутрішні сили, зручніше брати не всю силу, а її частину, яка діє на одиницю площі перерізу – напруження. З тих самих причин зручніше розглядати не повне подовження елемента, а деформацію ε – подовження до одиниці довжини, наприклад до метра.

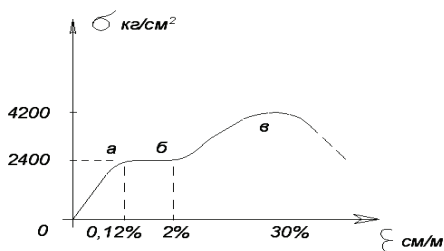


Рис. 1.1 Діаграма розтягу маловуглецевої сталі А-І

Ділянка «а-а» – «Яке подовження, така й сила» – пряма лінія, що круто піднімається, відомий закон Гука;

– точка а – якісний стрибок: полірована поверхня стержня стає матовою, з'являються лінії під кутом 45° до осі стержня;

– ділянка «а-б» – деформації різко зростають;

– точка б – ще не межа можливостей матеріалу. Графік знову починає підніматись вгору по кривій. Збільшення σ йде ціною значних

деформацій на ділянці «б-в», а це дуже велика ціна, яка ні в якому разі неприйнятна для будівельних конструкцій.

Коли б Роберт Гук стояв поруч гідравлічного преса, де розтягується зразок маловуглецевої сталі А-І, то він би здивувався, що відбувається таке, про що він і не підозрював. В кінці досліду зразок розривається. Ця маленька катастрофа проходить, коли зразок подовжився на 25 % від початкової довжини ($\epsilon = 0,25$). Це відповідає опору сталі А-І, $R = 4200 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

Для реальних будівельних конструкцій перебільшення бар'єра площадки текучості означає наявність аварійних деформацій і переміщень. Значить, практичне значення має лише частина графіка σ - ϵ нижче площадки текучості, тобто ділянка «о-а».

Таким чином, в минулому, коли ще не існувало теоретичного апарату будівельного «яснобачення», люди будували дуже марнотратно. Пам'ятки минулого будівництва, що збереглися до наших днів, славні не лише своїми архітектурними обрисами, але й характером вирішення конфлікту між конструкцією і навантаженням. Лише величезні перевитрати матеріалу і людської праці забезпечили їм багатвікову міцність та непорушність.

Зараз подібного будівництва не може собі дозволити жодна держава в світі. Та це зараз і не потрібно, морально і функціонально будівлі старіють дуже швидко. Вихід в мінімальних витратах на будівництво при прийнятному ступені надійності. Та саме це балансування «на краю прірви» потребує точного теоретичного апарату. До «боевих з'єднань» сучасного теоретичного апарату інженера-будівельника належать: механіка суцільних середовищ, опір матеріалів, теорія пружності, будівельна механіка, теорія пластичності, повзучості, інтегральне, диференціальне, варіаційне числення, числові методи, ЕОМ.

В механіці ґрунтів задачі пов'язані з реакцією основи на різке втручання в її природний режим, з поведінкою і властивостями ґрунту, що несе на собі століттями тисячотонний вантаж будівель далеко не все ясно, більш того, тут ще більше таємниць і ненадійності ніж в будь-якому іншому будівельному напрямку. Механіка суцільних середовищ не розглядає мікропроцеси реальних тіл, а ґрунт як гранульоване середовище має свої характерні особливості роботи.

Як матеріал для основи ґрунт за якістю сильно поступається будівельним матеріалам, і, як наслідок, – його можливості сильно обмежені. Його поведінку важко передбачити кількісно (а інколи і якісно). Деякі деформації в ньому неминучі, коли вони перевищують відомі границі – споруді загрожує аварія. Непередбачуваність в його поведінці, не будучи правилом, не є і винятком. Ми вимушені приймати всі

його недоліки та примхи.

Міцність та стійкість основ та земляних споруд визначається опором ґрунту зсуву, який є чи не основним фактором, що визначає умови роботи ґрунту під навантаженням. Для ґрунтів це змінна величина, не лише для їх різних видів, але й для одного й того ж ґрунту вона може сильно змінюватись в залежності від вологості, нормальних напружень. Руйнування основ будівель проходить в основному в результаті зсуву частинок ґрунту.

Мінливість деформування ґрунту залежить від багатьох чинників. За влучним висловом Д. Гільберта: «Головне – це із множини проблем вибрати найпростіші, рішення яких дозволить напрацювати допустимі узагальнення і концепції».

Природна «піддатливість» ґрунту приводить до більш повного включення в роботу слабо навантажених ділянок і основа використовується більш повноцінно. Це пов'язано з пластичними деформаціями і тому існує і зворотна сторона. Та важливіше інше – відсутність небезпечного крихкого, раптового руйнування у роботі ґрунту на стиск.

Мала міцність ґрунту на зсув та розтяг призводить до того, що задовго до повного включення в роботу зони стиснення і появи пластичних явищ, розтягнута зона буде на порозі руйнування.

Деформації в ґрунті неминучі та, коли вони переходять відомі межі, конструкції загрожує аварія. Основна задача при проектуванні – зведення до мінімуму осідання ґрунту під фундаментами, оскільки завдяки цьому зменшуються додаткові навантаження (і перевантаження) конструкції, які і без того мають сприймати цілий ряд постійних і тимчасових впливів.

Суттєве підняття граничного навантаження на зернисті ґрунти може бути досягнуте при попередньому додатковому їх ущільненні. Несуча спроможність щільних ґрунтів виявляється в 10 разів більшою, ніж несуча спроможність того ж ґрунту у пухкому стані.

Конструктор повинен мати великі знання, досвід а також бачити, що може очікувати його витвір протягом всього періоду експлуатації, аби своєчасно убезпечити його від примх природи.

Вимоги сучасної прикладної геомеханіки викликали появу нових моделей, викладених в багатьох монографіях та статтях. Процес пластичного деформування дисперсного середовища ґрунту описується сучасними дилатансійними моделями [18, 53], які відображають реальну поведінку ґрунту. В будь-якому випадку виникає потреба дослідження НДС ґрунту під дією зовнішніх впливів (сил). Найчастіше зовнішні сили зумовлені тяжінням Землі.

Сучасне комплексне будівництво неможливо уявити без активного використання підземного простору для організації проїзду тран-

спорту, розміщення автостоянок, складських та торгових зон.

Широкий розвиток будівництва складних підземних об'єктів, через звантаженість наземних територій, фундаментних конструкцій сучасних висотних будівель приводить до необхідності глибокого вивчення і наукового обґрунтування накопиченого досвіду поведінки деформованого пористого середовища ґрунту з метою створення більш досконалих теорій розрахунку і перспективних напрямів, підкріплених вимогами часу. Актуальність і значимість цієї задачі очевидна. Дешевше забезпечити реальне непросідання будівель, ніж витратити кошти на нескінченні відновлення та ремонти від їх нерівномірного просідання.

Досвід досліджень в таких суміжних областях знань як будівельна механіка, теорія пружності і пластичності, механіка ґрунтів, числові методи, які математизовано «з голови до п'ят» і являють собою арену, на якій сучасна математика показує на що вона здатна, відкриває нові можливості перед наукою підземного будівництва вільні від умовностей і припущень загальноприйнятих укорінених прийомів, що часто приводять до розбіжностей з даними практики. Стійкою тенденцією останніх десятиліть в світовій геотехніці є поступовий перехід нормативних документів на принцип проектування геотехнічних об'єктів за граничними станами.

На початкових етапах теорії розрахунку будівельних конструкцій в деформованому середовищі ґрунту враховувався лише активний тиск ґрунту в вигляді зовнішнього навантаження. Пасивний опір ґрунту не враховувався. Неврахування впливу ґрунту як середовища, що бере участь в формуванні НДС споруд приводило до створення конструкцій з залишковим запасом міцності.

Наступним кроком був розгляд підземних конструкцій як єдиної статично невизначеної системи, а ґрунт враховувався як пружне середовище, що пасивно допомагає роботі конструкції.

Робота пружного середовища – ґрунту – підпорядковувалася лінійній залежності між напруженнями і осіданнями, тобто гіпотезі Фусса-Вінклера. Та залежність результатів від помилково постійного і незмінного коефіцієнта постелі ґрунту та відсутність урахування горизонтальних пружних сил ґрунту (сил пасивного опору породи) знижували практичну і наукову цінність цих теоретичних розробок. Пізніше з'явилась двокомпонентна модель Пастернака (наявність другого коефіцієнта постелі мала враховувати розподільчу здатність ґрунту та вплив горизонтальних напружень). Ця модель, нажалі, призводить до надмірного розвитку мульди осідання через дуже велику ступінь спрощення роботи масиву ґрунту. Спрощені моделі роботи ґрунту не враховують нелінійності роботи ґрунту за межами розрахункового

опору та не повністю враховують динаміку зміни традиційних характеристик ґрунту, які визначаються при інженерно-геологічних вишукуваннях.

Сучасним етапом теорії розрахунку фундаментних будівельних конструкцій в деформованому середовищі ґрунту є розгляд сумісної роботи системи «підземна конструкція–основа» як навантаження і реактивний вплив – як пружне середовище. Вплив пружного середовища (ґрунту) враховується на основі методів теорії пружності та пластичності, тобто, враховується пружно-пластична стадія роботи ґрунту. Для вирішення містобудівних задач сьогодення необхідно сприймати ґрунтову основу як динамічну систему, яка неперервно змінює свої фізико-механічні властивості.

Багато неточностей і навіть помилок в тих чи інших прогнозах, пов'язаних з ґрунтами, впливають головним чином через недоврахування нелінійності деформування ґрунту.

Сучасному етапу властивий напрям розвитку з використанням числових методів та ЕОМ. Зростаючі можливості сучасних ЕОМ потребують постійної ревізії існуючих числових методів при дослідженнях нових класів задач, для яких з'явилась надія на вирішення. Однією із таких задач є нелінійна задача геомеханіки. Створені для неї на сьогоднішній математичні моделі адекватного описання процесів поведінки ґрунту та оцінки ефективності стратегії, управління цими процесами – це системи диференціальних рівнянь в частинних похідних є досить складними для отримання аналітичних розв'язків. Як відомо, абсолютна точність є зайвою для багатьох систем реального світу. Не є винятком і вищезгадана крайова задача геомеханіки, розв'язок якої можна отримати одним із потужних сучасних числових методів – методом граничних елементів на швидкодійних ЕОМ.

В монографії запропоновано модель, на якій можна експериментувати, та отримувати оптимальні розв'язки. Моделі властивий чіткий фізичний зміст. Модель дозволяє відтворювати зміну вхідних параметрів в процесі деформування, оскільки, як відомо, рух веде до зміни структури системи. Модель задовольняє вимоги збіжності існування та стійкості розв'язків. Із будівельної практики відомо, що на характер поведінки фундаментних конструкцій впливають властивості навколишнього ґрунту. Зони пластичних зсувів в основах викликають перерозподіл контактних тисків. Явище перерозподілу напружень між ґрунтом та будівлею в більшості випадків призводить до зменшення зусиль.

Зміщення частинок ґрунту під навантаженням, в результаті якого ґрунт стає більш щільним, пов'язане з витисненням з них води, лишньої в їх новому стані. При цьому між мінеральними частинками,

поровою водою та повітрям виникає тертя. В процесі мобілізації сил внутрішнього тертя зерна незв'язного ґрунту переміщуються хаотично не дивлячись, що їх переміщення диктується граничними умовами і фактичним НДС, переміщення зерен приводить до їх більш рихлої чи більш щільної упаковки в порівнянні з вихідним станом. Аналітичні залежності такого переміщення можна встановити лише з дуже грубими наближеннями. З цієї причини висновки механіки суцільних середовищ для оцінки деформацій незв'язних ґрунтів можуть бути використанні з рядом обмежень. Зв'язні ґрунти більш близькі до умов деформацій суцільного середовища, хоч би тому, що їх деформації нерозривні.

Для інженера-будівельника питання про стисливість ґрунтів викликає інтерес у зв'язку з наступним осіданням споруди. Що до водонасичених ґрунтів, вода, що заповнює пори в ґрунті, може розглядатись під звичайними навантаженнями фактично як така, що нестискається. Тому зміна об'єму повністю водонасиченого ґрунту може змінюватись лише за умови витискання з нього води. В глинистих ґрунтах рух води особливо повільний.

В цьому плані бажання будівельника зводяться зазвичай до зменшення до можливих меж цього осідання або до повного її виключення. Зменшення до мінімуму величини осідання споруди зазвичай пов'язується з обмеженням інтенсивності навантаження, яке можна передати на ґрунт.

Нові будівельні концепції – каркасні конструкції, що складаються із вертикальних несучих елементів (колон, пілонів) і горизонтальних несучих елементів (плит, балок або ригелів). У будівлях з несучим каркасом окремі частини конструкцій чітко диференційовані. Фасади і перегородки виконують роль огорожувальних конструкцій, тепло- та звукоізоляції. З точки зору конструктора – вони є навантаженням для другої групи елементів каркасу, єдине призначення яких – сприймати зовнішнє навантаження.

В будівлях з несучими стінами руйнування стіни рівноцінне катастрофі. Те ж можна сказати про крупнопанельні будівлі. Перевага каркасних конструкцій в тому, що вони мають каркас (скелет), запозичений у природи. Скелет є ознакою вищих біологічних видів. Самостійне виділення несучих функцій серед усієї решти є корисним і досягається при наявності скелета. Статичний еквівалент скелету – рама. Жорсткі кутові в'язі між окремими елементами просторової рами не є проблемою монолітного залізобетону. Такі будівлі здійснюють значний опір зовнішнім впливам, різняться великою жорсткістю і стійкістю при різного роду динамічних впливах.

Будівля в процесі свого існування знаходиться в постійному контакті та взаємодії з ґрунтовою основою тому надійне та економічне проектне рішення будівлі може дати аналіз НДС сумісної роботи системи «основа-фундамент-будівля».

Сучасна практика розрахункового обґрунтування конструкцій системи «основа – фундамент – будівля» можлива лише за допомогою числового моделювання і сучасних ЕОМ, при врахуванні дійсної жорсткості самої будівлі та реальних властивостей ґрунтів будівельного майданчика.

Розрахунок скінченно-елементної моделі сучасної висотної будівлі потрібно проводити з урахуванням найбільш суттєвих факторів, що визначають її НДС:

- жорсткостей ригелів та стійок;
- виду закріплення колон з фундаментними конструкціями;
- характеру розподілу навантаження (нерівномірність навантаження створює передумови для додаткових деформацій об'єкту) ;
- інженерно-геологічної будови основи, характеру ґрунтових нашарувань (від величини осідання будівлі);
- фізичної нелінійності роботи основи.

Рішенню контактної задачі взаємовпливу наземної та підземної частини будівлі присвячено велику кількість публікацій [16, 69, 75, 77]. Якщо розглянути цю проблему в нелінійній постановці – число публікацій значно менше. Що пояснюється значними розрахунковими ускладненнями при врахуванні фізичної нелінійності основи та потребує кошторисного системного моніторингу будівлі.

Основи розраховуються по другій групі граничних станів і цей розрахунок має забезпечити нормальну експлуатацію будівлі, обмеженість осідань ($S \leq S_d$), прогинів, кутів повороту.

Розділ 1. РОЗРОБКА МЕТОДОЛОГІЧНИХ ОСНОВ ЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ РОБОТИ ПАЛЬ ЧИСЛОВИМ МГЕ. КОМПОНОВКА МАТРИЦІ ВПЛИВУ МГЕ НА ОСНОВІ РОЗВ'ЯЗКІВ МІНДЛІНА

1.1. Етапи розвитку задач геомеханіки

Швидке і якісне перетворення сучасних аналітичних методів в супутній фундаментобудівній галузі, завдяки широкому впровадженню ЕОМ в практику досліджень та інженерних розрахунків, синтезу методів фізичного і математичного моделювання, відкривають нові шляхи для вирішення складних проблем, що стоять перед практиками і дослідниками у сфері розвитку фундаментних конструкцій.

Грунтам властива зміна їх властивостей як в процесі будівництва, так і експлуатації.

Труднощі з'ясування загальних закономірностей поведінки ґрунтів пояснюються тим, що ґрунти складаються із багатьох мінералів, з різним ступенем диспергування, їм притаманні різні властивості при взаємодії один з одним, водою, повітрям. Якщо при цьому врахувати, що результати, які отримуються дослідним шляхом, залежать від щільності і напруження ґрунту, методик проведення досліджень, конструктивних характеристик приладів, методів обробки дослідних даних та їх інтерпретації, то стає зрозумілим, чому ці результати суперечливі.

Пластичні деформації ґрунтів під краями фундаментної плити починають виникати лише після закінчення будівництва декількох поверхів. Тому на початку будівництва для ґрунтів справедлива модель лінійно-деформованого середовища, що базується на математичному апараті теорії пружності. Класична лінійна теорія пружності – основа для більшості міцнісних розрахунків в техніці. В цьому її безумовна цінність.

Прийнято вважати, що апарат теорії пружності дозволяє знаходити задовільне наближення при оцінці НДС ґрунтової товщі для прогнозу осідання основи з більш чи менш горизонтальною поверхнею.

Інший напрям моделі ґрунтової основи – гіпотеза Фусса-Вінклера, згідно з якою ґрунт підпорядковується лінійній залежності між напруженнями та осіданнями. Ця гіпотеза не враховує розподільчих властивостей ґрунтів. Залежність розрахунку від «коефіцієнта постелі», який помилково приймається постійною і незмінною характеристикою ґрунту, а також відсутність врахування горизонтальних пружних сил ґрунту, які є силами пасивного опору породи і здійснюють значний вплив на напружений стан всієї системи, є головними недоліками цього напрямку та знижують його практичну та наукову

цінність.

При розрахунку ґрунтових основ використовується також модель граничної рівноваги, яка є протилежною та взаємовиключною до моделі лінійно-деформованого середовища.

Модель лінійно-деформованого середовища базується на припущенні, що ні в одній точці ґрунтового середовища немає граничної рівноваги, а модель граничної рівноваги навпаки – цей стан властивий всім точкам ґрунту.

В дійсності в ґрунті є зони як дограничного, так і граничного напруженого стану, тому доцільно розглядати при визначенні НДС ґрунтів змішану задачу теорії пружності і пластичності ґрунтів, як її називають в механіці ґрунтів.

Розв'язки змішаної задачі мають задовольняти в пружній і пластичній областях одні і ті ж рівняння рівноваги, геометричні рівняння, але різні в цих областях фізичні рівняння, умову текучості ($F=0$) в пластичних областях при відповідних граничних обмеженнях.

Таким чином, розрахунок фундаментних конструкцій (в тому числі пальових) за діючими ДБНіП проводяться за спрощеними розрахунковими схемами, що не завжди забезпечує економічні і надійні проектні рішення. Це викликало потребу подальшого удосконалення розрахункових схем з використанням сучасних числових методів та комп'ютерних технологій, які змінили ситуацію в кращу сторону.

Подальший шлях розвитку методів розрахунку пов'язаний з урахуванням пружно-пластичних деформацій ґрунту, горизонтальних складових об'ємних сил ґрунту, розподілення деформацій лише в межах обтиснутої криволінійної пружно-пластичної активної зони, врахування неоднорідності на анізотропії ґрунту.

1.2. Розрахункові моделі ґрунтів

В класичній механіці ґрунтів (К. Терцагі) задачі про розділ σ - ε вирішувались на основі моделі ідеального пружного тіла, пружні властивості якого визначались єдиним модулем деформацій (рис. 1.2 а). Задачі про стійкість вирішувались на основі моделі жорстко-пластичного тіла, властивості якого однозначно визначились межею міцності для даного ефективного нормального напруження (рис. 1.2 б).

Задачі про несучу спроможність ґрунту краще відповідають дійсності при використанні пружно-пластичної моделі (рис. 1.2 в), в якій граничний стан є функцією як модуля деформацій так і межі міцності.

Та поведінка більшості реальних ґрунтів відхиляється від пружно-пластичної ідеалізації [1]. Деформування реальних ґрунтів після досягнення точки руйнування F продовжується при напруженнях, що

зменшуються (розміцнення), тобто зменшується межа міцності при зростанні деформацій до тих пір, поки напруження не установлюються на деякому кінцевому, або замкнутому рівні, рис. 1.2 г, д. Напруження та деформації в ґрунтах прагнуть локалізуватись в тонкій зоні ковзання.

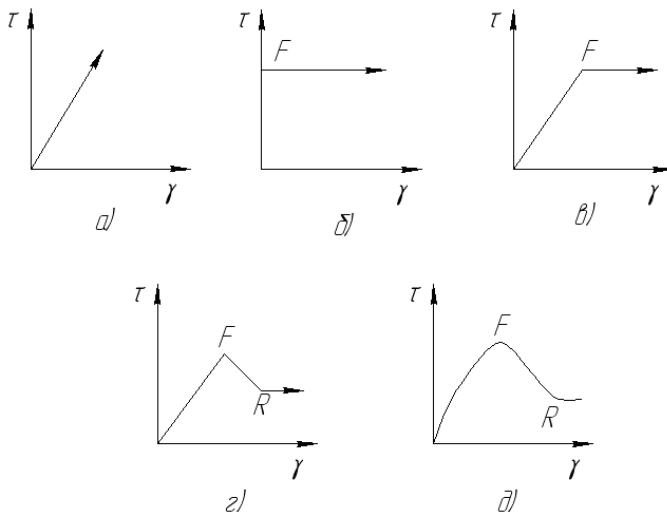


Рис. 1.2. Співвідношення між напруженнями і деформаціями для ідеальних і реальних ґрунтів: а) – пружна модель; б) – жорстко-пластична модель; в) – пружно-пластична модель; г) – пружно-пластична модель з розміцненням; д) – реальний ґрунт. F – точка руйнування, R – залишкова величина

Таким чином, для повного описання поведінки ґрунту необхідні дві величини границі міцності:

- пікова, чи руйнівна (точка F) – τ_f ;
 - залишкове напруження (точка R) – τ_r ,
- та до піковий і після піковий зв'язок σ - ϵ .

В задачах з руйнуванням, що прогресує, необхідно визначити точку, в якій падіння межі міцності елементів потенційної зони ковзання, які вже пройшли пік межі міцності, в точності урівноважується збільшенням напружень в тих елементах, які ще не досягли руйнування. В цій точці буде досягнуто максимальний опір зсуву, можливий повздовж даної поверхні, тут буде мати місце стан граничної рівноваги. Подальше зміцнення приводить до падіння середнього дотичного напруження до залишкового значення.

Метод побудови моделі заключається в тому, щоб знайти зв'язок

поміж параметрами деформування і фізичними властивостями ґрунту – такими як тертя τ , модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона.

В. М. Ніколаєвський [53] намітив основний шлях для розв'язку широкого кола задач, що мають безпосереднє практичне застосування: «...Головний шлях розвитку механіки ґрунтів на теперішній час пов'язаний з якісними дослідженнями основних задач в рамках пружно-пластичної дилатансійної моделі та удосконаленням та видозміною цієї моделі на основі порівнянь рішень з експериментом».

Можливості побудови точних розв'язків задач теорії пружності обмежені. Як для просторових, так і для плоских задач точні розв'язки можна отримати для областей з геометрично простими границями. З цієї причини давно усвідомлена необхідність застосування ефективних наближених методів з використанням алгоритмів крокового методу, коли на наступному кроці використовуються дані з попереднього.

1.3. Основні співвідношення лінійної теорії пружності та види напружених станів, що виникають в ґрунтах

Теорія пружності на теперішній час достатньо повно розроблена завдяки працям головним чином радянських вчених – Л. І. Сєдов, С. П. Тимошенко, Н. І. Мусхелішвілі, Б. Г. Гальоркін, П. Ф. Папкович, Ю. М. Роботнов та багато інших.

Пружне суцільне середовище називається лінійним і ізотропним в тому випадку, коли напруження в ньому лінійно пов'язані з деформаціями, а механічні властивості середовища не залежать від напрямку. В такому середовищі головні осі напружень і деформацій збігаються.

Зв'язок між σ - ϵ зручно подати в системі координат пов'язаній з головними осями:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (\lambda + 2G) \cdot \epsilon_1 + \lambda \cdot \epsilon_2 + \lambda \cdot \epsilon_3; \\ \sigma_2 &= \lambda \cdot \epsilon_1 + (\lambda + 2G) \cdot \epsilon_2 + \lambda \cdot \epsilon_3; \\ \sigma_3 &= \lambda \cdot \epsilon_1 + \lambda \cdot \epsilon_2 + (\lambda + 2G) \cdot \epsilon_3,\end{aligned}\tag{1.1}$$

де пружні модулі λ і G середовища називаються параметрами Ламе; G – модуль зсуву.

Властивості пружного середовища такі, що від дії компоненти деформації ϵ виникають напруження $(\lambda+2G)\cdot\epsilon$ в тому ж напрямку і напруження $\lambda\cdot\epsilon$ в двох інших взаємо перпендикулярних напрямках.

Рівності (1.1) можна розв'язати відносно деформацій:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\mu}{E}\sigma_2 - \frac{\mu}{E}\sigma_3; \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\mu}{E}\sigma_1 + \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\mu}{E}\sigma_3; \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\mu}{E}\sigma_1 - \frac{\mu}{E}\sigma_2 + \frac{1}{E}\sigma_3,\end{aligned}\tag{1.2}$$

де E , μ – матеріальні параметри середовища, модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона. Головна компонента напруження σ створює деформацію σ/E в напрямку своєї дії і деформації $-\mu \cdot \sigma / E$ в двох інших взаємно перпендикулярних напрямках.

Пружні властивості середовища характеризують, задаючи λ і G , E і μ . Ці пари параметрів є залежними.

$$G = E/[2 \cdot (1 + \mu)]; \quad E = \frac{G \cdot (3\lambda + 2G)}{\lambda + G}; \quad \lambda = \frac{E \cdot \mu}{(1 + \mu) \cdot (1 - 2\mu)}.\tag{1.3}$$

Модуль Юнга в механіці ґрунтів має назву модуль деформацій, щоб підкреслити різну деформативність шарів неоднорідного ґрунту. Модуль деформацій ґрунтової породи змінюється від 5 кПа до 20 МПа, а коефіцієнт Пуассона в межах 0,1–0,42. Значення коефіцієнта Пуассона $\mu=0,5$ відповідає нестискуваній рідині.

Із даних експериментів для нормально ущільнених ґрунтів зв'язок між напруженнями і деформаціями (фізичні рівняння стану) не носять лінійний характер. Тому визначення вище згаданих постійних лінійної пропорційності має обмежуватись умовами малих змін приростів напружень і відповідних їм приростів деформацій. Експериментально встановлено, що вплив виду напруженого стану на міцність ґрунту залежить від щільності його упаковки (складення) та траєкторії навантаження. Це можна пояснити властивістю дисперсного ґрунту дилатувати, тобто змінювати об'єм при зсуві. Для різних за щільністю станів ґрунтів дилатансія може бути як від'ємною (контракція, ущільнення) так і додатною (розрихлення). Деформації розрихлення спостерігаються при зсуві ґрунту щільного складення при низьких напруженнях, чи при напруженнях, менших тих, що привели його (ґрунт) до цього ступеня ущільнення. Зсув пухких ґрунтів характеризується деформаціями ущільнення. Тобто, для ґрунтів асоційований закон Мізеса не виконується, а вектор пластичних деформацій в загальному випадку не ортогональний граничній поверхні.

Поведінку лінійно-пружних твердих тіл простіше всього продемонструвати на таких ідеалізованих прикладах, коли деякі компоненти напружень і деформацій обертаються в нуль. Саме з такою ситуацією часто доводиться стикатись в геології.

Одноісний напружений стан – різниться від нуля лише одне головне напруження, наприклад σ_1 , а $\sigma_2=0$; $\sigma_3=0$; тоді

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \varepsilon_1; \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E} \sigma_1 = -\mu \varepsilon_1.$$

Звідси видно, що σ_1 викликає не лише деформацію ε_1 в напрямку своєї дії, а й деформації ε_2 і ε_3 в перпендикулярних напрямках. Якщо σ_1 – стиснення, то ε_1 буде укороченням, а $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ – подовженням.

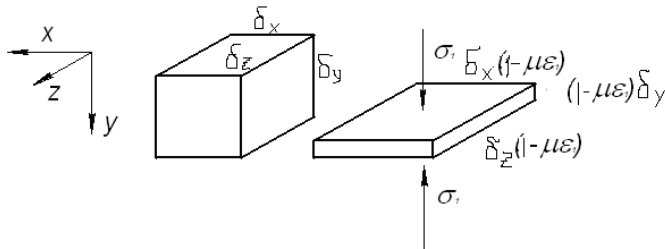


Рис. 1.3. Деформація під дією одноосового стиснення

Відносна зміна об'єму (дилатансія Δ) у випадку одноосового стиснення згідно з (1.4) подається виразом

$$\Delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1(1 - 2\mu). \quad (1.5)$$

Із цієї формули видно, що зменшення об'єму за рахунок зменшення розміру в напрямку дії напруження компенсується збільшенням об'єму за рахунок розширення в перпендикулярних напрямках. Із (1.5) можна знайти коефіцієнт Пуассона μ для стиснутого середовища, об'єм якого не змінюється під дією прикладеного навантаження. Щоб при одноосовому стисненні $\Delta = 0$, μ має бути 0,5.

Одноосова деформація. Цей стан характеризується тим, що не дорівнює нулю лише одна компонента деформації, наприклад ε_1 .

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (\lambda + 2G)\varepsilon_1 \\ \sigma_2 = \sigma_3 &= \lambda\varepsilon_1 = \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \sigma_1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

або

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \sigma_3 &= \frac{\mu}{1 - \mu} \sigma_1; \\ \sigma_1 &= \frac{(1 - \mu)E\varepsilon_1}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Рівняння одноосової деформації можна використовувати для

визначення зміни напружень під дією накопичених опадів. Нехай поверхня покрита шаром опадів товщиною h і щільністю ρ . Нехай основа нового випадкового басейну обмежена в горизонтальному напрямку і відповідно можна застосувати рівняння одноосової деформації $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$. Вертикальне головне напруження σ_1 під шаром опадів визначається вагою випадкового шару породи

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \rho \cdot g \cdot h; \\ \sigma_2 = \sigma_3 &= \frac{\mu}{1-\mu} \rho \cdot g \cdot h.\end{aligned}\quad (1.8)$$

Плоский напружений стан виникає, коли є лише одне нульове головне напруження, наприклад, $\sigma_3=0$, $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$. (рис. 1.4) – навантаження з боків тонкої пластинки.

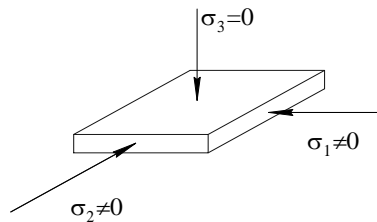


Рис. 1.4 Плоский напружений стан

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1); \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2).\end{aligned}\quad (1.9)$$

Формули, що описують плоский напружений стан, можна застосувати для випадку горизонтальних тектонічних напружень, що діють в літосфері. Крім того, в лабораторних визначеннях пружних модулів і межі міцності порід ґрунту зазвичай використовується метод тривісного стискання (рис. 1.5).

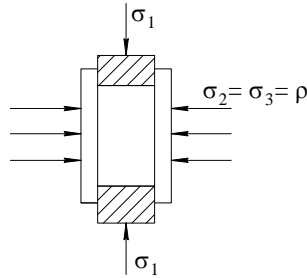


Рис. 1.5 Лабораторний метод тривісного стискування зразків ґрунту

Зразок ґрунту має циліндричну форму і навантажується стискаючим напруженням σ_1 . В поперечному напрямку зразок при цьому стискається рівномірно розподіленим навантаженням $\sigma_3 = \sigma_2 < \sigma_1$. Із (1.1), (1.9) можна довести, що

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3; \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (1.10)$$

Таким чином, якщо нанести на графік заміряні різниці напружень $\sigma_1 - \sigma_2$ і деформацій $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$, то тангенс кута нахилу отриманої прямої до осі $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ визначить величину $2G$.

Деформації чистого і простого зсуву. Напружений стан при чистому зсуві наведено на рис. 1.6. Чистий зсув – це особливий випадок, плоского напруженого стану. Чистий зсув виникає у випадку, коли $\sigma_3 = 0$, а $\sigma_1 = -\sigma_2$.

При $\theta = -45^\circ$; $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$;
 $\sigma_{xy} = \sigma_1$.

В такій системі координат різниця від нуля лише зсувне напруження:

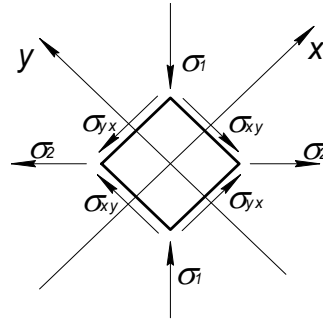


Рис. 1.6 Головні і зсувні напруження при чистому зсуві

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1-\mu}{E} \sigma_1 = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{xy} = -\varepsilon_2; \\ \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} = 0; \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_1; \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{xy} = 2G \cdot \varepsilon_{xy}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Чистий і простий згині різняться лише на величину функції обертання і, отже, відповідають одному й тому ж напруженому стану. Простий зсув виникає біля розломів ґрунту із зміщенням.

Плоска деформація. В цьому випадку рівна нулю лише одна головна деформація, наприклад, $\epsilon_3=0$, а $\epsilon_1 \neq 0, \epsilon_2 \neq 0$ (рис. 1.7).

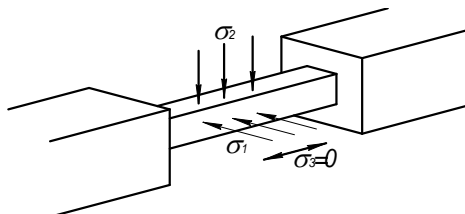


Рис. 1.7. Приклад плоскої деформації

Довга балка жорстко затиснута між двома стінками, що не дозволяють їй стискатись чи розширюватись у повздовжньому напрямі. Крім того, повздовж всієї довжини на балку діють рівномірно розподілені напруження σ_1 і σ_2 :

$$\begin{cases} \sigma_1 = (\lambda + 2G)\epsilon_1 + \lambda\epsilon_2; \\ \sigma_2 = \lambda\epsilon_1 + (\lambda + 2G)\epsilon_2; \\ \sigma_3 = \lambda(\epsilon_1 + \epsilon_2), \sigma_3 = \mu(\sigma_1 + \sigma_2), \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1+\mu}{E} [\sigma_1(1-\mu) - \mu\sigma_2]; \\ \epsilon_2 = \frac{1+\mu}{E} [\sigma_2(1-\mu) - \mu\sigma_1]. \end{cases} \quad (1.13)$$

Ізотропні напруження. Коли всі 3 головні напруження рівні між собою $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \rho$, то цей напружений стан називають ізотропним, а головні напруження рівні тиску. Головні деформації в твердому середовищі, що знаходиться в ізотропному стані теж рівні $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \Delta/3$ (кожна рівна третині дилатансії).

$$\rho = \frac{3\lambda + 2G}{3} \Delta = K\Delta = \frac{1}{\beta} \Delta, \quad (1.14)$$

де K – модуль всебічного стискання, а обернена величина β – коефіцієнт стисливості.

Оскільки маса кожного елемента об'єму V твердого середовища зі щільністю ρ при деформації зберігається, зміна об'єму елемента δV має супроводжуватись зміною щільності $\delta\rho$. Відносну зміну щільності можна пов'язати з відносною зміною об'єму, тобто дилата-

нсією, застосуванням закону збереження маси

$$\delta(\rho V) = 0, \quad (1.15)$$

який дає

$$\rho \delta V = V \delta \rho, \text{ або } \frac{\delta V}{V} = \Delta = \frac{\delta \rho}{\rho}. \quad (1.16)$$

Це співвідношення можна використовувати для визначення щільності ґрунту з глибиною.

$$\text{Із (1.14)} \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \quad (1.17)$$

З цієї формули видно, що коли μ прямує до 0,5 модуль всебічного стискання збільшується і для нестискуваного середовища ($\mu = 0,5$) стає безмежним.

В міцнісних розрахунках особливе значення відіграють напруження на октаедричній площині ($\sigma_{\text{окт}}$, $\tau_{\text{окт}}$), яка рівно нахилена до координатних осей, що проходять по нормалях головних напруг.

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{окт}} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \\ \tau_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

В теорії пружності і пластичності використовують узагальнювальну характеристику напруг – інтенсивність напруг, позначають її σ_i .

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}; \quad \sigma_i = \frac{3\tau_{\text{окт}}}{\sqrt{2}}. \quad (1.19)$$

З інтенсивністю напруг пов'язують момент переходу матеріалу, що працює в об'ємному напруженому стані, до пластичного стану текучості.

Теорія напружень в прикладанні до ґрунтів має свої особливості. Ґрунти – дисперсне (трикомпонентне за Терцагі) середовище. В водонасичених ґрунтах напруження не зразу передається на тверді частинки (як в суцільних середовищах), а потребує деякого часу для свого повного розвитку, який залежить від навантаження, від проникності ґрунту та інших факторів. Практичне значення мають напруження, що відповідають повній стабілізації ґрунту, коли навантаження передається на тверді частинки. Процес стабілізації глинистих ґрунтів може тривати 10–100 років. В піщаних ґрунтах стабілізація закінчується практично після будівництва.

Навантаження на основи споруд проектуються таким чином, щоб не була перевершена межа пропорційності між напруженнями та

деформаціями і лише з'являлись локальні пластичні зони. Величина таких напруг складає всього 1–4 кг/см² – це величина менша структурної міцності ґрунтів (≈ 10 кПа).

А в сучасних висотних будівлях тиски сягають 0,3–1 МПа. Тому виникає гостра потреба зробити розвідку ситуації НДС ґрунтів сучасними методами з урахуванням можливості роботи основ в граничному стані, виявити резерви міцності, задіяти їх реліктові можливості.

Для отримання надійних та достовірних розрахункових прогнозів поведінки основ потрібні дані інженерно-геологічних вишукувань фізико-механічних характеристик ґрунтів, які мають випадкову природу. Боротись з цим елементом невизначеності можна визначивши найбільш значимі (домінуючі) фактори з метою їх подолання.

1.4. Елементи теорії потенціалів

Сучасні числові методи є основним, а часто і єдиним апаратом розв'язання багатьох прикладних задач механіки. Їх універсальність дозволяє за допомогою обчислювальних комплексів реалізувати на ЕОМ системний підхід до аналізу поведінки краєвих задач як наземних, так і підземних конструкцій в різних режимах експлуатації.

Числовий метод граничних елементів (МГЕ) серед сучасних методів (методу скінчених різниць (МСР), методу скінчених елементів (МСЕ)) вигідно відрізняється лаконічністю вхідних даних і меншою кількістю невідомих, які визначаються в результаті прямих чи ітераційних розв'язань алгебричних рівнянь.

Суть МГЕ – перетворення розрахункової схеми диференційних рівнянь в частинних похідних (рівнянь рівноваги, геометричних рівнянь, фізичних рівнянь, що описують поведінку невідомих функцій всередині та на границі області) в інтегральне рівняння та пошук числового розв'язку його. Завдяки підбору в основному інтегральному розрахунковому рівнянні МГЕ таких вагових функцій (фундаментальних розв'язків Міндліна), які обертають в нуль інтеграл по досліджуваній області, задача зводиться до визначення лише граничних функцій.

Як і в задачах теорії пружності, в МГЕ покладається, що поле вагових функцій є рішенням фундаментальної задачі (рівняння Нав'є).

МГЕ – альтернативний підхід по відношенню до існуючих числових методів досліджень в механіці суцільних середовищ. Як і в МСЕ, в МГЕ реалізується запропонована в 1970 р. ідея Пуассона – розв'язок задачі пошуку напружено-деформованого стану (НДС) складної конструкції шукати шляхом подання її складовою із елементарних фрагментів.

Основою числової реалізації МГЕ є перехід від функціональних

Наукове видання

**Моргун Алла Серафимівна
Меть Іван Миколайович
Ніцевич Андрій Віталійович**

**КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ
РОЗРАХУНКУ ФУНДАМЕНТНИХ КОНСТРУКЦІЙ НА
ОСНОВІ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Монографія

Редактор С. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено А. Моргун

Підписано до друку 7.07.2009 р.
Формат 29,7×42¼ Папір офсетний
Гарнітура Times New Roman
Друк різнографічний Ум. др. арк. 9,32.
Наклад 100 прим. Зам № 2009-132

Вінницький національний технічний університет
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59-85-32

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті,
комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
ВНТУ, ГНК, к. 114
Тел. (0432) 59-81-59

Замовити цю книгу <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/491>

Видавництво Вінницького національного технічного університету

<https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog>