Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. М. Мізерний

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛООБМІНУ В ДИСПЕРСНІЙ СИСТЕМІ

Монографія

Вінниця
ВНТУ
2019

УДК 517.9
М28

Рекомендовано до друку вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 6 від 27 грудня 2018 р.)

Рецензенти:
В. Я. Данилов, доктор технічних наук, професор
П. І. Когут, доктор фізико-математичних наук, професор

Мізерний, В. М.
М28 Моделювання процесу теплообміну в дисперсній системі: монографія / В. М. Мізерний. – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 80 с.
ISBN 978-966-641-758-2

У монографії представлено дослідження математичних моделей процесу нелінійного теплообміну в системах з розподіленими параметрами на основі аналізу стаціонарних та динамічних режимів теплообмінних процесів; проведено оцінювання параметрів керування та оптимізації у дисперсному шарі, що дозволить покращити роботу автоматизованих систем керування різними технологічними процесами.

УДК 517.9

ISBN 978-966-641-758-2

Пам'яті

***Анатолія Шакули** –*

мого друга.

Мого найкращого друга…

ЗМІСТ

ВСТУП

При проектуванні та в процесі використання автоматизованих систем керування різними технологічними процесами виникає необхідність у такому математичному забезпеченні, яке дозволяло б застосовувати сукупність методів, моделей і алгоритмів для реалізації задач обробки інформації із застосуванням засобів сучасної обчислювальної техніки і було основою для розробки відповідного програмного забезпечення. Прикладом може бути система контролю і підтримки на заданому рівні технологічних параметрів процесу випалювання залізорудних котунів у конвеєрній машині неперервної дії. Аналіз змін параметрів (у тому числі в сторону граничних і критичних значень) у процесі випалювання дозволяє побудувати математичну модель процесу нелінійного теплообміну в дисперсній системі (між дисперсною фазою і дисперсним середовищем), який має широке поширення в промисловій технології. Слід відмітити, що інженери виробництв у своїх дослідженнях не завжди притримуються математичних законів, зокрема ігнорують існування розв'язків, похідних та інтегрованості для нелінійних систем з розподіленими параметрами, що є одним з необхідних етапів математичної формалізації фізичних процесів, що досліджуються. Хоча в дійсності конвеєрна машина випалювання залізорудних котунів неперервної дії досить складна, однак для побудови математичної моделі технологічного процесу можна використовувати спрощену схему, яка дозволяє враховувати майже всі важливі особливості її роботи.

Виходячи з цього приведемо деякі інтерпретації математичної моделі для цього класу розподілених об'єктів (дифузійні і тепломасообмінні процеси) і дамо їх узагальнений математичний опис у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу.

1 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ НЕЛІНІЙНОГО ТЕПЛООБМІНУ ДВОФАЗНИХ СЕРЕДОВИЩ

Розглянемо теплообмін у дисперсній системі між дисперсною фазою і дисперсійним середовищем на прикладі процесу теплообміну між шаром пористої речовини (залізорудними котунами) і газом, що проходить через шар. Для створення математичної моделі такого процесу необхідно враховувати усі важливі сторони роботи конвеєрної машини, процес випалювання в якій відбувається за рахунок випромінювання факела пальника, а також конвекційного теплообміну між газовим потоком і поверхнею шару котунів. При цьому має місце кілька режимних зон: сушіння, підігріву, випалювання та охолодження. Кожна режимна зона розглядається як окремий апарат або об’єкт. Взаємодія і цілеспрямоване функціонування об’єктів забезпечується наявністю матеріальних і енергетичних потоків між їхніми елементами. У дійсності газова схема випалювальної машини досить складна, але для побудови математичної моделі досліджуваного процесу можна використовувати еквівалентну схему газових потоків, що також дозволяє враховувати всі особливості її роботи.

У процесі теплової обробки шар котунів висотою *h* проходить дві зони сушіння висхідним і спадним потоками і зону попереднього нагрівання. Залежність теплоємності котунів від температури відома. У зонах обробки котунів створюються необхідні за умовами технології газові середовища – задані температури і складові газових потоків. Витрата газів визначається температурними умовами і газодинамічними параметрами шару в зонах, опором і щільністю тракту, а також характеристиками вентиляторів.

Зони охолодження працюють від двох автономних технологічних вентиляторів, що нагнітають навколишнє повітря в кожну з них. Їхній розрахунок відрізняється від розрахунку зон обробки тільки тим, що охолодження котунів здійснюється продувом холодного атмосферного повітря. Повітря, проходячи через гарячий шар котунів, забирає від них тепло і гаряче вторинне повітря надходить у камеру для розбавлення продуктів горіння. Знаючи його температуру і витрату, а також витрату продуктів горіння і їхню температуру в камері, можна розраховувати загальну витрату палива, що особливо важливо в побудові математичної моделі процесу керування об'єктом.

Для формалізації досліджуваного процесу необхідно допустити, що стан дисперсної системи характеризується безперервними в просторі і в часі функціями розподілу температур $\Theta(t,\bar{x})$ і $T(t,\bar{x})$ дисперсної фази і дисперсного середовища відповідно, де $\bar{x}$ – вектор просторових координат: $\bar{x}=(x,y)$, x – координата товщини шару, $0 \le x \le h$; y – координата по довжині режимної зони, $0 \le y \le l$; t – час процесу, $t \in [0,t_k] \equiv S$. Таке допущення дозволяє використовувати рівняння Дамкелера [1], справедливі для багатофазних суцільних середовищ. Однак, на відміну від теплообміну в таких середовищах, у розглянутому випадку залишається можливість теплообміну в кожній точці простору, а не тільки на міжфазній поверхні. Прийняте вище допущення дозволяє враховувати взаємодію дисперсної фази і дисперсного середовища в кожній точці простору.

Для характеристики системи достатньо чотирьох потоків:

- маса $G=\dfrac{dM}{dt}$; (1.1)

- компонента $G_i=\dfrac{dN_i}{dt}$; (1.2)

- теплота або ентальпія $Q=\dfrac{d(CT)}{dt}$; (1.3)

- імпульс $p=\dfrac{d(Mv)}{dt}$, (1.4)

де M – маса; t – час; N_i – маса обраного i-го компонента, виражена у молях; C – питома теплоємність; T – температура; v – швидкість.

На основі законів Ньютона, Фур'є, Фіка та інших можна записати закони збереження маси й енергії, пов'язані з дифузією, теплопровідністю, теплопереносом, хімічними реакціями й іншими процесами у формі диференціальних рівнянь. Закон збереження для узагальненого потоку відповідно до принципів термодинаміки можна записати у вигляді

$$div[\Gamma \upsilon] - div[\delta\, grad\, \Gamma] \to w\varepsilon\Delta\Gamma + J = -\frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \tag{1.5}$$

де Γ – узагальнена густина; δ – провідність потоку; w – поверхня передачі на одиницю об'єму; ε – узагальнений коефіцієнт перенесення.

Для питомих величин вираз (1.5) матиме вигляд:

- для потоку маси

$$div[\rho V] - div[D_c\, grad\, \rho] + w\beta\Delta\rho + J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}; \tag{1.6}$$

- для потоку компонента

$$div[\rho_i V] - div[D_i\, grad\, \rho_i] + w_i\beta_i\Delta\rho_i + J_i = -\frac{\partial \rho_i}{\partial t}; \tag{1.7}$$

- для потоку ентальпії або теплоти

$$div[\rho_c TV] - div[\lambda, grad\, T] + w_g\beta_g\Delta T + J_g = -\frac{\partial(\rho_c T)}{\partial t}; \tag{1.8}$$

- для потоку імпульсу

$$Div(\rho\upsilon\times\upsilon) - Div(\eta\, Grad\, \upsilon) + w\gamma\Delta\upsilon + grad\, \rho = -\frac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial t}, \tag{1.9}$$

де D_c – коефіцієнт самодифузії; D_i – коефіцієнт дифузії; w_i, w_g – поверхня масообміну і теплообміну на одиницю об'єму відповідно; β, β_i – коефіцієнти масовіддачі; λ – коефіцієнт теплопровідності; ρ – густина; β_g – коефіцієнт тепловіддачі; η – динамічна в'язкість; γ – коефіцієнт переносу імпульсу; *p* – тиск; *Div* – не тільки дивергенція, тому що величини, які знаходяться всередині дужок, є тензором другого порядку; *Grad* – не вектор градієнта скалярної функції, а тензор градієнта векторної функції.

У рівняннях (1.6)–(1.9) праві частини характеризують зміни в часі маси *i-го* компонента, ентальпії (або теплоти) і імпульсу відповідно. Перші члени лівих частин рівнянь (1.6)–(1.9) описують просторове переміщення питомих параметрів – конвективний потік. У випадку двофазних елементів процесу з фазами *1* і *2* для конвективного потоку розрізняють такі окремі випадки:

1а) $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$ – ніякого конвективного потоку немає і фази через елемент процесу не протікають. Отже, вони повинні частинами вводитися в елемент процесу і частинами видалятися з нього. Таким чином, елемент процесу діє періодично і не може бути стаціонарним;

1б) $\upsilon_1 = 0; \upsilon_2 \neq 0$ – фаза *1* періодично вводиться в елемент процесу і так само видаляється з нього, а фаза *2* безупинно протікає через елемент після того, як фаза *1* заповнить свою частину об’єму. В такій одно потоковій системі також не можна домогтися стаціонарного стану;

1в) $\upsilon_1 \neq 0;\ \upsilon_2 \neq 0$ – ці умови відповідають безперервному протіканню обох фаз через елемент процесу. Якщо швидкість конвективних потоків, а також густина, температура на вході або концентрація постійні, то елемент процесу буде діяти стаціонарно.

Другі члени лівих частин (1.6)–(1.9) описують зміни питомих параметрів за рахунок дифузії – основний потік. Для основного потоку в двофазних елементах процесу розрізняють такі окремі випадки:

2а) λ (коефіцієнт теплопровідності) $\to 0$ або D (коефіцієнт дифузії) $\to 0$ (випадок, коли можна знехтувати чистотою основного потоку);

2б) $\lambda >> 0$ або $D >> 0$ – умови, за яких не слід нехтувати існуванням основного потоку;

2в) $\lambda \to \infty$ або $D \to 0$ – умови, характерні для зникнення градієнта температури або концентрації, причому в усьому елементі процесу переважає вихідна температура або концентрація.

Однак ці співвідношення для конвективного й основного потоків справедливі тільки до границь фаз. У той же час неможливо знайти явну залежність, що описує потоки на міжфазній поверхні. Тому для опису перехідного потоку використовуються емпіричні залежності, представлені третіми членами в рівняннях (1.6)–(1.9). Для перехідного потоку в двофазних елементах процесу розрізняють такі окремі випадки:

3а) $w\beta = 0$ і $w\beta_g = 0$ – перехідного потоку немає, тобто перегородка, що розділяє фази, непроникна для компонента або теплоти й обидві фази незалежні одна від одної. З двох коефіцієнтів переносу хоча б один повинний відрізнятися від нуля;

3б) $w\beta > 0$ або $w\beta_g > 0$ – існує перенесення теплоти або компонента і обидва коефіцієнти переносу можуть дорівнювати нулю;

3в) $w\beta \to \infty$ або $w\beta_g \to \infty$ – перенесення відбувається миттєво, тобто дві фази, що контактують, досягають стану рівноваги за дуже малий проміжок часу.

Четверті члени лівих частин рівнянь відбивають існування в деяких точках розглянутого елемента джерел або стоків. Джерела тепла і маси в процесах випалювання відіграють досить істотну роль. Однак загальних рецептів визначення функції джерел у рівняннях (1.6)–(1.9) немає. При цьому виділяють два підходи: або враховують ефект джерел непрямим шляхом у коефіцієнтах тепло- і масообміну, або намагаються відновити функції джерел, використовуючи для цього додаткову інформацію.

Розпишемо рівняння (1.6)–(1.9) для твердої і газової фаз процесу випалювання котунів:

- потік ентальпії для твердої і газової фаз

$$(1-\varepsilon_0)\frac{\partial C_s\rho_s\Theta}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\left(V_i\frac{\partial C_s\rho_s\Theta}{\partial x_i} - (1-\varepsilon_n)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{s_i}(\overline{x})\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}\right)\right) + \qquad (1.10)$$
$$+ s\varepsilon_0\alpha(\Theta,T)(T-\Theta) + J_\Theta;$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial C_g\rho_g\Theta}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\left(\varepsilon_n W_i\frac{\partial C_g\rho_g\Theta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_{g_i}(\overline{x})\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\right) + \qquad (1.11)$$
$$+ s\varepsilon_0\alpha(\Theta,T)(\Theta-T) + J_T;$$

- потік маси для твердої і газової фаз

$$(1-\varepsilon_0)\frac{\partial C_s\rho_s\Theta}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3}\left(V_i\frac{\partial C_s\rho_s\Theta}{\partial x_i} - (1-\varepsilon_0)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{s_i}(\overline{x})\frac{\partial\rho_s}{\partial x_i}\right)\right) + J_{\rho_s}; \quad (1.12)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \rho_g}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \left(\varepsilon_n W_i \frac{\partial \rho_g}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{g_i} \frac{\partial \rho_g}{\partial x_i} \right) \right) + J_{\rho_s}; \tag{1.13}$$

- потік компонентів

$$(1-\varepsilon_0) \frac{\partial C_i \Theta}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \left(V_i \frac{\partial C_i \Theta}{\partial x_i} - (1-\varepsilon_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathrm{D}_{s_i} \frac{\partial C_i \Theta}{\partial x_i} \right) \right) + J_{C_i}; \tag{1.14}$$

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial C_i T}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \left(\varepsilon_n W_i \frac{\partial C_i T}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathrm{D}_{\rho_i} \frac{\partial C_i T}{\partial x_i} \right) \right) + J_{C_i}, \tag{1.15}$$

де C_s, C_g – питома теплоємність твердої речовини і газу відповідно; ρ_s, ρ_g – густина твердої речовини і газу; $\varepsilon_0, \varepsilon_n$ – коефіцієнти об'ємної і поверхневої пористості; $\lambda_{s_i}, \lambda_{g_i}$ – коефіцієнти теплопровідності твердої речовини і газу; s – питома поверхня теплообміну; α – коефіцієнт теплообміну; V_i, W_i – швидкість надходження в елемент процесу твердої речовини і газу; D_{s_i}, D_{g_i} – коефіцієнт дифузії твердої речовини і газу відповідно.

Зробимо такі припущення:

4а) розподіл потоку газу через переріз шару рівномірно перпендикулярний потокові (тобто процес випалювання постійний уздовж ширини шару);

4б) випалювальний шар розглядається як двофазна система: газ–тверде тіло;

4в) рівняння для потоку маси газу не розглядається, тому що воно пов'язане з рівнянням для потоку компонента.

З огляду на це, перетворення рівняння теплообміну в зоні випалювання матимуть вигляд:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V_y \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1(t,x,y) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_2(t,x,y) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) =$$
$$= \frac{\varepsilon_0 s}{(1-\varepsilon_0)\rho_s C_s} \alpha(\Theta, T)(T-\Theta); \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+W_x\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(t,x,y)\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(b_2(t,x,y)\frac{\partial T}{\partial y}\right)= \\ =\frac{s}{\rho_g C_g}\alpha(\Theta,T)(T-\Theta) \qquad (1.17)$$

в області $\Omega=(0,h)\times(0,l)$, де $V_y, W_x, s, \rho_s, C_s, \rho_g, C_g$ – задані константи; a_i, b_i $(i=1,2)$ – обмежені функції, що задовольняють умови $a_i \ge \lambda_1 > 0$; $b_i \ge \lambda_2 > 0$, а $\alpha(\Theta,T)=K|T|^{0,67}$ – формула Тимофєєва.

Задаються відповідні початкові умови

$$T(0,x,y)=T_0(x,y); \quad \Theta(0,x,y)=\Theta_0(x,y), \qquad (1.18)$$

а на межі області $\partial\Omega$ – крайові умови першого, другого, третього роду або змішані, оскільки вид граничних умов може змінюватися в залежності від того, якою інформацією ми володіємо і у якій зоні ми знаходимося. Відповідно буде змінюватися задача, яка розглядається. Таким чином, приходимо до початково-крайової задачі для квазілінійної системи рівнянь з частковими похідними. Відповідно до прийнятої класифікації нелінійних крайових задач [2, 3] ця задача характеризується нелінійністю другого роду, тобто від температури нелінійно залежить густина теплового потоку на міжфазній поверхні,

$$q_s(T)=l_1|T|^{\frac{2}{3}}(T-\Theta)+\alpha(T^4-\Theta^4). \qquad (1.19)$$

Така класифікація певною мірою умовна, оскільки задачі з фазовими переходами можна віднести до задач з нелінійністю як першого, так і другого, і третього роду в залежності від способу обліку виділення теплоти фазових перетворень.

Система (1.16), (1.17) із заданими початковими і крайовими умовами є математичною моделлю динамічного режиму роботи конвеєрної машини в зоні випалювання. Однак за умови 4в) для конвективних потоків твердої і газової фаз процес може знаходитися в стаціонарному режимі, для опису якого будемо використовувати систему рівнянь в області $\Omega=(0,h)\times(0,l)$

$$V_y \frac{\partial\Theta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x,y)\frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) = \\ = \bar{l}\,\alpha(\Theta,T)(T-\Theta) + \alpha\beta(\Theta,T)(T^4-\Theta^4); \tag{1.20}$$

$$W_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(x,y)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2(x,y)\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \\ = \bar{l}\,\alpha(\Theta,T)(T-\Theta) + \alpha\beta(\Theta,T)(T^4-\Theta^4), \tag{1.21}$$

де $\alpha(\Theta,T) = K|T|^{\frac{2}{3}}$; $\quad \beta(\Theta,T) = T^4$;

$$a_i = \frac{\lambda_{g_i}(x,y)}{\rho_g C_g}; \; \bar{l}_1 = \frac{\varepsilon_0 s}{(1-\varepsilon_0)\rho_s C_s}; \; \bar{l}_2 = \frac{s}{\rho_g C_g}; \; \alpha > 0 \tag{1.22}$$

з відповідними заданими крайовими умовами на межі області $\partial\Omega$.

Крім того, у математичній моделі процесу необхідно врахувати той факт, що в разі великих градієнтів температур дисперсної фази відбувається руйнування котунів. У наслідок цього виникають обмеження на стан

$$|grad\ \Theta(t,x,y)| \le k_1 \quad \forall(x,y)\in\Omega;\ t\in[0,t_k]\equiv S, \tag{1.23}$$

де k_i – задана константа.

Зауважимо, що наведена математична модель динаміки для заданих параметрів, а саме: значень V_y, W_x і вигляду функцій $a_i(t,x,y), b_i(t,x,y)$ $(i=1,2)$, а також початкових і крайових умовах, може бути використана не тільки для опису процесів теплообміну в зоні випалювання, але і для моделювання процесів теплообміну в зоні сушіння, підігріву й охолодження. Тому надалі будемо приділяти увагу процесам, що проходять у зоні випалювання як найзагальнішим, з яких шляхом зміни параметрів і початково-крайових умов можна одержати опис процесів в інших зонах конвеєрної машини. У той же час побудовані математичні моделі динаміки і статики конвеєрної випалювальної машини допускають і безліч інших фізичних інтерпретацій. Так, наприклад, за допомогою побудованої математичної моделі можна описати теплові процеси, що виникають під час високо інтенсивної теплової обробки різних металевих поверхонь [4]. Рівняння теплопровідності, що описує такі процеси, буде мати вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right)=f(t,x,y), \qquad (1.24)$$

де $T(t,x,y)$ – функція розподілу температур оброблюваної поверхні в області $\Omega=(0,h)\times(0,l)$; $0\le x\le h$; $0\le y\le l$; $t\in[0,t_k]\equiv S$. Коефіцієнти $a(T)$ і функція $f(t,x,y)$ обчислюються за формулами

$$a(T)=\frac{\lambda(T)}{\rho_n C_n}=C_0T^2+C_1T+C_2;$$

$$f(t,x,y)=\delta(t)g(x);$$

$$\delta(t)=\begin{cases}1,\ t\in[t_1,t_2];\\ 0,\ t\notin[t_1,t_2].\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}\beta,\ t\in[\alpha_1(t),\alpha_2(t)];\\ 0,\ t\notin[\alpha_1(t),\alpha_2(t)],\end{cases} \qquad (1.25)$$

де $\lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; ρ_n – густина оброблюваної поверхні; C_n – теплоємність оброблюваної поверхні.

Задаються:

початкова умова

$$T(0,x,y)=T_0(x,y) \qquad (1.26)$$

і крайова умова третього роду на межі $\partial\Omega$

$$\alpha(T-T_{сер})+\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}=0. \qquad (1.27)$$

Ще одним прикладом є процес теплообміну потоку рідини зі стінкою каналу круглого перерізу діаметром D [4], що описується системою рівнянь:

$$\frac{\partial T(t,x,y)}{\partial t}=-W_{ж}(x)\frac{\partial T(t,x,y)}{\partial x}-\frac{4\alpha_c[T_n(t)-T(t,x,y)]}{\rho_{ж}C_{ж}D};$$

$$\frac{\partial\Theta(t,x,y)}{\partial t}=$$

$$=\frac{\lambda_{cm}}{\rho_{cm}C_{cm}}\left[\frac{\partial^2\Theta(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial\Theta(t,x,y)}{\partial y}+\frac{\partial^2\Theta(t,x,y)}{\partial y^2}\right];$$

$$\alpha_c[T(t,x,y)-\Theta(t,x,y)]=\lambda_{cm}\frac{\partial\Theta(t,x,y)}{\partial y}\Big|_{y=\mathrm{D}}, \qquad (1.28)$$

де $T(t,x,y)$ – температура теплоносія, що рухається по каналу апарата; $\Theta(t,x,y)$ – температура стінки апарата; $T_n(t)$ – температура примежового шару системи тверде тіло–рідина; $W_{ж}(x)$ – швидкість течії теплоносія в каналі апарата; λ_{cm} – теплопровідність матеріалу стінки; $C_{ж}, C_{cm}, \rho_{ж}, \rho_{cm}$ – відповідно теплоємності і густини теплоносія і матеріалу стінки апарата; α_c – коефіцієнт тепловіддачі між стінкою апарата і теплоносієм.

Граничні умови на суміжних поверхнях мають вигляд:

- для твердого тіла (стінки)

$$\Theta(t,x,y)\big|_{x=0}=\Theta_{bx};\ \ \lambda_{cm}\frac{\partial\Theta(t,x,y)}{\partial x}\Big|_{x=l}=0, \qquad (1.29)$$

де l – довжина апарата;

- для рідини (теплоносія)

$$T(t,x,y)\big|_{x=0}=T_{bx}. \qquad (1.30)$$

Початкові умови зображуються у вигляді

$$T(0,x,y)=T_{cm}(0,0)+\left[T_{bx}-T_{cm}(0,0)\right]e^{-\frac{x}{wv}}, \qquad (1.31)$$

де $v=\rho_{ж}C_{ж}D_{ж}/4\alpha_c$.

Рівняння (1.28)–(1.31) є основою математичних моделей каналів із круглим перерізом.

Таким чином, у якості узагальненого математичного опису для досліджуваного класу дифузійних і теплообмінних процесів простороворозподільних динамічних об’єктів отримаємо рівняння в частинних похідних вигляду

$$\frac{\partial \Phi_i(t,\bar{x})}{\partial t} = f_i\left[\bar{\Phi}(t,\bar{x}), \frac{\partial \bar{\Phi}(t,\bar{x})}{\partial x}, \frac{\partial^2 \bar{\Phi}(t,\bar{x})}{\partial x^2}, \bar{U}_r(\bar{\Phi}), t, \bar{x}\right] + F_i(\bar{\Phi}, t, \bar{x}); \quad (1.32)$$

$$\forall\ i = 1,2,\dots,k,\ \ \forall\ \bar{x} = (x,y) \in \Omega,\ \ \forall\ t \in [0,t_k];\ \ \bar{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_\kappa]^T ,$$

де T – знак транспонування з урахуванням початкових умов

$$\bar{\Phi}(0,x,y) = \bar{\Phi}_0(x,y) \quad (1.33)$$

і граничних умов таких типів:

- граничних умов першого роду (типу Дирізхле)

$$\Phi_i(0,x,y) = \phi_i\left[p_i(t,\bar{x})\right]\ \ \forall \bar{x} \in \partial\Omega,\ \ \forall\ i = 1,2,\dots,k; \quad (1.34)$$

- граничних умов другого роду (типу Неймана)

$$q_i(t,\bar{x}) = -\lambda_i\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n}\right)\ \ \forall\ i = 1,2,\dots,k,\ \ \forall\ \bar{x} \in \partial\Omega; \quad (1.35)$$

- граничні умови третього роду

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = \phi_i\left[\bar{\Phi}(t,\bar{x}), p_i(y,\bar{x})\right]\ \ \forall\ \bar{x} \in \partial\Omega,\ \ \forall\ i = 1,2,\dots,k; \quad (1.36)$$

- змішаних граничних умов першого і третього роду

$$\Phi_i(t,x)\Big|_{\Gamma_j} = \phi_i\left[p_i(t,\bar{x})\right]$$

$$\forall\ \bar{x} \in \Gamma_j,\ \ \forall\ i = 1,2,\dots,k,\ \ \forall\ j = 1,2,\dots,r; \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial \Phi_i(t,x)}{\partial x_i}\Big|_{\gamma_j} = \phi_i\left[\bar{\Phi}(t,\varepsilon x), p_i(t,\bar{x})\right]$$

$$\forall\ \bar{x} \in \Gamma_j,\ \ \forall\ i = 1,2,\dots,k,\ \ \forall\ j = 1,2,\dots,r,$$

де Γ_j – такі, що $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ для $i \neq j;\ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_r = \partial\Omega$, а $\gamma_j = \partial\Omega \setminus \Gamma_j\ \ \forall\ j = 1,2,\dots,r;$

- граничних умов четвертого роду

$$\lambda_{1i}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial n}\right)_{\Pi_1} = -\lambda_{2i}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial n}\right)_{\Pi_2} = q\Pi, \qquad (1.38)$$

де $\Phi_i(t,\bar{x})$ – неперервні функції стану, що залежать від часової і просторових $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ координат і визначаються розв'язком системи (1.32)–(1.38), існування й одиничність якого доводиться для кожного конкретного випадку окремо; $U_r(\bar{\Phi}_i,t,\bar{x}),\ r=1,2,...,k^*$, – функції розподілу керування

$U_r(\bar{\Phi}_i,t,\bar{x})$ і $\bar{\Phi}_i(t,\bar{x})$ визначені в деяких банахових просторах, що визначаються в кожному окремому випадку.

f_i і ϕ_i – неперервні лінійні (або нелінійні) функції; $F_i(\bar{\Phi}_i,t,\bar{x}) = F_i\{t,\bar{x},\Phi_1(t,\bar{x}),\Phi_2(t,\bar{x}),...,\Phi_k(t,\bar{x})\}$ – нелінійні функції, що характеризують збурення; $p_i(t,\bar{x}),\ i=1,2,...,k$ – задані на межі області $\partial\Omega$ функції просторової змінної $\bar{x}$, які можуть виступати в якості граничних керуючих впливів; λ_i – параметр, що характеризує енергетичні властивості елементів об'єкта; q_i – потік енергії; П – нормаль до просторових координат $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$; Π_1,Π_2 – відповідно індекси поверхонь взаємодіючих елементів об'єкта.

Змінні стану $\Phi_i(t,\bar{x})$ і керування $U_r(\bar{\Phi}_i,t,\bar{x})$ у диференціальному рівнянні (1.32) можуть позначати різні фізичні величини (температуру, тиск та ін.), що визначають явища, які відбуваються у конкретно розглянутих процесах. А параметри λ_i і q_i з умов (1.35) можуть, наприклад, позначати коефіцієнт теплопровідності і тепловий потік відповідно для теплових процесів.

2 АНАЛІЗ СТАЦІОНАРНИХ РЕЖИМІВ ТЕПЛООБМІННИХ ПРОЦЕСІВ У ДИСПЕРСНОМУ ШАРІ

У цьому розділі розглядається стаціонарний режим роботи конвеєрної машини неперервної дії для випалювання залізорудних котунів. Необхідно довести можливість розв'язання крайової задачі, що є його математичною моделлю, і показати, до яких класів функцій буде належати розв'язок в залежності від вибору крайових умов. При доведенні можливості розв'язання крайової задачі будемо використовувати функціонально-аналітичне формулювання крайових задач, тобто представимо їх у вигляді операторних рівнянь у банахових просторах. Такий перехід від крайових задач до операторних рівнянь є широко вживаним [2, 3, 4, 5], оскільки значно полегшує вивчення і процес розв'язування задачі.

Розглянемо стаціонарний режим роботи конвеєрної машини, який у зоні випалювання опишемо системою диференціальних рівнянь у частинних похідних виду:

$$V_y \frac{\partial \Theta}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y) \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x,y) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = l_1 |T|^{\frac{2}{3}} (T - \Theta) + \alpha_2 (T^4 - \Theta^4);$$

$$W_x \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(x,y) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2(x,y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = l_1 |T|^{\frac{2}{3}} (T - \Theta) + \alpha_2 (T^4 - \Theta^4), \quad (2.1)$$

де $V_y \geq 0,\ W_x \geq 0,\ l_1 \geq 0,\ \alpha \geq 0$ – задані константи, а коефіцієнти $a_i(x,y),\ b_i(x,y)\ (i = 1{,}2)$ задовольняють умови

$$a_i(x,y) \geq \lambda_1 > 0,\ b_i(x,y) \geq \lambda_2 > 0 \quad a_i, b_i \in L_\infty(\Omega). \quad (2.2)$$

На межі області $\partial\Omega$ задані крайові умови для газу і твердої речовини

$$\begin{aligned} T(0,y) &= \phi_1(y); & \Theta(0,y) &= \eta_1(y); \\ T(h,y) &= \phi_2(y); & \Theta(h,y) &= \eta_2(y) \\ T(x,0) &= \phi_3(x); & \Theta(x,0) &= \eta_3(x) \\ T(x,l) &= \phi_4(x); & \Theta(x,l) &= \eta_4(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

і обмеження на стан

$$\left| grad\, \Theta(x,y) \right| \leq k \quad \forall\ (x,y) \in \Omega, \quad (2.4)$$

де k – відома стала. Необхідно довести можливість розв'язання нелінійної крайової задачі (2.1), (2.3) і показати, у яких класах функцій існує розв'язок.

Нехай досить регулярні функції $\hat{T}(x,y)$ і $\hat{\Theta}(x,y)$ задовольняють умови

$$\hat{T}(x,y)\Big|_{\partial\Omega} = T\Big|_{\partial\Omega}; \quad \hat{\Theta}(x,y)\Big|_{\overset{\bullet}{\partial\Omega}} = \Theta\Big|_{\partial\Omega}. \tag{2.5}$$

Тоді для функцій $\overline{T} = T - \hat{T}$, $\overline{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$ крайова задача (2.1), (2.3) буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
&V_y \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x,y)\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2(x,y)\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\right) = \\
&= l_1\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{\frac{2}{3}}((\overline{T}+\hat{T}) - (\overline{\Theta}+\hat{\Theta})) + \alpha((\overline{T}+\hat{T})^4 - (\overline{\Theta}+\hat{\Theta})) - ; \\
&-\left(V_y \frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial y}\right)\right);
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
&W_x \frac{\partial\overline{T}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1(x,y)\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2(x,y)\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\right) = \\
&= l_1\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{\frac{2}{3}}((\overline{\Theta}+\hat{\Theta}) - (\overline{T}+\hat{T})) + \alpha((\overline{\Theta}+\hat{\Theta})^4 - (\overline{T}-\hat{T})^4) - \\
&-\left(W_x \frac{\partial\hat{T}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_1\frac{\partial\hat{T}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b_2\frac{\partial\hat{T}}{\partial x}\right)\right);
\end{aligned}$$

з відповідними крайовими умовами

$$\overline{T}\Big|_{\partial\Omega} = 0; \quad \overline{\Theta}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2.7}$$

і обмеженням на стан

$$\left|grad\,(\overline{\Theta}(x,y) + \hat{\Theta}(x,y))\right| \le k \quad \forall\,(x,y)\in\Omega. \tag{2.8}$$

Функцію $\overline{Y} = \left\{\overline{\Theta}(x,y), \overline{T}(x,y)\right\}$, яка належить просторові $X, X = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_p(\Omega)\right]^2$, $p \ge 5$, і задовольняє $\forall\,\mu\in X$, $\mu = (\mu_1;\mu_2)$ інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\Omega}\left(V_y\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\mu_1+W_x\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\mu_2\right)dxdy+\int\limits_{\Omega}\left(a_1\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial\mu_1}{\partial x}+a_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\frac{\partial\mu_2}{\partial x}+b_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\left(V_y\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\mu_1+W_x\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\mu_2\right)dxdy-l_1\int\limits_{\Omega}\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{\frac{2}{3}}\times((\overline{T}+\hat{T})-(\overline{\Theta}+\hat{T}))(\mu_2-\mu_1)dxdy-$$

$$-\alpha\int\limits_{\Omega}((\overline{T}+\hat{T})^4-(\overline{\Theta}+\hat{T})^4)(\mu_2-\mu_1)dxdy+\int\limits_{\Omega}\left(a_1\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial\mu_1}{\partial x}+a_2\frac{\partial\hat{\Theta}}{\partial y}\frac{\partial\mu_1}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+b_1\frac{\partial\hat{T}}{\partial x}\frac{\partial\mu_2}{\partial x}+b_2\frac{\partial\hat{T}}{\partial y}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (2.9)$$

назвемо узагальненим розв’язком задачі (2.6), (2.7).

Співвідношення (2.9) має сенс для всіх $\overline{\Theta},\overline{T},\mu_1,\mu_2\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\cap L_p(\Omega)$, $p\ge 5,$ де $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ – простір Соболєва [2, 4, 6], тому що відповідно до нерівності Гельдера такі функції набувають значень на межі Γ області Ω, які рівні $\overline{\Theta}(\Gamma), \overline{T}(\Gamma), \mu_1(\Gamma), \mu_2(\Gamma)$ відповідно, причому ці значення на границі Γ є елементами простору $L_2(\Gamma)$. Перетворимо (2.9) до вигляду

$$\left\langle A(\overline{y}),\mu\right\rangle=\left\langle\overline{F}(\overline{y}),\mu\right\rangle-\left\langle A(\hat{y}),\mu\right\rangle\ \ \forall\ \mu\in X, \qquad (2.10)$$

де оператор A визначається своєю білінійною формою

$$\left\langle A(\overline{y}),\mu\right\rangle=\int\limits_{\Omega}\left(V_y\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\mu_1+W_x\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\mu_2\right)dxdy+\int\limits_{\Omega}\left(a_1\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial x}\frac{\partial\mu_1}{\partial x}+a_2\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\frac{\partial\mu_1}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+b_1\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}\frac{\partial\mu_2}{\partial x}+b_2\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (2.11)$$

а оператор $\overline{F}(\overline{y})\overset{\Delta}{=}F(\overline{y}+\hat{y})$ визначається напівлінійною формою

$$\left\langle\overline{F}(\overline{y}),\mu\right\rangle=-l_1\int\limits_{\Omega}\left|\overline{T}+\hat{T}\right|^{\frac{2}{3}}((\overline{T}+\hat{T})-(\overline{\Theta}+\hat{T}))(\mu_2-\mu_1)dxdy-$$

$$-\alpha\int\limits_{\Omega}((\overline{T}+\hat{T})^4-(\overline{\Theta}-\hat{\Theta})^4)(\mu_2-\mu_1)\,dxdy;$$

(2.12)

$$\overline{F}(\overline{y})=\begin{Bmatrix}\overline{f}_1(\overline{\Theta},\overline{T})\\-\overline{f}_1(\overline{\Theta},\overline{T})\end{Bmatrix},$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. П. Бенедек и В. Ласло, *Научные основы химической технологии*. Ленинград: Химия, 1970, с. 112–114.

2. М. З. Згуровский и А. Н. Новиков, *Анализ и управление односторонними физическими процессами.* Киев: Наукова думка, 1996.

3. Х. Гаевский, К. Грегер и К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978.

4. В. В. Ажогин, М. З. Згуровский и Ю. Корбич, *Методы фильтрации и управления стохастическими процессами с распределенными параметрами.* Киев: Вища школа, 1988.

5. М. З. Згуровский, В. С. Мельник и А. Н. Новиков, *Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями.* Киев, Украина: Наукова думка, 2004.

6. В. И. Иваненко и В. С. Мельник, *Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами.* Киев: Наукова думка, 1988.

7. Ж. Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* Москва: Мир, 1972.

8. Ж. Л. Лионс, «Редукция к задаче меньшей размерности в проблеме оптимального контроля,» в *Дифференциальные уравнения с частными производными*. Новосибирск: Наука, 1980, с. 176–181.

9. Ж. Л. Лионс, «Об оптимальном управлении распределенными системами,» УМН, т 28, № 4, с. 15–46. 1973.

10. Ж. Л. Лионс, «Об оптимальном управлении неустойчивыми распределенными системами,» в *Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики*. Новосибирск, 1983. – с. 7–19.

11. В. М. Мізерний, «Математичне моделювання процесу теплообміну в дисперсному шарі,» на *13 Міжнар. конф. з автоматичного управління «Автоматика – 2006»,* Вінниця, 2006, с. 22.

12. В. М. Мізерний і Т. А. Модебадзе, «Моделювання процесу нелінійного теплообміну двофазних середовищ,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту,* № 3, с. 61–75. 2006.

13. В. М. Мізерний і Т. А. Модебадзе, «Аналіз стаціонарних режимів теплообмінних процесів у дисперсному шарі,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту,* № 4, с. 82–102. 2006.

14. В. М. Мізерний і Т. А. Модебадзе, «Аналіз динамічних режимів теплообмінних процесів у дисперсному шарі,» *Вісник Вінницького політехнічного інституту,* № 3, с. 98–105. 2007.

Наукове видання

Мізерний Віктор Миколайович

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛООБМІНУ В ДИСПЕРСНІЙ СИСТЕМІ

Монографія

Редактор С. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено В. Мізерним

Підписано до друку 5.02.2019 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. др. арк. 4,62.
Наклад 300 (1-й запуск 1–75) пр. Зам № В2019-06

Вінницький національний технічний університет,
ІРВЦ ВНТУ,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua; *email*: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано ФОП Барановська Т. П.
21021, м. Вінниця, вул. Порика, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4377 від 31.07.2012 р.