

**Р. Р. Обертюх
А. В. Слабкий**

**ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ
ТЕПЛОТЕХНІКИ**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Р. Р. Обертюх
А. В. Слабкий

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕПЛОТЕХНІКИ

**Електронний навчальний посібник
комбінованого (локального та мережного) використання
2-ге видання, перероблене та доповнене**

Вінниця
ВНТУ
2020

УДК 621.1.016(075)

О-13

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 8 від 26.03.2020 р.)

Рецензенти:

І. В. Севостьянов, доктор технічних наук, професор, ВНАУ

С. Й. Ткаченко, доктор технічних наук, професор, ВНТУ

В. І. Савуляк, доктор технічних наук, професор, ВНТУ

Обертюх, Р. Р.

О-13 Теоретичні основи теплотехніки : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / Р. Р. Обертюх, А. В. Слабкий ; 2-ге вид., перероб. та доп.. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 180 с.

ISBN 978-966-641-795-7 (PDF)

У навчальному посібнику викладено основні поняття та закони різних видів тепломасообміну, а також його особливості за наявності дифузійних процесів і під час хімічних перетворень. Розглянуто теоретичні основи розрахунку теплових (термічних) напружень і деформацій, наведено та проаналізовано ідеалізовані цикли теплових двигунів і холодильників. В кінці кожного розділу для закріплення вивченого матеріалу наведено перелік запитань для самоперевірки, а також в посібнику розміщено практикум із задач, складених за теоретичним змістом розділів посібника, та тестів для самоконтролю знань, набутих під час вивчення дисципліни «Теоретичні основи теплотехніки».

Зміст посібника відповідає програмі дисципліни «Теоретичні основи теплотехніки» освітньої програми «Галузеве машинобудування» та є теоретичною базою для окремих прикладних розділів загально інженерних і спеціальних (фахових) дисциплін, які вивчаються за спеціальністю 133 – «Галузеве машинобудування». Посібник може бути використаний для підготовки з теоретичних питань тепломасообміну студентами інших спеціальностей, наприклад, 131 – «Прикладна механіка».

Посібник призначено для студентів денної та заочної форм навчання.

УДК 621.1.016(075)

ISBN 978-966-641-795-7 (PDF)

© ВНТУ, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП	6
1 ОСНОВИ ВЧЕННЯ ПРО ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ.....	8
1.1 Методи вивчення фізичних явищ природи	8
1.2 Види теплопередачі. Температурне поле в твердому тілі	8
1.2.1 Температурне поле в твердому тілі.....	9
1.3 Ізотермічні поверхні. Температурний градієнт	11
1.4 Основний закон теплопровідності	12
1.5 Коефіцієнти теплопровідності твердих, рідких та газоподібних тіл	14
1.6 Диференціальне рівняння теплопровідності. Джерела та стоки теплоти	16
1.6.1 Диференціальні рівняння теплопровідності для окремих видів температурних полів.....	20
1.6.2 Умови однозначності для процесів теплопровідності	22
1.6.3 Джерела та стоки теплоти	24
1.7 Методи розв'язування диференціального рівняння теплопровідності	28
1.8 Запитання для самоперевірки до розділу 1	50
2 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ВЧЕННЯ ПРО КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛООБМІН.....	53
2.1 Основні поняття та означення	53
2.2 Фізичні властивості рідин	55
2.3 Диференціальні рівняння конвективного теплообміну	60
2.3.1 Рівняння енергії.....	61
2.3.2 Рівняння руху	63
2.3.3 Рівняння суцільності.....	66
2.4 Гідродинамічний та тепловий примежові шари	68
2.4.1 Гідродинамічний примежовий шар	69
2.4.2 Тепловий примежовий шар.....	70

2.5	Елементи теорії подібності та моделювання процесів конвективного теплообміну.....	71
2.5.1	Умови подібності фізичних явищ	76
2.5.2	Емпіричні залежності конвективного теплообміну	78
2.5.3	Інтегральні рівняння теплового потоку та імпульсів для теплового і гідродинамічного прилежових шарів	80
2.6	Особливості руху рідини та теплообміну в трубах	82
2.6.1	Ділянки гідродинамічної та теплової стабілізації потоку рідини в трубі	82
2.6.2	Інтегральне рівняння тепловіддачі для стабілізованого теплообміну в прямій круглій трубі.....	86
2.7	Особливості теплообміну у випадку зміни агрегатного стану рідини	89
2.7.1	Теплообмін під час кипіння	89
2.7.2	Теплообмін під час конденсації.....	94
2.8	Основні поняття та закони тепло- та масообміну в двокомпонентних середовищах.....	97
2.8.1	Особливості тепломасообміну під час хімічних перетворень	101
2.9	Запитання для самоперевірки до розділу 2	104
3	ТЕПЛООБМІН ВИПРОМІНЮВАННЯМ	1067
3.1	Види та параметри променевих потоків	108
3.2	Закони теплового випромінювання.....	114
3.2.1	Закон Планка	114
3.2.2	Закон Релея – Джинса.....	115
3.2.3	Закон зміщення Віна.....	115
3.2.4	Закон Стефана – Больцмана.....	116
3.2.5	Закон Кірхгофа	117
3.2.6	Закон косинусів Ламберта.....	118
3.2.7	Чорні температури	118
3.3	Методи визначення випромінювальної здатності твердих тіл... ..	119
3.4	Рівняння перенесення променевої енергії в поглинальних, поглинально-випромінювальних та поглинально-випромінювально-розсіювальних спектральних середовищах.....	121
3.4.1	Рівняння перенесення променевої енергії в поглинальному спектральному середовищі.....	121

3.4.2 Рівняння перенесення променевої енергії у поглинально-випромінювальних та поглинально-випромінювально-розсіювальних спектральних середовищах.....	122
3.5 Основні поняття складного теплообміну. Критерії радіаційної подібності.....	123
3.6 Запитання для самоперевірки до розділу 3	126
4 ТЕПЛОВІ НАПРУЖЕННЯ ТА ДЕФОРМАЦІЇ	127
4.1 Запитання для самоперевірки до розділу 4.....	132
5 ТЕПЛОСИЛОВІ ЦИКЛИ ТЕПЛОВИХ МАШИН.....	133
5.1 Теплосилові газові цикли двигунів внутрішнього згоряння	1344
5.2 Теплосилові парові цикли	1433
5.3 Зворотні теплові цикли холодильних машин.....	146
5.4 Запитання для самоперевірки до розділу 5.....	149
6 ПРАКТИКУМ.....	150
6.1 Умови задач.....	150
6.2 Приклади розв'язування задач.....	161
6.3 Тести для самоконтролю ступеня засвоєння дисципліни.....	166
ЛІТЕРАТУРА.....	176
Українсько-англійський словник найбільш вживаних термінів	178

ВСТУП

Теоретичні основи теплотехніки (ТОТ) є нормативною загальноінженерною дисципліною, що входить до навчальних планів вищих навчальних закладів (ВНЗ), які навчають студентів за освітньою програмою «Галузеве машинобудування» та є теоретичною базою для окремих прикладних розділів загальноінженерних і спеціальних (фахових) дисциплін, які вивчаються за спеціальністю 133 – «Галузеве машинобудування».

Дисципліна ТОТ в повному обсязі складається з двох великих частин, які умовно можна назвати так: «Технічна термодинаміка» та «Теорія теплопередачі».

Професійна діяльність фахівців (магістрів) за спеціальністю «Галузеве машинобудування» пов'язана з конструюванням та експлуатацією машин, обладнання і устаткування для різних галузей народного господарства, наприклад, оброблення матеріалів різанням і тиском, переробних виробництв тощо. Магістри за вказаною спеціальністю також можуть працювати в науково-дослідних установах, які проводять теоретичні та експериментальні дослідження механічних систем.

Оброблення сучасних високоміцних та високов'язких матеріалів, з яких виготовляють деталі механізмів і машин, супроводжується інтенсивним виділенням теплоти, впливом якої на параметри технологічних процесів оброблення, стійкість та довговічність інструментів знехтувати не можна. Без розуміння суті процесів теплообміну неможливо правильно призначити режими термічного чи хіміко-термічного оброблення, яке обов'язково проходять усі важливі деталі сучасних машин. Теплові деформації в сучасних металорізальних верстатах, які працюють в умовах підвищених вимог до продуктивності і точності оброблення, суттєво можуть впливати на якість деталей, що на них виготовляються. Теплові процеси також мають місце і в інших технологічних машинах.

Щоб грамотно розв'язувати інженерні задачі під час експлуатації та створення нових машин і сучасних технологій виготовлення їх деталей, а також проводити теоретичні та експериментальні дослідження механічних систем, фахівці зі спеціальності «Галузеве машинобудування» повинні мати гарну підготовку насамперед з другої частини ТОТ, а саме «Теорія теплопередачі», де детально розглядаються теоретичні основи різних видів теплопередачі, тепломасообміну та методи розв'язування теплофізичних задач.

Для професійної діяльності фахівців, наприклад, зі спеціальності «Автомобілі та автомобільне господарство», переважне значення має перша частина ТОТ, «Технічна термодинаміка», яка є теоретичною базою для аналізу і розрахунку теплових машин (теплові двигуни, теплові насоси, холодильники тощо) та їх теплосилових циклів.

Враховуючи зроблені зауваження і, зважаючи на малий плановий обсяг лекційних, практичних та лабораторних занять з дисципліни ТОТ для студентів, що навчаються за освітньою програмою «Галузеве машинобудування», основний матеріал цього посібника присвячено теоретичним питанням теплопередачі та тепломасообміну, а технічна термодинаміка подана одним розділом – «Теплосилові цикли теплових машин».

Посібник може бути використаний для підготовки з теоретичних питань тепломасообміну студентами інших спеціальностей, наприклад, 131 – «Прикладна механіка».

Під час написання цього посібника як базове джерело використано навчальний посібник автора: «Обертюх Р. Р. Теоретичні основи теплотехніки : навчальний посібник / Обертюх Р. Р. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 165 с.»

Посібник складається з п'яти розділів, перші три яких присвячено основам теорії передавання теплоти теплопровідністю, конвекцією та випромінюванням, наведено відомості про елементи теорії подібності та моделювання конвективного теплообміну, а також викладено основні поняття про особливості тепломасообміну під час зміни агрегатного стану рідини, наявності дифузійних процесів та хімічних перетворень. В невеликому четвертому розділі розглянуто теоретичні основи розрахунку теплових (термічних) напружень і деформацій, а п'ятий розділ присвячено теплосиловим циклам теплових машин. В кінці посібника розміщено практикум із задач, складених за теоретичним змістом розділів посібника, та тестів для самоконтролю знань, набутих під час вивчення дисципліни «Теоретичні основи теплотехніки». З метою набуття навичок розв'язування та оформлення задач з курсу ТОТ, в практикумі також наведено приклади типових розв'язань задач за тематикою розділів посібника.

Для перевірки та закріплення набутих під час вивчення дисципліни ТОТ знань, до кожного розділу подано питання для самоперевірки.

Для більш глибокого ознайомлення з окремими питаннями тепломасообміну, технічної термодинаміки та методами розв'язування інженерних теплофізичних задач посібник містить список літератури, а також в кінці посібника наведено українсько-англійський словник найбільш вживаних термінів.

1 ОСНОВИ ВЧЕННЯ ПРО ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

1.1 Методи вивчення фізичних явищ природи

Відповідно до уявлень сучасної фізики явища природи і *теплопровідності* (heat-conducting) зокрема можна досліджувати двома методами: *феноменологічним* (the phenomenon is logical) та *статистичним* (statistic).

У *феноменологічному методі* дослідження ігнорується мікроскопічна будова речовини і вважається, що речовина є суцільним середовищем (континуум). Цей метод дозволяє установити закони явищ природи в найбільш загальному вигляді. Вплив мікробудови речовини у випадку використання феноменологічного методу дослідження враховується за допомогою експериментальних коефіцієнтів, точність яких визначає точність самого методу. Перевага методу – це можливість одразу знайти загальні зв'язки між параметрами, що характеризують явище природи, а недолік – це необхідність проведення складних експериментальних досліджень, які до того ж часто потребують великих матеріальних витрат.

Статистичний метод дозволяє отримати загальні закони природи на основі заданих властивостей мікроскопічної структури речовини без додаткових експериментальних досліджень. Це основна перевага цього методу. Під час використання статистичного методу досліджень явищ природи речовина розглядається як система, що складається з великої кількості структурних елементів (молекул, іонів, електронів тощо) із заданими властивостями та законами взаємодії. Недолік методу – його складність, оскільки за сучасного розвитку науки завершені розрахункові співвідношення можливо отримати лише для найпростіших фізичних моделей речовини.

Аналітична теорія теплопровідності молекулярну будову речовини ігнорує і розглядає речовину як суцільне середовище, тому дослідження процесів теплопровідності проводиться феноменологічним методом, який є правомірним за умови, що розміри об'єктів дослідження великі порівняно із відстанями ефективної міжмолекулярної взаємодії.

1.2 Види теплопередачі. Температурне поле в твердому тілі

Процес *теплопередачі* (heat transfer) або *теплообміну* (heat exchange) – це обмін внутрішньою енергією між окремими елементами або областями розглядуваного середовища. В природі існує три види теплоперенесення: теплопровідність, *конвекція* (convection) та теплове *випромінювання* (radiating).

Теплопровідність – це молекулярне перенесення *теплоти* (heat) в тілах (або між ними), обумовлене змінністю *температури* (temperature) в розглядуваному просторі [1]. Процес теплопровідності здійснюється під час безпосереднього стикання окремих тіл, що мають різні температури,

оскільки теплопровідність обумовлена рухом мікрочастинок речовини, тому цей вид теплопередачі ще називають *молекулярним* (molecular) перенесенням теплоти. В твердих тілах – діелектриках внутрішня енергія переноситься під час пружних коливань атомів кристалічної ґратки. В металах енергія переважно передається за рахунок дифузії вільних електронів, а пружні коливання вузлів кристалічної ґратки в загальному балансі внутрішньої енергії мають незначну частку.

В рідинах процес теплопровідності здійснюється шляхом пружних хвиль, а в газах енергія переноситься внаслідок дифузії молекул і атомів.

Конвекція – це процес перенесення теплоти під час переміщення об'ємів рідини або газу (текучого середовища) в просторі із області з однією температурою в область з іншою температурою [1]. Конвекція можлива тільки в текучому середовищі і завжди супроводжується теплопровідністю. Процес перенесення теплоти під час конвекції нерозривно пов'язаний з перенесенням маси самого середовища. Сумісний процес перенесення теплоти конвекцією та теплопровідністю називається **конвективним теплообміном**. Конвективний теплообмін між потоками рідини або газу і поверхнею твердого тіла називають **тепловіддачею**.

Теплове випромінювання – процес поширення теплоти за допомогою електромагнітних хвиль. Цей процес визначається тільки температурою та оптичними властивостями випромінюючого тіла. Під час цього виду теплопередачі внутрішня енергія тіла або середовища переходить в енергію випромінювання. Перетворення внутрішньої енергії речовини в енергію випромінювання, перенесення випромінювання та його поглинання речовиною називається **теплообміном випромінюванням**. Всі три елементарні процеси перенесення теплоти в природі і техніці часто проходять **спільно**. Спільний процес перенесення теплоти випромінюванням та теплопровідністю називається **радіаційно-кондуктивним** (conductive) **теплообміном**, а якщо цей процес ще й супроводжується конвекцією, то його називають **радіаційно-конвективним** або **складним теплообміном**.

В техніці та природі часто процеси перенесення теплоти супроводжуються перенесенням речовини, наприклад, під час випаровування води перенесення пари здійснюється молекулярним та конвективним шляхом. Такий спільний молекулярний та конвективний процес перенесення маси речовини називається **конвективним масообміном** (mass exchange), що значно ускладнює процес теплообміну.

1.2.1 Температурне поле в твердому тілі

Під час передавання теплоти теплопровідністю температура тіла може змінюватись як в просторі від точки до точки тіла, так і в часі. Таким чином вивчення процесу теплопровідності зводиться до знаходження *рівняння* (equation)

$$t = f_1(x, y, z, \tau), \quad (1.1)$$

де x, y, z – координати точок тіла, τ – час зміни температури.

Рівняння (1.1) – є математичний опис температурного *поля* (field) в найбільш загальному вигляді, коли температура змінюється в просторі і часі. Це поле відповідає неврівноваженому *режиму* (regime) теплопровідності і називається **нестационарним** (unstationary).

У випадку стабілізації теплового режиму температура кожної точки тіла з часом не змінюється, є функцією тільки координат і таке поле називається **стационарним** (stationary):

$$t = f_2(x, y, z); \quad (1.2)$$

Температурні поля, що відповідають рівнянням (1.1) та (1.2) є просторовими або тривимірними.

Якщо температура є функцією тільки двох координат, то таке поле називається двовимірним:

$$\text{нестационарне} - t = f_3(x, y, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \quad (1.3)$$

$$\text{стационарне} - t = f_3(x, y); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0. \quad (1.4)$$

У випадку залежності температури тільки від однієї координати визначають одновимірне температурне поле:

$$\text{нестационарне} - t = f_4(x, \tau); \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0; \quad (1.5)$$

$$\text{стационарне} - t = f_5(x); \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0. \quad (1.6)$$

Під час аналізу процесу поширення теплоти в твердих тілах від рухомих джерел теплоти часто користуються поняттям так званого **квазістационарного температурного поля** (ніби стационарного), якщо температура в системі координат, пов'язаній з рухомих джерелом, з часом не змінюється.

Двовимірні та одновимірні температурні поля є певною ідеалізацією процесу теплопередачі, коли зміною температури в напрямку однієї або двох координат можна знехтувати.

1.3 Ізотермічні поверхні. Температурний градієнт

В будь-якому тілі, що нагрівається чи охолоджується, завжди є точки, які мають однакову температуру. Якщо з'єднати всі точки тіла з однаковою температурою, то отримаємо поверхню рівних температур, яка називається **ізотермічною**.

Одна і та ж точка тіла одночасно не може мати різну температуру, а це значить, що ізотермічні поверхні не перетинаються між собою і не обриваються всередині тіла (паралельні між собою). Ці поверхні можуть закінчуватись на поверхні тіла або замикатись самі на себе всередині самого тіла. Перерізом ізотермічних поверхонь площиною отримаємо сімейство ліній рівних температур – *ізотерм* (isotherm), які мають такі ж властивості, що й ізотермічні поверхні.

На рисунку 1.1 зображені ізотерми, температури яких відрізняються на Δt . Температура в тілі змінюється тільки в напрямках, що перетинають ізотермічні поверхні (на рисунку 1.1 – це напрямки вздовж нормалі n і лінії Ax). Найбільший перепад температури на одиницю довжини має місце в напрямку нормалі n до ізотермічної поверхні.

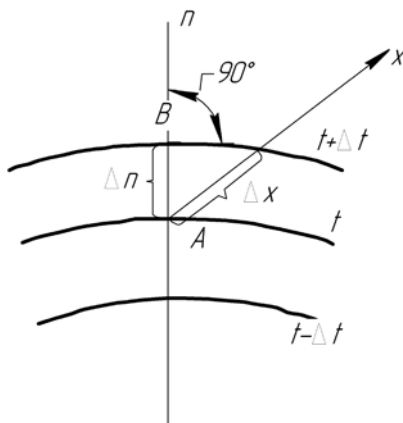


Рисунок 1.1 – Ізотерми

Збільшення температури в напрямку нормалі характеризується **градієнтом** (gradient) температури – вектором, що направлений в сторону зростання температури вздовж нормалі до ізотермічної поверхні:

$$\vec{grad}t = n_0 \frac{\partial t}{\partial n}, \quad (1.7)$$

де n_0 – одиничний вектор, нормальний до ізотермічної поверхні і направлений в сторону збільшення температури; $\frac{\partial t}{\partial n}$ – час-

тинна похідна температури по нормалі n , яка є додатною в напрямку збільшення температури і від'ємною в напрямку її зменшення.

Як будь-який вектор градієнт температури може бути спроектований на координатні осі:

$$\begin{aligned} (gradt)_x &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\hat{n}, x) = \frac{\partial t}{\partial x}; \\ (gradt)_y &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\hat{n}, y) = \frac{\partial t}{\partial y}; \\ (gradt)_z &= \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\hat{n}, z) = \frac{\partial t}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

де (\hat{n}, x) ; (\hat{n}, y) ; (\hat{n}, z) – відповідно, кути між нормаллю \hat{n} і координатними осями.

1.4 Основний закон теплопровідності

Для передавання теплоти теплопровідністю має виконуватись умова нерівномірного розподілу температури в розглядуваному середовищі або іншими словами – температурний градієнт в різних точках тіла не може дорівнювати нулю.

Французький учений Жан Батіст Жозеф Фур'є в 1822 році запропонував гіпотезу, згідно з якою кількість теплоти dQ_τ , що проходить через елемент ізотермічної поверхні dA за проміжок часу $d\tau$, пропорційна температурному градієнту $\partial t / \partial n$:

$$dQ_\tau = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dA d\tau. \quad (1.9)$$

У випадку віднесення кількості теплоти dQ_τ до одиниці ізотермічної поверхні і одиниці часу отримуємо величину, яка називається *густиною* (density) *теплогового потоку* (stream):

$$\vec{q} = \frac{dQ_\tau}{dF d\tau} = -n_0 \lambda \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1.10)$$

Ця величина є вектором, направленим вздовж нормалі до ізотермічної поверхні, але в бік зменшення температури, оскільки згідно з другим законом термодинаміки теплота передається від більш гарячих частин тіла до більш холодних. Цим пояснюється знак мінус в правих частинах формул (1.9) і (1.10).

Численні експериментальні дослідження підтвердили гіпотезу Фур'є, перетворивши її на **основний закон** (law) **теплопровідності**. Залежності (1.9) та (1.10) є різними формами математичного запису закону Фур'є. Коефіцієнт пропорційності λ (феноменологічний коефіцієнт) в формулах закону Фур'є є фізичним параметром речовини. Цей коефіцієнт характеризує здатність речовини проводити теплоту і називається **коефіцієнтом теплопровідності**.

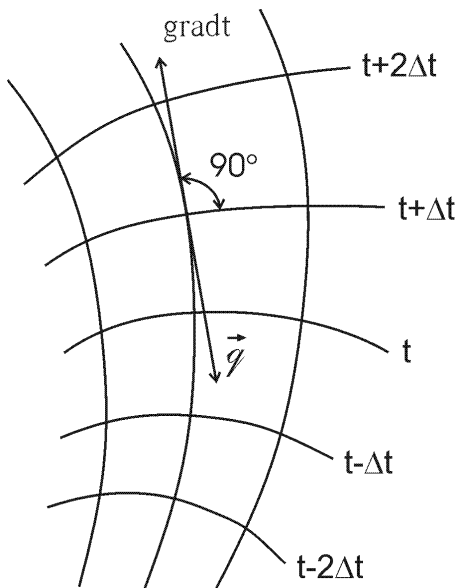
Якщо віднести кількість теплоти, що проходить через ізотермічну поверхню A до одиниці часу, то отримуємо величину, яка називається **тепловим потоком** (теплова потужність):

$$Q = \int_A q \cdot dA = - \int_A \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dA \quad \text{— інтегральна форма;} \quad (1.11)$$

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} dA \quad \text{— диференціальна форма.} \quad (1.12)$$

Формули (1.11 та 1.12) є іншими формами математичного запису закону Фур'є.

За необхідності розрахунку повної кількості теплоти, що пройшла через ізотермічну поверхню A за час τ , інтегруючи вираз (1.9), отримуємо



$$Q_\tau = - \int_0^\tau \int_A \lambda \frac{\partial t}{\partial n} dA \cdot d\tau. \quad (1.13)$$

Коефіцієнт теплопровідності в формулах (1.11) і (1.13) не виноситься за знаки інтегралів, оскільки λ для реальних речовин не є величиною сталою, а залежить від температури.

Як вже було відмічено, вектори градієнта температур і теплового потоку лежать на нормалі до ізотермічної поверхні, але взаємно протилежні за напрямом. Передавання теплоти від однієї ізотермічної поверхні до іншої умовно можна характеризувати **лініями теплового потоку**, дотичні до яких збігаються з напрямом

вектора \vec{q} (рисунок 1.2). Лінії теплового потоку ортогональні до ізотерм. Проектуючи вектор густини теплового потоку \vec{q} на координатні осі Ox , Oy і Oz згідно з рівняннями (1.8) матимемо:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (1.14)$$

Теплові потоки, виражені рівняннями (1.14), є складовими вектора густини теплового потоку

$$\vec{q} = \vec{i} q_x + \vec{j} q_y + \vec{k} q_z, \quad (1.15)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори в напрямках координатних осей Ox, Oy, Oz (орти).

Величини, наведені в формулах (1.7)...(1.13), в міжнародній системі одиниць мають розмірності: $gradt$, К/м; Q_{τ} , Дж; A , м²; τ, c ; q , Вт/м²; λ , Вт/(м·К); Q , Вт.

1.5 Коефіцієнти теплопровідності твердих, рідких та газоподібних тіл

В загальному випадку коефіцієнт теплопровідності залежить від температури, тиску та роду речовини. Найчастіше цей коефіцієнт визначають експериментальним шляхом, вимірюючи густину теплового потоку [1, 2, 3] та градієнт температури в досліджуваній речовині. Знаходять коефіцієнт теплопровідності за співвідношенням:

$$\lambda = \frac{|\vec{q}|}{|gradt|}, \text{ Вт/(м·К)}. \quad (1.16)$$

Під час теплофізичних розрахунків важливо знати залежність коефіцієнта теплопровідності від температури. Як правило, всі формули, що встановлюють залежність коефіцієнта теплопровідності від температури, є апроксимаціями результатів експериментів. Досліди показують, що для багатьох матеріалів з достатньою для практики точністю можна застосувати лінійну залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [1]:

$$\lambda = \lambda_0[1+b(t-t_0)], \quad (1.17)$$

де λ_0 – значення коефіцієнта теплопровідності за температури t_0 ; b – стала, що визначається родом речовини і знаходиться дослідним шляхом.

Для чистих металів основним передавачем теплоти є вільні електрони, які можна уподібнити ідеальному одноатомному газу. Частка передавання теплоти під час коливальних рухів вузлів кристалічної ґратки в металах незначна порівняно з перенесенням енергії електронами. Вільні електрони в об'ємі металу рухаються як з **більш нагрітих областей в більш холодні, так і в зворотному напрямку**. В першому випадку вони віддають енер-

гію атомам, а в другому – відбирають її. Оскільки в металах електрони є носіями теплоти і струму, то коефіцієнти тепло- і електропровідності пропорційні один одному. Із підвищенням температури внаслідок теплових неоднорідностей кристалічних ґраток збільшується розсіювання електронів, що зменшує коефіцієнти тепло- і електропровідності чистих металів.

Коефіцієнти теплопровідності сплавів, діелектриків та композиційних матеріалів із зростанням температури збільшуються. З графічними залежностями коефіцієнтів теплопровідності від температури для різних твердих речовин можна ознайомитись в роботах [1, 2, 4].

Матеріали з низьким значенням коефіцієнта теплопровідності (менше $0,25 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$) називають **теплоізоляційними**.

Згідно з сучасними уявленнями [1], механізм поширення теплоти теплопровідністю в крапельних рідинах проходить шляхом неструнких пружних коливань. Для більшості рідин ця теорія знайшла гарне експериментальне підтвердження. На підставі цієї теорії отримано формулу для розрахунку коефіцієнта теплопровідності рідини [1]:

$$\lambda = A_p c_p \rho^{4/3} \cdot m_\mu^{-1/3}, \quad (1.18)$$

де A_p – коефіцієнт, пропорційний швидкості (speed) поширення пружних хвиль в рідині, який не залежить від природи рідини, але є функцією

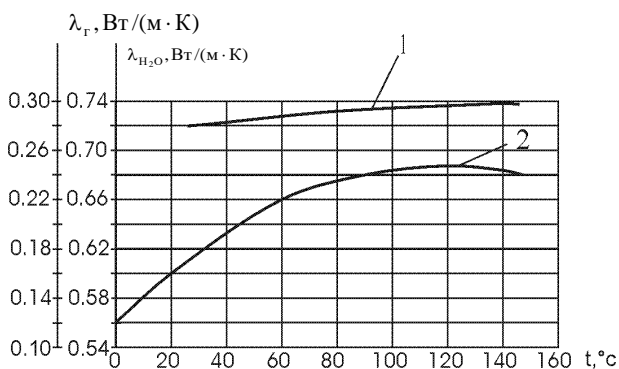


Рисунок 1.3 – Коефіцієнти теплопровідності гліцерину (1) і води (2)

температури; c_p – теплоємність рідини за постійного тиску, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$; ρ – густина рідини, $\text{кг}/\text{м}^3$; m_μ – молекулярна маса рідини, $\text{кг}/\text{кмоль}$. Коефіцієнт A_p і теплоємність c_p залежать від температури таким чином, що $A_p c_p \cong \text{const}$. Густина рідини з підвищенням температури зменшується, тому для неасоційованих та слабоасоційованих рідин коефіцієнт теплопровідності зі збільшенням температури також зменшується. Для сильноасоційованих рідин (вода, гліцерин, спирт та ін.) в формулу (1.18) необхідно ввести коефіцієнт асоціації, що враховує зміну молекулярної маси. Цей коефіцієнт також залежить від температури, вплив якої на коефіцієнт теплопровідності визначається величиною температури. Досліди підтверджують, що для більшості рідин коефіцієнт теплопровідності зі збільшенням температури зменшується за виключенням води і гліцерину [1] (рис. 1.3). З підвищенням тиску коефіцієнти теплопровідності рідин зростають. Для крапельних рідин коефіцієнти теплопровідності наближено знаходяться в межах від $0,07$ до $0,7 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$. В газах за нормальних тисків і температур перенесення теплоти теплопровідністю визначається передаванням кінетичної енергії молекула-

рного руху в результаті хаотичного руху і зіткнення окремих молекул газу. Відповідно до цього зауваження коефіцієнт теплопровідності газів можна розрахувати за формулою [1]:

$$\lambda = \overline{w} l c_v \rho / 3, \quad (1.19)$$

де $\overline{w} = \sqrt{3R_\mu T / m_\mu}$ – середня швидкість руху молекул газу, м/с; l – середня довжина вільного пробігу молекул газу між зіткненнями, м; c_v – питома теплоємність газу за сталого об'єму, Дж/(кг·К); ρ – густина газу, кг/м³; $R_\mu = 8314,2$ Дж/(кмоль·К) – універсальна газова стала; T – температура газу, К; m_μ – молекулярна маса газу, кг/кмоль.

Із підвищенням температури газу зростає його теплоємність, а це спричиняє збільшення теплопровідності газу. Густина газу (за сталого об'єму) зі зростанням тиску збільшується, внаслідок чого довжина вільного пробігу молекул газу зменшується, але таким чином, що добуток $l \cdot \rho = const$, тому коефіцієнт теплопровідності газів мало залежить від тиску (виключення – дуже малі або дуже великі тиски). Серед газів своїм коефіцієнтом теплопровідності різко виділяються гелій та водень, які мають коефіцієнт теплопровідності в 5...10 разів вищий, ніж в інших газів [1]. Коефіцієнти теплопровідності водяної пари та інших реальних газів, які суттєво відрізняються від ідеальних, сильно залежать від тиску і їх знаходять дослідним шляхом.

1.6 Диференціальне рівняння теплопровідності. Джерела та стоки теплоти

Знаходження температурного поля в твердих тілах або в компонентах

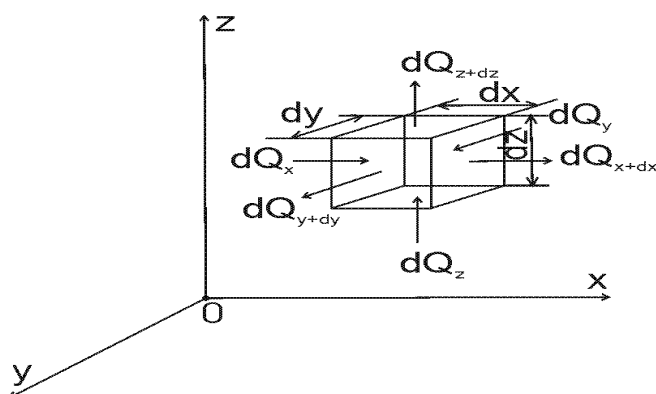


Рисунок 1.4 – Схема до виведення диференціального рівняння теплопровідності

технологічних систем пов'язано з розв'язанням відповідного диференціального (differential) рівняння теплопровідності. Під час виведення цього рівняння приймемо такі припущення: 1) тверде тіло однорідне і ізотропне; 2) під час теплопередачі не відбуваються фазові перетворення; 3) деформація (deformation) розглядуваного об'єму, яка пов'язана зі зміною температури, дуже мала порівняно з розмірами тіла; 4) внутрішні джерела теплоти,

що можуть діяти в об'ємі тіла, розподілені рівномірно та задані як $q_v = f(x, y, z, \tau)$ (тут q_v – інтенсивність (об'ємна густина теплового потоку, $\text{Вт}/\text{м}^3$) джерела).

Виділимо в тілі, що нагрівається, елементарний об'єм (volume) $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ у формі паралелепіпеда (рисунок 1.4) та розмістимо його в системі координат (Ox, Oy, Oz) таким чином, щоб грані цього паралелепіпеда були паралельні відповідним координатним площинам. Використовуючи закон збереження енергії, складемо рівняння теплового балансу

$$dQ = dQ_1 + dQ_2, \quad (1.20)$$

де dQ_1 – кількість теплоти, введена в елементарний об'єм за час $d\tau$ внаслідок теплопровідності тіла; dQ_2 – кількість теплоти, яка виділилась в тілі за рахунок дії внутрішніх джерел теплоти (наприклад, під час хімічних реакцій, дії електричного струму тощо); dQ – загальне змінення внутрішньої енергії або ентальпії речовини, що міститься в об'ємі dv за час $d\tau$. За час $d\tau$ в напрямках Ox, Oy, Oz до граней елементарного паралелепіпеда підводяться кількості теплоти dQ_x, dQ_y та dQ_z і за цей самий час через протилежні грані відводяться в тих самих напрямках кількості теплоти dQ_{z+dz}, dQ_{y+dy} та dQ_{x+dx} . Розглянемо грань, що зорієнтована в напрямку Ox . Кількості теплоти, що підводяться до цієї грані та відводяться з протилежної, можна записати у вигляді:

$$dQ_x = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau, \quad (1.21)$$

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau, \quad (1.22)$$

де q_x, q_{x+dx} – проекції густини теплового потоку на напрямок нормалі до вказаних граней.

Різниця

$$dQ_{x_1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = (q_x - q_{x+dx}) dy dz d\tau \quad (1.23)$$

– це кількість теплоти, що введена в елементарний паралелепіпед ззовні за рахунок теплопровідності в напрямку осі Ox .

На інтервалі dx функція q_{x+d} є неперервною і її можна розкласти в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2 2!} dx^2 + \dots \quad (1.24)$$

Відкидаючи величини вищого порядку малості, починаючи з третього члена ряду, отримуємо після урахування (1.24) в рівнянні (1.23):

$$dQ_{x_1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz d\tau = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dv d\tau. \quad (1.25)$$

Аналогічно dQ_{x_1} знаходяться залежності для кількостей теплоти dQ_{y_1} та dQ_{z_1} , що надходять в об'єм dv за напрямками Oy і Oz . Підсумовуючи величини dQ_{x_1} , dQ_{y_1} та dQ_{z_1} , отримаємо:

$$dQ_1 = -(dQ_{x_1} + dQ_{y_1} + dQ_{z_1}) = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dv d\tau. \quad (1.26)$$

Кількість теплоти, що виділилась в об'ємі dv за час $d\tau$ під час дії внутрішніх джерел теплоти знайдемо за залежністю:

$$dQ_2 = q_v dv d\tau. \quad (1.27)$$

Третя складова dQ рівняння теплового балансу визначається характером *термодинамічного* (thermodynamic) процесу, що проходить в розглядуваній системі.

Якщо в системі відбувається *ізохорний* (isochore) процес ($V = const$), то вся теплота, яка підведена до елементарного об'єму, буде затрачена на зміну внутрішньої енергії речовини, що міститься в об'ємі dv [1]:

$$dQ = dU = C_v \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv = c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv, \quad (1.28)$$

де C_v – ізохорна теплоємність одиниці об'єму, Дж/м³К; c_v – питома ізохорна теплоємність, Дж/(кгК); ρ – густина речовини, кг/м³.

Підставляючи (1.26), (1.27) та (1.28) в формулу (1.20), отримаємо диференціальне рівняння енергії для ізохорного процесу перенесення теплоти:

$$c_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v = -\operatorname{div} \vec{q} + q_v = -\nabla q + q_v, \quad (1.29)$$

де $\operatorname{div} \vec{q} = \nabla q$ – дивергенція вектора густини теплового потоку (тут $\nabla \dots = \frac{\partial \dots}{\partial x} + \frac{\partial \dots}{\partial y} + \frac{\partial \dots}{\partial z}$ – «набла» – оператор диференціювання (оператор Гамільтона) [5]).

Під час *ізобарного* (isobar) процесу перенесення теплоти ($p = const$ – сталий тиск в термодинамічній системі) вся теплота, що підведена до

об'єму, йде на зміну *ентальпії* (enthalpy) H (тепловміщення) речовини, що міститься в об'ємі dv : $dQ = dH$. Ентальпія – це кількість теплоти, що є в тілі за певної температури. Для твердого тіла $H = c \cdot m \cdot T$ (тут c – питома теплоємність речовини твердого тіла; m – маса тіла; T – температура тіла). Прийнято [1, 6, 7] вважати, що для: $t = 0^\circ\text{C}$, $H = 0$; $t > 0^\circ\text{C}$ – ентальпія додатна величина; $t < 0^\circ\text{C}$ – ентальпія від'ємна.

Для одиниці об'єму ентальпію можна знайти за залежністю:

$$dH = C_p \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv = c_p \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau dv = \rho \frac{\partial h}{\partial \tau} d\tau dv, \quad (1.30)$$

де C_p – ізобарна теплоємність одиниці об'єму, Дж/(м³К); c_p – питома ізобарна теплоємність, Дж/(кгК); $\partial h = c_p \partial t$ – частинний диференціал питомої ентальпії $h = f(t, p)$.

Підставляючи (1.30), (1.26) та (1.27) в вираз (1.20), отримаємо рівняння енергії для ізобарного процесу перенесення теплоти:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = -\text{div} \vec{q} + q_v = -\nabla q + q_v. \quad (1.31)$$

Отримане рівняння буде використано під час розгляду конвективного процесу перенесення теплоти.

Для твердих тіл $c_v \approx c_p = c$ і за законом Фур'є (див. (1.14)):

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}; q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}; q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Враховуючи значення проекції вектора густини теплового потоку у виразі (1.29), знайдемо в загальному вигляді диференціальне рівняння теплопровідності для твердого тіла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \frac{1}{c\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c\rho} = \\ &= \frac{1}{c\rho} \text{div}(\lambda \text{grad}t) + \frac{q_v}{c\rho} = \frac{1}{c\rho} \nabla(\lambda \text{grad}t) + \frac{q_v}{c\rho}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

де $c = c(x, y, z, t)$, $\rho = \rho(x, y, z, t)$, $\lambda = \lambda(x, y, z, t)$ – змінні величини. Якщо прийняти теплофізичні параметри речовини сталими ($c = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$), то рівняння (1.32) набуде вигляду:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{c\rho} \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \frac{q_v}{c\rho} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.33)$$

де $a = \lambda/(c\rho)$ – коефіцієнт **температуропровідності** (temperature conducting) речовини, m^2/c ; $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в декартовій системі координат [5].

Іноді зручно розв'язувати теплофізичні задачі в циліндричній або сферичній системах координат, для яких [1]:

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}; \quad (1.34)$$

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \cdot \frac{\partial t}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \psi^2}, \quad (1.35)$$

де r – радіус-вектор; ϕ – полярний кут; z – апліката; $\mu = \cos \theta$; θ та ψ – відповідно полярна широта та довгота.

Коефіцієнт **температуропровідності** a є фізичним параметром речовини, який характеризує її теплоінерційні властивості, тобто швидкість зміни температури. Цей коефіцієнт має суттєве значення лише для нестационарних теплових процесів. Локальна швидкість $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ зміни температури в часі (див. рівняння (1.33)) для будь-якої точки тіла буде тим більшою, чим більший коефіцієнт температуропровідності.

Коефіцієнт температуропровідності залежить від природи речовини, наприклад, рідини та газу мають малий коефіцієнт температуропровідності і велику теплоінерційність, а метали – малу теплоінерційність і великий коефіцієнт температуропровідності [1, 2].

1.6.1 Диференціальні рівняння теплопровідності для окремих видів температурних полів

Рівняння у вигляді (1.33) отримано для тривимірного нестационарного температурного поля за наявності внутрішніх джерел теплоти. Інколи за певних припущень це рівняння можна спростити. Розглянемо такі випадки [1, 2].

1. В системі тіл відсутні внутрішні джерела теплоти ($q_v = 0$), тоді рів-

няння (1.33) набуває форму рівняння Фур'є

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t. \quad (1.36)$$

2. Температурне поле стаціонарне, тобто $t = f(x, y, z)$, але $q_v \neq 0$. В цьому випадку рівняння (1.33) перетворюється в рівняння Пуассона

$$\nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0. \quad (1.37)$$

3. Тепловий процес стаціонарний і внутрішні джерела відсутні – рівняння Лапласа

$$\nabla^2 t = 0. \quad (1.38)$$

4. Температурне поле дво- або одновимірне ($q_v = 0$):

$$\text{нестационарне двовимірне} - \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right); \quad (1.39)$$

$$\text{стаціонарне двовимірне} - \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0; \quad (1.40)$$

$$\text{нестационарне одновимірне} - \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \quad (1.41)$$

$$\text{стаціонарне одновимірне} - \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (1.42)$$

5. Одновимірне стаціонарне температурне поле за $q_v = 0$ та $\lambda = \lambda(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right] = 0. \quad (1.43)$$

У випадку наявності в тілі рухомих зовнішніх джерел теплоти ($q_v = 0$) права частина рівняння (1.33) доповнюється додатковими членами:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}, \quad (1.44)$$

де w_x, w_y, w_z – проекції швидкості джерела теплоти на координатні осі. Та-

ке рівняння значно складніше за (1.33) і на практиці розв'язується шляхом числового інтегрування або моделювання [2].

1.6.2 Умови однозначності для процесів теплопровідності

Під час виведення рівняння теплопровідності (1.33) не брались до уваги обмеження на форму тіла та умови взаємодії поверхні цього тіла з навколишнім середовищем. Рівняння (1.33), (1.36) ... (1.44) описують цілий клас явищ теплопровідності і справедливі для будь-якої форми тіл (верстат, інструмент, деталь тощо) під час нагрівання чи охолодження в будь-яких умовах та середовищах. Ці рівняння в загальному випадку мають безліч розв'язків.

Для конкретизації розв'язку разом з рівнянням теплопровідності необхідно обумовити та математично описати особливості певного процесу теплопровідності. Ці конкретні особливості процесу називають **умовами однозначності** або **крайовими (marginal) умовами**.

Умови однозначності складаються з:

а) геометричних умов, які задають форму та лінійні розміри тіла і джерел (стоків) теплоти, що беруть участь в процесі теплопровідності;

б) фізичних умов, якими визначаються характеристики речовини тіла (λ , c , ρ та ін.), а також може задаватись закон розподілу внутрішніх джерел теплоти;

в) початкових (часових) умов, що визначають закон розподілу температури всередині тіла в початковий момент часу ($\tau=0$), наприклад, $t = f(x, y, z)$ або $t = t_0 = const$ – рівномірний розподіл температури;

г) межових умов, які задають закон теплообміну на поверхні тіла, що взаємодіє з навколишнім середовищем чи іншими тілами, які входять в систему, в якій відбувається процес теплопровідності.

Межові умови поділяються на три роди:

а) першого роду – визначають закон розподілу температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$t_c = f(x_c, y_c, z_c), \quad (1.45)$$

де t_c – температура поверхні тіла; x_c , y_c , z_c – координати поверхні тіла. Для $t_c = const$ рівняння (1.45) спрощується;

б) другого роду – задається густина теплового потоку для кожної точки поверхні тіла та будь-якого моменту часу (наприклад, нагрівання металевих виробів у високотемпературних печах [1]):

$$q_c = f(x_c, y_c, z_c, \tau) \quad (1.46)$$

або

$$q_c = q_0 = \text{const}; \quad (1.47)$$

в) третього роду – визначають температуру навколишнього середовища t_p та закон теплообміну між поверхнею тіла і навколишнім середовищем.

Процес теплообміну між тілом і середовищем характеризується законом Ньютона – Ріхмана [1]:

$$q_c = \alpha(t_c - t_p), \quad (1.48)$$

де $t_c > t_p$; α – коефіцієнт тепловіддачі, $\text{Вт}/(\text{м}^2\text{К})$, який характеризує інтенсивність теплообміну між поверхнею тіла та навколишнім середовищем. Цей закон визначає конвективний теплообмін, який більш детально буде розглянуто в другому розділі посібника.

Згідно з законом збереження енергії кількість теплоти, що підводиться до поверхні тіла за рахунок теплопровідності із внутрішнього об'єму тіла за одиницю часу, має дорівнювати кількості теплоти, яка відводиться з поверхні тіла під час тепловіддачі, тобто

$$\alpha(t_c - t_p) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c, \quad (1.49)$$

де n – нормаль до поверхні тіла; λ – коефіцієнт теплопровідності тіла; $\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c$ – градієнт температури на поверхні тіла. Цю межову умову третього роду можна записати у вигляді

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_c = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (t_c - t_p) = -\frac{\alpha}{\lambda} \Delta t_c, \quad (1.50)$$

де $\Delta t_c = t_c - t_p$ – температурний *напір* (head) на поверхні тіла. Рівняння (1.50) є вираженням закону збереження енергії для поверхні тіла.

В теплофізиці зустрічаються задачі, коли ні одну з межових умов неможливо задати, наприклад, теплообмін у багатофазних середовищах. В цьому випадку розв'язують спряжену задачу, в якій ставиться вимога рівності температур та теплових потоків по обидва боки від межі поділу середовищ:

$$\begin{cases} -\lambda_1 \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right)_M = -\lambda_2 \left(\frac{\partial t_2}{\partial n} \right)_M + q_v(x_M, y_M, z_M, \tau); \\ t_1(x_M, y_M, z_M, \tau) = t_2(x_M, y_M, z_M, \tau), \end{cases} \quad (1.51)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, t_1, t_2$ – відповідно, коефіцієнти теплопровідності та температури стикових середовищ; $q_v(x_M, y_M, z_M, \tau)$ – джерела теплоти, що діють на поверхні межі між середовищами; x_M, y_M, z_M – координати поверхні межі поділу середовищ.

1.6.3 Джерела та стоки теплоти

Джерела теплоти постачають тілу теплоту, а стоки її відводять. Стоки за суттю – це джерела теплоти з від’ємною інтенсивністю (об’ємною, $Вт/м^3$, поверхневою, $Вт/м^2$, або лінійною, $Вт/м$, густиною теплового потоку).

Джерела та стоки теплоти класифікуються за такими основними ознаками [2]:

- а) розташуванням і формою джерел і стоків відносно тіл, що беруть участь в процесі теплопередачі;
- б) законом розподілу інтенсивності;
- в) швидкістю руху джерела (стоку) теплоти;
- г) часом функціонування (дії);
- д) стабільністю основних характеристик джерела (стоку) теплоти в часі.

За ознакою а) джерела теплоти поділяють на внутрішні та зовнішні. Внутрішні джерела (стоки) теплоти діють в об’ємі тіла, а зовнішні – на його поверхні.

В дійсності всі джерела теплоти є внутрішніми, але деякі з них розташовані так близько до поверхні тіла, що їх можна вважати такими, що діють на поверхні тіла.

Реальні джерела (стоки) теплоти мають дуже складну форму. З метою спрощення розрахунків джерела (стоки) теплоти схематизують, замінюючи реальні джерела ідеалізованими, з формою, наближеною до фактичної. Ступінь наближеності форми визначається потрібною точністю розрахунків. Ідеалізовані джерела можуть бути тривимірними (об’ємними), двовимірними, одновимірними та точковими. Взагалі-то, всі джерела (стоки) теплоти тривимірні, оскільки енергія (під час тертя, деформування тощо) виділяється в деякому об’ємі.

Якщо розміром джерела в напрямку однієї з осей координат можна знехтувати, то таке джерело можна вважати двовимірним (плоским), а коли два розміри тіла набагато менші за третій, то джерело називається од-

новимірним або лінійним. Тоді, коли всі розміри джерела достатньо малі порівняно з розмірами тіла, де воно діє, то джерело теплоти вважають точковим, що є певною математичною абстракцією, зручною для конструювання формул, що описують процес поширення теплоти від джерел іншої форми.

За формою об'ємні джерела (стоки) теплоти можуть бути паралелепіпедом, циліндром, кулею або будь-якою іншою об'ємною геометричною фігурою. Плоскі джерела (стоки) теплоти, обмежені в двох напрямках, можуть мати форму прямокутника, трикутника, круга або іншої плоскої фігури. Якщо двовимірне джерело теплоти обмежено тільки в одному напрямку, то воно має форму нескінченної стрічки. Потрібно пам'ятати, що обмеженість джерела не може **перевищувати його вимірність**, тому, наприклад, одновимірне джерело може бути обмеженим тільки в одному напрямку і мати форму відрізка прямої, дуги кола або ділянки якої-небудь іншої лінії.

Закони розподілу інтенсивності джерел (стоків) теплоти, що діють в реальних технічних та технологічних системах складні і, зазвичай, попередньо невідомі. Уявлення про ці закони складають під час схематизації теплообміну на основі аналізу фізичних явищ і величин, що визначають тепловиділення (сили, коефіцієнти тертя, швидкості та т. п.), або за допомогою експериментальних досліджень знаходять вид ідеалізованої функції розподілу інтенсивності джерел (стоків) теплоти [2].

Об'ємна густина теплового потоку (інтенсивність) тривимірного джерела (стоку) теплоти за означенням знаходиться із співвідношення [2]:

$$q(x_g, y_g, z_g, \tau) = dQ_\tau / (d\tau dv) = q_0 f(x_g, y_g, z_g, \tau), \quad (1.52)$$

де dQ_τ – елементарна кількість теплоти, що виділилась за час $d\tau$ в об'ємі dv ; q_0 – максимальна густина теплового потоку, $Вт/м^3$; $f(x_g, y_g, z_g, \tau)$ – безрозмірна функція, що описує закон розподілу інтенсивності в часі і розглядуваному об'ємі тіла; x_g, y_g, z_g – координати вузлової точки об'єму dv .

На рисунку 1.5 зображені графіки законів розподілу інтенсивності для одновимірних джерел (стоків) теплоти, що часто використовуються під час теплофізичних розрахунків технологічних систем [2].

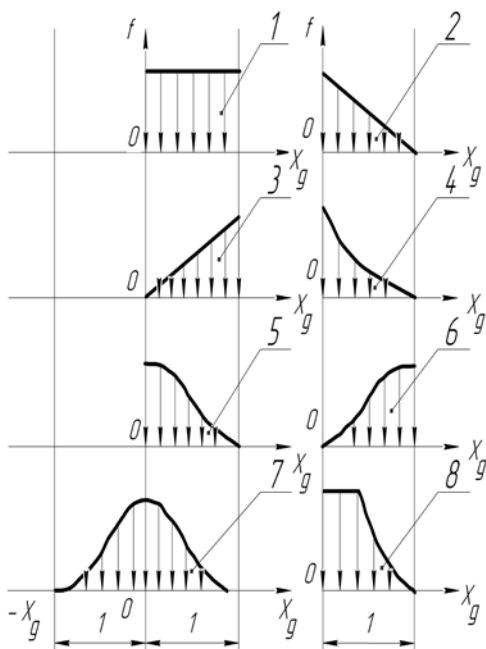


Рисунок 1.5 – Типові закони розподілу інтенсивності для одновимірних джерел (стоків)

З цих одновимірних законів завжди можна за необхідності сконструювати закони розподілу інтенсивності для дво- і тривимірних джерел. Математичний опис законів розподілу інтенсивності, що подано на рисунку 1.5, наведено в таблиці 1.1 [2].

Таблиця 1.1 – Математичний опис законів розподілу інтенсивності одновимірних джерел (стоків) теплоти

Порядковий номер (див. рисунок 1.5)	Закон	Функція
1	Рівномірно розподілений	$f(x_g) = 1$
2	Лінійний	$f(x_g) = 1 - \psi_g$
3		$f(x_g) = \psi_g$
4	Експоненціальний	$f(x_g) = \exp[-kx_g]$
5	Нормально розподілений несиметричний	$f(x_g) = \exp[-k_0 x_g^2]$ $x_g \geq 0$
6		$f(x_g) = \exp[-k_0(1-x_g)^2]$ $x_g \leq 1$
7	Нормально розподілений симетричний	$f(x_g) = \exp[-k_0 x_g^2]$
8	Комбінований	$f(x_g) = 1$ для $0 \leq \psi_g \leq 0,5$; $f(x_g) = \exp[-k(\psi_g - 0,5)]$ для $0,5 \leq \psi_g \leq 1$

У формулах, наведених в стовпці 3 таблиці 1.1, величина $\psi_g = x_g / l$ є відносною координатою вузлової точки джерела теплоти.

Прийнявши відповідний закон розподілу інтенсивності джерела (стоку) теплоти та знаючи q_0 , можна розрахувати кількість теплоти Q_τ (Дж), що виділяє джерело впродовж часу τ , за формулою [2]

$$Q_\tau = \int_0^\tau d\tau \int_v q_0 \cdot f(x_g, y_g, z_g, \tau). \quad (1.53)$$

Під час практичних теплофізичних розрахунків технічних та технологічних систем частіше розв'язується обернена задача. Як правило, кількість теплоти Q_τ або тепловий потік Q , що їх виділяє джерело за час τ , відомі і за заданого закону розподілу інтенсивності знаходять максимальну інтенсивність джерела q_0 . Більш детально з розрахунками інтенсивності джерел (стоків) теплоти з різними законами її розподілу можна ознайомитись в роботі [2].

Швидкість руху джерел теплоти, які переносять теплоту теплопровідністю, прийнято характеризувати безрозмірним *критерієм* (criterion) Пекле [1, 2]

$$Pe = wl/a, \quad (1.54)$$

де w – швидкість джерела теплоти, m/c ; l – характерний розмір джерела (наприклад, довжина) в напрямку переміщення, m ; a – коефіцієнт теплопровідності матеріалу тіла, в якому (або по якому) рухається джерело, m^2/c . Критерій Пекле є одним з інваріантів *подібності* (similarity), що широко застосовуються в теплотехнічних, гідравлічних, аеродинамічних та інших розрахунках (див. розділ 2, елементи теорії подібності). Критерії подібності – безрозмірні комплекси, дозволяють під час теплофізичних розрахунків скорочувати число змінних величини та узагальнювати результати аналізу теплових процесів на цілий клас подібних явищ.

Залежно від значення критерію Пекле джерела теплоти поділяються на нерухомі ($Pe = 0$), середньошвидкісні ($Pe < 10$) та швидкісні ($Pe \geq 10$), швидкість руху яких перевищує швидкість поширення теплоти в тілі. В напрямку руху швидкісного джерела теплоти теплота поширюється позаду або під джерелом.

Час τ функціонування джерела оцінюють безрозмірним критерієм Фур'є [1, 2]

$$F_0 = a\tau/l^2. \quad (1.55)$$

Критерій Фур'є ще називають безрозмірним часом.

За критерієм Фур'є джерела теплоти поділяють на миттєві ($F_0 \rightarrow 0$), діючі впродовж скінченного проміжку часу ($F_0 > 0$), періодичні $F_0 = F_{0max} \cdot \sin(\omega\tau)$ (тут ω – кругова частота періодичного процесу, c^{-1}) та діючі так довго, що їх можна вважати постійними ($F_0 \rightarrow \infty$). Миттєвих джерел теплоти в реальності не існує, але в деяких процесах теплота виділяється за такий короткий час (наприклад, теплова дія імпульсного лазера), що тривалістю цього теплового імпульсу можна знехтувати. Миттєві джерела також зручно використовувати як математичну абстракцію під час розрахунків складних випадків процесів теплообміну.

Характеристики джерел (стоків) теплоти можуть бути сталими в часі або змінюватись. Якщо параметри джерела з часом не змінюються, то такі джерела відносять до стабільних, а при зміні – до нестабільних. В нестабільних джерелах можуть змінюватись форма, розміри, швидкість, інтенсивність як за окремими параметрами, так і комплексно.

1.7 Методи розв'язування диференціального рівняння теплопровідності

Методи інтегрування диференціального рівняння теплопровідності із заданими умовами однозначності поділяються на аналітичні, чисельні та методи математичного моделювання [1, 2].

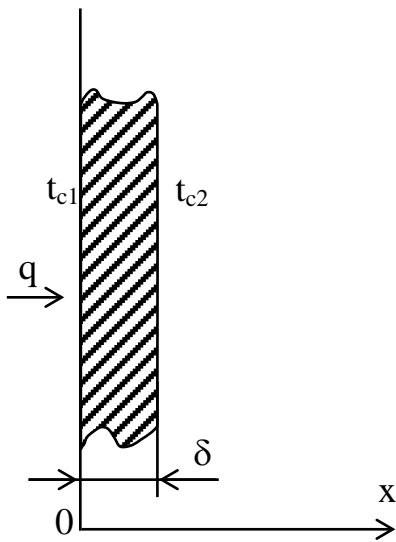


Рисунок 1.6 – Однорідна плоска необмежена стінка

До аналітичних методів відносять класичний метод безпосереднього інтегрування, інтегральних перетворень (операційні) та метод джерел (стоків) теплоти. Класичний метод розв'язування рівняння теплопровідності полягає в знаходженні сукупності частинних розв'язків, що задовольняють задані умови однозначності. Зазвичай, кожний частинний розв'язок відшуковується у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить від часу, а друга – від координат.

Загальний розв'язок знаходиться способом суперпозиції (накладання) частинних розв'язків. Для ілюстрації використання цього

методу розглянемо передавання теплоти через:

а) плоску однорідну необмежену стінку;

б) циліндричну стінку (трубу обмеженої довжини l);

в) стінку сфери;

г) необмежений стержень і стержень обмеженої довжини l ;

д) ребристу стінку.

Такого типу задачі часто зустрічаються на практиці, наприклад, під час теплового розрахунку черв'ячних передач та підшипників ковзання.

Для простоти розв'язання вважатимемо, що процес теплопередачі стаціонарний, температура змінюється тільки в напрямку, перпендикулярно до стінки і внутрішні джерела теплоти в стінці відсутні ($q_v = 0$), а межові умови – першого роду (рисунок 1.6): $t_{c1} = const$ для $x = 0$; $t_{c2} = const$ для $x = \delta$ (тут $t_{c1} > t_{c2}$ – відповідно температури однієї та іншої поверхонь стінки; δ – товщина стінки).

За таких умов ($\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$; $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$) рівняння теплопровідності набуде вигляду

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0. \quad (1.56)$$

Для знаходження закону розподілу температур по товщині стінки два рази інтегруємо рівняння (1.56). Після першого інтегрування матимемо

$$\frac{dt}{dx} = C_1, \quad (1.57)$$

де C_1 – стала інтегрування, що є градієнтом температури.

Розділяємо змінні і, виконуючи друге інтегрування рівняння (1.57), отримаємо

$$t = C_1 x + C_2, \quad (1.58)$$

де C_2 – стала другого інтегрування.

Сталі інтегрування знайдемо за умовами однозначності для:

$$x = 0, t = t_{c1}, \text{ та } C_2 = t_{c2}; \quad (1.59)$$

$$x = \delta, t = t_{c2} \text{ і } C_1 = -\frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta}. \quad (1.59, \text{ а})$$

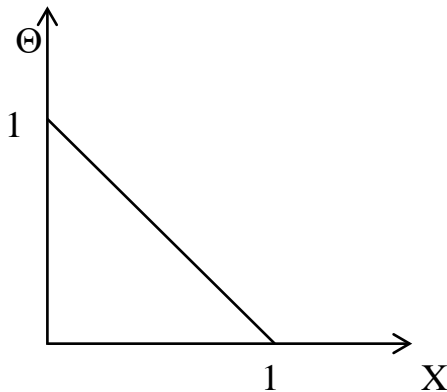


Рисунок 1.7 – Безрозмірне поле температур в плоскій стінці

Підставляючи (1.59) та (1.59, а) в рівняння (1.58), отримаємо закон розподілу температур в стінці:

$$t = t_{c1} - \frac{t_{c1} - t_{c2}}{\delta} \cdot x = t_{c1} - \frac{\Delta t_0}{\delta} \cdot x, \quad (1.60)$$

де $\Delta t_0 = t_{c1} - t_{c2}$ – повний температурний напір або найбільша надлишкова температура. Величина $\Delta t_0 = t - t_{c2}$ називається поточним температурним напором або надлишковою температурою [1].

Рівняння (1.60) можна подати і в такому вигляді:

$$\Delta t / \Delta t_0 = \theta = 1 - x / \delta = 1 - X, \quad (1.61)$$

де $\theta = \Delta t / \Delta t_0$ – безрозмірний напір або безрозмірна надлишкова температура; $X = x / \delta$ – безрозмірна координата. Рівняння в формі (1.61) є універсальним, оскільки розподіл температур в стінці

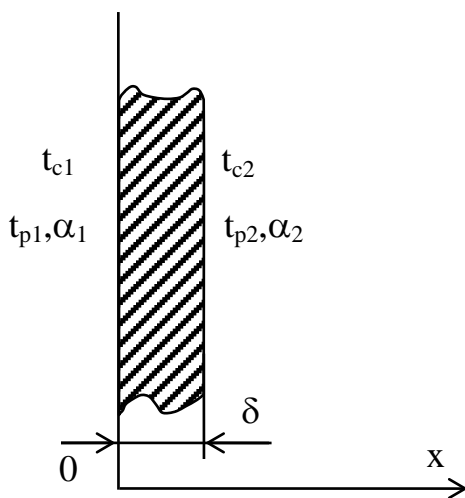


Рисунок 1.8 – Теплопередача через плоску стінку за межових умов третього роду

можна зобразити єдиною прямою у відрізках на осях для будь-якого заданого значення t_{C1} , t_{C2} та δ (рисунок 1.7).

Для знаходження густини теплового потоку, що проходить через стінку, скористаємось законом Фур'є:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \lambda \frac{\Delta t_0}{\delta}, \quad (1.62)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки. Відношення $j_{mc} = \lambda/\delta$, $Bm/(m^2 K)$, називається тепловою провідністю стінки, а обернена величина $-R_m = \delta/\lambda$, $(m^2 K)/Bm$ – тепловим або термічним *опором* (resistance) стінки. Рівняння (1.62) у формі $q = \Delta t_0/R_t$ можна назвати законом Ома для теплопередачі теплопровідністю через плоску стінку. Знаючи площу поверхні стінки A можна легко розрахувати тепловий потік або кількість теплоти, що проходить через стінку за час τ :

$$Q = q \cdot A = \Delta t_0 \cdot A / R_T; \quad (1.63)$$

$$Q_\tau = q \cdot A\tau = \Delta t_0 A\tau / R_T. \quad (1.64)$$

Врахувавши у формулі (1.60), що $\Delta t_0/\delta = q/\lambda$, можна подати рівняння температурного поля так:

$$t = t_{C1} - \frac{q}{\lambda} \cdot x. \quad (1.65)$$

З рівняння (1.65) випливає, що за інших однакових умов температура в стінці зменшується тим швидше, чим більша густина теплового потоку.

Під час інженерних розрахунків теплопередачі через плоску стінку часто зустрічаються межові умови третього роду, коли теплопередача йде з одного середовища через стінку (чи багат шарову стінку) в друге, наприклад, теплота, що виділяється в коробці швидкостей, нагріває мастило, яке передає її корпусу коробки, зовнішня поверхня якого контактує із навколишнім середовищем.

На рисунку 1.8 зображено фрагмент стінки коробки швидкостей з межовими умовами третього роду (тут нанесено величини t_{P1} , t_{P2} – відповідно температури середовищ з одного та іншого боку стінки; α_1 , α_2 – відповідно коефіцієнти тепловіддачі боків стінки).

Вважаємо, що величини t_{P1} , t_{P2} , α_1 , α_2 сталі і не змінюються вздовж поверхні. Коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки від температури не залежить.

Згідно із законами Ньютона – Ріхмана та збереження енергії

$$q = \alpha_1(t_{p1} - t_{c1}) = \frac{\lambda}{\delta}(t_{c1} - t_{c2}) = \alpha_2(t_{c2} - t_{p2}). \quad (1.66)$$

Рівняння (1.66) можна також записати у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} q \frac{1}{\alpha_1} = t_{p1} - t_{c1}; \\ q \frac{\delta}{\lambda} = t_{c1} - t_{c2}; \\ q \frac{1}{\alpha_2} = t_{c2} - t_{p2}. \end{cases} \quad (1.67)$$

Додаючи праву та ліву частини рівнянь системи (1.67), отримаємо:

$$q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = t_{p1} - t_{p2} \quad (1.68)$$

або

$$q / k = t_{p1} - t_{p2}, \quad (1.69)$$

де $k = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)^{-1}$ – коефіцієнт теплопередачі, $Вт/(м^2К)$.

Величина, обернена коефіцієнту теплопередачі, називається повним термічним опором теплопередачі:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} = R_1 + R_C + R_2, \quad (1.70)$$

де $R_1 = 1/\alpha_1$ – термічний опір тепловіддачі від гарячого середовища (наприклад, мастила) до поверхні стінки; R_C – термічний опір стінки; $R_2 = 1/\alpha_2$ – термічний опір тепловіддачі від поверхні стінки до холодного середовища (повітря). Для багат шарової стінки термічний опір визначають за залежністю:

$$R_C = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}, \quad (1.71)$$

де δ_i, λ_i – відповідно товщина та коефіцієнт теплопровідності окремого шару (layer). Іноді під час теплофізичних розрахунків оперують еквівалентним коефіцієнтом теплопровідності багат шарової стінки [1]:

$$\lambda_{екв} = \sum_{i=1}^{i=n} \delta_i / \left[\sum_{i=1}^{i=n} (\delta_i / \lambda_i) \right]. \quad (1.72)$$

Розглянемо стаціонарний процес теплопровідності в циліндричній стінці (трубі), що має внутрішній діаметр $d_1 = 2r_1$, зовнішній діаметр $d_2 = 2r_2$ та довжину l (рисунок 1.9).

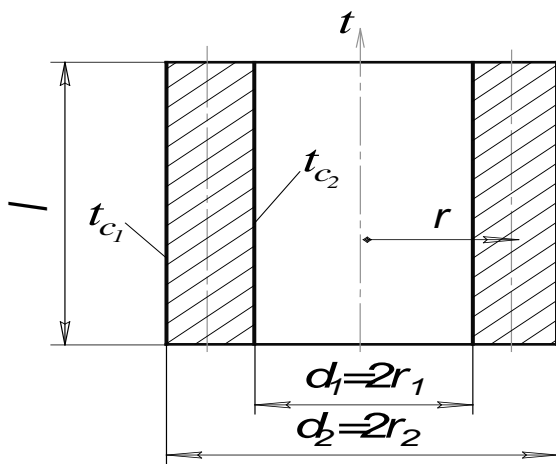


Рисунок 1.9 – Теплопередача через циліндричну стінку

В першому варіанті розв'язку задачі візьмемо межові умови першого роду, коли задані температури зовнішньої $t_{c_2} = const$ та внутрішньої $t_{c_1} = const$ поверхонь труби ($t_{c_1} > t_{c_2}$).

За цих умов ізотермічні поверхні є концентричними циліндричними, що мають спільну геометричну вісь з трубою. Цю задачу зручно розв'язувати в

циліндричних координатах. Рівняння теплопровідності за заданих умов є

рівнянням Лапласа

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (1.73)$$

Оскільки температура циліндричної стінки змінюється тільки в радіальному напрямку, то $\frac{\partial t}{\partial \phi} = 0$, $\frac{\partial t}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} = 0$ та $\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$ і рівняння

(1.73) набуває вигляду

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = 0 \quad (1.74)$$

з межовими умовами:

для

$$\begin{cases} r = r_1 & t = t_{C_1}; \\ r = r_2 & t = t_{C_2}. \end{cases} \quad (1.75)$$

Для отримання розв'язку рівняння (1.74) введемо нову змінну $u = \frac{dt}{dr}$,
 $\frac{d^2t}{dr^2} = \frac{du}{dr}$ і $\frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} = \frac{u}{r}$. З врахуванням цих перетворень рівняння (1.74) на-
буде вигляду:

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r}u = 0. \quad (1.76)$$

Розділюємо змінні і інтегруємо (1.76):

$$\ln u + \ln r = \ln C_1. \quad (1.77)$$

Потенціюємо (1.77) та повертаємось до попередніх змінних:

$$dt = C_1 dr / r. \quad (1.78)$$

Інтегруючи рівняння (1.78), отримуємо:

$$t = C_1 \ln r + C_2. \quad (1.79)$$

Підставляючи в рівняння (1.79) межові умови, знаходимо сталі інтегру-
вання:

$$C_1 = \Delta t_0 / \ln \frac{r_1}{r_2}; \quad C_2 = t_{C_1} - \Delta t_0 \cdot \ln r_1 / \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad (1.80)$$

де $\Delta t_0 = t_{C_1} - t_{C_2}$.

Враховуючи значення сталих інтегрування в (1.79), знайдемо закон
зміни температури в циліндричній стінці:

$$t = t_{C_1} - \Delta t_0 \ln \frac{r}{r_1} / \ln \frac{r_1}{r_2} = t_{C_1} - \Delta t_0 \ln \frac{d}{d_1} / \ln \frac{d_1}{d_2}. \quad (1.81)$$

Визначимо тепловий потік через стінку труби (див. рисунок 1.9), ско-
риставшись законом Фур'є

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} A = - \frac{2\pi\lambda l \Delta t_0}{\ln \frac{r_1}{r_2}} = \frac{2\pi\lambda l \Delta t_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi\lambda l \Delta t_0}{\ln \frac{d_2}{d_1}}, \quad (1.82)$$

де $\frac{dt}{dr} = C_1/r = \Delta t_0 / (r \ln r_1/r_2) = -\Delta t_0 / (r \ln r_2/r_1) = -\Delta t_0 / (r \ln d_2/d_1)$ – градієнт температури; $A = 2\pi r l$ – поточна площа ізотермічної поверхні труби. Віднісши тепловий потік до площі ізотермічної поверхні, знайдемо густини теплового потоку на внутрішній та зовнішній поверхнях труби:

$$q_1 = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{2\lambda \Delta t_0}{d_1 \ln d_2/d_1}; \quad (1.83)$$

$$q_2 = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{2\lambda \Delta t_0}{d_2 \ln d_2/d_1}. \quad (1.84)$$

З формул (1.83) і (1.84) видно, що густини теплового потоку на поверхнях труби неоднакові, причому завжди $q_1 > q_2$. Відносячи тепловий потік до довжини труби, отримаємо **лінійну густину теплового потоку** q_l , (Вт/м):

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{2\pi\lambda \Delta t_0}{\ln d_2/d_1}. \quad (1.85)$$

Аналізуючи рівняння (1.83)...(1.85), визначимо зв'язок між величинами q_1 , q_2 та q_l :

$$q_1 = \pi d_1 q_l = \pi d_2 q_2. \quad (1.86)$$

Якщо в розглянутому стаціонарному процесі теплопровідності через циліндричну стінку мають місце межові умови третього роду, то для лінійної густини теплового потоку (за аналогією з плоскою стінкою) можна вивести залежність [1]:

$$q_l = k_1 \cdot \pi (t_{p_1} - t_{p_2}), \quad (1.87)$$

де $k_1 = \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right)^{-1}$ – лінійний коефіцієнт теплопередачі че-

рез циліндричну стінку, $Bm/(mK)$. Величина, обернена лінійному коефіцієнту теплопередачі, називається **лінійним термічним опором теплопередачі через циліндричну стінку**:

$$R_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \quad (1.88)$$

За постійних значень α_1 , d_1 , λ і α_2 повний термічний опір труби буде залежати від зовнішнього діаметра. Такого типу задачі часто зустрічаються в інженерній практиці, наприклад, під час розрахунку теплообмінних апаратів [1]. Якщо вважати, що $R_1 = f(d_2)$, то взявши похідну $d(R_1) / d(d_2)$ та прирівнявши її до нуля, знайдемо критичний діаметр труби $d_{кр2}$ за якого термічний опір теплопередачі буде мінімальним:

$$d_{кр2} = 2\lambda / \alpha_2. \quad (1.89)$$

Процес стаціонарного передавання теплоти через стінку порожнистої сфери з радіусами внутрішнім r_1 та зовнішнім r_2 розглянемо для двох випадків межових умов: першого роду – за яких для: $r = r_1$ $t = t_{c1}$; $r = r_2$ $t = t_{c2}$ (тут, відповідно, t_{c1} і t_{c2} – температури внутрішньої та зовнішньої поверхонь сфери, причому $t_{c1} > t_{c2}$); третього роду – за яких, крім температур t_{c1} і t_{c2} , ще відомі температури середовищ всередині сфери t_{p1} та зовні t_{p2} ($t_{p2} < t_{c2}$), а також задані коефіцієнти тепловіддачі внутрішньої α_1 і зовнішньої α_2 поверхонь сфери. Для спрощення викладок припустимо, що температура змінюється тільки в напрямку радіуса сфери. За таких припущень рівняння теплопровідності в сферичних координатах набуде вигляду [1, 2]

$$\nabla^2 t = \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dt}{dr} = 0. \quad (1.90)$$

За аналогією з (1.76) вводимо нову змінну $dt / dr = u$ і знижуємо порядок диференціального рівняння (1.90):

$$\frac{du}{dr} + \frac{2}{r} u = 0; \quad (1.91)$$

Розділяємо змінні та інтегруємо (1.91):

$$\ln u + 2 \ln r = \ln C_1. \quad (1.92)$$

Потенціюючи (1.92) та повертаючись до попередньої змінної і розділяючи змінні, отримуємо:

$$dt = C_1 \frac{dr}{r^2}. \quad (1.93)$$

Після інтегрування (1.93), матимемо:

$$t = C_2 - \frac{C_1}{r}. \quad (1.94)$$

Підставляючи в (1.94) межові умови першого роду, знайдемо сталі інтегрування:

$$C_1 = \frac{t_{c_1} - t_{c_2}}{(1/r_1 - 1/r_2)}; \quad (1.95)$$

$$C_2 = t_{c_1} - \frac{t_{c_1} - t_2}{r_1(1/r_1 - 1/r_2)}. \quad (1.96)$$

Врахувавши (1.95) та (1.96) в (1.94), отримуємо закон розподілу температури вздовж радіуса стінки сфери:

$$t = t_{c_1} - \frac{t_{c_1} - t_2}{(r_1^{-1} - r_2^{-1})} \cdot (r_1^{-1} - r^{-1}). \quad (1.97)$$

Для знаходження теплового потоку Q , що проходить через стінку сфери, скористаємося законом Фур'є:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} A = -\lambda 4\pi r^2 \frac{dt}{dr} = \frac{4\pi\lambda(t_{c_1} - t_{c_2})}{(r_1^{-1} - r_2^{-1})} = \frac{2\pi\lambda\Delta t_o}{d_1^{-1} - d_2^{-1}} = \pi\lambda \frac{d_1 d_2}{\delta} \cdot \Delta t_o, \quad (1.98)$$

де $A = 4\pi r^2$ – площа поверхні сфери радіусом r ; $\lambda = const$ – коефіцієнт теплопроводності матеріалу сфери; $d_1 = 2r_1$; $d_2 = 2r_2$;

$dt/dr = C_1/r^2 = (t_{c_1} - t_{c_2})/[r^2(r_1^{-1} - r_2^{-1})]$ – градієнт температури в стінці сфери; $\delta = r_2 - r_1$ – товщина стінки сфери; $\Delta t_o = t_{c_1} - t_{c_2}$.

Оскільки ми розглядаємо стаціонарний процес теплопередачі через стінку сфери, то тепловий потік згідно із законом збереження енергії для поверхонь сфери буде постійним для всіх поверхонь сфери як внутрішніх, так і зовнішніх, тоді на основі закону Ньютона–Ріхмана із врахуванням (1.98) для межових умов третього роду, матимемо:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \alpha_1 \pi d_1^2 (t_{p_1} - t_{c_1}); \\ Q = \frac{2\pi\lambda (t_{c_1} - t_{c_2})}{(d_1^{-1} - d_2^{-1})}; \\ Q = \alpha_2 \pi d_2^2 (t_{c_2} - t_{p_2}). \end{array} \right. \quad (1.99)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1.99) відносно Q , знайдемо:

$$Q = \frac{2\pi\lambda (t_{p_1} - t_{p_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} (d_1^{-1} - d_2^{-1}) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = k_{c\phi} \pi \Delta t, \quad (1.100)$$

де $k_{c\phi} = \left[\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} (d_1^{-1} - d_2^{-1}) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} \right]^{-1}$ – коефіцієнт теплопередачі через сферичну стінку, $Вт/К$.

Обернена величина

$$R_{c\phi} = k_{c\phi}^{-1} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} (d_1^{-1} - d_2^{-1}) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2} \quad (1.101)$$

називається **термічним опором теплопередачі через сферичну стінку** (розмірність $К/Вт$).

За аналогією з (1.89) можна знайти, якщо $d(R_{c\phi})/d(d_2) = 0$, критичний діаметр сфери $d_{2_{кр}}$ за якого термічний опір теплопередачі буде мінімальним ($\alpha_2 = const$):

$$d_{2_{кр}} = 4\lambda / \alpha_2. \quad (1.102)$$

Знайдене під час розгляду процесу стаціонарної теплопровідності через плоску стінку рівняння температурного поля (1.81) в безрозмірних величинах є узагальненим виразом температурного поля, який справедливий як для циліндричної, так і для сферичної стінок [1]. Безрозмірна узагальнена координата X для циліндричної та сферичної стінок може бути розрахована за формулами [1] для стінок :

$$\text{циліндричної} - X = X_y = \ln(r/r_1) / \ln(r_2/r_1); \quad (1.103)$$

$$\text{сферичної} - X = X_{cf} = (d_1^{-1} - d^{-1}) / (d_1^{-1} - d_2^{-1}), \quad (1.104)$$

тут r та d – відповідно радіус і діаметр будь-якої ізотермічної поверхні циліндра та сфери, розташованих всередині циліндричної та сферичної стінок.

Під час роботи двигунів внутрішнього згорання, електродвигунів, черв'ячних передач тощо виділяється певна кількість теплоти, одним із способів відведення якої є оброблення поверхонь корпусів цих механізмів з метою збільшення площі поверхні тепловіддачі. Спрощено ребро можна розглядати як стержень, поперечний переріз якого може мати будь-яку конфігурацію – прямокутник, круг, трикутник та ін.

Розглянемо процес стаціонарної теплопередачі через необмежений в одному напрямку стержень постійного перерізу (рисунок 1.10) периметром

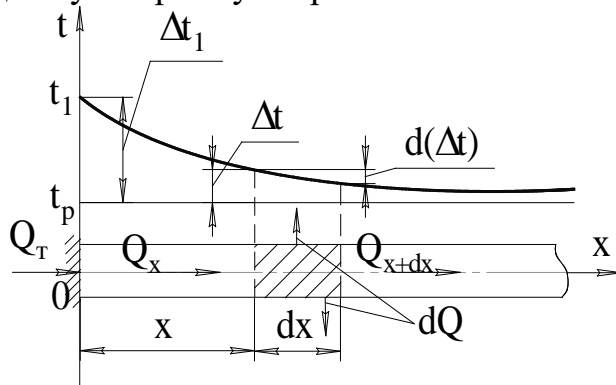


Рисунок 1.10 – Процес теплопередачі через необмежений стержень

U і площею поперечного перерізу A . Стержень розміщений в середовищі з постійною температурою t_p , коефіцієнти теплопровідності матеріалу стержня λ та тепловіддачі його поверхні α_p постійні. Тепловий потік Q_m підводиться до торця стержня, як показано на рисунку 1.10, в напрямку осі Ox . Припустимо, що коефіцієнт теплопровідності λ

достатньо великий, а площа A мала, що дозволяє знехтувати зміною температури в поперечному напрямку стержня. Оскільки $t_p = const$, то розгляд процесу теплопередачі через стержень доцільно проводити відносно надлишкової температури $\Delta t = t_1 - t_p = const$ (тут $t_1 > t_p$).

Виділимо на відстані x від торця стержня елементарну ділянку довжиною dx і запишемо рівняння теплового балансу для цієї ділянки:

$$dQ = Q_x - Q_{x+dx}, \quad (1.105)$$

де dQ – елементарний тепловий потік, що віддається ділянкою dx навколишньому середовищу; Q_x , Q_{x+dx} – відповідно, теплові потоки, що входять і виходять через перерізи стержня, обмежені довжиною dx .

Потоки Q_x та Q_{x+dx} визначимо за законом Фур'є:

$$Q_x = -\lambda \frac{d(\Delta t)}{dx} A; \quad (1.106)$$

$$Q_{x+d} = -\lambda \frac{d}{dx} \left[\Delta t + \frac{d(\Delta t)}{dx} dx \right] A = -\lambda \frac{d(\Delta t)}{dx} A - \frac{d^2(\Delta t)}{dx^2} dx A. \quad (1.107)$$

Підставляючи (1.106) та (1.107) в (1.105), знайдемо:

$$dQ = \lambda A \frac{d^2(\Delta t)}{dx^2} dx. \quad (1.108)$$

Відповідно до закону збереження енергії для поверхні стержня і за законом Ньютона – Ріхмана

$$dQ = \alpha_p U \Delta t dx. \quad (1.109)$$

Прирівнюючи (1.108) та (1.109), отримаємо диференціальне рівняння, що описує зміну температури по довжині стержня:

$$\frac{d^2(\Delta t)}{dx^2} = \frac{\alpha_p U}{\lambda A} \Delta t = m^2 \Delta t, \quad (1.110)$$

де $m = \sqrt{\frac{\alpha_p U}{\lambda A}}$ – величина, яку називають темпом охолодження [1] стержня, m^{-1} . Загальний інтеграл для рівняння (1.110) знаходиться за формулою [5]:

$$\Delta t = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (1.111)$$

Сталі інтегрування C_1 та C_2 визначимо за межовими умовами для:

$$x = 0 \quad \Delta t = \Delta t_1 = C_1 e^0 + C_2 e^{-0} = C_1 + C_2; \quad (1.112)$$

$$x = \infty \quad \Delta t = 0 = C_1 e^\infty + C_2 e^{\frac{1}{\infty}} = C_1 e^\infty; \quad (1.113)$$

Оскільки $e^\infty \neq 0$, то $C_1 = 0$, тоді $\Delta t_1 = C_2$.

Підставляючи значення C_1 та C_2 в (1.114), отримаємо:

$$\Delta t = \Delta t_1 e^{-mx} \quad (1.114)$$

або в безрозмірній формі

$$\theta = \frac{\Delta t}{\Delta t_1} = e^{-mx}. \quad (1.115)$$

Згідно з законом Фур'є через торець стержня проходить тепловий потік

$$Q_m = -\lambda \left[\frac{d(\Delta t)}{dx} \right]_{x=0} \cdot A = -\lambda [\text{grad} \Delta t]_{x=0} \cdot A, \quad (1.116)$$

де $[\text{grad} \Delta t]_{x=0} = \left[\frac{d(\Delta t)}{dx} \right]_{x=0}$ – градієнт температури на торці стержня.

Взявши похідну виразу (1.114) за x , знайдемо:

$$\left[\frac{d(\Delta t)}{dx} \right]_{x=0} = -m e^{-mx} \Delta t_1 /_{x=0} = -m \Delta t_1. \quad (1.117)$$

Якщо вважати, що весь потік Q_m віддається навколишньому середовищу, то підставивши (1.117) в (1.116), отримаємо формулу для розрахунку Q_m :

$$Q_m = \lambda A m \Delta t_1 = \Delta t_1 \sqrt{\alpha_p \lambda U A}. \quad (1.118)$$

Рівняння (1.111) справедливе і для стержня скінченної довжини L , але межові умови для цього випадку будуть інші:

для

$$\begin{cases} x=0 & \Delta t = \Delta t_1; \\ x=L & -\lambda \left[\frac{d(\Delta t)}{dx} \right]_{x=L} = \alpha_L \Delta t_L; \\ \text{або} & \left[\frac{d(\Delta t)}{dx} \right]_{x=L} = -\frac{\alpha_L}{\lambda} \Delta t_L, \end{cases} \quad (1.119)$$

де Δt_L – температура на вільному торці стержня для $x=L$; α_L – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні вільного торця стержня.

Для $x=L$ тепловий потік Q_L , що підводиться до вільного торця стержня за рахунок теплопровідності, дорівнює тепловому потоку, який віддається поверхнею цього торця навколишньому середовищу (див. вираз (1.119) для $x=L$).

Підставивши умови (1.119) в (1.111), знайдемо сталі C_1 та C_2 :

$$C_1 = \frac{\Delta t_1 \left(m - \frac{\alpha_L}{\lambda} \right)}{e^{2mL} \left(m + \frac{\alpha_L}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_L}{\lambda}}; \quad C_2 = \Delta t_1 \frac{e^{2mL} \left(m + \frac{\alpha_L}{\lambda} \right)}{e^{2mL} \left(m + \frac{\alpha_L}{\lambda} \right) + m - \frac{\alpha_L}{\lambda}}. \quad (1.120)$$

Враховуючи (1.120) в (1.111), отримаємо після нескладних алгебраїчних перетворень рівняння розподілу температури в обмеженому стержні постійного перерізу:

$$\Delta t = \Delta t_1 \left\{ \frac{m \left[e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)} \right] + \frac{\alpha_L}{\lambda} \left[e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)} \right]}{m \left[e^{mL} + e^{-mL} \right] + \frac{\alpha_L}{\lambda} \left[e^{mL} - e^{-mL} \right]} \right\}. \quad (1.121)$$

Рівняння (1.121) можна записати в більш простому вигляді, якщо врахувати, що $0,5(e^x + e^{-x}) = ch(x)$ та $0,5(e^x - e^{-x}) = sh(x)$, тоді

$$\Delta t = \Delta t_1 \frac{ch[m(L-x)] + \frac{\alpha_L}{m\lambda} sh[m(L-x)]}{ch[mL] - \frac{\alpha_L}{m\lambda} sh[mL]}. \quad (1.122)$$

Якщо α_L малий, а коефіцієнт теплопровідності λ великий, то $\alpha_L / \lambda \rightarrow 0$ і тепловіддачею із вільного торця стержня можна знехтувати, тоді за цих припущень рівняння (1.122) набуде вигляду:

$$\Delta t = \Delta t_1 \frac{ch[m(L-x)]}{ch[mL]} \quad (1.123)$$

або в безрозмірній формі

$$\theta = \frac{ch[m(L-x)]}{ch[mL]}. \quad (1.124)$$

Для випадку $x = L$, формула (1.123) буде такою:

$$\Delta t = \Delta t_1 / ch(mL). \quad (1.125)$$

За законом збереження енергії тепловий потік Q_m , підведений до торця стержня, віддається в навколишнє середовище, тобто $Q_m = Q_p$ (тут Q_p – тепловий потік з поверхні стержня). Взяти похідну виразу (1.123) за x

$$\left[\frac{d(\Delta t)}{dx} \right]_{x=0} = -\Delta t_1 m \frac{sh(mL)}{ch(mL)} = -\Delta t_1 m th(mL) \quad (1.126)$$

і підставивши знайдене значення в (1.116), отримаємо:

$$Q_p = \lambda A m \Delta t_1 th(mL) = \Delta t_1 \sqrt{\alpha_p \lambda U A} \cdot th(mL). \quad (1.127)$$

Як вже відмічалось, обрешетка є одним із способів підвищення тепловіддачі із поверхонь корпусів механізмів та машин, що працюють з великим тепловиділенням.

Розглянемо розрахунок стаціонарної теплопередачі через ребристу плоску стінку необмежених розмірів, фрагмент якої зображено на рисунку 1.11. Характерні розміри стінки нанесено на рисунку 1.11. Зазвичай ширина ребра $b \geq \delta$ (тут δ товщина ребра), тоді периметр поперечного перерізу ребер $U_p \approx 2b$, а площа цього перерізу $A_{pn} \approx b\delta$.

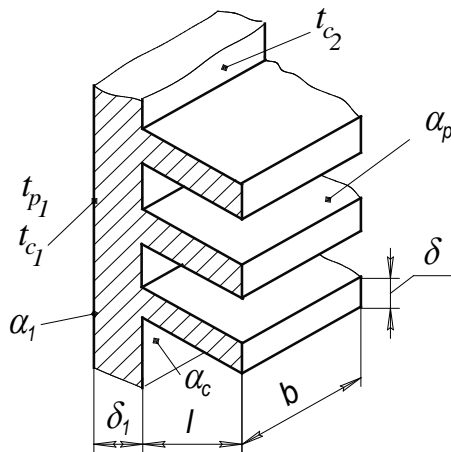


Рисунок 1.11 – Теплопередача через ребристу стінку

Припустимо, що коефіцієнти тепловіддачі неорєбреної поверхні стінки α_1 , гладкої частини на орєбреній поверхні α_c та на поверхні ребер α_p є постійними. Також постійний коефіцієнт теплопровідності λ матеріалу стінки.

Враховуючи зроблені зауваження, визначимо (див. (1.110)) темп охолодження для ребристої стінки:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_p U_p}{\lambda A_p}} = \sqrt{2\alpha_p / (\lambda \delta)}. \quad (1.128)$$

Отримане значення m підставляємо у формулу (1.127) і, враховуючи значення U та A , після нескладних алгебраїчних перетворень, знайдемо:

$$\begin{aligned} Q_p &= \lambda \alpha_p A_p \frac{th \left(\frac{\ell}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}} \right)}{\frac{\ell}{\delta} \sqrt{\frac{2\alpha_p \delta}{\lambda}}} \Delta t_1 = \\ &= 2 \alpha_p b \ell \frac{th \left(\frac{\ell}{\delta} \sqrt{2 Bi} \right)}{\frac{\ell}{\delta} \sqrt{2 Bi}} \Delta t_1 = \alpha_p A_p E \Delta t_1, \quad (1.129) \end{aligned}$$

де $Bi = \frac{\alpha_p \delta}{\lambda} = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha_p}$ – безрозмірне число (критерій) Біо, яке характеризує

співвідношення термічних опорів стінки (δ / λ – внутрішній термічний опір) і тепловіддачі ($1 / \alpha_p$ – зовнішній термічний опір); $A_p = 2b\ell$ – площа поверхні ребра; $E = th \left[(\ell / \delta) \sqrt{2 Bi} \right] / \left[(\ell / \delta) \sqrt{2 Bi} \right]$ – так званий коефіцієнт ефективності ребра [1]; $\Delta t = t_{c_2} - t_{p_2}$ (тут t_{c_2} і t_{p_2} – відповідно температури ребристого боку стінки та середовища, в якому цей бік розташова-

ний).

Загальний тепловий потік Q , що віддається ребреною поверхнею для стаціонарного процесу теплопередачі, визначається з рівняння теплового балансу

$$Q = Q_p + Q_c = \alpha_p A_p E \Delta t_1 + \alpha_c A_c \Delta t_1 = \alpha_{зв} A_{pc} \Delta t_1, \quad (1.130)$$

тут $Q_c = \alpha_c A_c \Delta t_1$ – тепловий потік, що віддається гладкою частиною ребреної поверхні; A_c – площа гладкої поверхні ребристої стінки;

$A_{pc} = A_p + A_c$; $\alpha_{зв} = \alpha_p E \frac{A_p}{A_{pc}} + \alpha_c \frac{A_c}{A_{pc}}$ – зведений коефіцієнт тепловіддачі

ребристої стінки, який враховує тепловіддачу поверхонь ребра, гладкої стінки та ефективність роботи ребра.

Стаціонарну тепловіддачу через ребристу стінку також можна за аналогією з плоскою стінкою описати системою рівнянь:

$$\begin{cases} Q_p = \alpha_1 A_1 (t_{p_1} - t_{c_1}) A_1; \\ Q_p = \frac{\lambda}{\delta_1} (t_{c_1} - t_{c_2}) A_1; \\ Q_p = \alpha_{зв} (t_{c_2} - t_{p_2}) A_{pc}, \end{cases} \quad (1.131)$$

де A_1 – площа неоребреної поверхні стінки; t_{c_1}, t_{p_1} – температури відповідно неоребреної поверхні стінки і середовища, в якому вона знаходиться.

Розв'язавши систему (1.131) відносно Q , знайдемо:

$$Q = (t_{p_1} - t_{p_2}) / \left(\frac{1}{\alpha_1 A_1} + \frac{\delta_1}{\lambda A_1} + \frac{1}{\alpha_{зв} A_{pc}} \right). \quad (1.132)$$

Якщо віднести тепловий потік Q до площі A_{pc} ребреної поверхні стінки, то отримаємо густину теплового потоку відносно A_{pc} :

$$q_{pc} = Q / A_{pc} = (t_{p_1} - t_{p_2}) / \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{A_{pc}}{A_1} + \frac{\delta_1}{\lambda} \frac{A_{pc}}{A_1} + \frac{1}{\alpha_{зв}} \right) = k_{pc} (t_{p_1} - t_{p_2}), \quad (1.133)$$

де $k_{pc} = \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{A_{pc}}{A_1} + \frac{\delta_1}{\lambda} \frac{A_{pc}}{A_1} + \frac{1}{\alpha_{зв}} \right)^{-1}$ – коефіцієнт теплопередачі через ребристу стінку, визначений відносно площі орєбреної поверхні, $Вт/(м^2К)$.

Густина теплового потоку на неорєбреній поверхні

$$q_1 = Q / A_1 = (t_{p_1} - t_{p_2}) / \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{зв}} \frac{A_1}{A_{pc}} \right) = k_1 (t_{p_1} - t_{p_2}), \quad (1.134)$$

де $k_1 = \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{зв}} \frac{A_1}{A_{pc}} \right)^{-1}$ – коефіцієнт теплопередачі, знайдений відносно площі A_1 .

Відношення $A_{pc} / A_1 = k_p$ називається **коефіцієнтом орєбрення поверхні** [1].

Наведені приклади показують, що класичний метод безпосереднього інтегрування рівняння теплопровідності можна використовувати для розв'язання простих задач, як правило, для знаходження стаціонарних одновимірних температурних полів.

Під час розв'язання окремих задач теплофізики іноді використовують методи *інтегральних* (integral) перетворень (операційні), зокрема метод Лапласа [1, 5]. Згідно з цим методом, шукана функція $f(\tau)$ (оригінал) замінюється її зображенням $F(S) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$, де $s = \sigma + i\omega$ – комплексна

змінна, що є зображенням аргументу τ ($\sigma, i\omega$ – реальна та уявна частини комплексного числа $i = \sqrt{-1}$), відповідно.

За такої заміни вихідне диференціальне рівняння перетворюється на алгебраїчне в зображеннях. Після розв'язання отриманого алгебраїчного рівняння в зображеннях виконується обернене перетворення. Методом інтегрального перетворення Лапласа можна розв'язувати лінійні диференціальні рівняння. Під час застосування цього методу для знаходження дво- та тривимірних температурних полів алгебраїчні рівняння мають високий порядок, розв'язання яких пов'язано зі значними математичними труднощами.

В технологічній теплофізиці широко використовується для розв'язання рівняння теплопровідності метод джерел (стоків) теплоти [2]. Цей метод дозволяє відносно просто написати інтеграл, що задовольняє диференціа-

льне рівняння теплопровідності та задані умови однозначності. Знайдений інтеграл може обчислюватись аналітичними чи числовими методами.

Ґрунтується метод джерел (стоків) теплоти на таких двох основних постулатах [2]:

а) джерело або стік теплоти будь-якої форми, рухоме чи нерухоме, діюче безперервно чи тимчасово, може бути подано як система точкових миттєвих джерел (стоків) теплоти (принцип конструювання рішень);

б) процес поширення теплоти в тілі обмежених розмірів може бути поданий як частина процесу поширення теплоти в необмеженому тілі шляхом доповнення фактично діючої системи джерел (стоків) теплоти системою фіктивних джерел або стоків (принцип відображення джерел).

Математичний апарат методу джерел побудований на описі температурного поля, що виникає в необмеженому тілі під дією теплоти, яка вноситься в тіло точковим миттєвим джерелом теплоти [2]:

$$t(x, y, z) = \frac{Q_\tau}{\lambda \sqrt{a} \cdot (4\pi\tau)^{3/2}} \cdot e^{-R^2/(4a\tau)}, \quad (1.135)$$

де Q_τ – кількість теплоти, що внесена в тіло миттєвим точковим джерелом; τ – час, що пройшов з моменту теплового імпульсу; λ , a – відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності матеріалу тіла; $R = \sqrt{(x - x_g)^2 + (y - y_g)^2 + (z - z_g)^2}$ – відстань від місця теплового спалаху $I(x_g, y_g, z_g)$ до розглядуваної точки тіла з координатами x , y та z . Більш детально з використанням методу джерел теплоти для розв'язання задач технологічної теплофізики можна ознайомитись в роботі [2].

Числові методи розв'язування рівняння теплопровідності найчастіше використовуються тоді, коли точні аналітичні методи розрахунку пов'язані зі значними математичними труднощами. Числові методи за своєю суттю є наближеними способами інтегрування диференціальних рівнянь. Ці методи дозволяють врахувати більшість особливостей **конкретного** процесу, але їх результати є справедливими тільки для цього процесу, а аналітичні розв'язки, отримані безпосереднім інтегруванням диференціального рівняння, наприклад, теплопровідності, дають можливість розрахувати температуру для будь-якої точки тіла. Перевагою числових методів перед аналітичними для **конкретного процесу** є можливість наближено задовольнити будь-які умови однозначності. Особливо бурний розвиток числових методів здійснився в зв'язку з розвитком комп'ютерної техніки.

Під час розв'язання задач технологічної теплофізики застосовують числові методи скінченних різниць, скінченних елементів і граничних елементів. З цих методів для розв'язання задач теплопровідності найбільш широко використовується метод скінченних різниць, який ще називають методом сіток.

Метод скінченних різниць ґрунтується на заміні похідних в диференціальних рівняннях теплопровідності приблизними співвідношеннями в окремих вузлових точках температурного поля. Ці точки називають вузлами сітки. За такої заміни диференціальне рівняння перетворюється в еквівалентне алгебраїчне. Такі алгебраїчні рівняння складаються для всіх вузлових точок розглядуваної ділянки тіла, включно й межові точки.

В результаті отримаємо замкнену систему алгебраїчних рівнянь, розв'язавши яку за допомогою пакетів прикладних комп'ютерних програм, наприклад, **Mathcad**, визначимо температури всіх вузлових точок.

Метод скінченних різниць полягає в тому, що досліджуване тіло чи система тіл розбивається на маленькі елементи (об'єми, площини, відрізки), вигляд яких визначається умовами задачі, зазвичай це правильні геометричні фігури: паралелепіпеди, прямокутники чи рівні між собою відрізки прямої. Час проходження теплопередачі також ділиться на малі проміжки $\Delta\tau$ та вводяться такі припущення:

а) термічні властивості кожного із елементів (наприклад, маленького паралелепіпед) зосереджені в його центральній вузловій точці (рисунок 1.12) з порядковими номерами i, j, p , що відповідають координатам x, y, z , відповідно;

б) температура тіла змінюється дискретно стрибком через проміжок часу $\Delta\tau$, причому кожному проміжку присвоюється порядковий номер (індекс) $k, k+1, k+2, \dots, k+n$ (тут n – кількість проміжків $\Delta\tau$, на які поділена стріла часу);

в) теплопередача між вузловими точками здійснюється через умовні теплопровідні стержні.

Як приклад застосування числового методу скінченних різниць розв'яжемо рівняння теплопровідності для одновимірного нестационарного процесу:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (1.136)$$

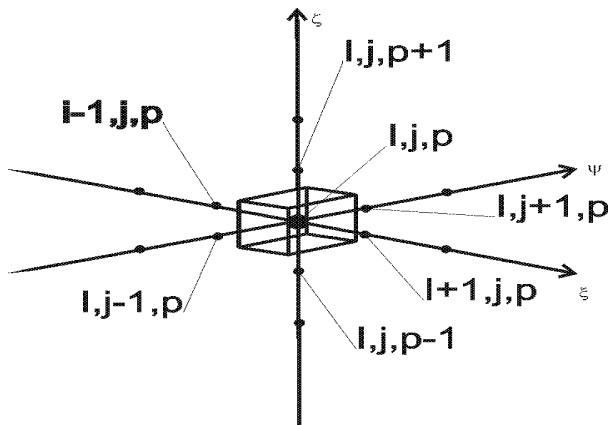


Рисунок 1.12 – Графічна інтерполяція методу скінченних різниць

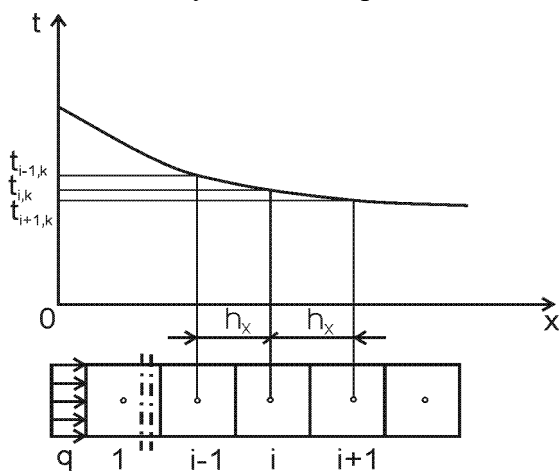


Рисунок 1.13 – Графічна ілюстрація методу скінченних різниць для розрахунку температурного поля в одновимірному стержні

Рівняння (1.136) описує процес зміни температури в напрямку осі Ox та часі, наприклад, температурне поле в одновимірному стержні.

Графічна ілюстрація цього поля в одновимірному стержні зображена на рис. 1.13. Розділимо стержень на маленькі відрізки довжиною h_x та пронумеруємо їх індексами $\dots i-2, i-1, i, i+1, i+2, \dots, i+n$ (тут i – центральна вузлова точка). Якщо відома температурна функція (див. рисунок 1.13), то першу похідну $\partial t / \partial x$ поблизу точки i в момент часу k можна замінити двома наближеними виразами:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cong \begin{cases} \left(\frac{\Delta t}{h_x} \right)_+ = \frac{t_{i+1,k} - t_{i,k}}{h_x}; \\ \left(\frac{\Delta t}{h_x} \right)_- = \frac{t_{i,k} - t_{i-1,k}}{h_x}, \end{cases} \quad (1.137)$$

де $(\Delta t / h_x)_+$ та $(\Delta t / h_x)_-$ – прийнято називати різницевиими відношеннями «вперед» (+) та «назад» (-) [1, 2].

Другу похідну $\partial^2 t / \partial x^2$ можна подати через різницю відношень «вперед» і «назад», віднесену до h_x :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cong \frac{1}{h_x} \left[\left(\frac{\Delta t}{h_x} \right)_+ - \left(\frac{\Delta t}{h_x} \right)_- \right] = \frac{t_{i+1,k} + t_{i-1,k} - 2t_{i,k}}{h_x^2}. \quad (1.138)$$

Оскільки часова вісь (стріла часу) має один напрямок від теперішнього до майбутнього, то похідну $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ можна описати тільки одним різницевим співвідношенням:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \approx \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{i,k+1} - t_{i,k}}{\Delta \tau}. \quad (1.139)$$

Підставляючи (1.138) та (1.139) в рівняння (1.136), після нескладних перетворень отримаємо вираз для розрахунку температури точки i в момент часу $k+1$:

$$t_{i,k+1} = \frac{a\Delta\tau}{h_x^2} (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + \left(1 - \frac{2a\Delta\tau}{h_x^2} \right) t_{i,k} = F_{0x} (t_{i+1,k} + t_{i-1,k}) + (1 - 2F_{0x}) t_{i,k}, \quad (1.140)$$

де $F_{0x} = a\Delta\tau / h_x^2$ – критерій Фур'є відносно розміру h_x елементарного відрізка стержня. Рівняння (1.140) є алгебраїчним рівнянням теплопровідно-

сті в скінченно-різницевій формі. Математичний аналіз рівняння (1.140) показує, що для забезпечення стійкості його розв'язку, необхідно виконати умову $F_{0x} \leq 0,5$ [1, 2]. Для $F_{0x} > 0,5$ результати розв'язку набувають стрибкоподібного характеру і розрахунок температурного поля буде неправильним. Візьмемо $F_{0x}=0,5$, тоді

$$t_{i,k+1} = 0,5(t_{i+,k} + t_{i-,k}). \quad (1.141)$$

Рівняння (1.141) показує, що для знаходження температури точки i в момент часу $k+1$ достатньо знати температуру двох сусідніх точок $i-1$ та $i+1$ в попередній проміжок часу k . Таким чином за $F_{0x} = 0,5$ майбутня температура точки i від теперішньої її температури не залежить.

Рівняння типу (1.141) складають для всіх вузлових точок стержня, включаючи й точки, що розташовані на його межах, температура яких задана в умовах однозначності. Розв'язуючи отриману таким чином систему алгебраїчних рівнянь, можна визначити розподіл температури в стержні для будь-якого моменту часу. Необхідно зауважити, що умови однозначності також мають бути зведені до скінченно-різницевої форми [1, 2].

Точність розрахунків підвищується із зменшенням F_{0x} , наприклад, при $F_{0x} = 0,25$ $t_{i,k+1} = 0,25(t_{i+1,k} + t_{i-1,k} + 2t_{i,k})$ – це більш точний вираз для розрахунку майбутньої температури точки i .

Методом скінченних різниць можна розв'язувати дво- та тривимірні задачі теплопровідності, наприклад, для тривимірного температурного поля рівняння теплопровідності в скінченно-різницевій формі має вигляд [1, 2]

$$t_{i,j,p,k+1} = F_{0x}(t_{i+1,j,p,k} + t_{i-1,j,p,k}) + F_{0y}(t_{i,j+1,p,k} + t_{i,j-1,p,k}) + F_{0z}(t_{i,j,p+1,k} + t_{i,j,p-1,k}) + [1 - 2(F_{0x} + F_{0y} + F_{0z})] \cdot t_{i,j,p,k}, \quad (1.142)$$

де $F_{0x} = \frac{a\Delta\tau}{h_x^2}$; $F_{0y} = \frac{a\Delta\tau}{h_y^2}$; $F_{0z} = \frac{a\Delta\tau}{h_z^2}$ – критерії Фур'є відносно розмірів h_x ,

h_y , h_z елементарного об'єму тіла. Стійкість розв'язку рівняння (1.142) забезпечується за виконання умови

$$F_{0x} + F_{0y} + F_{0z} \leq 0,5. \quad (1.143)$$

Під час вибору інтервалів (кроків) сітки h_x , h_y , h_z їх величину узгоджують із ступенем деталізації вивчення температурного поля в тій чи іншій області твердого тіла. Кроки сітки, а також інтервал розбиття координати

часу мають відповідати умові (1.143).

З метою зменшення обсягу та вартості розрахунків під час розв'язання задач з теплофізики нині широко використовуються методи скінченних елементів і граничних елементів, математичний апарат яких ґрунтується на варіаційному численні.

На відміну від методу скінченних різниць метод скінченних елементів дозволяє здійснювати неоднакову деталізацію об'єктів дослідження. Елементарні об'єми можуть мати будь-яку форму та розміри. За методом скінченних елементів скорочується число рівнянь та є можливість для окремих елементів врахувати різні властивості матеріалу. Метод граничних елементів відрізняється від розглянутих тим, що на елементарні об'єми розбивається не все тіло, а тільки його межові поверхні, що значно скорочує обсяг розрахунків. В теплофізиці метод граничних елементів поки що використовують обмежено, оскільки це пов'язано зі значними математичними труднощами. Більш детально з особливостями та прикладами застосування методів скінченних і граничних елементів можна ознайомитись в роботі [2].

Розв'язання задач теплопровідності шляхом моделювання відноситься до експериментальних методів. Використовується два методи моделювання [1, 2]: вивчення теплообміну в реальному твердому тілі (або системі тіл) за аналізом подібного процесу поширення теплоти в моделі (фізичне моделювання); вивчення теплообміну в реальному тілі на основі дослідження іншого фізичного явища, що має формально аналогічний процесу поширення теплоти математичний опис (математичне або аналогове моделювання). Теоретичною базою моделювання є теорія подібності, елементи якої будуть розглянуті в розділі 2.

Приклади розв'язання задач теплопровідності за допомогою моделювання наведені в роботах [1, 2].

1.8 Запитання для самоперевірки до розділу 1

1. Що розуміють під феноменологічним і статистичним методами дослідження явищ природи ?

2. Дайте означення видам теплопередачі: теплопровідність; конвекція; теплове випромінювання.

3. Який вид теплопередачі називають складним теплообміном? Чим відрізняються між собою нестационарне та стаціонарне температурні поля?

4. Запишіть в загальному вигляді залежності, що характеризують одно-, дво- та тривимірні нестационарні температурні поля.

5. Дайте означення ізотермічної поверхні.

6. Запишіть вираз для градієнта температури. Куди направлений вектор градієнта температури?

7. Наведіть означення закону Фур'є в різних формах.
8. Як направлений вектор густини теплового потоку?
9. Що розуміють під поняттям коефіцієнта теплопровідності? Яка розмірність цього коефіцієнта в міжнародній системі одиниць СІ?
10. Під яким кутом перетинаються лінії теплового потоку та ізотерми?
11. Наведіть залежності для розрахунку коефіцієнтів теплопровідності для крапельних рідин та газів.
12. Які матеріали називаються теплоізоляційними?
13. Перерахуйте основні припущення, що приймаються під час виведення диференціального рівняння теплопровідності.
14. На що витрачається надлишкова кількість теплоти, що виділяється в елементарному об'ємі dV за час $d\tau$ під час ізохорного та ізобарного термодинамічних процесів?
15. Запишіть в загальному вигляді диференціальні рівняння теплопровідності для змінних і сталих теплофізичних характеристик твердого тіла.
16. Що характеризує коефіцієнт температуропровідності? Для яких теплових процесів цей коефіцієнт має значення?
17. Запишіть і поясніть рівняння теплопровідності Фур'є, Лапласа та Пуассона.
18. Із яких основних пунктів складаються умови однозначності розв'язування диференціального рівняння теплопровідності?
19. На скільки родів поділяються межові умови? Наведіть характеристику кожного роду.
20. Запишіть умову збереження енергії для поверхні тіла під час його теплообміну з навколишнім середовищем.
21. Які методи використовуються для розв'язання задач теплопровідності?
22. В чому полягає суть класичного аналітичного методу розв'язування рівняння теплопровідності? Які переваги та недоліки цього методу?
23. Як розрахувати еквівалентний коефіцієнт теплопровідності багатопшарової стінки за стаціонарного режиму процесу теплопровідності?
24. В чому полягає суть операційного методу інтегральних перетворень Лапласа для розв'язування диференціального рівняння теплопровідності? Які переваги та недоліки має цей метод?
25. На яких основних постулатах ґрунтується метод джерел (стоків) теплоти? Яка фундаментальна фізична залежність лежить в основі математичного апарату цього методу?
26. Які переваги та недоліки мають числові методи розв'язування рівняння теплопровідності?
27. Які основні припущення покладено в основу числового методу скінченних різниць?
28. Чому критерій Фур'є для одновимірного процесу теплопровідності або сума цих критеріїв для дво- чи тривимірних процесів під час викорис-

тання числового методу скінченних різниць для розв'язування рівняння теплопровідності не може перевищувати 0,5?

29. В чому полягає відмінність числових методів скінченних елементів і граничних елементів розв'язування задач теплопровідності від методу скінченних різниць?

30. До яких методів дослідження процесів теплопровідності відноситься їх моделювання? Які основні методи моделювання використовуються під час вивчення явища теплопровідності?

31. Яка теорія є базою моделювання?

2 ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ВЧЕННЯ ПРО КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛООБМІН

2.1 Основні поняття та означення

Конвективний процес теплообміну здійснюється під час руху рідини чи газу, причому теплота одночасно переноситься конвекцією та теплопровідністю. Конвекція теплоти – це її перенесення під час переміщення мікрочастинок текучого середовища в просторі з області з однією температурою в область з іншою температурою. Конвекція можлива тільки в рідині або газі, де перенесення теплоти нерозривно пов'язано з перенесенням самого текучого середовища.

В рух рідину чи газ приводять сили, які можна поділити на масові (об'ємні) та поверхневі. **Масові сили** прикладені до всіх частинок рідини (газу) і зумовлюються зовнішніми силовими полями (гравітаційним, магнітним, електричним). **Поверхневі сили** прикладаються до поверхні контрольного об'єму рідини (газу), внаслідок дії на неї навколишнього середовища або твердих тіл. Це сили зовнішнього тиску та тертя.

Конвекцію поділяють на **природну (вільну)** та **вимушену**. Під час природної конвекції рух рідини (газу) виникає через неоднорідну густину рідини та дію на її частинки масових сил. Це обумовлюється нерівномірним розподілом температури в об'ємі рідини (газу), наприклад, під час опалення кімнати від водяної батареї, коли більш нагріті об'єми повітря через меншу густину піднімаються вгору в полі земного тяжіння, а холодні шари повітря опускаються вниз. Рух рідини (газу) під час вимушеної конвекції відбувається під дією на розглядуваний об'єм рідини поверхневих сил, наприклад, за рахунок передавання об'єму рідини кінетичної енергії від насоса, вентилятора або інших пристроїв, внаслідок чого під час руху рідини чи газу із області з однією температурою в область з іншою разом із масою рідини (газу) переноситься певна кількість теплоти. Вимушена конвекція проходить і тоді, коли тверде тіло само переміщується в середовищі.

Вимушена та природна конвекції в природі відбуваються одночасно, наприклад, під час токарного оброблення одна частина різця віддає теплоту в рухоме середовище – змащувально-охолоджувальну рідину, а інша – в умовно нерухоме навколишнє повітря. Вплив природної конвекції на загальний тепловий баланс тим більший, чим більша різниця температур окремих частинок середовища та менша швидкість вимушеного руху і навпаки.

Конвективний теплообмін між потоком рідини (газу) та поверхнею тіла, що стикається з потоком, називається **конвективною тепловіддачею** або просто **тепловіддачею**. Процеси тепловіддачі можуть бути стаціонарними та нестаціонарними. **Умова стаціонарності процесу тепловіддачі** –

це незмінність в часі швидкості та температури в будь-якій точці рідини (газу).

В п. 1.6.2 був розглянутий (див. формулу (1.48) закон Ньютона–Ріхмана, який можна подати в інших формах:

$$dQ_{c\tau} = \alpha(t_c - t_p)dA \cdot d\tau; \quad (2.1)$$

$$dQ_c = \alpha(t_c - t_p)dA, \quad (2.2)$$

де $dQ_{c\tau}$ – елементарна кількість теплоти, що передається від елемента поверхні тіла dA (m^2) (або навпаки, коли $t_p > t_c$) до рідини (газу), Джс; t_c , t_p – температури поверхні тіла та рідини (газу), К; $dQ_c = dQ_{c\tau}/d\tau$ – елементарний тепловий потік, Вт; $d\tau$ – елементарний час теплообміну, с. Різницю $\Delta t = t_c - t_p$ називають температурним напором. Коефіцієнт пропорційності α (див. рівняння (2.1) та (2.2) називається коефіцієнтом тепловіддачі, Вт/(m^2K). Як вже раніше відмічалось (див. п. 1.6.2), коефіцієнт тепловіддачі не є фізичним параметром речовини і в загальному випадку залежить від форми та розмірів тіла, режиму руху і швидкості потоку рідини (газу), температури, фізичних параметрів рідини (газу) тощо, а також від конкретних умов тепловіддачі, які впливають на її інтенсивність.

Експериментально коефіцієнт тепловіддачі визначають за залежністю

$$\alpha = \frac{dQ_c}{dA(t_c - t_p)} = \frac{q_c}{t_c - t_p}, \quad (2.3)$$

де q_c – густина теплового потоку на межі рідини (газу) та тіла (поверхні тіла), що стикається з нею, Вт/ m^2 .

Оскільки конвекція завжди супроводжується молекулярним перенесенням теплоти (теплопровідністю), то локальне (місцеве) значення густини теплового потоку q , що проходить за одиницю часу через одиницю поверхні контрольного об'єму рідини нормально до її поверхні, можна описати векторним рівнянням [1]

$$\vec{q} = \vec{q}_{\text{тепл}} + \vec{q}_{\text{конв}} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} h, \quad (2.4)$$

де $\vec{q}_{\text{тепл}} = -\lambda \nabla t$ – густина теплового потоку, що переноситься за рахунок теплопровідності рідини (газу); $\vec{q}_{\text{конв}} = \rho \vec{w} h$ – густина теплового потоку, що переноситься конвекцією; λ – коефіцієнт теплопровідності рідини;

$\nabla t = \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} \right) \vec{n}_0$ – градієнт температури в рідині (\vec{n}_0 – одиничний вектор);

ρ – густина рідини; \vec{W} – швидкість потоку; h – питома ентальпія рідини (див. залежність (1.30)).

Процес теплообміну залежить від властивостей рідин (газів), які суттєво впливають на інтенсивність теплообміну та характер його проходження.

2.2 Фізичні властивості рідин

Властивості рідин (газів) визначаються через такі фізичні характеристики:

ρ – густина, $кг/м^3$;

c_p (c_v) – питома теплоємність за сталого тиску (об'єму), $Дж/(кг \cdot K)$;

$a = \lambda / (c_p \cdot \rho)$ – коефіцієнт температуропровідності, $м^2/с$;

ε – коефіцієнт *стисливості* (compressibility), $м^2/Н (Па^{-1})$;

β – коефіцієнт теплового об'ємного *розширення* (extension), K^{-1} ;

$\mu = \nu \cdot \rho$ – коефіцієнт динамічної в'язкості, $Па \cdot с$ (тут $\nu = \mu / \rho$ – коефіцієнт кінематичної в'язкості, $м^2/с$).

Для кожної речовини наведені величини мають певне значення і є функціями параметрів стану (тиску і температури).

В'язкість, стисливість, теплове об'ємне розширення значною мірою визначають властивості рідин (газів), тому на характеристиці цих параметрів потрібно зупинитись докладніше.

Між окремими частинками або шарами рідини (газу), що рухаються з різними швидкостями, виникає сила внутрішнього тертя, яка протидіє рухові. Це дотична сила, питома величина якої – дотичне *напруження* (intension) визначається за законом Ньютона:

$$\tau_s = \mu dw / dn, \quad (2.5)$$

де τ_s – дотичне напруження в рідині (газі), яке діє в будь-якій точці потоку в площині, орієнтованій за течією, $Па$; dw/dn – градієнт швидкості, направлений вздовж нормалі n ($м$) до площини потоку, $\frac{м/с}{м}$; μ – коефіцієнт динамічної в'язкості, $Па \cdot с$.

Рідини, що підлягають закону Ньютона, називаються «ньютонівськими». Деякі рідини за нормальних умов і звичайні рідини в екстремальних умовах закону Ньютона не підлягають. Такі рідини називаються «неньютонівськими» і для них

$$\tau_s = \mu_{\text{эф}}(p_0, t, dw/dn) \partial w / \partial n, \quad (2.6)$$

де $\mu_{\text{эф}}$ – локальний (ефективний) коефіцієнт динамічної в'язкості, який не є фізичним параметром речовини, а є параметром її стану і залежить від локального тиску, температури, швидкості та їх зміни.

Коефіцієнт динамічної в'язкості рідин і газів залежить від температури та тиску. Наближено зміну коефіцієнта динамічної в'язкості крапельних рідин від температури і тиску можна оцінити за наближеними експериментальними залежностями [8]:

$$\mu_t = \mu_{ot} (t_0/t)^m, \quad (2.7)$$

$$\mu_p = \mu_{op} \cdot e^{k_p \Delta p}, \quad (2.8)$$

де μ_t, μ_p – динамічна в'язкість рідини відповідно при температурі t та тиску p ; μ_{ot}, μ_{op} – динамічна в'язкість рідини при початкових температурі t_0 та тиску p_0 ; $\Delta p = p - p_0$; m – показник температурної залежності, що визначається родом рідини ($m = 2,6 \dots 3$ – для мінеральних масел [8]); k_p – п'єзокоефіцієнт, Па^{-1} . В деяких роботах [4] наводяться іншого характеру експериментальні залежності $\mu(t)$ та $\mu(p)$.

Таким чином, судячи із залежностей (2.7), (2.8), динамічна в'язкість рідини з підвищенням температури зменшується, а зі зростанням тиску – збільшується. В газах динамічна та кінематична в'язкості із підвищенням температури та тиску збільшуються: суттєво – під час зміни температури та мало – внаслідок зміни тиску.

На тепловіддачу суттєво впливає стисливість рідин. Закон Гука для рідин має вигляд [1, 9, 10]:

$$-dV/V = dp/\kappa = dp \cdot \varepsilon, \quad (2.9)$$

де dV – зміна об'єму рідини внаслідок зміни тиску dp ; V – початковий об'єм рідини до зміни тиску або при $p = 0$; $\kappa = 1/\varepsilon$ – ізотермічний модуль пружності рідини, Па ; ε – коефіцієнт стисливості, Па^{-1} . За сталої температури коефіцієнт стисливості можна виразити диференціальною залежністю [1]:

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{t=\text{const}} = - \frac{dV}{V dp} = \kappa^{-1}, \quad (2.10)$$

де ρ – початкова густина рідини; $d\rho$ – зміна густини рідини.

Реальна ізотермічна стисливість крапельних рідин мала (наприклад, для води $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$), а для газів – велика (наприклад, для повітря $\varepsilon \approx 10^{-5} \text{ Па}^{-1}$, що в $2 \cdot 10^4$ більша, ніж у води). Потрібно зауважити, що для газу головним є не здатність стискатись, а те, на скільки він стискається в потоці. Якщо швидкість газу менша чверті швидкості звуку в ньому, то в розрахунках такий потік можна вважати нестисливим. Стисливість газу в потоці оцінюють числом Маха

$$M = w / w_{36}, \quad (2.11)$$

де w – швидкість газу в потоці, м/с ; $w_{36} = \sqrt{dp/d\rho} = \sqrt{\kappa/\rho}$ – швидкість звуку в газі, м/с (ця залежність справедлива для рідини і твердих тіл).

На конвективний теплообмін значний вплив має теплове розширення рідин, яке характеризується коефіцієнтом теплового об'ємного розширення [1]

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{p=\text{const}} = \frac{dV}{Vdt}, \quad (2.12)$$

де dt – зміна температури, K . В міжнародній системі одиниць коефіцієнт теплового об'ємного розширення має розмірність K^{-1} . Знак мінус в формулі (2.9) показує, що під час стискання густина рідини збільшується, а мінус в формулі (2.12) вказує на те, що під час теплового розширення густина рідини зменшується. Для деяких рідин в певному температурному інтервалі коефіцієнт теплового об'ємного розширення має від'ємне значення, тобто їх густина з підвищенням температури зростає, наприклад, для води в діапазоні температур $[0 \text{ }^\circ\text{C} \dots 4 \text{ }^\circ\text{C}]$ [1], оскільки молекули води є диполями еліпсоїдальної форми, які можуть об'єднуватись в асоціативні складні конструкції.

Для ідеальних газів та близьких до них (водень, гелій) коефіцієнт теплового об'ємного розширення є величина, обернена абсолютній температурі газу, $T(K)$:

$$\beta = 1/T. \quad (2.13)$$

Внаслідок теплового розширення в нерівномірно нагрітій рідині виникає неоднорідне поле густини, яке в гравітаційному полі спричиняє вільну конвекцію.

Режим течії рідини (газу) залежно від її швидкості, фізичних параметрів (в'язкості та ін.), геометричних характеристик і стану поверхні каналів, труб тощо, в яких рухається потік, може бути **ламінарним** (laminar), **пере-**

хідним та *турбулентним* (turbulent). Ламінарним називають режим спокійної течії рідини, коли її окремі шари рухаються з різними швидкостями але між собою не перемішуються і в рідині відсутній вихороподібний рух її частинок.

Режим руху рідини, під час якого виникають в потоці вихори, відбувається інтенсивне перемішування шарів рідини внаслідок якого частинки рідини хаотично переміщуються, а напрям і величина швидкостей окремих частинок безперестану змінюються, називається **турбулентним**. **Проміжним** називають режим течії рідини, який одночасно містить ознаки ламінарного та турбулентного режимів. Режим руху рідини визначають через безрозмірний параметр (комплекс), який називають числом (критерієм) Рейнольдса [1, 9,10]

$$Re = wl/\nu, \quad (2.14)$$

де w – швидкість потоку, m/c ; l – характерний розмір каналу (радіус або діаметр труби тощо), в якому рухається потік, чи тіла, який цей потік омиває, m ; ν – кінематична в'язкість рідини.

Сили інерції, що діють в прискореному потоці рідини, визначають швидкість її руху, а в'язкість характеризує режим і величину сил внутрішнього тертя в рідині (див. (2.5)). Тобто, число Рейнольдса є безрозмірним комплексом, який характеризує співвідношення між силами інерції та силами в'язкості, що діють в рухомій рідині.

Вид режиму руху рідини – ламінарний чи турбулентний, визначається числовим значенням числа Рейнольдса, яке суттєво залежить від конфігурації і стану гідроканалів, якими рухається потік. Наприклад, ламінарний режим руху рідини в прямих трубах з малою шорсткістю поверхні залишається, навіть якщо $Re \leq 2000$, а розвинута турбулентна течія виникає за $Re \geq 10000$ (діапазон $2000 < Re < 10000$) характеризує перехідний режим руху рідини). Якісно інший процес має місце під час руху рідини через гідроканали гідроапаратури (гідророзподільники, гідроклапани тощо), в яких турбулентний режим рідини виникає за значень числа Рейнольдса порядку сотень і навіть десятків [9, 10].

Врахування режиму течії рідини вносить суттєві поправки в гідравлічні розрахунки, наприклад, об'єму рідини V , що протікає через поперечний переріз A труби діаметром d і довжиною l за час τ :

а) без врахування режиму [4, 10]

$$V = wA\tau = 0,25\pi wd^2\tau ; \quad (2.15)$$

б) із врахуванням, наприклад, ламінарного режиму (формула Пуазейля [4])

$$V = \pi \Delta p d^4 \tau / (128 \mu l), \quad (2.16)$$

де $A = 0,25\pi d^2$; $\Delta p = p_1 - p_2$ – перепад (overfall) тиску на кінцях труби. Під час гідравлічних розрахунків частіше розраховують не об'єм, а витрату $Q_2 = V / \tau$, m^3/c . Формула (2.15) має узагальнений характер. Порівнюючи (2.15) та (2.16), легко визначити швидкість ламінарного руху рідини

$$w = \Delta p d^2 / (32 \mu l). \quad (2.17)$$

Витрата рідини, що рухається в турбулентному режимі через якийсь переріз, нелінійно залежить від перепаду тиску, оскільки такий режим руху спричиняє **пульсації** швидкості та **температури** потоку рідини (рисунок 2.1, а), б) [1].

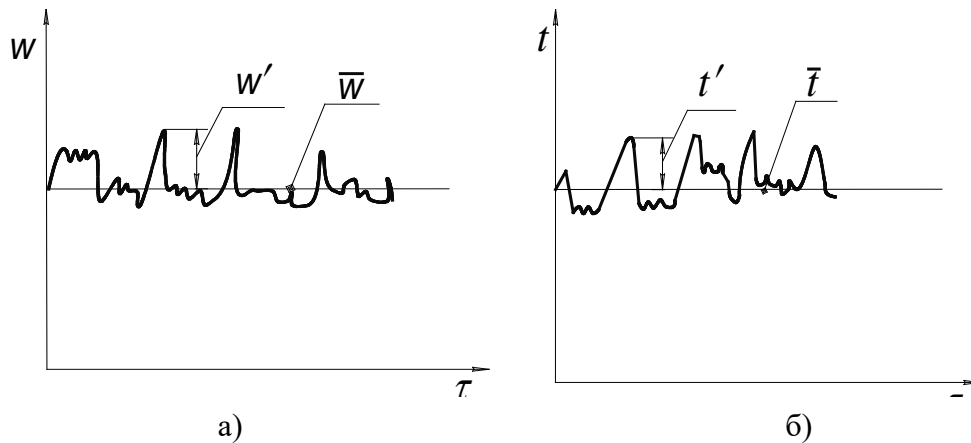


Рисунок 2.1 – Пульсації: а – швидкості; б – температури в нерухомій точці турбулентного потоку рідини

Миттєві значення швидкості та температури потоку рідини можна якісно визначити так [1]:

$$w = \bar{w} + w'; \quad (2.18)$$

$$t = \bar{t} + t', \quad (2.19)$$

де \bar{w} , \bar{t} – середні за часом значення швидкості та температури потоку рідини, w' , t' – пульсаційні швидкість та температура потоку.

В загальному випадку пульсації швидкості та температури в рідині певним чином змінюють її фізичні властивості, що виражається в появі турбулентного перенесення кількості руху та теплоти. Наприклад, для потоку, що рухається в напрямку осі Ox , виникає турбулентне перенесення теплоти і кількості руху в напрямку осі Oy [1]:

$$q_T = -\lambda_T \bar{\partial t} / \partial y; \quad (2.20)$$

$$\tau_{ST} = \mu_T \bar{\partial w} / \partial y, \quad (2.21)$$

де q_T – пульсаційна (турбулентна) густина теплового потоку, Bm/m^2 ; τ_{ST} – пульсаційне (турбулентне) напруження зсуву в рідині, яке визначає кількість турбулентного перенесення руху в напрямку осі Oy ; λ_T , μ_T – відповідно коефіцієнти турбулентного перенесення теплоти та кількості руху. Окрім величин λ_T й μ_T можна також визначити кінематичні коефіцієнти турбулентного перенесення теплоти і кількості руху:

$$a_T = \lambda_T / (c_p \rho); \quad (2.22)$$

$$\nu_T = \mu_T / \rho. \quad (2.23)$$

λ_T , μ_T , a_T , ν_T – не є фізичними параметрами рідини (газу). Ці величини залежать від параметрів гідродинамічних й теплових процесів в рідині (газі) та можуть суттєво змінюватися як в часі, так і в розглядуваному просторі. Розмірності цих коефіцієнтів відповідають розмірностям аналогічних коефіцієнтів, що характеризують молекулярне перенесення теплоти і кількості руху в рідині.

Турбулентний режим течії рідини іноді також характеризують кінетичною енергією турбулентного потоку E_k та ступенем турбулентності T_u [1], віднесеними до одиниці маси потоку:

$$E_k = 0,5 \left[(w'_x)^2 + (w'_y)^2 + (w'_z)^2 \right]; \quad (2.24)$$

$$T_u = \frac{1}{w_o} \sqrt{2E_k / 3} = \frac{1}{w_o} \sqrt{\frac{1}{3} \left[(w'_x)^2 + (w'_y)^2 + (w'_z)^2 \right]}, \quad (2.25)$$

де w'_x, w'_y, w'_z – пульсаційні складові швидкості в якій-небудь точці максимально малої області турбулентного потоку рідини, w_o – характерна швидкість потоку, наприклад, далеко від поверхні тіла, що омивається рідиною.

Для поглибленого вивчення теорії турбулентного перенесення енергії та речовини можна звернутись до робіт [1, 11, 12, 13].

2.3 Диференціальні рівняння конвективного теплообміну

Для однозначного визначення локальної густини теплового потоку в будь-якій точці об'єму рідини та кожного моменту часу, як це впливає із рівняння (2.4), необхідно мати поля температур, ентальпії та швидкості. Для знаходження цих полів необхідні відповідні диференціальні рівняння: енергії, руху та *суцільності* (integrity) (*нерозривності* (continuity) потоку, а також відповідні умови однозначності.

2.3.1 Рівняння енергії

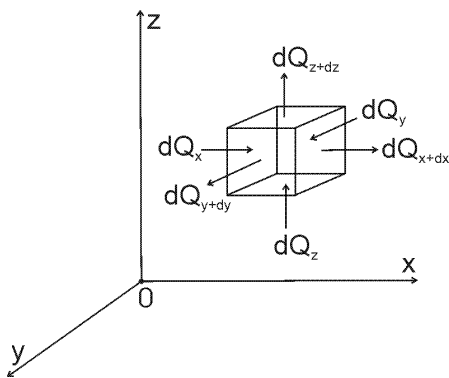


Рисунок 2.2 – До виведення диференціального рівняння енергії конвективного теплообміну

Під час виведення рівняння енергії, яке описує температурне поле в рухомій рідині, зробимо такі припущення: рідина однорідна та ізотропна; порівняно зі зміною внутрішньої енергії енергія деформації рідини мала; інтенсивність внутрішніх джерел теплоти, що діють у виділеному в потоці рідини нерухомому елементарному паралелепіпеді об'ємом $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, задана функцією $q_v = f(x, y, z, \tau)$; фізичні параметри рідини сталі ($\rho = const$; $\lambda = const$; $\varepsilon = const$; $\beta = const$; $\mu = const$).

Теплота через грані елементарного паралелепіпеда (рис. 2.2) переноситься теплопровідністю та конвекцією.

Під час виведення рівняння теплопровідності (див. підрозділ 1.6), розглядаючи ізобарний процес перенесення теплоти, було отримано залежність (1.31):

$$\rho \frac{\partial p}{\partial \tau} = -\nabla q + q_v.$$

Враховуючи рівняння (2.4) та те, що $\nabla q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$, знайдемо проєкції густини теплового потоку на координатні осі Ox , Oy і Oz :

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} + \rho w_x h; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} + \rho w_y h; \quad q_z = -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} + \rho w_z h. \quad (2.26)$$

Підставляючи (2.26) в рівняння (1.31), отримаємо після нескладних пе-

ретворень:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial h}{\partial \tau} &= \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \rho \left(w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \\ &- \rho h \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + q_v = \lambda \nabla^2 t - \\ &\rho \left(w_x \frac{\partial h}{\partial x} + w_y \frac{\partial h}{\partial y} + w_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \rho h \nabla \vec{w} + q_v. \end{aligned} \quad (2.27)$$

В подальшому під час виведення рівняння суцільності потоку буде показано, що для $\rho = const$ $\nabla w = 0$, тоді, враховуючи, що $dh = c_p dt$ (див. підрозділ 1.6), матимемо для $c_p = const$:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda \nabla^2 t - \rho c_p \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v, \quad (2.28)$$

Розділимо праву та ліву частини рівняння (2.28) на ρc_p та перенесемо середній член правої частини рівняння в його ліву частину:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = \nabla^2 t + \frac{q_v}{(c_p \rho)} \quad (2.29)$$

або

$$\frac{dt}{d\tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{(c_p \rho)}, \quad (2.30)$$

де $\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{dy}{d\tau} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{\partial t}{\partial z}$ – повна похідна температури за часом, якщо $t = f(x, y, z, \tau)$; $a = \lambda / (c_p \rho)$ – коефіцієнт температуропровідності рідини; $w_x = dx/d\tau$, $w_y = dy/d\tau$, $w_z = dz/d\tau$ – проекції на координатні осі швидкості потоку рідини w .

Рівняння (2.30) називається рівнянням енергії конвективного теплообміну. Похідна $\partial t / \partial \tau$ характеризує локальну зміну температури в часі (локальну швидкість зміни температури) у якій-небудь точці потоку рідини. Член рівняння $w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z}$ визначає зміну температури рідини під час переходу від точки до точки, тобто характеризує конвекційну зміну температури.

При швидкості $w_x = w_y = w_z = 0$, рівняння (2.30) переходить в рівняння теплопровідності. Для стаціонарного режиму конвективного теплообміну, коли $w = const$ ($\partial w / \partial \tau = 0$) та $\partial t / \partial \tau = 0$, рівняння (2.30) набуде вигляду:

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \nabla^2 t + q_v / (c_p \rho). \quad (2.31)$$

З рівнянь (2.30) та (2.31) випливає, що температурне поле в рухомій рідині залежить від складових швидкості w_x , w_y та w_z , тому для визначення цього поля необхідно мати диференціальні рівняння руху рідини, які описують зміну швидкості потоку в часі і просторі.

2.3.2 Рівняння руху

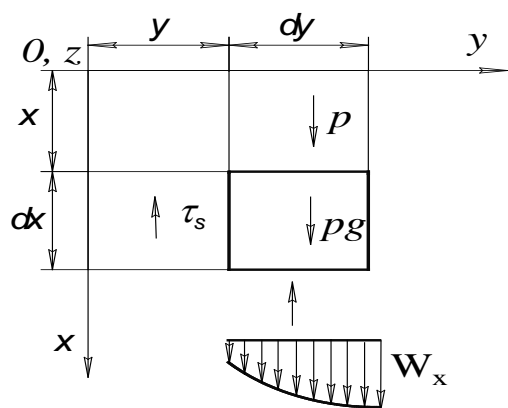


Рисунок 2.3 – До виведення рівняння руху рідини під час конвективного теплообміну

З метою спрощення математичних викладок наведемо виведення рівняння руху для одновимірної течії рідини, а для тривимірного руху рідини запишемо рівняння без виведення.

Виділимо в потоці в'язкої рідини нерухомий елементарний об'єм $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Нехай потік рухається в напрямку осі Ox , а швидкість потоку змінюється в напрямку осі Oy за довільним законом. Зорієнтуємо елементарний паралелепіпед відносно координа-

тих осей так, як показано на рисунку 2.3, де вісь Oz перпендикулярна до площини аркуша. На елементарний об'єм dV діють масові (сила інерції і сила тяжіння) та поверхневі (сили тиску і в'язкого тертя) сили. Рівняння рівноваги елемента рідини під дією цих сил має вигляд:

$$dF = dF_1 + dF_2 + dF_3, \quad (2.32)$$

де dF – елементарна сила інерції; dF_1 – елементарна сила тяжіння, прикладена в центрі ваги об'єму dV ; dF_2 – елементарна сила тиску; dF_3 – елементарна сила в'язкого тертя.

Силу інерції знайдемо за другим законом Ньютона:

$$dF = dm_v \cdot \frac{dw_x}{d\tau} = \rho dV \frac{dw_x}{d\tau}, \quad (2.33)$$

де $dm_v = \rho dV$ – маса елементарного паралелепіпеда; $dw_x / d\tau$ – прискорення елементарного об'єму.

Сила тяжіння:

$$dF_1 = dm_v g_x = \rho dV g_x, \quad (2.34)$$

де g_x – проекція на вісь Ox прискорення вільного падіння.

Силу тиску рідини на об'єм dV знайдемо за такими міркуваннями. На верхню грань елементарного паралелепіпеда діє тиск p і відповідно сила $dF_2' = p dydz$, а на нижню – $p + \frac{dp}{dx} dx$ і $dF_2'' = -\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dydz$ (тиск на нижню грань знайдено внаслідок розкладення функції $p(x)$ в ряд Тейлора з точністю до другого члена розкладення). Рівнодійна сил тиску

$$dF_2 = dF_2' + dF_2'' = \left(p - p - \frac{dp}{dx} dx\right) dydz = -\frac{dp}{dx} dx dydz = -\frac{dp}{dx} dV, \quad (2.35)$$

де $dydz$ – площа грані паралелепіпеда.

Рівнодійну сил в'язкого тертя dF_3 знаходимо таким чином. Оскільки швидкість потоку змінюється тільки в напрямку осі Oy , то сила тертя виникає на бокових гранях об'єму dV . Біля лівої грані (див. рисунок 2.3) швидкість руху частинок рідини менша, ніж в самому об'ємі, тому в перерізі з координатою y сила направлена проти потоку і дорівнює $\tau_s dx dz$ (τ_s – напруга зсуву в рідині). Біля правої грані швидкість руху частинок більша, ніж в самому елементі рідини, тому в перерізі $y+dy$ сила тертя буде направлена в сторону руху рідини (об'єм dV ніби рухається проти потоку) і, з точністю розкладення $\tau_s(y)$ в ряд Тейлора до двох членів, буде дорівнювати $\left(\tau_s + \frac{d\tau_s}{dy} dy\right) dx dz$. Рівнодійну dF_3 цих сил знаходимо як алгебраїчну суму:

$$dF_3 = \left(\tau_s + \frac{d\tau_s}{dy} dy - \tau_s\right) dx dz = \frac{d\tau_s}{dy} dy dx dz = \frac{d\tau_s}{dy} dy, \quad (2.36)$$

де $dx dz$ – площа грані паралелепіпеда.

Для крапельних рідин, згідно з законом Ньютона $\tau_s = \mu \frac{dw_x}{dy}$ (μ – динамічна в'язкість рідини), вираз (2.36) набуде вигляду

$$dF_3 = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dV, \quad (2.37)$$

Підставляючи (2.33), (2.34), (2.35) та (2.37) в (2.32) та скорочуючи праву і ліву частини отриманого виразу на dV , знайдемо рівняння руху одновимірного потоку:

$$\rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2}. \quad (2.38)$$

У випадку тривимірного руху рідини із постійними фізичними параметрами поле швидкості описується системою диференціальних рівнянь руху, які називають рівняннями Нав'є – Стокса [1]:

$$\begin{cases} \rho \frac{dw_x}{d\tau} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 w_x; \\ \rho \frac{dw_y}{d\tau} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 w_y; \\ \rho \frac{dw_z}{d\tau} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w_z, \end{cases} \quad (2.39)$$

де

$$\nabla^2 w_x = \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2}; \quad \nabla^2 w_y = \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2};$$

$$\nabla^2 w_z = \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}.$$

Використовуючи векторну форму запису, систему рівнянь (2.39) можна подати рівнянням

$$\rho \frac{d\vec{w}}{d\tau} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w}, \quad (2.40)$$

$$\text{де } \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}.$$

На основі поняття повної похідної прискорення

$$\frac{dw_x}{d\tau} = \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}. \quad (2.41)$$

Аналогічні вирази можна записати і для прискорень $\frac{dw_y}{d\tau}$ та $\frac{dw_z}{d\tau}$. Похідні $\frac{\partial w_x}{\partial \tau}$, $\frac{\partial w_y}{\partial \tau}$ та $\frac{\partial w_z}{\partial \tau}$, характеризують локальні прискорення.

корення в якій-небудь точці об'єму рідини, а градієнти $\frac{\partial w_x}{\partial x}, \frac{\partial w_x}{\partial y}, \frac{\partial w_x}{\partial z}$ та

для проєкцій w_y, w_z , характеризують зміну швидкості потоку під час переходу від точки до точки в об'ємі рідини.

Рівняння (2.40) отримано для сталих фізичних характеристик рідини. Припустимо, що за $\beta = const$ змінюється тільки густина $\rho = \rho_0 [1 - \beta(t - t_0)]$, де t_0 – початкова фіксована температура рідини (точка відліку). Підставляючи значення густини в рівняння руху (2.40), що враховує масові сили, отримаємо:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\vec{w}}{d\tau} &= \rho_0 [1 - \beta(t - t_0)] \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} = \rho_0 \vec{g} - \rho_0 \vec{g} \beta(t - t_0) - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{w} = \\ &= -\rho_0 \vec{g} \beta(t - t_0) - \nabla p_1 + \mu \nabla^2 \vec{w}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

де $\rho_0 \vec{g}$ – градієнт гідростатичного тиску p_0 в нерухомій рідині з густиною ρ_0 [1]; $\rho_0 \vec{g} \beta(t - t_0)$ – питома підймальна (архімедова) сила в рідині; $\nabla p_1 = \nabla p - \rho_0 \vec{g}$; $p_1 = p - p_0$ – перепад тиску в рідині.

Опускаючи біля ρ індекс 0 та 1 біля p , після ділення правої та лівої частин рівняння (2.42) на ρ , матимемо рівняння руху тривимірного потоку в формі:

$$\frac{d\vec{w}}{d\tau} = -\vec{g} \beta(t - t_0) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{w}, \quad (2.43)$$

де $\nu = \mu / \rho$ – кінематична в'язкість рідини. Щоб замкнути систему рівнянь руху до цих рівнянь потрібно додати рівняння суцільності (нерозривності) потоку.

2.3.3 Рівняння суцільності

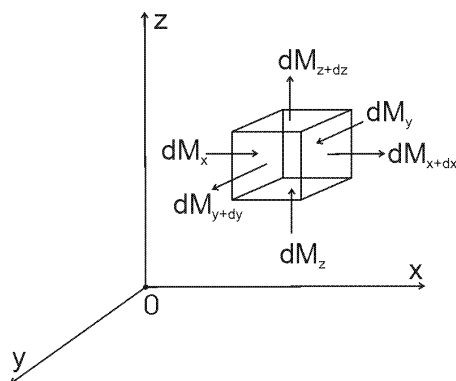


Рисунок 2.4 – До виведення рівняння суцільності

Виділимо (рисунок 2.4) в потоці рідини нерухомий елементарний об'єм $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ та розрахуємо масу рідини, що протікає через нього в напрямку осей Ox, Oy та Oz за час $d\tau$. В напрямку осі Ox в елементарний паралелепіпед входить маса рідини

$$dM_x = \rho w_x dy dz d\tau, \quad (2.44)$$

де ρw_x – кількість маси рідини, яка пе-

ретікає за одиницю часу через одиницю поперечного перерізу.

З протилежної грані витікає маса

$$dM_{x+dx} = \rho w_{x+dx} \cdot dydzd\tau = \left[\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx \right] dydx d\tau, \quad (2.45)$$

де функція ρw_{x+dx} розкладена в ряд Тейлора з точністю до двох членів розкладення.

Надлишок dM_{x1} рідини, що витікає з об'єму dV в напрямку осі Ox , знайдемо за залежністю

$$dM_{x_1} = dM_{x+dx} - dM_x = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dV \cdot d\tau. \quad (2.46)$$

Аналогічно розраховуються:

$$dM_{y_1} = dM_{y+dy} - dM_y = \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial x} dV \cdot d\tau; \quad (2.47)$$

$$dM_{z_1} = dM_{z+dz} - dM_z = \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial x} dV \cdot d\tau. \quad (2.48)$$

Підсумовуючи (2.46), (2.47) та (2.48), отримаємо надлишок dM маси рідини, що витікає з елементарного паралелепіпеда в напрямку всіх трьох осей координат. Цей надлишок обумовлюється зміною густини рідини в об'ємі dV і дорівнює зміні маси цього об'єму в часі, тобто $dM = -\frac{\partial\rho}{\partial\tau} dVd\tau$

та

$$dM = dM_{x_1} + dM_{y_1} + dM_{z_1} \quad (2.49)$$

або після перетворень (скорочено на добуток $dVd\tau$)

$$-dM + dM_{x_1} + dM_{y_1} + dM_{z_1} = \frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.50)$$

Рівняння (2.50) є рівнянням суцільності (збереження маси) потоку стисливої рідини. Для нестисливої рідини ($\rho = const$), отримаємо:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \text{div} \vec{w} = \nabla \vec{w} = 0. \quad (2.51)$$

Таким чином процес конвективного теплообміну в нестисливій однорідній рідині із сталими фізичними параметрами описується системою дифе-

ренціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} h; \\ \frac{dt}{d\tau} = a \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \rho}; \\ \frac{d\vec{w}}{d\tau} = -\vec{g} \beta (t - t_0) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{w}; \\ \nabla \vec{w} = 0. \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Система рівнянь (2.52) має нескінченну кількість розв'язків. Для виділення конкретного процесу і однозначного його визначення до системи диференціальних рівнянь (2.52) потрібно додати умови однозначності, які дають математичний опис конкретних особливостей розглядуваного явища. Умови однозначності складаються з тих пунктів, що й для процесу теплообміну теплопровідністю (див. п.1.6.2) і мають такий самий зміст. Разом із умовами однозначності система диференціальних рівнянь конвективного теплообміну є **математичним формулюванням красної задачі** для цього виду теплообміну.

Аналітичне розв'язання системи рівнянь (2.52) пов'язано з дуже великими математичними труднощами. Спрощення математичного формулювання задачі конвективного теплообміну без суттєвих похибок може бути досягнуто шляхом введення понять гідродинамічного та теплового примежових шарів. Внаслідок складності процесів конвективної теплопередачі під час її вивчення широко використовуються числові методи розрахунку та експериментальні дослідження. В результаті експериментів отримують синтезовані відомості про процес, в яких вплив окремих факторів не завжди можна виділити. Ці труднощі допомагає переборювати теорія подібності, яка є теоретичною базою експериментальних досліджень.

2.4 Гідродинамічний та тепловий примежові шари

Під час теплових розрахунків механізмів та машин, теплообмінних апаратів тощо особливо важливим є теплообмін між рідиною та твердим тілом (стілки корпусних деталей механізмів). Течія рідини та перенесення теплоти в пристінному шарі має певні особливості. Частинки рідини, що безпосередньо прилягають до твердого тіла, адсорбуються ним (прилипають до поверхні тіла) і їх швидкість починає дорівнювати швидкості тіла, а якщо тіло нерухоме, то нулю. Шар рідини, що «прилипла» до поверхні тіла можна вважати нескінченно тонким, тому теплопередача через цей шар

проходить за законом Фур'є $q_c = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}$, де q_c – густина теплового по-

току на поверхні тіла; λ – коефіцієнт теплопровідності рідини; n – нормаль до поверхні тіла. Знаючи q_c та градієнт температури в примежовому шарі, легко розрахувати коефіцієнт тепловіддачі α , скориставшись законом Ньютона – Ріхмана:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_c - t_p} \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (2.53)$$

де t_c і t_p – відповідно температури поверхня тіла та рідини в *примежовому* (frontier) шарі.

Розглянемо поняття гідродинамічного та теплового примежових шарів.

2.4.1 Гідродинамічний примежовий шар

Нехай безмежний потік рідини (рисунок 2.5) обтікає плоску поверхню тіла. Швидкість w_0 та температура t_0 набігаючого потоку постійні ($w = const$; $t_0 = const$). Під час стикання частинок рідини з поверхнею тіла вони «прилипають» до неї. Внаслідок дії сил в'язкості поблизу поверхні тіла утворюється шар загальмованої рідини, в межах якого швидкість змінюється від нуля на поверхні тіла до швидкості незбудженого потоку (далеко від тіла). Цей шар загальмованої рідини отримав назву гідродинамічного примежового шару, а його теорія була запропонована в 1904р. Л. Прандтлем [1].

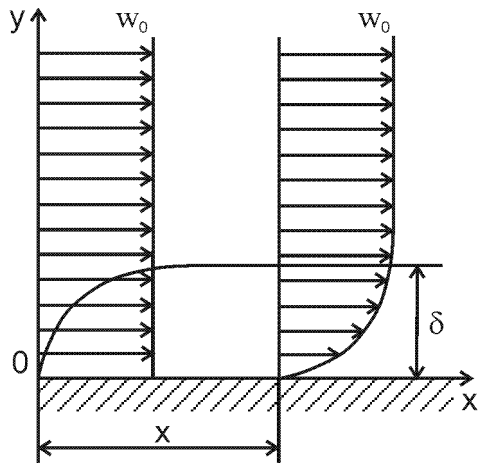


Рисунок 2.5 – Змінення швидкості руху рідини в гідродинамічному примежовому шарі

Чим більша відстань x (див. рисунок 2.5) від переднього краю тіла (пластинки, наприклад), тим більшу товщину має примежовий шар, оскільки вплив в'язкості з рухом рідини вздовж тіла все більше проникає в незбуджений потік. Для течії рідини всередині примежового шару справедлива умова $\partial w_x / \partial y \neq 0$, а зовні цього шару та його зовнішній межі $\partial w_x / \partial y = 0$ і $w_x = w_0$. Різкої межі між примежовим шаром і потоком зовні шару немає, тому поняття «товщина примежового шару» та «зовнішня межа примежового шару» умовні. Під товщиною примежового шару δ розуміють таку відстань від тіла, на якій швидкість буде відрізнитися від швидкості потоку

умова $\partial w_x / \partial y \neq 0$, а зовні цього шару та його зовнішній межі $\partial w_x / \partial y = 0$ і $w_x = w_0$. Різкої межі між примежовим шаром і потоком зовні шару немає, тому поняття «товщина примежового шару» та «зовнішня межа примежового шару» умовні. Під товщиною примежового шару δ розуміють таку відстань від тіла, на якій швидкість буде відрізнитися від швидкості потоку

далеко від тіла на малу, наперед задану, величину $\varepsilon \ll 1$ (наприклад, на 1%), тобто для $y = \delta w_x = (1 - \varepsilon)w_0$ [1]. Таким чином під час обтікання тіла потік рідини умовно поділяється на примежовий шар та зовнішній потік. Вважається, що в зовнішньому потоці переважно діють сили інерції, а в'язкісні сили (сили тертя) не проявляються, і навпаки, в примежовому шарі сили в'язкості та інерції співмірні. Розділення потоку рідини поблизу тіла сильно залежить від критерія (числа) Рейнольдса $Re = w_0 l / \nu$, де за характерний розмір тіла l для розглядуваного випадку вибрано масштаб поздовжньої координати x . Якщо $Re \ll 1$, то $\delta L \gg 1$ ($\delta \gg L$) [1]. В цьому випадку практично немає поділу потоку на дві області і сили в'язкості діють в усьому просторі біля тіла. У випадку $Re \gg 1$ ($\delta \ll L$) [1] біля поверхні тіла утворюється тонкий шар загальмованої рідини. Поняття примежового гідродинамічного шару значно спрощує математичне формулювання крайової задачі конвективного теплообміну та пов'язані з цим можливості її розв'язання.

2.4.2 Тепловий примежовий шар

Тепловий примежовий шар – шар рідини біля поверхні (стінки), в межах якої температура змінюється від температури t_c поверхні тіла до температури t_0 рідини далеко від тіла (рисунок 2.6). Поняття теплового примежового шару за аналогією з гідродинамічним примежовим шаром було

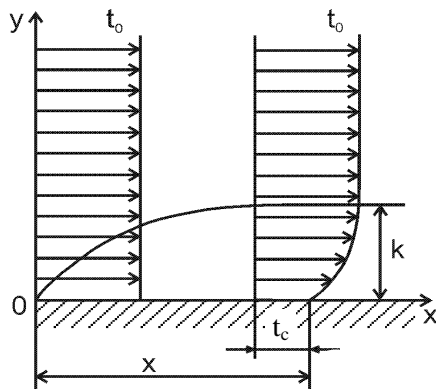


Рисунок 2.6 – Зміна температури рідини в тепловому примежовому шарі

введено Г. М. Кружиліним [1]. Для області всередині теплового примежового шару справедлива умова $\partial t / \partial y \neq 0$, а на його зовнішній межі та далеко від тіла $\partial t / \partial y = 0$ і $t = (1 - \varepsilon)t_0$, де $\varepsilon \ll 1$, оскільки температура t має асимптотично прямувати до значення t_0 [1]. Наближено можна вважати, що $t = t_0$. Таким чином, всі зміни температури зосереджуються у відносно тонкому шарі рідини, що безпосередньо прилягає до поверхні тіла. Товщини гідродинамічного δ та теплового k примежових шарів в загальному випадку **не збігаються**, оскільки ці величини залежать від роду рідини та деяких параметрів процесів руху рідини та теплообміну.

Поняття теплового примежового шару (як і гідродинамічного) значно спрощує постановку задачі конвективного теплообміну, наприклад, враховуючи товщину шару k , можна знехтувати теплопровідністю рідини вздовж примежового шару порівняно з поперечним перенесенням теплоти,

тобто $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0$ (оскільки $k^2 \ll L^2$, то $\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}$). В цьому випадку рівняння енергії набуде вигляду

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \quad (2.54)$$

Аналогічно для $\delta \ll L$ $\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}$ можна вважати, що $\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \approx 0$, а також через малу товщину примежового шару зміною тиску поперек цього шару можна знехтувати $\left(\frac{\partial p}{\partial y} = 0\right)$. Відповідно до цих зауважень рівняння руху рідини в примежовому гідродинамічному шарі матиме вигляд

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}. \quad (2.55)$$

В залежностях (2.54) та (2.55) взято, що плоске тіло (пластина) безкінечне в напрямку осі Oz .

Зв'язок між величинами δ та k для тепловіддачі під час ламінарного руху рідини в примежовому шарі буде наведено після розгляду елементів теорії подібності.

2.5 Елементи теорії подібності та моделювання процесів конвективного теплообміну

Як вже відмічалось в підрозділі 2.3, спроби розв'язання повної системи диференціальних рівнянь, що описують конвективний теплообмін, з відомими умовами однозначності через велику кількість змінних величин намагаються на практично непереборні математичні труднощі. В цьому випадку великого значення набуває експериментальний шлях досліджень, який дозволяє знайти числові значення змінних, а потім підібрати рівняння, що описують результати дослідів. Однак під час вивчення такого складного явища як конвективний теплообмін важко проводити й експериментальні дослідження, оскільки під час визначення впливу на процес теплообміну якогось одного параметра інші необхідно зберігати незмінними, що утруднено, а то і неможливо через велику кількість змінних. Ці труднощі якоюсь мірою допомагає розв'язати теорія подібності, за допомогою якої розмірні фізичні величини об'єднуються в нові змінні – безрозмірні ком-

плекси, які в теорії подібності названі числами (критеріями) подібності. Кількість цих критеріїв менша, ніж кількість величин, з яких вони складені. Ці комплекси відображають вплив на процес не окремих величин, а їх сукупності, що дозволяє легше визначити фізичні зв'язки в досліджуваному процесі. Теорія подібності установлює такі умови, за яких результати експериментальних досліджень на моделі можна поширити на інші процеси, подібні розглядуваному. Таким чином теорія подібності є теоретичною базою експериментальних та допоміжним засобом теоретичних досліджень.

Розвивалась теорія подібності переважно вітчизняними ученими А. А. Гухманом, Н. В. Кірпічовим, М. А. Міхаєвим, Л. С. Ейгенсоном, П. К. Копаковим, Б. С. Петуховим та ін. [1, 2, 14].

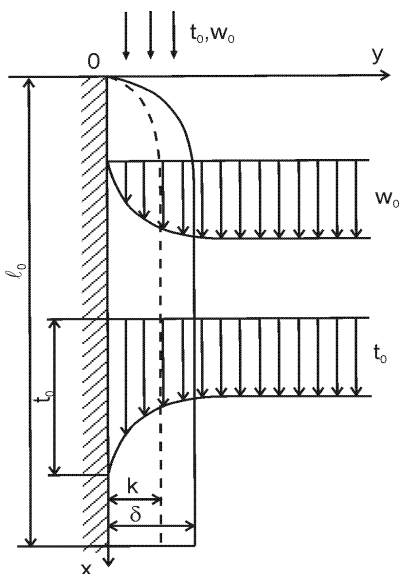


Рисунок 2.7 – До постановки крайової задачі конвективного теплообміну

Під час практичного використання висновків з теорії подібності математичний в розмірних фізичних величинах опис досліджуваних процесів зводять до безрозмірного вигляду. Є декілька методів такого зведення, наприклад, метод масштабних перетворень. За масштаби перетворень, як правило, вибирають постійні величини, що входять до умов однозначності. Наприклад, під час опису стаціонарного конвективного теплообміну в прилеглому шарі плоского тіла, необмеженого в напрямку осі Oz (рисунок 2.7), математична модель теплового процесу виражається системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} - \text{рівняння енергії}; \\ w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + g\beta(t - t_0) - \text{рівняння руху}; \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 - \text{рівняння суцільності}, \end{cases} \quad (2.56)$$

де $g\beta(t-t_0)$ – член, що враховує підймальну силу в рідині через зміну густини.

Умови однозначності для цієї системи потрібно подати так:

а) далеко від тіла ($y = \infty$) $\Delta t = t - t_0 = \Delta t_0 = 0$; $w_x = w_0$; $w_y = 0$;

б) на поверхні тіла ($y = 0$, $0 \leq x \leq l_0$, $-\infty \leq z \leq +\infty$);

$\Delta t = \Delta t_c = t_c - t_0 = \text{const}$ (оскільки $t_0 = \text{const}$ та $t_c = \text{const}$); $w_x = w_y = w_z = 0$.

Введемо безрозмірні величини:

– температуру – $\theta = \Delta t / \Delta t_c = (t - t_0) / (t_c - t_0)$ (t_0 – температура далеко від тіла, t_c – температура на поверхні тіла);

– координати – $X = x / l_0$; $Y = y / l_0$ (l_0 – характерний розмір тіла, наприклад довжина поверхні теплообміну (див. рисунок 2.7);

– швидкість – $W_x = w_x / w_0$; $W_y = w_y / w_0$ ($w_0 = const$ – швидкість потоку далеко від тіла).

Підставивши в систему (2.56) безрозмірні змінні, після нескладних перетворень отримаємо в безрозмірних змінних систему рівнянь, що описує стаціонарний процес конвективного теплообміну в плоскому прилежовому шарі:

$$\begin{cases} \frac{w_0 l_0}{a} \left(W_x \frac{\partial \theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}; \\ \frac{w_0 l_0}{\nu} \left(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 W_x}{\partial Y^2} + \frac{g \beta \Delta t_c l_0^2}{\nu w_0} \cdot \theta; \\ \frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} = 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

Умови однозначності для цієї системи: для $Y = \infty$ – $\theta = \theta_0 = 0$, $W_x = 1$ і $W_y = 0$; на поверхні тіла ($Y = 0$, $0 \leq X \leq 1$) $\theta = \theta_c = 1$, а $W_x = W_y = 0$.

Аналізуючи систему (2.57), зазначимо, що до неї окрім безрозмірних величин θ , X , Y , W_x , W_y , які складені із однорідних параметричних геометричних і кінематичних характеристик теплового процесу, входять безрозмірні комплекси, які містять коефіцієнти, що є фізичними параметрами речовини, та кінематичні чи геометричні або параметричні характеристики процесу, що входять до умов однозначності (крайові умови).

Ці комплекси, а також і ті, що розглянуті нами раніше (Fo , Pe , Bi , Re), як вже відмічалось, названі числами (критеріями) подібності. Їм присвоєні імена видатних вчених, що зробили значний внесок в розвиток гідродинаміки та теплопередачі.

В рівнянні енергії системи (2.57) входить комплекс Пекле, $Pe = w_0 l_0 / a$. Під час вивчення явища теплопровідності в твердих тілах було встановлено, що число Пекле (див. (1.54)) характеризує швидкість руху джерела (стоку) теплоти. З метою визначення фізичного змісту цього числа у конвективному процесі теплообміну, перетворимо критерій Пекле таким чином:

$$Pe = w_0 l_0 / a = \rho c_p w_0 \Delta t / (\lambda \Delta t / l_0) = q_{конв} / q_{тепл}, \quad (2.58)$$

де $q_{конв} = \rho c_p w_0 \Delta t$ – густина частини теплового потоку, що переноситься

конвекцією (рухом рідини або газу); $q_{менн} = \lambda \Delta t / l_0$ – густина частини теплового потоку, який переноситься теплопровідністю рідини.

Критерії Рейнольдса $Re = w_0 l_0 / \nu$, який є множником лівої частини рівняння руху системи (2.57), детально розглянуто в підрозділі 2.2 (див. (2.14)).

Перетворимо безрозмірний комплекс, що входить в праву частину рівняння руху системи (2.57) до вигляду

$$\frac{g \beta \Delta t_c l_0^2}{\nu w_0} \theta = \frac{g \beta \Delta t_c l_0^3}{\nu^2} \frac{\nu}{w_0 l_0} \theta = (Gr / Re) \theta; \quad (2.59)$$

де
$$Gr = \frac{g \beta \Delta t_0 l_0^3}{\nu^2} - \text{критерій Грасгофа}, \quad (2.60)$$

який характеризує підймальну силу, що виникає в рідині внаслідок різниці густини. Якщо для $\beta = const$ взяти до уваги, що $\beta \Delta t_0 = (\rho_0 - \rho) / \rho_0$, то можна написати більш загальну модифікацію критерія Грасгофа, яка називається числом Архімеда:

$$Ar = \frac{g l_0^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \frac{g l_0^3}{\nu^2} \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho_0}. \quad (2.61)$$

де $\Delta \rho / \rho_0$ – параметричний критерій, що характеризує неоднорідне поле густини в рідині.

У випадку врахування в рівнянні руху системи (2.57) зміни тиску в рідині $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$, в безрозмірній формі цього рівняння з'явиться критерій Ейлера

$$Eu = \frac{P}{\rho w_0^2}. \quad (2.62)$$

Це число характеризує співвідношення сил тиску та сил інерції. В рівняння конвективного теплообміну змінна Eu входить під знаком похідної, тому для нестисливої рідини з постійними фізичними параметрами важливо не абсолютне значення тиску, а його зміна. В цьому випадку число Ейлера подають у вигляді

$$Eu = (p - p_0) / (\rho w_0^2), \quad (2.63)$$

де p_0 – яке-небудь фіксоване значення тиску, наприклад, тиску на вході в трубу тощо.

Якщо температурне поле на поверхні тіла визначено, то коефіцієнт те-

пловіддачі цього тіла знаходиться за залежністю (2.53), тоді для нашого випадку, виражаючи із (2.53) градієнт температури для поверхні тіла $(\partial t / \partial y)_{y=0} \equiv [\partial(\Delta t) / \partial y]_{y=0} = -\frac{\alpha \Delta t_c}{\lambda}$ та звівши його до безрозмірного вигляду, отримаємо

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial Y}\right)_{Y=0} = \frac{\alpha l_o}{\lambda} = N_u, \quad (2.64)$$

де $N_u = \alpha l_o / \lambda$ – число Нуссельта, яке є безрозмірним градієнтом температури на поверхні тіла, що визначає теплообмін на межі стінка – рідина. Число Нуссельта має зовнішню схожість із числом Біо (див. (1.128)), фізичний зміст якого розкрито в підрозділі 1.7.

Отримані внаслідок зведення рівнянь енергії та руху до безрозмірного вигляду числа подібності можна подати як співвідношення між двома або декількома безрозмірними змінними, які є новими комплексами (за іншою назвою – критеріями чи числами), що враховують взаємозв'язок між силовими та енергетичними параметрами конвективного теплообміну. Розглянемо деякі з цих комплексів.

Число Пекле можна записати як добуток двох безрозмірних комплексів:

$$Pe = Re \cdot Pr, \quad (2.65)$$

де

$$Pr = \nu / a = \mu c_p / \lambda. \quad (2.66)$$

Pr – число Прандтля складено з фізичних параметрів речовини, тому само є фізичним параметром. Ця безрозмірна фізична характеристика речовини є мірою подібності полів температур та швидкостей, наприклад, для $a = \nu$ ($Pr = 1$) поля температур (див. (2.42)) та швидкостей (див. (2.43)) будуть подібні, якщо для них встановлено аналогічні умови однозначності.

Для крапельних рідин числа Pr сильно залежать від температури [1]. Переважно ця залежність від температури ідентична залежності від температури динамічної в'язкості, оскільки коефіцієнти теплопровідності та питомої теплоємності від температури залежать менше. Залежно від значення числа Прандтля рідини поділяють на три групи: рідкі метали – $Pr \ll 1$; теплоносії – $Pr \approx 1$ (неметалеві крапельні рідини за великих температур та тисків); неметалеві крапельні рідини у випадку помірних температур – $Pr > 1$.

Для газів число Pr від температури і тиску практично не залежить, а визначається атомністю газу [1]: одноатомні – $Pr = 0,17$; двоатомні – $Pr = 0,72$; триатомні – $Pr = 0,8$; чотириатомні і більше – $Pr = 1$.

Критерій Нуссельта можна подати як добуток трьох чисел подібності:

$$Nu = Re \cdot Pr \cdot St = \frac{w_0 l_0}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a} \cdot \frac{\alpha}{\rho c_p w_0} = \frac{w_0 l_0}{\nu} \cdot \frac{\nu c_p \rho}{\lambda} \cdot \frac{\alpha}{\rho c_p w_0} = \frac{\alpha l_0}{\lambda}, \quad (2.67)$$

де

$$= \alpha / (\rho c_p w_0). \quad (2.68)$$

St – число Стантона, яке установлює відношення між потоком теплоти від рідини до поверхні тіла та конвективним потоком теплоти, що переноситься рухомою рідиною.

Під час опису процесів вільної конвекції в безрозмірних змінних використовуються ще й такі комплекси:

а) число Фруда

$$Fr = gl/w^2, \quad (2.69)$$

що характеризує відношення між силами інерції та тяжіння;

б) число Галлея

$$Ga = gl^3/\nu^2 = Re^2 \cdot Fr, \quad (2.70)$$

яке встановлює співвідношення між масовими силами та силами в'язкості;

в) число Релея

$$Ra = gl^3 \beta \Delta t / (\nu \cdot a) = Gr \cdot Pr, \quad (2.71)$$

яке комплексно враховує підймальну силу в рідині, де проходить процес вільної конвекції, та подібність полів температур і швидкостей.

Числа Re , Fr , Ga , Ar , Eu , Fr з'являються під час зведення до безрозмірного вигляду рівняння руху рідини і їх називають **критеріями гідродинамічної подібності**, а числа Pe , Fo , Nu , Gr , St , Pr , Ra є наслідком зведення до безрозмірного вигляду рівняння енергії – це **критерії теплової подібності**.

2.5.1 Умови подібності фізичних явищ

Багато явищ різної фізичної природи описуються аналогічними за формою запису диференціальними рівняннями, наприклад, процеси теплопровідності та електропровідності, рівняння енергії (див. (2.42) та руху рідини (див. (2.55) для конвективного теплообміну. Якщо в диференціальні рівняння, що описують ці явища, ввести однакові позначення, то за своїм зовнішнім виглядом вони не будуть відрізнятися одне від одного. Ті явища природи, які характеризуються однаковими за формою запису диференціальними рівняннями, але мають різний фізичний зміст, називають **аналогічними**. Таких аналогій в природі багато (наприклад, закон всесвітнього

тяжіння Ньютона та закон Кулона), що свідчить про глибинну та єдину структуру матерії, яку ще належить науці встановити.

Подібні явища природи відрізняються від аналогічних (неоднорідних) тим, що мають однакову фізичну природу. Найбільш загальні умови подібності фізичних процесів сформульовані в 1931 році Кірпічовим М. В. і Гухманом А. А. (теорема Кірпічова – Гухмана) у вигляді трьох правил [1].

1. Подібні процеси мають бути якісно однаковими, тобто мати однакову фізичну природу та описуватись однаковими за формою запису диференціальними рівняннями.

2. Умови однозначності подібних процесів мають бути однаковими в усьому, окрім числових значень розмірних величин, що містяться в цих умовах.

3. Одноименні **визначальні** безрозмірні змінні подібних процесів мають бути однаковими за числовими значеннями.

Визначальні безрозмірні змінні – це числа повністю складені із незалежних змінних і сталих величин, що входять в умови однозначності (X, Y, Re, Pr, Pe тощо).

Для того, щоб процеси однакової фізичної природи були подібні **достатньо**, щоб **чисельно були однаковими одноименні визначальні змінні**, які складені з постійних величин, що задані в умовах однозначності. Локальні (точкові) значення змінних, які потрібно визначити, необхідно розглядати в точках, що характеризуються рівністю одноимених безрозмірних координат, а для нестационарних процесів має бути однаковим і безрозмірний час подібних процесів (критерій Фур'є). Таким чином два процеси A та B будуть подібні, якщо $Re_A = Re_B, Pe_A = Pe_B, Pr_A = Pr_B, Fo_A = Fo_B$ і т. д.

За третім правилом теореми подібності виходить, що безрозмірні координати подібних процесів (наприклад, A та B) в схожих точках рівні між собою, тобто $X_A = X_B; Y_A = Y_B; Z_A = Z_B$.

Для зведення координат процесів до безрозмірного вигляду за масштаб вибирається будь-який характерний розмір процесу, наприклад, розміри каналів h_A і h_B для подібних процесів конвективного теплообміну. Враховуючи це зауваження, визначимо безрозмірні координати: $X_A = x_A/h_A; Y_A = y_A/h_A; Z_A = z_A/h_A; X_B = x_B/h_B; Y_B = y_B/h_B; Z_B = z_B/h_B$. Застосовуючи третє правило подібності, знайдемо:

$$X_A = X_B \cdot \frac{h_A}{h_B} = X_B C_l, Y_A = Y_B \cdot \frac{h_A}{h_B} = Y_B C_l, Z_A = Z_B \cdot \frac{h_A}{h_B} = Z_B C_l, \quad (2.72)$$

де $C_l = h_A/h_B = const$ – коефіцієнт пропорційності, який називається **константою** (constant) подібності.

Аналогічні константи можна визначити для швидкості потоків в схожих точках процесів A та B і інших параметрів процесів: $C_w = \frac{w_{xA}}{w_{xB}} = \frac{w_{0A}}{w_{0B}}$;

$\frac{v_A}{v_B} = C_v$, де w_{0A} , w_{0B} – швидкості потоків в процесах A та B задано в умовах однозначності. Отже, константи подібності можна вважати масштабними коефіцієнтами, причому масштаби різнойменних величин можуть бути не-однаковими.

Вибір констант подібності не може бути довільним, наприклад, для подібних процесів A та B має виконуватись умова: $Re_A = Re_B$, $Pr_A = Pr_B$ тощо,

$$\text{де } Re_A = \frac{w_{0A} l_{0A}}{v_A}; \quad Re_B = \frac{w_{0B} l_{0B}}{v_B}; \quad Pr_A = \frac{v_A}{a_A} = \frac{v_A \rho_A c_{pA}}{\lambda_A}; \quad Pr_B = \frac{v_B}{a_B} = \frac{v_B \rho_B c_{pB}}{\lambda_B}.$$

Беручи до уваги, що $w_{0A} = C_w w_{0B}$; $l_{0A} = C_l l_{0B}$; $\rho_A = C_\rho \rho_B$; $v_A = C_v v_B$; $c_{pA} = C_{cp} c_{pB}$; $\lambda_A = C_\lambda \lambda_B$, отримаємо:

$$Re_A = \frac{C_w C_l}{C_v} \cdot \frac{w_{0B} l_{0B}}{v_B} = \frac{C_w C_l}{C_v} Re_B; \quad Pr_A = \frac{C_v}{C_\omega} Pr_B = \frac{C_v C_\rho C_c}{C_\lambda} Pr_B; \quad (2.73)$$

або

$$\frac{Re_A}{Re_B} = \frac{C_w C_l}{C_v} = 1; \quad \frac{Pr_A}{Pr_B} = \frac{C_v}{C_\omega} = \frac{C_v C_\rho C_c}{C_\lambda} = 1. \quad (2.74)$$

Основні положення теорії подібності справедливі не тільки для конвективного теплообміну, але і для інших процесів, оскільки безрозмірні змінні можна отримати для будь-якого фізичного явища за наявності відповідного математичного опису цього явища.

Умови подібності можна використати для встановлення аналогії двох фізично різнорідних процесів, якщо в першому правилі теореми подібності обмежитись лише формальною тотожністю диференціальних рівнянь.

2.5.2 Емпіричні залежності конвективного теплообміну

В підрозділі 2.6 відмічалось, що теорія подібності є базою для оброблення результатів експериментальних досліджень. Для того, щоб скористатись положеннями цієї теорії для експериментально досліджуваного процесу складається система диференціальних рівнянь, що його описує, та формулюються умови однозначності. Потім математичний опис процесу зводиться до безрозмірного вигляду та встановлюється залежність між параметрами процесу. Цю залежність подають у вигляді критеріального рівняння; наприклад, для визначення коефіцієнта тепловіддачі α це рівняння в загальному випадку може мати таку форму [2,]:

$$Nu = c Re^m Pr^n Gr^p, \quad (2.75)$$

де c, m, n, p – сталі безрозмірні експериментальні числа.

Для природної конвекції, коли коефіцієнт тепловіддачі визначається за умови розміщення тіла в середовищі практично необмеженого об'єму, рівняння (2.75) спрощується:

$$Nu = c(Gr Pr)^n = c \cdot Ra^n, \quad (2.76)$$

тут $m = 0$; $n \approx p$.

Логарифмуючи (2.76), отримаємо рівняння прямої лінії в логарифмічних координатах (рисунок 2.8)

$$\lg Nu = \lg c + n \lg Ra. \quad (2.77)$$

Показник степеня n в (2.77) визначається як тангенс кута ϕ нахилу прямої до осі $\lg Ra$ (абсцис):

$$n = \operatorname{tg} \phi = \frac{\lg Nu_2 - \lg Nu_1}{\lg Ra_2 - \lg Ra_1} = \frac{\lg(Nu_2/Nu_1)}{\lg(Ra_2/Ra_1)}. \quad (2.78)$$

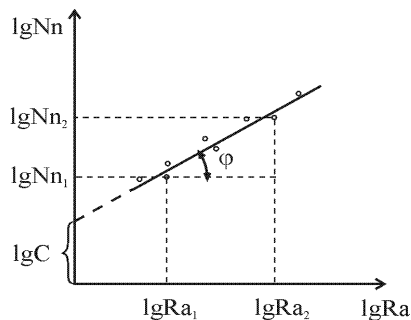


Рисунок 2.8 – Графічна інтерпретація рівняння (2.77)

Стала c знаходиться з рівняння $c = \frac{Nu}{Ra^n}$, яке задовольняє будь-яка точка прямої, зображеної на рисунку 2.8. З іншого боку, $\lg c = \lg Nu_0$ для $\lg Ra = 0$, де Nu_0 – початкове значення числа Нуссельта, яке визначається за величини $Ra=1$ ($\lg Ra = 0$).

Критеріальне рівняння типу (2.76) широко застосовується під час розрахунку коефіцієнтів тепловіддачі плоских горизонтальних та вертикальних плит або поверхонь, близьких до них за розмірами і конфігурацією (корпуси великогабаритних редукторів, верстатів тощо) [1, 2] у випадку їх природного охолодження.

Якщо конвекція проходить в повітряному середовищі, то оскільки для газів число Pr мало змінюється під час зміни температури ($Pr \approx 1$), критеріальне рівняння спрощується, наприклад, в ЕНІМВ [2, 15] отримано рівняння для розрахунку коефіцієнта тепловіддачі деталей верстатів

$$Nu = 0,2 \cdot K \cdot Gr^{0,3}, \quad (2.79)$$

де K – коефіцієнт, що залежить від форми та розташування деталей верстатів.

Нині широко почав використовуватись напівемпіричний метод знаходження критеріальних формул, який полягає в такому: під час аналітичного розгляду задачі конвективного теплообміну залежність між безрозмір-

ними змінними подають у вигляді функції, на основі якої створюють критеріальне рівняння, сталі якого визначають дослідним шляхом. Такий підхід дозволяє більш точно врахувати особливості реального процесу.

2.5.3 Інтегральні рівняння теплового потоку та імпульсів для теплового і гідродинамічного примежових шарів

Якщо врахувати в рівнянні енергії (див. (2.54) для примежового теплового шару товщиною k (див. рисунок 2.6), що проекція густини теплового потоку q_y поперек шару k визначається згідно з законом Фур'є залежністю $q_y = -\lambda \partial t / \partial y$, та відповідно $\lambda \partial^2 t / \partial^2 y = -\partial q_y / \partial y$, то рівняння енергії (2.54) можна записати у вигляді (тут враховано, що $a = \lambda / (\rho c_p)$):

$$\rho c_p \left(w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} \right) = -\frac{\partial q_y}{\partial y}. \quad (2.80)$$

Беручи до уваги, що за означенням похідні, які входять в рівняння (2.80), за межами шару k дорівнюють нулю, то інтегруючи рівняння (2.80) в межах від $y = 0$ до $y = \infty$, отримаємо вираз для густини теплового потоку q_c на поверхні тіла:

$$q_c = -\rho c_p \int_0^{\infty} \frac{\partial q_y}{\partial y} \partial y = -\rho c_p \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} w_x (t_0 - t) \partial y \right], \quad (2.81)$$

де враховано, що: $(q_y)_{y=\infty} = -\lambda (\partial t / \partial y)_{y=\infty} = 0$; $w_y = -\int_0^y \frac{\partial w_x}{\partial x} \partial y$, оскільки для $y = 0$ $w_y = 0$ внаслідок непроникності стінки; t_0 – температура рідини далеко від поверхні тіла (див. рисунок 2.6).

Переходячи в (2.81) від межі інтегрування ∞ до межі k (оскільки згідно з властивостями примежового шару збільшення верхньої межі інтегрування не змінює інтеграл), знайдемо інтегрально-диференціальне рівняння [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} w_x (t - t_0) \partial y = -q_c / (\rho c_p), \quad (2.82)$$

яке називається **інтегральним рівнянням теплового потоку для примежового теплового шару**.

За аналогічними викладеним міркуваннями із рівняння руху в примежовому гідродинамічному шарі δ (див. рисунок 2.5 й (2.55) можна отримати **інтегральне рівняння імпульсів для примежового гідродинамічного шару** [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} w_x (w_0 - w_x) \partial y = \frac{\tau_{sc}}{\rho}, \quad (2.83)$$

де $\tau_{sc} = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0}$; $\rho = const$.

Інтеграл в лівих частинах рівнянь (2.82) та (2.83) мають фізичний зміст, відповідно зміни ентальпії та кількості руху в прилежових шарах товщиною k і δ :

$$-q_c = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^k w_x t_0 \partial y - \int_0^k w_x t \partial y \right] \rho c_p; \quad (2.84)$$

$$\tau_{sc} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} w_x w_0 \partial y - \int_0^{\delta} w_x^2 \partial y \right] \rho. \quad (2.85)$$

Використовуючи рівняння (2.82) та (2.83) можна розраховувати товщину гідродинамічного δ та теплового k прилежових шарів для ламінарного режиму руху рідини за формулами [1]:

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{w_0}} = 4,64x / \sqrt{Re_x}; \quad (2.86)$$

$$k = \frac{4,64x}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}}, \quad (2.87)$$

де $Re_x = w_0 x / \nu$ – число Рейнольдса; $Pr = \nu / a$ – число Прандтля ($a = \lambda / (\rho c_p)$).

Порівнюючи (2.86) та (2.87), знайдемо

$$k / \delta = 1 / \sqrt[3]{Pr}. \quad (2.88)$$

Формули (2.86) та (2.87) справедливі для $k \leq \delta$, оскільки для крапельних рідин $Pr \geq 1$. Для рідких металів $k \gg \delta$ і зазначені формули для розрахунку k та δ непридатні.

Товщина прилежових шарів k і δ в ламінарних потоках газів може бути розрахована за наведеними залежностями, хоча й в газових середовищах $k > \delta$ [1], оскільки число Прандтля в газах несуттєво менше одиниці (змінюється приблизно від 0,6 до 1 [1]). Наприклад, для повітря $Pr \approx 0,7$ в широкому інтервалі температур, тоді $k \approx 1,3\delta$. Експериментальні дослідження показують, що різницею між k та δ в 13% під час теплотехнічних розрахунків можна знехтувати.

Потрібно відмітити, що вперше інтегральне рівняння теплового потоку в прилежовому шарі було отримано Г. М. Кружиліним, а рівняння імпуль-

сів – Т. Карманом (німецький учений-механік, відомий своїми працями в областях ракетобудування, аеро- гідродинаміки та ін.).

У випадку турбулентного режиму руху рідини примежовий шар поділяється на дві області: шар рідини біля стінки поверхні тіла називається **в'язким підшаром (або ламінарним підшаром)** [1] і власне турбулентним примежовим шаром. У в'язкому підшарі переважають сили в'язкості, а в турбулентному – інерції. Аналогічно в'язкому підшару можна в турбулентному примежовому шарі виділити **тепловий підшар** [1], в якому перенесення теплоти теплопровідністю переважає над турбулентним перенесенням. Більш детально з особливостями розрахунку тепловіддачі у випадку турбулентного примежового шару розрахунку можна ознайомитись в роботі [1].

2.6 Особливості руху рідини та теплообміну в трубах

Процес тепловіддачі під час руху рідини в трубах має велике практичне значення і є більш складним явищем порівняно з тепловіддачею, що виникає під час обмивання поверхні тіла необмеженим потоком. Рідина, що тече далеко від тіла (наприклад, стінки пластини), не відчуває впливу процесів, які відбуваються біля поверхні тіла. В трубах ці процеси проходять інакше, оскільки поперечний переріз труби має скінченні розміри. Через це, починаючи з деякої відстані від входу в трубу, рідина в усьому її поперечному перерізі гальмується силами в'язкості. Це гальмування супроводжується зміною температури як в перерізі, так і вздовж труби (чи каналу, наприклад, в теплообмінних або гідравлічних апаратах тощо).

Режим руху рідини може бути ламінарним або турбулентним і визначається числом Рейнольдса $Re = wd/\nu$, де w – середня швидкість руху рідини; d – діаметр труби (характерний розмір); ν – кінематична в'язкість.

Як вже зазначалось в підрозділі 2.2, для гідравлічно гладких труб режим течії рідини для: $Re < Re_{кр1} \cong 2000$ – ламінарний; $2000 < Re < 10000$ – перехідний; $Re > Re_{кр2} \cong 10000$ – турбулентний (тут $Re_{кр1}$, $Re_{кр2}$ – відповідно нижнє та верхнє критичні числа Рейнольдса). В гідравлічних апаратах з складною конфігурацією каналів турбулентний режим руху рідини виникає за значно менших значень числа Рейнольдса.

2.6.1 Ділянки гідродинамічної та теплової стабілізації потоку рідини в трубі

Якщо рідина втікає в трубу з великого об'єму, а краї труби на вході заокруглені, то розподіл швидкості в початковому поперечному перерізі труби можна вважати рівномірним (рисунок 2.9).

Під час руху рідини біля її стінок утворюється гідродинамічний при-
межовий шар (див. п.2.4.1), товщина якого поступово зростаючи на деякій
відстані від входу охоплює весь поперечний переріз ($\delta = r_0$) [1]. Якщо фі-
зичні параметри рідини постійні, то на певній відстані від входу встанов-
люється постійний розподіл швидкості в поперечному перерізі труби, ха-
рактерний для цього режиму течії. Ця відстань l_n називається **довжиною**
гідродинамічної початкової ділянки або ділянкою гідродинамічної
стабілізації потоку. Ця ділянка ділить об'єм рідини в трубі на дві частини
– ядро незагальмованої рідини 1 та об'єм 2 рідини, де сили в'язкості діють
в усьому поперечному перерізі труби (примежові гідродинамічні шари
зливаються, див. рис. 2.9). Стабілізована течія рідини для $x \geq l_n$ від розпо-
ділу швидкості на вході

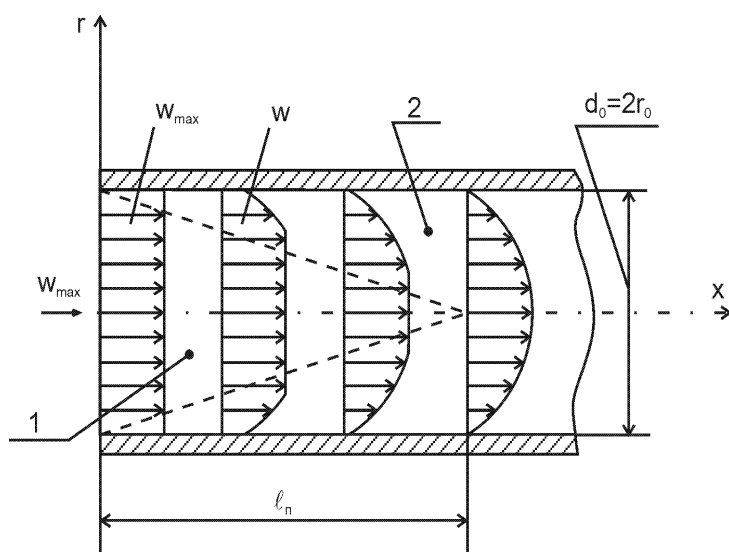


Рисунок 2.9 – Стабілізація розподілу швидкості під час руху рідини в трубі

ділу швидкості на вході $x = 0$ не залежить, але цей розподіл як для $x < l_n$, так і для $x \geq l_n$ може залежати від процесу теплообміну.

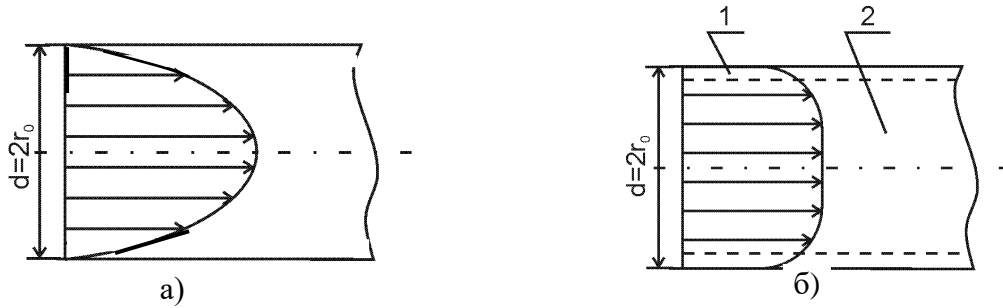
Гідродинамічна ділянка стабілізації потоку має місце як під час ламінарного, так і під час турбулентного режимів руху рідини. У перехідному режимі руху в передній частині труби може існувати ламінарний режим течії рідини, причому ламінарний режим, за умови досягнення критичної тов-

щини примежового шару, переходить в турбулентний, який поширюється на весь поперечний переріз труби. Інколи зміна режиму течії проходить за межами початкової гідродинамічної ділянки ($x \geq l_n$).

У випадку $Re > Re_{кр2}$ практично уже на вході в трубу утворюється турбулентний примежовий шар [1], особливо, якщо отвір труби має гостру кромку. Довжина ділянки гідродинамічної стабілізації потоку та її відрізки, зайняті відповідно ламінарним і турбулентним примежовими шарами, залежать від числа Re та ступеня турбулентності Tu (див. (2.25)).

Під час ламінарного ізотермічного руху рідини в гідродинамічно стабілізованому потоці ($x > l_n$), швидкості шарів рідини в перерізі труби розподіляються за параболою (див. рисунок 2.10, а) [1]:

$$w_x = w_{\max} \left[1 - \left(r / r_0 \right)^2 \right], \quad (2.89)$$



1 – ламінарний підшар; 2 – турбулентне ядро;

Рисунок 2.10 – Розподіл швидкості в перерізі труби для ламінарної (а) та турбулентної течій (б) рідини

де w_{max} – швидкість потоку на осі труби (за $r = 0$). Середня швидкість потоку $\bar{w}_x = 0,5w_{max}$. У випадку турбулентної течії біля стінки труби утворюється в'язкий підшар рідини, де режим течії ламінарний. Для великих чисел Re товщина цього підшару дуже мала порівняно з діаметром труби, але для низькотеплопровідних рідин в'язкий підшар є основним термічним опором [1]. Розподіл швидкості в поперечному перерізі труби для стабілізованого режиму руху рідини має вигляд зрізаної параболи з максимумом швидкості на осі труби (рисунок 2.10, б). Змінюється швидкість потоку найбільш інтенсивно поблизу стінки.

В турбулентній частині потоку розподіл швидкості описується логарифмічним законом [1]:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_*} = \frac{1}{\chi} \ln y_* + \eta, \quad (2.90)$$

де w_x – середня швидкість потоку; $w_* = \sqrt{\tau_{sc}/\rho}$ – динамічна швидкість потоку (тут τ_{sc} – дотичне напруження в рідині на межі стінки труби (припущено, що $\tau_{sc}/\rho = const$ і дотичне напруження τ_{sc} вздовж координати $r \equiv y$ не змінюється); ρ – густина рідини); $y_* = w_* y/\nu$; $y = r_0 - r$; ν – кінематична в'язкість рідини; $\eta = \frac{w_m}{w_*} - \frac{1}{\chi} \ln \frac{w_m}{w_*}$; w_m – швидкість потоку на зовнішній межі в'язкого підшару; χ – безрозмірний коефіцієнт зв'язку між масштабом турбулентності (деякий середній розмір мас рідини, що турбулентно переміщуються) та координатою y .

Експериментальними дослідженнями встановлено, що [1]: для турбулентного ядра ($y_* \geq 30$) $\chi = 0,4$ та $\eta = 5,5$; для проміжної між турбулентним ядром та в'язким підшаром області ($y_* \approx 5...30$) $\chi = 0,2$ та $\eta = 3,05$. В ме-

жах в'язкого підшару закон зміни швидкості вважають лінійним: $\frac{\bar{w}_x}{w_*} = y_*$

або $\bar{w}_x = \frac{\tau_{sc}}{\mu} y$ (тут $\mu = \nu \cdot \rho$ – динамічна в'язкість рідини).

Під час руху рідини в трубі, температура якої відрізняється від температури рідини, має місце прогрівання чи охолодження рідини в шарах поблизу стінки. На початку труби (рисунок 2.11) ядро рідини має температуру, що дорівнює температурі на вході. Це ядро в теплообміні участі не бере і всі зміни температури зосереджуються в шарі рідини біля стінки труби, тобто біля поверхні труби в початковій її частині утворюється тепловий примежовий шар. Із збільшенням відстані від входу в трубу товщина примежового шару зростає і на деякій відстані $l_{n.т.}$ тепловий примежовий шар заповнює весь переріз труби. Для $x > l_{n.т.}$ вся рідина в трубі бере участь в теплообміні, причому інтенсивність теплообміну вже не залежить від розподілу швидкості та температури на вході. Ділянку труби довжиною $l_{n.т.}$ називають **початковою тепловою ділянкою або ділянкою термічної стабілізації потоку**. Якщо для $x > l_{n.т.}$ межові умови на стінці не змінюються, то такий теплообмін називають стабілізованим. На відміну від епюр швидкості (див. рисунок 2.9) епюри температури для $x > l_{n.т.}$ навіть у випадку постійних фізичних властивостей рідини незмінними не залишаються. Якщо межові умови можуть суттєво змінюватись, то може виникнути ефект формування нового примежового шару, наприклад, внаслідок різкого збільшення теплового навантаження або збурення потоку якою-небудь місцевою перешкодою.

Довжина початкової теплової ділянки залежить від великої кількості факторів – коефіцієнта теплопровідності рідини, наявності гідродинамічної стабілізації потоку, числа Рейнольдса, розподілу температур на вході та ін.

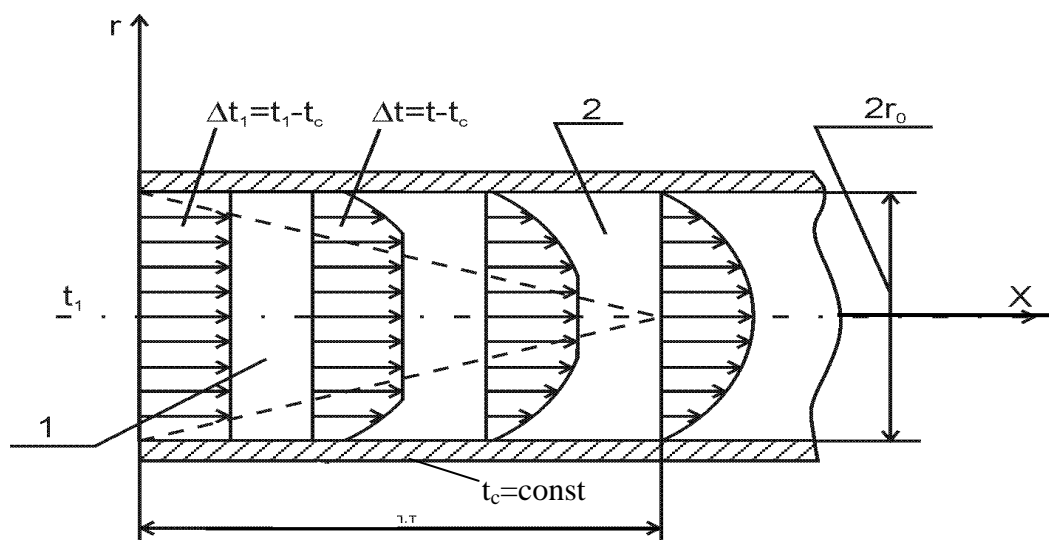


Рисунок 2.11 – Зміна розподілу температури під час руху рідини в трубі

Як показує теорія [1], для ламінарної гідродинамічно стабілізованої течії рідини з постійними фізичними параметрами і однорідною температурою t_l на вході в трубу (див. рис. 2.11) для: $t_c = const - l_{n.m}/d = 0,055 Pe$; $q_c = const - l_{n.m}/d = 0,07 Pe$, де $Pe = w_0 d / a$ – число Пекле; $a = \lambda / (c_p \rho)$ – коефіцієнт температуропровідності рідини; d – внутрішній діаметр труби.

Для газів під час ламінарного руху потоку ($Pr \approx 1$, $Re \approx 2000$, $Pe = Re \cdot Pr$) розрахункова довжина ділянки термічної стабілізації досягає $l_{n.m} \approx 100d$. Під час ламінарної течії дуже в'язких рідин ($Pr > 1$) значення $l_{n.m}$ змінюється від декількох сотень діаметрів d до декількох тисяч [1], а це значить, що теплообмін практично завжди проходить в межах початкової ділянки. Під час турбулентного режиму течії за багатьма дослідними даними [1] $l_{n.m} = (10...15)d$.

2.6.2 Інтегральне рівняння тепловіддачі для стабілізованого теплообміну в прямій круглій трубі

Для спрощення розв'язування задачі, означеної в заголовку пункту, вводимо такі припущення: рідина нестислива і має постійні фізичні параметри; тепловою, що виділяється під час тертя нехтуємо; внутрішні джерела теплоти відсутні; передавання теплоти в радіальному напрямку труби набагато більше, ніж в осьовому, тобто $\partial^2 t / \partial x^2 = 0$; складова швидкості потоку в радіальному напрямку дорівнює нулю ($w_r = 0$). Із врахуванням того, що в турбулентному потоці теплота переноситься не тільки теплопровідністю, але і шляхом турбулентних пульсацій [1], рівняння енергії для потоку в трубі в циліндричних координатах матиме вигляд

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda + \lambda_T \frac{\partial t}{\partial r} \right] = \rho c_p w_x r \frac{\partial t}{\partial x}, \quad (2.91)$$

де $\lambda_T = \rho c_p a_m$ – коефіцієнт турбулентного перенесення теплоти; a_m – кінематичний коефіцієнт турбулентного перенесення теплоти (див. (2.22)); t і w_x – осереднені за часом місцеві значення температури та швидкості турбулентного потоку.

Припустимо, що мають місце межові умови другого роду $q_c = const$. Для постійного коефіцієнта тепловіддачі $\alpha = const$ $q_c / \alpha = t_c - \bar{t}_p = const$, де \bar{t}_p – середньомасова температура рідини в розглядуваному перерізі труби. Як показано в роботі [1], за незмінних фізичних властивостей рідини місцева температура рідини змінюється вздовж труби за лінійним законом, причому

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{2q_c}{\rho c_p \bar{w}_x r_0} = const, \quad (2.92)$$

де \bar{w}_x – середня швидкість потоку в розглядуваному перерізі труби (для $d = 2r_0$, $\bar{w}_x = 0,5w_{\max}$).

Підставляючи (2.92) в (2.91), отримаємо

$$\frac{d}{dr} \left[(\lambda + \lambda_T) r \frac{dt}{dr} \right] = 2q_c \cdot \frac{w_x}{\bar{w}_x} \frac{r}{r_0} \quad (2.93)$$

або в безрозмірній формі

$$\frac{d}{dR} \left[(\lambda + \lambda_T) R \frac{dt}{dR} \right] = 2q_c \cdot r_0 W_x R, \quad (2.94)$$

де $W_x = w_x / \bar{w}_x$, $R = r/r_0$ – відповідно безрозмірні швидкість та радіус.

Розділяючи в рівнянні (2.94) змінні та інтегруючи його в межах від 0 до R та від 0 до $(\lambda + \lambda_T)$, знайдемо

$$\frac{dt}{dR} = \frac{2q_c r_0}{(\lambda + \lambda_T) R} \int_0^R W_x R dR. \quad (2.95)$$

Середньомасову температуру рідини у випадку $c_p = const$ і $\rho = const$ для круглої труби можна визначити за виразом [1]

$$\bar{t}_p = t_c - 2 \int_0^1 \left(\int_0^R W_x R dR \right) dt. \quad (2.96)$$

Підставляючи в (2.96) значення dt/dR з (2.95), отримаємо

$$\bar{t}_p = t_c - \frac{4q_c r_0}{\lambda} \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_T}{\lambda} \right) R} dR, \quad (2.97)$$

звідки

$$\frac{\lambda(t_c - t_p)}{2q_c r_0} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\lambda_T}{\lambda} \right) R} dR = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\nu_m}{\nu} \right) R} dR, \quad (2.98)$$

де $\text{Pr} = \nu/a$; $\text{Pr}_T = \nu_T/a_T$ – турбулентне число Прандтля; $\nu_m = \mu_T/\rho$ – кінематичний коефіцієнт турбулентного перенесення кількості руху (див. (2.23)). Розглянемо більш детально ліву частину виразу (2.98), де згідно з законом Ньютона – Ріхмана $(t_c - t_p)/q_c = 1/\alpha$; $2r_0 = d$, тоді

$$\frac{\lambda(t_c - t_p)}{2q_c r_0} = \frac{\lambda}{(\alpha d)} = \frac{1}{Nu_d}. \quad (2.99)$$

Підставляючи в (2.98) (2.99), запишемо інтегральне рівняння тепловіддачі для стабілізованого теплообміну в трубі:

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R W_x R dR \right)^2}{\left(1 + \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_T} \frac{\nu_T}{\nu} \right) R} dR. \quad (2.100)$$

Рівняння (2.100) вперше було отримано Лайоном.

Для ламінарного режиму ($\lambda_T = 0$) рівняння Лайона спрощується

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left(\int_0^R W_x R dR \right)^2. \quad (2.101)$$

У випадку гідродинамічно стабілізованого ламінарного режиму руху рідини з незмінними фізичними властивостями, згідно з (2.89) $w_x = 2\bar{w}_x[1 - (r/r_0)^2]$ або $W_x = 2(1 - R^2)$. Підставляючи це значення безрозмірної швидкості в (2.101), знайдемо

$$\frac{1}{Nu_d} = 2 \int_0^1 \frac{dR}{R} \left(\int_0^R W_x R dR \right)^2,$$

звідки $Nu_d = 48/11 \approx 4,36$ для $q_c = const$.

Для $t_p = const$ теорія дає $Nu_d = 3,66$. Змінність фізичних параметрів рідини призводить до значних розходжень теоретичних та дослідних результатів. Аналітичне врахування впливу цієї змінності потребує дуже складної і трудомісткої праці, тому практичні розрахунки виконують за допомогою емпіричних критеріальних залежностей, отриманих дослідним шляхом [1, 2].

2.7 Особливості теплообміну у випадку зміни агрегатного стану рідини

Теплові процеси, які супроводжують роботу технологічних машин, часто пов'язані зі зміною агрегатного стану речовини, наприклад, охолодження інструментів, заготовок чи деталей під час механічного оброблення або виготовлення деталей машин литтям. Найчастіше зустрічаються такі процеси як *кипіння* (boiling) рідин та *конденсація* (condensation) пари.

2.7.1 Теплообмін під час кипіння

Кипіння – це процес інтенсивного пароутворення, яке проходить у всьому об'ємі рідини, перегрітої відносно температури насичення, і супроводжується утворенням парових бульбашок. Розрізняють види кипіння рідини на твердій поверхні теплообміну, до якої ззовні підводиться теплота, та кипіння в об'ємі рідини. Під час кипіння рідини на твердій поверхні утворення парової фази (phase) спостерігається в окремих місцях цієї поверхні, а у випадку об'ємного кипіння парова фаза виникає спонтанно безпосередньо в об'ємі рідини. Об'ємне кипіння можливе лише за значного перегріву рідкої фази відносно температури насичення для заданого тиску. **Температура t_n насичення** – це температура переходу речовини із рідкого стану в газоподібний або навпаки. Ця температура залежить від властивостей речовини та суттєво залежить від тиску, наприклад, для води, тиск в якій дорівнює атмосферному $t_n \approx 100$ °C.

Механізм теплообміну під час кипіння відрізняється від механізму тепловіддачі шляхом конвекції однофазної рідини наявністю додаткового перенесення маси речовини та теплоти паровими бульбашками з прилежового шару в об'єм киплячої рідини. Щоб виник процес кипіння необхідно мати перегріту рідину та центри пароутворення. Максимальне перегрівання рідини має місце безпосередньо біля гарячої поверхні теплообміну, на якій знаходяться центри пароутворення у вигляді окремих нерівностей стінки, бульбашок повітря, пилинок та т. ін.

Є два основних режими кипіння: **бульбашковий** та **плівковий**. Під час бульбашкового режиму пара утворюється у вигляді окремих бульбашок, які періодично зароджуються, ростуть і відриваються від поверхні. Внаслідок зростання теплового потоку до деякого значення окремі бульбашки зливаються і утворюють біля поверхні теплообміну суцільний паровий

шар, який періодично проривається в об'єм рідини. Наявність на поверхні тіла теплообміну плівки пари, що відділяє цю поверхню від рідини, характеризує **плівковий режим кипіння** [1]. Інтенсивність тепловіддачі у випадку плівкового режиму кипіння значно менша, ніж під час бульбашкового. Інтенсивність бульбашкового режиму кипіння визначається режимами та мікрохарактеристиками кипіння – це критичний радіус бульбашки R_k , швидкість росту, відривний діаметр d_0 та частота відриву бульбашок.

Критичний радіус R_k бульбашки визначається за умовами термодинамічної та механічної рівноваги парової та рідкої фаз [1]:

а) умова механічної рівноваги для бульбашки сферичної форми визначається рівнянням Лапласа:

$$\Delta p = p_n - p_p = 2\sigma / R_k, \quad (2.102)$$

де p_n, p_p – відповідно тиск пари всередині бульбашки та тиск рідини навколо бульбашки, Па; σ – питома сила поверхневого натягу на межі фазової поверхні пара – рідина, Н/м;

б) умова термодинамічної рівноваги

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_n \Delta t \frac{\Delta \rho}{\rho_p}, \quad (2.103)$$

де $(\partial p / \partial t)_n = r \rho_p \rho_n / (t_n \Delta \rho)$ – зміна тиску пари в бульбашці на лінії температури насичення, визначена згідно з законом Клайперона – Клазіуса; r – теплота фазового переходу рідини в пару, Дж/кг; ρ_p, ρ_n – відповідно густини рідини та пари, кг/м³; $\Delta t = t_p - t_n$ (тут t_p – температура рідини); $\Delta \rho = \rho_p - \rho_n$. Прирівнюючи (2.102) та (2.103) та розв'язуючи отримане рівняння відносно R_k , знайдемо формулу для розрахунку критичного радіуса парової бульбашки сферичної форми:

$$R_k = 2\sigma t_n / [r \rho_n (t_c - t_n)], \quad (2.104)$$

де для шарів рідини, що безпосередньо торкаються стінки поверхні кипіння взято $t_p = t_c, K$ (тут t_c – температура стінки, K).

У формі залежності (2.104) величина R_k характеризує радіус кривизни зовнішньої поверхні бульбашок, що зароджуються на поверхні теплообміну, одночасно ця величина визначає порядок розмірів тих елементів шорсткості, які за таких умов (тиску, перегрівання та ін.) можуть слугувати центрами пароутворення. Внаслідок збільшення перегрівання рідини для

заданого тиску та навпаки, у випадку заданого перегрівання і збільшення тиску, мінімальний радіус R_k зменшується, що приводить до збільшення загального числа діючих центрів пароутворення, інтенсивного перемішування рідини в примежовому шарі та зростання тепловіддачі.

Потрібно відмітити, що за умови $\Delta p > 2\sigma / R_k$ парова бульбашка може існувати та рости, а у випадку $\Delta p < 2\sigma / R_k$ – парова бульбашка конденсується. Утворення парової бульбашки з критичним радіусом R_k можливе лише внаслідок перегрівання рідини за певного тиску вище температури насичення, тобто $\Delta t = t_p - t_n = t_c - t_n > 0$.

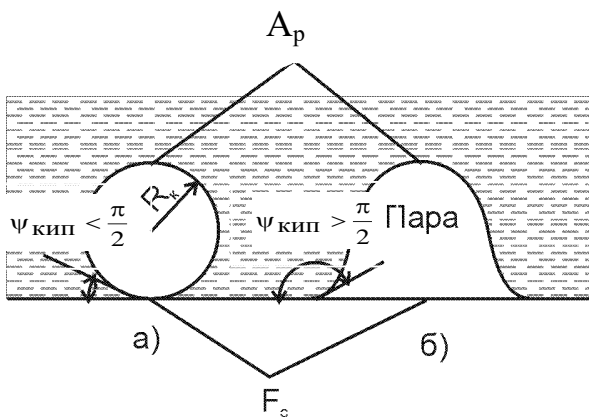
Найбільш сприятливі умови утворення парової бульбашки визначаються мінімальною роботою, що витрачається на здійснення цього процесу. Цю роботу можна виразити залежністю [1].

$$E_{\delta \min} = -E_{pn} + E_{mf} = -\Delta p V + \sigma A_{\delta}, \quad (2.105)$$

де $E_{pn} = \Delta p V$ – робота розширення пари; $E_{mf} = \sigma A_{\delta}$ – робота, яка йде на утворення міжфазної поверхні бульбашки; V, A_{δ} – відповідно об'єм та площа поверхні бульбашки.

Для бульбашки сферичної форми $V = 4\pi R_k^3 / 3$ і $A_{\delta} = 4\pi R_k^2$, тоді, підставляючи ці значення в (2.105), матимемо після нескладних математичних перетворень:

$$E_{\delta \min} = \frac{16}{3} \frac{\pi \sigma^3}{(r \rho_n)^2} \left(\frac{t_n}{\Delta t} \right)^2. \quad (2.106)$$



$\Psi_{\text{кип}}$ – межовий кут змочування під час кипіння

Рисунок 2.12 – Форма парових бульбашок під час кипіння рідини та гарному (б) і поганому (а) змочуванні поверхні

Із (2.106) можна зробити висновок: чим більше значення Δt , тим менше значення $E_{\delta \min}$.

Після зародження бульбашок на центрах кипіння радіусом $R \geq R_k$ починається ріст бульбашок пари за рахунок підведення до них теплоти шляхом теплопровідності з навколишнього шару перегрітої рідини через міжфазну поверхню A_p та поверхню під бульбашкою A_c в її основі (рисунок 2.12, а, б). Підведена до бульбашки теплота йде на випаровування рідини і роботу розширення. Швидкість зростання

бульбашок, яка є однією з основних характеристик механізму теплообміну під час кипіння, залежить від інтенсивності підведення теплоти обома складовими теплового потоку. Інтенсивність теплообміну під час кипіння характеризується числом Якоба

$$Ja = \frac{q_{\tau_{\text{пер}}}}{q_{\tau_{\text{пар}}}} = c_p \Delta t \rho_p / (r \rho_n). \quad (2.107)$$

Число Якоба характеризує співвідношення між питомими тепловими потоками, що ідуть на перегрівання $q_{\tau_{\text{пер}}}$ одиниці об'єму рідини, та об'ємного $q_{\tau_{\text{пар}}}$ теплового пароутворення. Це число залежить від тиску та ступеня перегрівання рідини. Внаслідок підвищення тиску число Якоба зменшується, тому що суттєво збільшується густина пари. У випадку збільшення перегрівання рідини це число зростає.

В загальному випадку, коли теплота до бульбашок підводиться через поверхні A_p і A_c в приблизно співмірній пропорції, швидкість росту парової бульбашки виражається рівнянням [1]

$$\frac{dR}{d\tau} = \beta \frac{a}{R} Ja \cdot (Ja), \quad (2.108)$$

де a – коефіцієнт температуропровідності рідкої фази; $\beta = b$ – величина стала; $(Ja) = 1 + \gamma \cdot Ja / \beta + \gamma \sqrt{2\beta \cdot Ja + (\gamma \cdot Ja)^2} / \beta$; $\gamma = 0,1 \dots 0,49$ для кута кипіння $\psi_{\text{кин}} = 40 \dots 90^\circ$ [1].

В момент відриву від поверхні теплообміну бульбашки суттєво деформуються. Відривний діаметр d_0 бульбашки може визначатися за залежністю [1]:

$$d_0 = 0,0208 \psi_{\text{кин}} \sqrt{\sigma / g \cdot (\rho_p - \rho_n)}, \quad (2.109)$$

де $\psi_{\text{кин}}$ – межовий кут кипіння в градусах; d_0 – в метрах.

Для розрахунку тепловіддачі під час кипіння використовують критеріальні рівняння типу [2]

$$Nu_* = C \cdot Re_*^m \cdot Pr_*^n, \quad (2.110)$$

де $Nu_* = \alpha_K l_* / \lambda_p$; $Re_* = w_K l_* / \nu_p$; $Pr_* = \nu_p / a_p$; λ_p, ν_p, a_p – фізичні параметри рідини, нагрітої до температури t_n ; w_K – умовна швидкість кипіння

пари ($w_k = q / (r \rho_n) = \alpha_k \Delta t / (r \rho_n)$), тут q – густина теплового потоку тепловіддачі в рідину; α_k – коефіцієнт тепловіддачі під час кипіння; $C = const$; $m = const$; $n = const$ – експериментальні сталі.

Механізм та інтенсивність кипіння протягом часу проходження цього процесу суттєво змінюються. Ці зміни названі *кризами* (crisis) кипіння [1, 2]. **Перша криза кипіння** виникає на початку переходу бульбашкового кипіння в плівкове. В момент зміни режимів кипіння спостерігається різке зниження максимальної тепловіддачі та відповідне підвищення температури поверхні теплообміну, яке інколи може супроводжуватися розплавленням або перепаленням поверхні теплообміну.

Коефіцієнт тепловіддачі в момент початку кризи

$$\alpha_{кр1} = q_{кр1} / \Delta t_{кр1}, \quad (2.111)$$

де $q_{кр1}$ – перша критична густина теплового потоку; $\Delta t_{кр1}$ – перший критичний температурний напір.

Зворотний перехід від плівкового режиму кипіння до бульбашкового називається **другою кризою кипіння**. Під час руйнування парової плівки тепловіддача різко зростає, а температура поверхні знижується. Ця криза характеризується густиною $q_{кр2}$ та температурним напором $\Delta t_{кр2}$. Критична зведена швидкість пароутворення під час другої кризи $w_{кр2n} = q_{кр2} / (r \rho_n)$ пропорційна швидкості w_{δ_2} спливання великих деформованих бульбашок пари:

$$w_{кр2n} = q_{кр2} / (r \rho_n) = w_{\delta_2} = \sqrt[4]{\sigma \cdot g \cdot (\rho_p - \rho_n) / \rho_p^2}. \quad (2.112)$$

Безпосередній перехід однофазної конвекції до плівкового режиму кипіння, минаючи стадію бульбашкового кипіння називається **третьою кризою кипіння**, якій відповідає густина потоку $q_{кр3}$ і температурний напір $\Delta t_{кр3}$. Графічно процес кипіння можна проілюструвати кривою (крива кипіння), що зображена на рисунку 2.13.

Крива кипіння побудована в координатах $\lg \theta - \lg q_{відн}$, де $\theta = \Delta t / t_n$ – відносна температура, а $q_{відн} = q / \bar{q}_c$ – відносна густина теплового потоку, що переноситься рідиною і паром під час кипіння (тут q – поточне значення густини теплового потоку; \bar{q}_c – середня густина теплового потоку на поверхні кипіння).

Під час кипіння відбувається хаотична **турбулізація** руху рідини поблизу поверхні теплообміну за рахунок росту та періодичного спливання бульбашок пари. Ця турбулізація інтенсифікує процес теплообміну в кип-

лячій рідині навіть за незначного її перегрівання відносно температури насичення $t_c = t_n$. Перегрівання рідини та спосіб нагрівання поверхні теплообміну належать до режимних параметрів кипіння.

Аналізуючи криву кипіння (див. рисунок 2.13), можна виділити шість зон: 1 – конвективного теплообміну (малий ступінь перегрівання рідини); 2 – нестійкого кипіння; 3 – розвинутого бульбашкового кипіння; 4 – переходу від бульбашкового до плівкового кипіння; 5 – стійкого плівкового кипіння; 6 – переважного променевого переносу теплоти.

В умовах зниженого тиску в рідині та старанної її дегазації режим конвективної тепловіддачі (зона 1, лінія АВ) може затягуватись до високого перегрівання рідини. Під час кипіння рідин, що погано змочують поверхню кипіння (кут змочування $\phi_{зм} < 90^\circ$), плівковий режим може розпочатись за малого перегрівання рідини відносно t_n (лінія АГ).

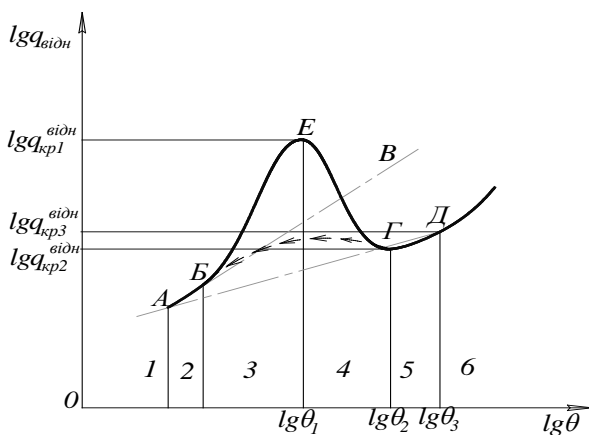


Рисунок 2.13 – Графічна ілюстрація криз кипіння

З особливостями теплообміну при кипінні більш детально можна ознайомитись в роботах [1, 2].

2.7.2 Теплообмін під час конденсації

Конденсація – це процес переходу пари (газу) в рідкий або твердий стан (фазовий перехід першого роду). Якоюсь мірою конденсацію можна вважати процесом протилежним кипінню. Процес конденсації можливий тільки для докритичних станів газу (пари). Цей процес здійснюється шляхом охолодження пари або в результаті такого її стискування, коли за досягнутих значень температури і тиску, конденсована фаза термодинамічно більш стійка, ніж газоподібна. Якщо в цьому випадку температура та тиск

Критичним значенням густини теплового потоку на кривій, показаній на рисунку 2.13, відповідають точки: $E - q_{кр1}$; $\Gamma - q_{кр2}$; $Д - q_{кр3}$. Між собою ці густини пов'язані нерівністю $q_{кр1} < q_{кр2} < q_{кр3}$.

Третя криза кипіння найчастіше спостерігається під час кипіння рідкого гелію на поверхні з нержавіючої полірованої сталі (мало дефектів) [1], що пояснюється дуже малою температурою перегрівання $\Delta t \geq 0$.

Розглянуті кризи кипіння називаються кризами першого роду. Є ще кризи кипіння другого роду, які мають іншу фізичну природу [1].

більші значень, що відповідають потрібній точці [4] для деякої речовини, то утворюється конденсована фаза, а коли менші – то з парової фази речовина переходить в твердий стан.

Коли рідка конденсована фаза утворюється на твердій поверхні теплообміну у вигляді стійкої плівки, то конденсація називається плівковою, а коли утворюються краплі – то крапельною. Плівкова конденсація має місце у випадку змочування конденсатом поверхні теплообміну, а крапельна – коли змочування відсутнє. Перегріта пара конденсується на поверхні теплообміну тоді, коли температура поверхні менша за температуру насичення t_n для заданого тиску.

Під час крапельної конденсації тепловіддача може бути значно більшою, ніж у випадку плівкової. Це пояснюється тим, що плівка конденсату є великим термічним опором передавання теплоти фазового переходу від поверхні конденсації до стінки. Внаслідок розриву плівки у випадку крапельної конденсації цей опір значно менший.

Термічний опір R_Σ передавання теплоти від пари до стінки можна подати у вигляді суми двох складових [1]:

$$R_\Sigma = \frac{t_n - t_c}{q} = \frac{1}{\alpha} = R_{кон} + R_\phi, \quad (2.113)$$

де t_n та t_c – температура пари і поверхні стінки (рисунки 2.14); q – густина теплового потоку; α – коефіцієнт тепловіддачі від пари до стінки; $R_{кон}$ – термічний опір плівки конденсату; R_ϕ – міжфазний термічний опір (опір на межі поділу фаз). Опір R_ϕ не є термічним опором у звичайному розумінні. Поява цього опору обумовлена стрибком температури на межі поділу парової та рідкої фаз.

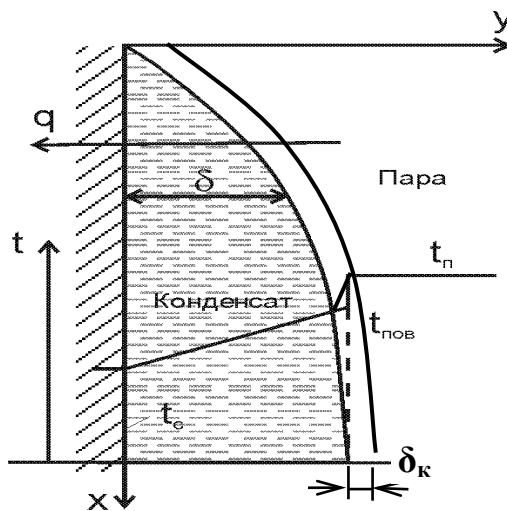


Рисунок 2.14 – Характер розподілу температури під час плівкової конденсації чистої насиченої пари

Стрибок температури має таку фізичну природу. Конденсація, яку ми спостерігаємо, є результатом конденсації сукупності молекул, що стикаються з поверхнею конденсату і захоплюються нею, та випаровуванням молекул, які відриваються від тієї ж поверхні за той самий час. Переважання кількості захоплених молекул порівняно з кількістю тих, що випаровувались, і є спостережуваною конденсацією. Внаслідок цих двох процесів в поверхневому шарі пари товщиною δ_k , що має порядок середньої довжини $l_{ом}$ вільного пробігу

молекули, рухається два нерівних потоки молекул, які мають різну температуру (енергію).

Цей шар $\delta_k \approx l_{om}$ називають **кнудсеновським** [1]. Температура пари в цьому шарі в середньому відрізняється від температури поверхні рідини.

Перепад температур в такому тонкому шарі в теорії суцільних середовищ сприймається як стрибок. За межами цього шару внаслідок співударянь молекул температура вирівнюється. Чим більше молекул, які падають на рідину і відбиваються не конденсуючись, тим більший стрибок температури. Це враховується **коефіцієнтом конденсації** $k_k = n_3/n_\Sigma$, де n_3 – число молекул захоплених поверхнею конденсату; n_Σ – загальна кількість молекул, що стикнулись з поверхнею конденсату ($0 \leq k_k \leq 1$ [1]). Через поверхню A_k конденсату проходить певний потік маси речовини J (кг/с)

$$J = \int_{A_k} j dA_k, \quad (2.114)$$

де j – густина потоку маси пари, кг/(с·м²).

Густину потоку маси пари визначається за рівнянням Герца – Кнудсена [1]:

$$j = \frac{k_k}{\sqrt{2\pi R_n}} \cdot \left(\frac{p_n}{\sqrt{t_n}} - \frac{p_{нов}}{\sqrt{t_{нов}}} \right), \quad (2.115)$$

де R_n – газова стала пари; $t_n, t_{нов}$ – відповідно температури пари і поверхні конденсату; $p_n, p_{нов}$ – тиск насиченої пари відповідно за температур $t_n, t_{нов}$; $\rho_n = p_n/(R_n t_n)$; $\rho_{нов} = p_{нов}/(R_n t_{нов})$ – густина пари відповідно для t_n та $t_{нов}$.

Міжфазний термічний опір знаходиться за формулою [1]:

$$R_\phi = \frac{t_n - t_{нов}}{q}, \quad (2.116)$$

де $q = r \cdot j$ – густина теплового потоку від пари до поверхні конденсату; r – теплота фазового переходу під час конденсації, Дж/кг.

Насичена пара – це пара, тиск якої дорівнює тиску рідини. У випадку насиченої пари рідина та пара знаходяться в стані динамічної рівноваги. Насичена пара може стати ненасиченою, якщо збільшити об'єм місткості, де утворюється пара, або підвищити температуру цієї місткості, тоді утворюється **перегріта пара**. Реальні гази (повітря, кисень, водень тощо) є сильно перегрітими парами (сильно ненасиченими). Їх температура значно перевищує точку кипіння для заданого тиску, наприклад, атмосферного. Більш детальні відомості про явище конденсації та особливості розрахунку теплових процесів під час конденсації можна знайти в роботах [1, 2].

2.8 Основні поняття та закони тепло- та масообміну в двокомпонентних середовищах

Багато процесів в природі та техніці супроводжуються перенесенням маси одного компонента відносно маси іншого. Компонентами [1] називають речовини, найменше число яких достатньо для утворення всіх фаз, тобто гомогенних частин розглядуваної системи, наприклад, суміш води, водяної пари та азоту. В цій системі є два компоненти – водяна пара та азот. Для спрощення таких міркувань зробимо припущення, що компоненти між собою в хімічну взаємодію не вступають.

Типовим процесом масообміну є дифузія (diffusion) – самовільний процес установаження всередині фаз рівноважного розподілення концентрацій. В середовищі суміші з декількох компонентів однорідній за температурою та тиском процес дифузії направлений до вирівнювання концентрації компонентів в цій системі. Під час дифузії здійснюється перенесення речовини з області з більшою в область з меншою концентрацією.

Аналогічно теплообміну дифузія може проходити молекулярним (мікроскопічним) або молярним (макроскопічним) шляхами. В газах молекулярна дифузія здійснюється за рахунок теплового руху молекул.

За аналогією з масообміном під час конденсації визначають густину потоку маси

$$j = dJ/dA, \quad (2.117)$$

де J – потік маси речовини, kg/s ; A – площа, через яку проходить потік маси паралельно напрямку потоку. Густина потоку є вектором. Повний потік маси знаходять інтегруванням виразу (2.117):

$$J = \int_A j dA \quad (2.118)$$

або для $j = const$

$$J = jA. \quad (2.119)$$

В однорідній за температурою та тиском макроскопічно нерухомій двокомпонентній суміші густина потоку маси одного з компонентів за рахунок молекулярної дифузії визначається законом Фіка [1]:

$$j_{k, \partial_i} = -D \frac{\partial \rho_i}{\partial n} \quad (2.120)$$

або

$$j_{k, \partial_i} = -\rho D \frac{\partial m_i}{\partial n}, \quad (2.121)$$

де ρ_i – скінченна концентрація заданої речовини (компонента), яка є відношенням маси компонента до об'єму суміші $кг/м^3$; $m_i = \rho_i/\rho$ – відносна масова концентрація i -го компонента; ρ – густина суміші; D – коефіцієнт молекулярної дифузії (коротко – коефіцієнт дифузії) одного компонента відносно іншого, $м^2/с$; n – нормаль до поверхні однакової концентрації заданої речовини; $\partial\rho_i/\partial n$, $\partial m_i/\partial n$ – градієнти концентрації (відносної концентрації), **які завжди направлені в сторону зростання концентрації**. Градієнт концентрації (за аналогією з градієнтом температури) є рухомою силою, що обумовлює перенесення речовини. Знак мінус показує, що переміщення речовини здійснюються в сторону зменшення градієнта концентрації. Дифузія, що описується законом Фіка, називається **концентраційною дифузією**.

Згідно з кінетичною теорією газів, коефіцієнт дифузії зростає під час збільшення температури і зменшується внаслідок збільшення тиску. Для суміші газів закон Фіка можна записати у вигляді [1]:

$$j_{к.д_i} = -D_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial n}, \quad (2.122)$$

де p_i – місцевий парціальний тиск певного компонента, $Па$; n – напрямок нормалі до поверхні однакових парціальних тисків певного компонента; $D_{p_i} = D/RT$ – коефіцієнт молекулярної дифузії, віднесений до градієнта парціального тиску розглядуваного компонента, $с$; R – газова стала; T – термодинамічна температура.

На відміну від D коефіцієнт D_p є різним для компонентів певної, наприклад, бінарної суміші, для якої виконується рівність:

$$D = D_{p_1} R_1 T = D_{p_2} R_2 T, \quad (2.123)$$

звідки

$$\frac{D_{p_1}}{D_{p_2}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{M_1}{M_2}, \quad (2.124)$$

де M_i – молекулярна маса компонента; $i = 1; 2$.

У випадку змінної температури суміші виникає **термічна дифузія** (ефект Соре [1]). Якщо маси молекул двох компонентів різні, то, згідно з кінетичною теорією газів, за рахунок термодифузії більша частина більш важких молекул намагається перейти в більш холодні області. Якщо ж маси молекул однакові, то в холодні області прямують більші за розмірами молекули, але потрібно відмітити, що за певних умов (наприклад, в іонізованому газі) цей напрямок термодифузії може змінитися.

Термодифузія приводить до утворення градієнта концентрації, а процес

концентраційної дифузії намагається вирівняти концентрацію компонентів суміші і, як наслідок, з часом може установитися стаціонарний стан, за якого протилежні впливи термодифузії та концентраційної дифузії врівноважуються. Аналогічно конвекції, під час молекулярної дифузії разом із масою речовини може переноситись і теплота.

Наслідком молекулярного дифузійного перенесення теплоти є так званий **дифузійний термoeфект** (ефект Дюфо [1]) – явище виникнення різниці температур в результаті дифузійного переміщення, наприклад, двох газів, які спочатку мали однакову температуру. Явище дифузійного ефекту є зворотним відносно термодифузії. Градієнт температури, що виникає під час дифузійного термoeфекту, має такий же напрям, що і термодифузія, яка є його результатом, а сама термодифузія протилежна дифузії, завдяки якій цей градієнт з'явився.

За наявності в суміші газів градієнта повного тиску може виникнути дифузія за рахунок неоднорідності тиску, яку називають **бародифузією** [1]. Під час цього виду дифузії важкі молекули намагаються перейти в область підвищеного, а легкі – в область зниженого тиску. Також як і термодифузія, бародифузія супроводжується звичайним перенесенням маси, обумовленим різницею концентрації. Бародифузія має місце, наприклад, в газі, що обертається навколо осі; важкі молекули намагаються перейти в області найбільш віддалені від центра.

Густина потоку $j_{m,i}$ маси i -го компонента за рахунок молекулярного перенесення маси речовини з врахуванням концентраційної дифузії, термодифузії і бародифузії, описується рівнянням [1]:

$$\overrightarrow{j_{m,i}} = -\rho \left(D \nabla m_i + \frac{D_m}{T} \nabla t + \frac{D_\delta}{p} \nabla p \right), \quad (2.125)$$

де $D_m = k_m D$ – коефіцієнт термодифузії m^2/c ; $D_\delta = k_\delta D$ – коефіцієнт бародифузії m^2/c ; p – тиск в суміші, Па. В рівнянні (2.125) в дужках перший член враховує концентраційну дифузію, другий – термодифузію і третій – бародифузію. Складові потоку маси нормальні до поверхні рівних концентрацій, ізотермічної та ізобарної поверхонь. Закон (2.125) для випадку $grad p = 0$ і $grad t = 0$ переходить в закон Фіка. Коефіцієнти $k_m = D_m/D$ та $k_\delta = D_\delta/D$ називаються, відповідно термодифузійним та бародифузійним відношеннями. Для суміші газів $k_m \leq 0,1$ [1]. Бародифузійне відношення для бінарної суміші знаходиться за виразом [1]

$$k_\delta = (\rho_1 \cdot M_1 - \rho_2 \cdot M_2) / (\rho \cdot M), \quad (2.126)$$

де ρ_1, ρ_2, ρ – відповідно густини компонентів (концентрації) і суміші; M_1, M_2, M – відповідно молекулярні маси компонентів та суміші.

В рухомому середовищі речовина переноситься не тільки молекулярною дифузиею, але й конвекцією. Сумарна густина потоку j речовини за рахунок молекулярного j_{m,∂_i} і конвективного j_{ki} перенесення i -го компонента визначається рівнянням [1]:

$$\vec{j} = \vec{j}_{m,\partial_i} + \vec{j}_{k_i} = -\rho \left(D\nabla m_i + \frac{D}{T} \nabla t + \frac{D}{p} \nabla p \right) + \rho_i \vec{w}. \quad (2.127)$$

Оскільки разом з масою речовини переноситься і ентальпія $\sum_{i=1}^{i=n} (j_i h_i)$ (де h_i – питома ентальпія i -го компонента, Дж/кг), то локальну густину теплового потоку, що переноситься в суміші, можна подати рівнянням [1]:

$$\vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} h + \sum_{i=1}^{i=n} \left(\vec{j}_{m,\partial_i} h_i \right). \quad (2.128)$$

Порівняно з однокомпонентною рухомою рідиною (див. (2.4) в суміші теплота додатково переноситься дифузійною складовою теплового потоку.

За аналогією з конвективним перенесенням теплоти в однокомпонентній рідині тепло- та масообмін описується системою диференціальних рівнянь масообміну, енергії, руху та суцільності потоку, записаних для суміші в цілому.

Рівняння масообміну та енергії для бінарної суміші виводяться за такою ж методикою, яка нами використовувалась під час вивчення явищ теплопровідності та конвекції, і мають вигляд [1]:

$$\frac{dm_i}{d\tau} = D\nabla^2 m_i - \text{рівняння масообміну}; \quad (2.129)$$

$$\rho c_p \frac{dt}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t + (c_{p_1} - c_{p_2}) \rho D \nabla m_1 \nabla t - \text{рівняння енергії}, \quad (2.130)$$

де c_p, c_{p_1}, c_{p_2} – питомі теплоємності суміші та її компонентів. У рівнянні (2.130) до уваги взята тільки концентраційна дифузія в бінарній суміші, для якої сумарна відносна концентрація є постійною, тобто $m_1 + m_2 = 1$ та $\vec{j}_1 = -\vec{j}_2$ (густина потоку маси компонентів суміші).

Для завершення формулювання крайової задачі тепломасообміну до системи рівнянь, що описує цей процес, необхідно додати умови однозначності (див. п. 1.6.2).

2.8.1 Особливості тепломасообміну під час хімічних перетворень

Під час згоряння палива в камерах різних двигунів (внутрішнього згоряння, газотурбінних, ракетних тощо), хімічного виробництва, роботи МГД (магнітно-гідродинамічних) установок, польотів на гіперзвукових швидкостях в щільних шарах атмосфери та ін. процеси тепломасообміну супроводжуються хімічними реакціями. Ці реакції можуть відбуватись з виділенням або поглинанням енергії в формах теплоти, електричного струму, світла, механічного руху тощо.

Для теплотехніки важливими є ті хімічні реакції, які проходять з **поглинанням (ендотермічні реакції)** або **виділенням (екзотермічні реакції)** теплоти. Реакції цього типу, як і у випадку фазових переходів першого роду, нерозривно пов'язані з процесами тепломасообміну та часто також супроводжуються фазовими змінами.

Хімічні реакції можуть відбуватися на поверхні твердого тіла, а також в рідкому або газовому середовищі, що омиває тіло. Реакції, які відбуваються **на поверхні твердого тіла, називаються гетерогенними**, а якщо вони відбуваються **в об'ємі рідини чи газу, то їх називають гомогенними**. Якщо хімічні реакції відбуваються за межами примежового шару (далеко від поверхні тіла), то вони, зазвичай, на тепловіддачу тіла не впливають і теплообмін в цьому випадку розраховують без врахування хімічних перетворень.

Згідно з першим законом термодинаміки у випадку, коли хімічна реакція відбувається за постійних значень тиску ($p = const$) і температури ($t = const$), то теплота Q_r [1] хімічної реакції визначається за залежністю

$$Q_r = H_1 - H_2 = -\Delta H, \quad (2.131)$$

де $H_1, H_2, \Delta H$ – відповідно ентальпії початкового та фінішного станів хімічного середовища і зміни ентальпії за припущення, що під час хімічної реакції виконується тільки робота розширення (цим пояснюється знак мінус у (2.131). Причому значення Q_r не залежить від шляху процесу.

У випадку $p = const$ та $t = const$ будь-яка хімічна реакція описується **стехіометричними** (stehiometric) рівняннями вигляду [1]

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i A_i = \sum_{j=1}^{j=n} b_j B_j, \quad (2.132)$$

а молярна різниця ентальпії

$$-\Delta H = \sum_{i=1}^{i=m} a_i H_{A_i} - \sum_{j=1}^{j=n} b_j H_{B_j}, \quad (2.133)$$

де A_i, B_j – хімічні символи відповідно реагентів і продуктів реакції; a_i, b_j – стехіометричні коефіцієнти, які являють собою відповідно число молів реагентів та продуктів реакції, H_{A_i}, H_{B_j} – молярні ентальпії реагентів і продуктів реакції. Загальну структуру рівняння (2.132) можна проілюструвати прикладом хімічної реакції водню H_2 з киснем O_2 : $2H_2 + O_2 = 2H_2O + Q_\tau \uparrow$.

В хімії та термодинаміці для визначення знака теплоти хімічної реакції використовують різні системи – **термохімічну** і **термодинамічну**. За термодинамічною системою **теплоту ендотермічної хімічної реакції вважають додатною**, а **теплоту екзотермічної реакції – від’ємною**. В термохімічній системі користуються протилежною системою знаків.

Під час термохімічних розрахунків застосовують поняття теплоти утворення, яка є тепловою хімічної реакції, що виділяється внаслідок утворення з початкових вихідних речовин нової речовини (компонента). Також під час досліджень і розрахунку теплових процесів, що супроводжують хімічні реакції, використовується поняття повної питомої ентальпії h_i , до якої входить як складова величина питома теплота утворення h_i^y продукту (компонента) реакції з вихідних речовин:

$$h_i = \int c_{p_i} dt \pm h_i^y, \quad (2.134)$$

Знаки плюс та мінус у формулі (2.134) перед h_i^y пояснюються так: у випадку підведення теплоти для здійснення хімічної реакції $h_i^y > 0$, а коли теплоту необхідно відводити, то $h_i^y < 0$.

Якщо під час хімічної реакції відбуваються фазові перетворення і дифузія, то в рівнянні (2.132) необхідно врахувати теплоту фазових переходів, наприклад, для суміші газів за правилом адитивності [1]:

$$h_\phi = \sum_{i=1}^{i=n} m_i h_i, \quad (2.135)$$

де $m_i = \rho_i / \rho$ – відносна масова концентрація i -го компонента суміші; ρ_i, ρ – відповідно масова концентрація i -го компонента та густина суміші, $кг/м^3$.

Визначення повної питомої ентальпії за (2.134) дозволяє для розрахунку

ку локальної густини теплового потоку, що виникає під час хімічної реакції, використати рівняння (2.128).

За аналогією з тепломасоперенесенням під час дифузії процес тепломасоперенесення, що супроводжує хімічні реакції, також описується системою диференціальних рівнянь масообміну, енергії, руху та суцільності потоку. У випадку, коли під час хімічної реакції відбувається тільки концентраційна дифузія, рівняння енергії (2.130) після нескладних математичних перетворень із врахуванням, що $dh = c_p dt$, можна записати у вигляді [1]:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \lambda \nabla^2 t + \text{div}[(h_1 - h_2) \rho D \nabla m_1], \quad (2.136)$$

де h_1 та h_2 – питомі ентальпії початкового і фінішного станів бінарної суміші, в якій проходять хімічні реакції. Для стаціонарного теплового та масообмінного процесу сума відносних концентрацій компонентів суміші незмінна, тобто $m_1 + m_2 = 1$ та $j_1 = -j_2$ (густина потоку маси речовини до та після хімічної реакції). З урахуванням зробленого зауваження, рівняння (2.136) можна перетворити так [1]:

$$\frac{dh}{dt} = a \nabla^2 h + (1 - Le^{-1}) \text{div}[(h_1 - h_2) D \nabla m_1], \quad (2.137)$$

де $a = \lambda / (\rho c_p)$; $Le = Pr / Pr_d = \rho c_p D / \lambda = D / a$ – число (критерій) Льюїса – Семенова. $Pr_d = \nu / D$ – дифузійне число Прандтля. Число Льюїса – Семенова Le характеризує подібність полів дифузії і температури, а дифузійне число Прандтля Pr_d – полів швидкості та дифузії. Для газових сумішей $Le \approx 1$ [1].

В рівняннях масообміну, який виникає під час хімічних реакцій, необхідно ввести додаткову величину j_{vi} ($\text{кг}/(\text{м}^3 \text{с})$), яка враховує джерело утворення i -го компонента, що є продуктом хімічної реакції [1]:

$$\frac{dm_i}{d\tau} = D \nabla^2 m + j_{vi} / \rho, \quad (2.138)$$

де j_{vi} визначають з рівнянь хімічної кінетики.

Під час розрахунку тепловіддачі, що виникає в процесі проходження хімічних реакцій в газових сумішах, широко користуються перетвореним законом Ньютона – Ріхмана [1]:

$$q_c = \frac{\alpha}{c_p}(h_o - h_c), \quad (2.139)$$

де q_c – густина теплового потоку та поверхні поділу фаз; α – коефіцієнт тепловіддачі фазової поверхні; $c_p = \sum_{i=1}^{i=n} (m_i c_i)$ – питома ізобарна теплоємність суміші, яка визначається за правилом адитивності; h_o, h_c – відповідно питомі ентальпії газової суміші далеко від поверхні поділу фаз та на цій поверхні. У випадку, коли хімічні реакції здійснюються в газовій суміші, що рухається з великою швидкістю, у формулі (2.139) необхідно врахувати перенесення теплоти дисипації механічної енергії, тоді вираз (2.139) набуде вигляду [1]:

$$q_c = \frac{\alpha}{c_p}(h_r - h_c), \quad (2.140)$$

де $h_r = h_o + 0,5k_{bt}w_o^2$ – повна ентальпія відновлення (тут k_{bt} – коефіцієнт відновлення температури, який залежить від режиму течії суміші відповідно для потоків: ламінарного – $k_{bt} = \sqrt{\text{Pr}}$; турбулентного – $k_{bt} = \sqrt[3]{\text{Pr}}$; w_o – швидкість руху газової суміші далеко від фазової поверхні).

Обмежений обсяг посібника та програма курсу «Теоретичні основи теплотехніки» для спеціальності «Галузеве машинобудування» не дозволяє більш детально зупинитись на питаннях тепломасообміну. Більш широку інформацію з цих питань можна знайти в роботі [1].

2.9 Запитання для самоперевірки до розділу 2

1. Наведіть означення масових та поверхневих сил.
2. На які види поділяють конвекцію?
3. За яких умов процес конвективної тепловіддачі буде стаціонарним?
4. Запишіть в різних формах вираз для закону Ньютона – Ріхмана.
5. Наведіть залежність для локального вектора густини теплового потоку під час конвективного теплообміну. Поясніть цю залежність.
6. Якими основними фізичними параметрами визначаються властивості рідин? Наведіть залежності для кожного параметра та поясніть їх.
7. Які диференціальні рівняння потрібні для повного математичного опису процесу конвективної теплопередачі? Які припущення приймаються під час виведення цих рівнянь?
8. Виведіть рівняння енергії, руху та суцільності потоку для конвективної тепловіддачі.

9. Наведіть визначення гідродинамічного та теплового примежового шарів.
10. Що визначає критерій Рейнольдса? Запишіть вираз для його обчислення.
11. Яке основне призначення теорії подібності?
12. Які величини в теорії подібності відносять до однорідних безрозмірних змінних?
13. Наведіть основні критерії подібності, що використовуються в теорії подібності для дослідження конвективного теплообміну та дайте їх коротку характеристику.
14. За яких умов фізичні явища конвективного теплообміну будуть подібними?
15. Що розуміють під поняттям констант подібності? Як пов'язані між собою константи подібності розмірних величин?
16. Для чого складають і використовують критеріальні рівняння?
17. Що розуміють під поняттям ділянки гідродинамічної стабілізації потоку?
18. Що розуміють під поняттям ділянки термічної стабілізації потоку?
19. Які припущення приймають під час виведення інтегрального рівняння тепловіддачі для руху рідини в прямій круглій трубі?
20. Запишіть і поясніть інтегральне рівняння тепловіддачі в круглій трубі (рівняння Лайона).
21. Дайте означення процесу кипіння рідини.
22. Дайте характеристику двох основних режимів кипіння.
23. Наведіть залежність для визначення критичного радіуса бульбашки під час кипіння. Поясніть цю залежність.
24. Яким безрозмірним критерієм характеризується інтенсивність теплообміну під час кипіння?
25. Дайте означення першої, другої і третьої криз кипіння. Наведіть графічну ілюстрацію цих криз.
26. Наведіть і поясніть фізичний зміст складових критеріального рівняння для розрахунку тепловіддачі під час кипіння.
27. За якою залежністю можна оцінити термічний опір теплопередачі під час конденсації?
28. Запишіть рівняння Герца – Кнудсена і поясніть його.
29. За якою залежністю знаходять міжфазний термічний опір під час конденсації?
30. В чому полягає різниця між насиченою та ненасиченою парою?
31. Дайте означення явища дифузії.
32. Запишіть в різних формах закон Фіка і поясніть його фізичну суть.
33. Яку дифузію описує закон Фіка?
34. Що розуміють під поняттям термічна дифузія?
35. Дайте означення дифузійного термoeфекту.

36. Яке явище називають бародифузією?
37. Запишіть рівняння для визначення густини потоку маси з урахуванням концентраційної, термічної і бародифузії. Поясніть це рівняння.
38. Запишіть вираз для локальної густини теплового потоку за наявності дифузійних процесів. Поясніть цю залежність.
39. Які диференціальні рівняння необхідні для повного опису тепломасообміну в текучому середовищі за наявності дифузійних процесів?
40. В чому полягає різниця між ендотермічними та екзотермічними хімічними реакціями?
41. Як пов'язані між собою стехіометричні рівняння хімічної реакції та рівняння різниці молярних ентальпій реагентів і продуктів хімічної реакції?
42. Що розуміють під поняттям теплоти утворення під час протікання хімічної реакції? Як визначають знак цієї теплоти – «плюс» чи «мінус»?
43. Запишіть і поясніть рівняння енергії тепломасообміну під час хімічних перетворень.
44. Який фізичний зміст числа (критерію) Льюїса – Семенова Le ?
45. Запишіть і поясніть рівняння рівняння масообміну під час хімічних перетворень.
46. За яким правилом визначають питому ізобарну теплоємність газової суміші під час розрахунку тепловіддачі, що виникає в процесі проходження в цій суміші хімічної реакції?
47. Запишіть і поясніть формулу перетвореного закону Ньютона – Ріхмана для розрахунку густини теплового потоку на поверхні поділу фаз.
48. Як знаходиться повна ентальпія відновлення h_r у випадку, коли хімічні реакції здійснюються в газовій суміші, що рухається з великою швидкістю?
49. За якими залежностями можна оцінити коефіцієнт відновлення температури k_{br} для ламінарного та турбулентного режиму течії газової суміші під час розрахунку тепловіддачі, що виникає в процесі проходження в цій суміші хімічної реакції?

3 ТЕПЛООБМІН ВИПРОМІНЮВАННЯМ

Процеси променевого теплообміну значно поширені в різних галузях техніки: теплотехніці, ядерній енергетиці, ракетній техніці, металургії, світлотехніці, хімічних технологіях тощо.

Теплообмін випромінюванням – це процес поширення теплоти шляхом електромагнітних хвиль. Теплова енергія, яка переноситься електромагнітними хвилями під час поглинання цих хвиль іншими тілами знову перетворюється на енергію теплового руху молекул або атомів. Збудниками електромагнітних хвиль є заряджені частинки: електрони, іони, протони тощо. Ці частинки входять як структурні елементи до складу речовини. Електромагнітні коливання низької частоти відповідають коливанням іонів, а випромінювання, що обумовлюється рухом електронів, може мати високу частоту, якщо ці електрони входять до складу атомів та молекул і утримуються біля свого стану рівноваги значними силами.

В міжвузлях кристалічних ґраток металів електрони рухаються вільно і їх гальмування нерегулярне. Внаслідок цього електромагнітне випромінювання металів має характер імпульсів, частота хвиль яких може бути різною, зокрема і низькою. Будь-яке випромінювання має подвійну природу – корпускулярно-хвильову.

Корпускулярність випромінювання проявляється в тому, що променева енергія поширюється та поглинається не безперервно, а окремими дискретними порціями – квантами (квант електромагнітного поля називається фотоном). На цій підставі теплове випромінювання можна розглядати як фотонний газ.

Синтезом хвильових і корпускулярних властивостей є твердження, що енергія та імпульси випромінювання зосереджені у фотонах, а ймовірність знаходження фотона в тому або іншому місці простору – в хвилях.

Електромагнітне випромінювання має дуже широкий діапазон довжин хвиль від $\lambda = 5 \cdot 10^{-14}$ м (космічні промені) до $\lambda > 2 \cdot 10^4$ м (радіохвилі) і однакову фізичну природу у всьому діапазоні. Кількісна різниця в довжині хвилі є причиною того, що корпускулярні властивості більш чітко проявляються в короткохвильовому випромінюванні, а хвильові – в довгохвильовому.

Тепловому випромінюванню (інфрачервоне випромінювання) відповідає частина електромагнітного спектра з довжиною хвилі $\lambda = (8 \cdot 10^{-7} \dots 8 \cdot 10^{-4})$ м.

Випромінювання твердих та рідких тіл, як правило, мають суцільний (безперервний) спектр ($\lambda = 0 \dots \infty$). Виключення з цього правила – метали з полірованою поверхнею, які мають селективний (переривистий) спектр випромінювання. Такий самий спектр мають гази та пари. Інтенсивність випромінювання залежить від природи тіла, його температури, довжини хвилі та стану поверхні тіла, а для газів – додатково від товщини шару та

тиску. Тверді та рідкі тіла мають значні поглинальну та випромінювальну здатності, внаслідок чого в променевому теплообміні беруть участь лише поверхневі шари: для теплоізоляторів товщина цього шару близько 1 мм, а для провідників теплоти близько 10^{-3} мм [1]. Мала товщина поверхневого шару тіла, що бере участь в **променевому** (radiation) теплообміні, дозволяє розглядати теплообмін випромінюванням як поверхневе явище. Гази, пари, напівпрозорі тіла (скло, кварц, оптична кераміка тощо) характеризуються об'ємним процесом випромінювання, в якому беруть участь всі частинки об'єму речовини.

Під час зростання температури інтенсивність випромінювання збільшується, оскільки збільшується внутрішня енергія тіла, внаслідок чого змінюється також і спектральний склад випромінювання, яке зміщується в бік короткохвильового випромінювання. У випадку високих температур основним видом теплоперенесення є випромінювання, оскільки в процесах випромінювання залежність від температури інтенсивності теплового потоку значно більша, ніж у процесах теплопровідності та конвекції.

У вакуумі електромагнітні хвилі поширюються зі швидкістю світла $c = 2,9979 \cdot 10^8$ м/с ($c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-0,5}$, тут $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – абсолютна діелектрична проникність вакууму, а $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м – абсолютна магнітна проникність). Квант електромагнітного поля – фотон має масу спокою $m_0 = 0$, а його релятивіська маса залежить від частоти коливання електромагнітного поля: $m_\phi = h\nu/c^2 = h/(c\lambda)$, де $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, $\nu = c/\lambda$ – частота, Гц.

В цьому розділі будуть розглядатися тільки основні закони теплового випромінювання та основні параметри променевих потоків.

Питання теплообміну випромінюванням між твердими тілами, розділеними прозорим середовищем, а також теплообмін в поглинальних і випромінювальних середовищах, виходять за межі курсу «Теоретичні основи теплотехніки» для спеціальності «Галузеве машинобудування». Студенти, які бажають більш глибоко ознайомитись з теоретичними та експериментальними дослідженнями променевого теплообміну можуть звернутися до робіт [1, 8].

В розділі 3 збережено термінологію та позначення фізичних величин, загальноприйнятих у науково-технічній літературі для опису процесів променевого енергообміну [1, 2, 4], які не потрібно плутати з аналогічними позначеннями, що використовувались під час розгляду інших видів теплопередачі.

3.1 Види та параметри променевих потоків

Фізичні тіла випромінюють електромагнітну енергію у вигляді неперервного (суцільного) або переривистого спектра за довжинами хвиль. Якщо потік енергії, що випромінюється довільною поверхнею тіла за одиницю

часу в усіх можливих напрямках півпростору відповідає вузькому інтервалу довжин хвиль $[\lambda, \lambda + d\lambda]$, то він називається **монохроматичним або однорідним спектральним**, або просто **однорідним випромінюванням** Q_λ .

Сумарне випромінювання з поверхні в усьому діапазоні хвиль електромагнітного спектра називається **інтегральним або повним потоком випромінювання** Q . Між собою ці потоки пов'язані залежністю [1]:

$$Q = \int_0^{\infty} Q_\lambda \cdot d\lambda. \quad (3.1)$$

Для характеристики інтенсивності випромінювання використовують поняття **поверхневої густини потоку** [1]:
інтегрального випромінювання –

$$E = dQ/dA, \text{ Bm/m}^2; \quad (3.2)$$

спектрального випромінювання –

$$E_\lambda = \frac{dQ_\lambda}{dA} = dE / d\lambda, \text{ Bm/m}^3, \quad (3.3)$$

де dA – елементарна площадка (m^2), що випромінює елементарний потік dQ (Bm) або dQ_λ (Bm/m). Поверхневі потоки зі всієї поверхні для інтегрального та спектрального випромінювання можна знайти із співвідношень (3.2) та (3.3):

$$Q = \int_A E \cdot dA; \quad (3.4)$$

$$Q_\lambda = \int_A E_\lambda \cdot dA. \quad (3.5)$$

Поверхневі густини інтегрального та спектрального потоку в інтегральній формі пов'язані залежністю, аналогічною (3.1):

$$E = \int_0^{\infty} E_\lambda \cdot d\lambda. \quad (3.6)$$

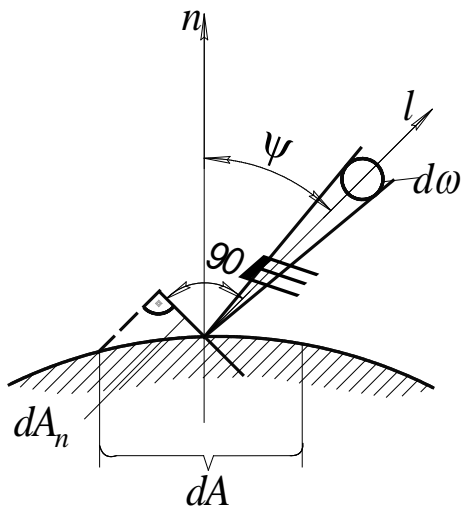


Рисунок 3.1 – До визначення яскравості випромінювання

ки dA в напрямку l , що визначається кутом ψ з нормаллю n до поверхні

(рисунок 3.1), за одиницю часу в межах одиничного тілесного кута $d\omega$, називається **кутовою густиною випромінювання**:
 спектрального потоку –

$$I_{\psi\lambda} = \frac{d^2 Q_{\psi\lambda}}{dA \cdot d\omega} = \frac{dE_{\psi\lambda}}{d\omega}; \quad (3.7)$$

інтегрального потоку –

$$I_{\psi} = \frac{d^2 Q_{\psi}}{dA \cdot d\omega} = \frac{dE_{\psi}}{d\omega}, \quad (3.8)$$

де $Q_{\psi\lambda}$, Q_{ψ} – відповідно променеві потоки спектрального та інтегрального випромінювання в напрямку l ; $E_{\psi\lambda}$, E_{ψ} – поверхневі густини спектрального та інтегрального потоків у напрямку l . Із співвідношень (3.7) та (3.8) випливає, що:

$$dE_{\psi\lambda} = I_{\psi\lambda} d\omega; \quad (3.9)$$

$$dE_{\psi} = I_{\psi} d\omega. \quad (3.10)$$

Якщо в (3.2) та (3.9) потоки спектрального та інтегрального випромінювання віднести до площадки dA_n , ортогональної до напрямку l ($dA_n = dA \cdot \cos \psi$ – проекція площадки dA), то отримуємо величини, які називаються **інтенсивностями** або **яскравостями** (brightness) **випромінювання**:

спектрального потоку –

$$I_{\lambda} = \frac{d^2 Q_{\psi\lambda}}{dA_n \cdot d\omega} = \frac{d^2 Q_{\psi\lambda}}{dA \cdot \cos \psi \cdot d\omega} = \frac{I_{\psi\lambda}}{\cos \psi}, \frac{Wm}{cm^2}; \quad (3.11)$$

інтегрального потоку –

$$I_{\lambda} = \frac{d^2 Q_{\psi}}{dA_n \cdot d\omega} = \frac{d^2 Q_{\psi}}{dA \cdot \cos \psi \cdot d\omega} = \frac{I_{\psi}}{\cos \psi}, \frac{Wm}{cm^2}, \quad (3.12)$$

звідки:

$$d^2 Q_{\psi\lambda} = I_{\lambda} \cdot d\omega \cdot \cos \psi \cdot dA; \quad (3.13)$$

$$d^2 Q_{\psi} = I \cdot d\omega \cdot \cos \psi \cdot dA. \quad (3.14)$$

Яскравості інтегрального та спектрального потоків між собою пов'язані

співвідношенням

$$I = \int_0^{\infty} I_{\lambda} \cdot d\lambda. \quad (3.15)$$

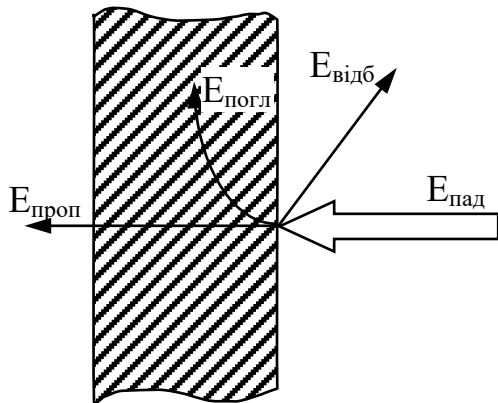


Рисунок 3.2 – Ілюстрація взаємодії потоку випромінювання, що падає, з поверхнею тіла

Якщо інтенсивність випромінювання однакова в усіх напрямках, то таке випромінювання носить назву **ізотропного** [1]. Випромінювання, що визначається природою розглядуваного тіла та його температурою, називається **власним випромінюванням**. Якщо випромінювання виходить з поверхні твердого тіла, то воно називається **ідеально-дифузійним випромінюванням**.

В променевому теплообміні, зазвичай, беруть участь як мінімум два тіла. Енергія, що випромінюється одним тілом, може частково поглинатись, відбиватись поверхнею іншого тіла або проходити крізь нього (рисунок 3.2).

За законом збереження енергії густини падаючого $E_{пад}$, відбитого $E_{відб}$, поглинутого $E_{погл}$ та пропущеного $E_{проп}$, потоків пов'язані залежністю

$$E_{пад} = E_{погл} + E_{відб} + E_{проп}. \quad (3.16)$$

Густини поглинутого, відбитого та пропущеного потоків можна виразити як частини падаючого потоку:

$$E_{погл} = A \cdot E_{пад}; \quad (3.17)$$

$$E_{відб} = R \cdot E_{пад}; \quad (3.18)$$

$$E_{проп} = D \cdot E_{пад}, \quad (3.19)$$

де A , R , D – відповідно коефіцієнти поглинання, **відбивання** (reflection) та пропускання – **прозорості** (transparency), причому $A+R+D = 1$, а значення коефіцієнтів лежать в межах від 0 до 1. Тіла, у яких $A = 1$, поглинають всю падаючу на них енергію, називаються **абсолютно чорними**. Коефіцієнт A може бути спектральним (A_{λ}) чи інтегральним A . Реальні тіла, у яких $0 \leq A \leq 1$ та $A_{\lambda} = const$, називаються **сірими**.

Тіла з коефіцієнтом відбивання $R = 1$ називаються **абсолютно дзеркальними** або **блискучими**. Якщо відбивання енергії є ідеально дифузійним (ізотропним), то поверхня тіла називається **абсолютно білою**. Ця поверхня

відбиває випромінювання рівномірно в усіх напрямках незалежно від напрямку падаючого на поверхню випромінювання.

Тіла, які повністю пропускають падаючий на них потік ($D=1$) енергії, називаються **абсолютно прозорими** або **діатермічними**. Тонкі шари сухого повітря, шари атомних газів можна вважати такими тілами. Тіла, в яких $0 \leq D \leq 1$, називаються **напівпрозорими**. До них відноситься скло, кварц, сапфір, діамант тощо.

Сумарна густина потоків власного $E_{влас}$ та відбитого $E_{відб}$ випромінювання, що випускається поверхнею розглядуваного тіла, називається густиною ефективного випромінювання [1] (рисунок 3.3):

$$E_{эф} = E_{влас} + E_{відб} = E_{влас} + R E_{пад} \quad (3.20)$$

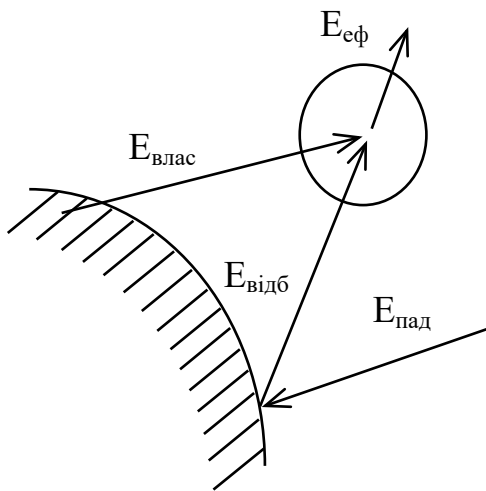


Рисунок 3.3 – До визначення густини ефективного випромінювання

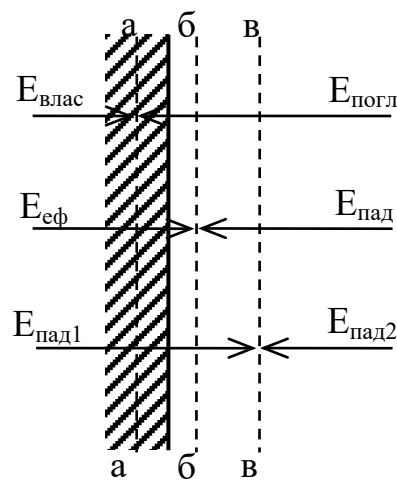


Рисунок 3.4 – До визначення результуючого теплового потоку випромінювання

Променевий теплообмін між тілами визначається потоком **результуючого випромінювання** $q_{рез}$, який є різницею між променевим потоком, що отримує розглядуване тіло ззовні, та променевим потоком, який це тіло посилає в навколишній простір. Під час дослідження променевого теплообміну результуючий потік, залежно від розташування умовної розрахункової поверхні (рисунок 3.4), можна знаходити різними способами [1]:

1. Нуссельта – потік визначається за рівнянням теплового балансу відносно поверхні $a-a$, що розташована в середині тіла поблизу його поверхні за умови, що $E_{прон} = 0$:

$$q_{рез} = E_{влас} - E_{погл} = E_{влас} - A \cdot E_{пад} \quad (3.21)$$

2. О. Е. Власова – знаходиться за рівнянням теплового балансу відносно умовної поверхні $b-b$, що знаходиться зовні тіла, але близько до його поверхні:

$$q_{рез} = E_{эф} - E_{над}. \quad (3.22)$$

3. Ю. О. Сурінова – визначається за різницею зустрічних потоків ($E_{над1}$ та $E_{над2}$), які падають на умовну поверхню $v-v$:

$$q_{рез} = E_{над1} - E_{над2}. \quad (3.23)$$

Результуючий потік $q_{рез}$ може бути величиною додатною, від'ємною або дорівнювати нулю (рівноважне випромінювання).

Порівнюючи залежності (3.21) та (3.22), можна встановити взаємозв'язок між густинами результуючого та ефективного потоків випромінювання:

$$E_{эф} = \frac{E_{влас}}{A} + q_{рез} \left(1 - \frac{1}{A} \right) \quad (3.24)$$

або з урахуванням, що для $D = 0$

$$1 - \frac{1}{A} = \frac{A-1}{A} = \frac{A-R-A}{A} = -\frac{R}{A}$$

$$E_{эф} = \frac{E_{влас}}{A} - \frac{R}{A} q_{рез}. \quad (3.25)$$

Для абсолютно чорного тіла $A = 1$ і ефективно випромінювання вироджується у власне: $E_{эф} = E_{влас} = E_o$.

Середовище, яке заповнює деякий об'єм простору, може також випромінювати, поглинати або розсіювати енергію. Потоки випромінювання середовища можна характеризувати залежностями, які аналогічні наведеним для твердих тіл. З цими залежностями можна ознайомитись в роботі [1].

Напрямок найбільш інтенсивного перенесення променевої енергії в розглядуваній точці поля випромінювання визначається вектором випромінювання (радіації):

$$\vec{q}_p = \vec{i} q_{резx} + \vec{j} q_{резy} + \vec{k} q_{резz} = \int_{4\pi} I \vec{l} d\omega, \quad (3.26)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори за напрямком осей координат, відповідно, Ox, Oy, Oz ; $q_{резx}, q_{резy}, q_{резz}$ – проекції густини результуючого потоку випромінювання на координатні осі; I – інтенсивність випромінювання (яскравість); l – напрям випромінювання; $d\omega$ – елементарний тілесний кут.

Якщо променеве перенесення теплоти розглядається як процес поширення фотонів, то використовують градієнтну форму вектора густини потоку випромінювання, аналогічну закону Фур'є [1]:

$$\vec{q}_p = -\lambda_p \cdot \text{grad}T, \quad (3.27)$$

де $\lambda_p = \frac{16 \sigma_0}{3 \bar{\alpha}} T^3$ – **умовний** коефіцієнт теплопровідності за рахунок випромінювання (радіації), який можна ввести для відносно малої довжини пробігу фотона, що дозволяє розглядати променеве перенесення теплоти як дифузію енергії випромінювання у фотонному газі; $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$, $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – стала Стефана – Больцмана; $\bar{\alpha}$ – середній коефіцієнт тепловіддачі тіла.

Дифузійне уявлення про перенесення променевої енергії за умов близьких до термодинамічної рівноваги також справедливе і для сірих середовищ, що мають велику оптичну товщину [1], а також для систем випромінюючих тіл простої геометричної форми.

3.2 Закони теплового випромінювання

Теплове випромінювання регламентується законами Планка, Релея – Джинса, Віна, Стефана – Больцмана, Кірхгофа і Ламберта. Всі ці закони отримані для ідеального абсолютно чорного тіла та термодинамічної рівноваги. У випадку термодинамічної рівноваги всі тіла, що входять до випромінювально-поглинальної системи, набувають однакової температури. Випромінювання, яким обмінюються тіла в стані термодинамічної рівноваги, називається **рівноважним** або **чорним**. Під час термодинамічної рівноваги кожне із тіл системи випромінює та поглинає енергію в однакових кількостях, внаслідок чого результуючий тепловий потік $Q_{\text{рез}}=0$. Це говорить про те, що теплове випромінювання має динамічний характер.

3.2.1 Закон Планка

Випромінювання енергії за довжинами хвиль проходить нерівномірно та залежить від температури. В 1900 році Планком була встановлена залежність спектральної густоти потоку випромінювання від довжини хвилі та температури:

$$E_{0\lambda} = \frac{2\pi C_1}{\lambda^5} \left[e^{c_2/(\lambda T)} - 1 \right]^{-1}, \quad (3.28)$$

де $C_1 = hc^2 = 5,95 \cdot 10^{-17}$, $\text{Вт}\cdot\text{м}^2$ – перша константа випромінювання; $C_2 = hc/k = 1,439 \cdot 10^{-2}$, $\text{м}\cdot\text{К}$ – друга константа випромінювання; λ – довжина хвилі, м ; T – температура тіла, К ; $c = 2,998 \cdot 10^8$ – швидкість світла у вакуу-

мі, м/с; $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$, Дж·с – стала Планка; $k = 1,381 \cdot 10^{-23}$, Дж/К – стала Больцмана.

Закон Планка встановлений теоретично. Відносно нечорних тіл він виражає максимально можливу густину потоку випромінювання. Для цих тіл випромінювання під час термодинамічної рівноваги зі спектром, подібним до спектра рівноважного випромінювання систем абсолютно чорних тіл, називається **сірим**.

Для нечорних тіл спектральний склад випромінювання окрім довжини хвилі залежить також від фізичних властивостей тіл і, зазвичай, знаходиться дослідним шляхом.

3.2.2 Закон Релея – Джинса

Цей закон отримано раніше від закону Планка експериментально. Він є одним з межових випадків закону Планка для $\lambda T \gg C_2$. Розкладаючи експоненціальну функцію $e^{C_2/(\lambda T)}$ в степеневий ряд $e^{C_2/(\lambda T)} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{C_2}{\lambda T} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{C_2}{\lambda T} \right)^2 + \dots$ і обмежуючись його першими двома складовими, знайдемо вираз для закону Релея – Джинса [1]:

$$E_{0\lambda} = 2\pi C_1 T / (C_2 \lambda^4). \quad (3.29)$$

3.2.3 Закон зміщення Віна

Закон зміщення Віна є другим межовим випадком закону Планка для $\lambda T \ll C_2$. Оскільки $e^{C_2/(\lambda T)} \gg 1$, то нехтуючи у формулі (3.28) одиницею, матимемо закон, який Він отримав в 1893 році:

$$E_{0\lambda} = \frac{2\pi C_1}{\lambda^5} e^{-C_2/(\lambda T)}. \quad (3.30)$$

Якщо похідну $dE_{0\lambda}/d\lambda$ в законі Планка (див. (3.28)) прирівняти до нуля, то знайдемо іншу форму закону Віна:

$$\lambda_{max} \cdot T = C_3, \quad (3.31)$$

де λ_{max} – довжина хвилі випромінювання, якій відповідає максимальна густина випромінювання; $C_3 = 2,8978 \cdot 10^{-3}$, м·К – стала. З залежності (3.30) видно, що зі зростанням температури максимальне значення $(E_{0\lambda})_{max}$ зміщується в бік коротких хвиль. Підставляючи з (3.31) значення λ_{max} в (3.28) ма-

ТИМЕМО:

$$(E_{0\lambda})_{max} = C_4 \cdot T^5, \quad (3.32)$$

де $C_4 = 1,286 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$ – стала.

Розділивши (3.28) на (3.32), отримаємо закон Планка в безрозмірному вигляді:

$$\frac{E_{0\lambda}}{(E_{0\lambda})_{max}} = \frac{2\pi C_1}{C_4 (\lambda T)^5} \left[e^{C_2/(\lambda T)} - 1 \right]^{-1} \quad (3.33)$$

або, підставивши з (3.31) $T = 2,8978 \cdot 10^{-3} / \lambda_{max}$, знайдемо

$$\frac{E_{0\lambda}}{(E_{0\lambda})_{max}} = \frac{2\pi C_1}{C_5 (\lambda / \lambda_{max})^5} \cdot \left[e^{C_6/(\lambda / \lambda_{max})} - 1 \right]^{-1} = f\left(\frac{\lambda}{\lambda_{max}}\right), \quad (3.34)$$

де $C_5 = 2,623 \cdot 10^{-18} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ та $C_6 = 4,966$ – сталі.

Графічно закон Планка в безрозмірному вигляді (3.34) можна подати кривою, зображеною на рисунку 3.5. Як видно з цього рисунку, максимум відношення $E_{0\lambda}/(E_{0\lambda})_{max} = 1$ відповідає $\lambda/\lambda_{max} = 1$. Ця графічна залежність справедлива для будь-яких довгих хвиль та температур тіла.

3.2.4 Закон Стефана – Больцмана

Задовго до появи квантової теорії Планка Стефаном експериментально (в 1879 році), а Больцманом теоретично (в 1884 році) була встановлена залежність густини інтегрального потоку півсферичного випромінювання від температури. Для абсолютно чорних тіл ця залежність має вигляд:

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{0\lambda} d\lambda = \sigma_0 \cdot T^4, \quad (3.35)$$

де $\sigma_0 = 5,675310^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – стала Стефана – Больцмана. Для практичного розрахунку частіше використовують іншу форму закону Стефана – Больцмана:

$$E_0 = C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (3.36)$$

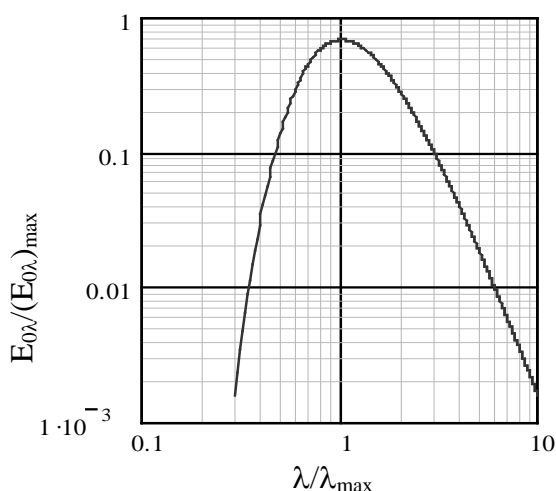


Рисунок 3.5 – Графічна ілюстрація закону Планка в безрозмірному вигляді

де $C_0 = 5,6703 \approx 5,67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла.

Інтенсивність об'ємного випромінювання у вакуумі не залежить ні від координат, ні від напрямку. Закон Стефана – Больцмана для об'ємної густини U_0 інтегрального випромінювання в вакуумі виражається формулою [1]:

$$U_0 = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_0 d\omega = \frac{4\pi}{c} I_0 = \frac{4}{c} E_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-8} E_0, \text{ Вт} \cdot \text{с} / \text{м}^3 \text{ (Дж} / \text{м}^3), \quad (3.37)$$

де $I_0 = E_0 / \pi \approx 3,18 \cdot 10^{-1} E_0 \text{ Вт} / (\text{м}^2 \text{ ср})$ – яскравість випромінювання абсолютно чорного тіла; $d\omega$ – елементарний тілесний кут.

Для сірих тіл закон Стефана – Больцмана має вигляд:

$$E = \varepsilon \cdot E_0 = \varepsilon \cdot C_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4 = C \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (3.38)$$

де $\varepsilon = E/E_0 = C/C_0$ – коефіцієнт теплового випромінювання; C – випромінювальна здатність сірого тіла, $\text{Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{K}^4)$. Коефіцієнт теплового випромінювання сірого тіла залежить від природи, температури та стану поверхні тіла. В більшості випадків цей коефіцієнт знаходять експериментально.

3.2.5 Закон Кірхгофа

Кількісний зв'язок між енергіями випромінювання та поглинання поверхнями сірих тіл та абсолютно чорних тіл установлюється за законом Кірхгофа **за умови термодинамічної рівноваги** у випромінювально-поглинальній системі коли енергія випромінювання дорівнює енергії поглинання, тобто:

$$\begin{aligned} E_1 = E_{\text{погл1}} = A_1 \cdot E_{\text{над1}} = A_1 \cdot E_0; \quad E_2 = E_{\text{погл2}} = A_2 \cdot E_{\text{над2}} = A_2 \cdot E_0; \quad \dots \\ \dots E_n = E_{\text{погл}n} = A_n \cdot E_{\text{над}n} = A_n \cdot E_0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

звідки отримаємо

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = \dots = E_n/A_n = E_0 = f(T). \quad (3.40)$$

Враховуючи в (3.40) залежність (3.38), знайдемо

$$E = \varepsilon E_0 = A E_0, \quad (3.41)$$

звідки

$$\varepsilon = A. \quad (3.42)$$

Залежність (3.42) показує, що у випадку термодинамічної рівноваги коефіцієнти випромінювання та поглинання сірих тіл рівні між собою.

Закон Кірхгофа справедливий і для спектрального теплового випромінювання як в напрямку, нормальному до поверхні тіла, так і в кутовому напрямку:

$$\varepsilon_{\lambda} = E_{\lambda}/E_{0\lambda}; \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_{\psi\lambda} = E_{\psi\lambda}/E_{0\psi\lambda}. \quad (3.44)$$

3.2.6 Закон косинусів Ламберта

Закон Ламберта встановлює зв'язок між кутовими густинами випромінювання тіла в напрямках нормалі до поверхні тіла I_n і під кутом ψ (I_{ψ}):

$$I_{\psi} = I_n \cos \psi. \quad (3.45)$$

В підрозділі 3.1 було встановлено (див. залежність (3.12)), що яскравість випромінювання $I = I_{\psi}/\cos \psi$. Порівнюючи цю залежність з (3.45), знайдемо $I = I_n$. Це означає, що у випадку, коли випромінювання тіла підлягає закону Ламберта, то яскравість не залежить від напрямку і є величиною постійною.

Яскравість I і густина інтегрального напівсферичного теплового випромінювання E пов'язані залежністю [1]:

$$I = E/\pi. \quad (3.46)$$

Закон Ламберта справедливий для чорних тіл і тіл з дифузійним випромінюванням. Багато тіл йому не підлягають, наприклад, поліровані $\psi = 60^\circ \dots 80^\circ$.

3.2.7 Чорні температури

Під чорною температурою розуміють таку умовну температуру, яку б могло мати тіло за умови, що його випромінювання чорне. Кожне тіло може характеризуватись цілим рядом чорних температур, які визначаються видом випромінювання, що випускається тілом.

У випадку однаковості густин потоків інтегрального випромінювання досліджуваного та абсолютно чорного тіл $[E(T) = E_o(T_p)]$, чорна температура називається **радіаційною** T_p . Знаходять цю температуру за законом Стефана – Больцмана:

$$T_p = T \cdot \sqrt[4]{\varepsilon}, \quad (3.47)$$

де T – дійсна температура, K ; ε – коефіцієнт випромінювання.

Чорну температуру, визначену шляхом порівняння спектральних пото-

ків випромінювання, називають **кольоровою** T_k . Зазвичай, у цьому випадку розглядають випромінювання лише для яких-небудь двох довжин хвиль λ_1 та λ_2 (двох кольорів) і використовують пропорцію:

$$\frac{E_{\lambda_1}(T)}{E_{\lambda_2}(T)} = \frac{E_{0\lambda_1}(T_k)}{E_{0\lambda_2}(T_k)}. \quad (3.48)$$

Звідки, використовуючи закон зміщення Віна (3.30), залежності (3.43) та (3.44), отримаємо:

$$T_k = \frac{C_2(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \cdot T}{\ln(\varepsilon_{\lambda_1} / \varepsilon_{\lambda_2}) \cdot T + C_2(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1})}, \quad (3.49)$$

де ε_{λ_1} та ε_{λ_2} – спектральні коефіцієнти випромінювання.

Порівнянням яскравостей випромінювання досліджуваного та абсолютно чорного тіл $[I_\lambda(T) = I_{o\lambda}(T_y)]$ знаходять чорну температуру T_y , яку називають **яскравісною** і визначають за формулою [1]:

$$T_y = \frac{C_2 \cdot T}{C_2 - \lambda T \ln \varepsilon_\lambda}. \quad (3.50)$$

Співвідношення (3.47), (3.49) та (3.50) лежать в основі оптичних методів безконтактного вимірювання високих температур (пірометри різних типів [3, 16]).

3.3 Методи визначення випромінювальної здатності твердих тіл

Під час дослідження променевого теплообміну між твердими тілами, що розділені прозорим середовищем, для визначення результуючих потоків випромінювання необхідно знати випромінювальні здатності (або коефіцієнти теплового випромінювання) тіл, які беруть участь в променевому теплообміні.

Випромінювальна здатність залежить від природи випромінювального тіла, його температури та стану поверхні, а для металів – від ступеня окислення їх поверхні. Коефіцієнт теплового випромінювання чистих металів можна розрахувати за формулою [1]:

$$\varepsilon = 3,49 \sqrt{\rho_e} \left(\frac{T}{100} \right), \quad (3.51)$$

де ρ_e – питомий електричний опір металу при 0 °С, $Om \cdot mm^2/m$; T – температура металевого тіла, K .

Коефіцієнти випромінювання сплавів та інших реальних тіл знаходять дослідним шляхом різними методами: радіаційним, калориметричним, регулярного теплового режиму та неперервним нагріванням з постійною швидкістю. Для досягнення потрібної точності під час використання цих методів перенесення теплоти за рахунок конвекції та теплопровідності має бути значно меншим порівняно з теплопередачею випромінюванням.

Обсяг посібника не дозволяє детально розглянути всі перераховані методи визначення випромінювальної здатності твердих тіл, тому обмежимося знайомством лише з радіаційним методом. Цей метод ґрунтується на порівнянні випромінювання досліджуваного тіла з випромінюванням абсолютно чорного тіла або іншого тіла з відомою випромінювальною здатністю (еталоном). Основною вимірювальною ланкою експериментального пристрою є диференціальна **термопара** (thermopair) [16]. Один спай термопари сприймає випромінювання досліджуваного тіла, а інший – еталона. Результуючий потік випромінювання визначається за термоелектричною рушійною силою диференціальної термопари, яка вимірюється гальванометром. Залежність для розрахунку густини $q_{1,2}$ результуючого потоку випромінювання згідно з законом Стефана – Больцмана можна записати в такому вигляді:

$$q_{1,2} = C_c \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = k \cdot \varphi, \quad (3.52)$$

звідки

$$C_c = (k \cdot \varphi) / [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4], \quad (3.53)$$

де C_c – випромінювальна здатність досліджуваного тіла, $Wm/(m^2K^4)$; T_1, T_2 – відповідно абсолютні температури досліджуваного тіла та приймача випромінювання (один зі спаїв термопари), K ; k – стала вимірювального приладу, φ – показання гальванометра.

Сталу приладу k знаходять із попередніх тарувальних дослідів, в яких досліджуване тіло замінено еталоном

$$k = \frac{C_e}{\varphi_e} \left[\left(\frac{T_e}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (3.54)$$

тут C_e – відома випромінювальна здатність еталона, $Wm/(m^2K^4)$; φ_e – показання гальванометра під час дослідів з еталоном; T_e – абсолютна температура еталона, K .

3.4 Рівняння перенесення променевої енергії в поглинальних, поглинально-випромінювальних та поглинально-випромінювально-розсіювальних спектральних середовищах

Середовища та речовини по-різному взаємодіють з променевими потоками. Як уже відмічалось, променева енергія може тілами та середовищами поглинатись, відбиватись, пропускатись і розсіюватись. Напівпрозорі середовища та речовини (гази, пари, скло, кераміка, напівпровідники та ін.) можуть пропускати тільки обмежену кількість променевої енергії певного спектрального складу. Інша частина цієї енергії поглинається цими середовищами чи речовинами та розсіюється. Крім того, середовище може мати також власне випромінювання. Внаслідок описаних процесів інтенсивність випромінювання вздовж якого-небудь напрямку l буде змінюватись. Зміна цієї інтенсивності визначається через рівняння перенесення променевої енергії.

3.4.1 Рівняння перенесення променевої енергії в поглинальному спектральному середовищі

Нехай на межовій поверхні поглинального середовища інтенсивність суцільного спектрального випромінювання зовнішнього джерела задана у формі яскравості $I_{\lambda, \ell=0}$, причому процес променевого перенесення енергії одновимірний (здійснюється тільки у якому-небудь напрямку l), а власне випромінювання середовища відсутнє. Процес поглинання випромінювання за описаних умов можна виразити диференціальним рівнянням [1]

$$dI_{\lambda, \ell} = -k_{\text{п}, \lambda} I_{\lambda, \ell} \cdot dl, \quad (3.55)$$

де $dI_{\lambda, \ell}$ – зміна яскравості випромінювання джерела на проміжку dl ; $k_{\text{п}, \lambda}$ – спектральна поглинальна властивість середовища; $I_{\lambda, \ell}$ – яскравість випромінювання на відстані l від точки розташування джерела.

Інтегруючи (3.55), отримаємо залежність для визначення спектральної яскравості в будь-якій точці напрямку l :

$$I_{\lambda, \ell} = I_{\lambda, \ell=0} \cdot e^{-\int_0^{\ell} k_{\text{п}, \lambda} d\ell} = I_{\lambda, \ell=0} e^{-L_{\lambda}}, \quad (3.56)$$

де $L_{\lambda} = \int_0^{\ell} k_{\text{п}, \lambda} dl$ – оптична товщина середовища (розмірність $k_{\text{п}, \lambda}$, м^{-1}).

Вираз (3.56) отримав назву закону Бугера [1]. Зазвичай, середнє значення $\overline{k_{\text{п},\lambda}} = l_{\text{оф}}^{-1}$, де $l_{\text{оф}}^{-1}$ – середня довжина вільного пробігу фотона [1]. За законом Бугера легко розрахувати спектральний коефіцієнт поглинання середовища

$$A_{\lambda} = (I_{\lambda,\ell=0} - I_{\lambda,\ell}) / I_{\lambda,\ell=0} = 1 - e^{-L_{\lambda}}, \quad (3.57)$$

звідки для випадку термодинамічної рівноваги (рівноважне випромінювання) на основі закону Кірхгофа матимемо, що $A_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda} = 1 - e^{-L_{\lambda}}$ (тут ε_{λ} – спектральний коефіцієнт випромінювання середовища). Поглинальна властивість середовища $k_{\text{п},\lambda}$ залежить від фізичної природи середовища, довжини (частоти) хвилі випромінювання, температури та тиску (для газів й парів), тому коефіцієнти поглинання A_{λ} суттєво змінюються навіть в межах однієї і тієї самої смуги спектра.

В 30 – 40-х роках 20-го століття радянський фізик В. О. Фабрикант застосував закон Бугера до середовищ, які підсилюють та випромінюють променеві потоки та отримав цікаві теоретичні результати. Розвиток ідей В. О. Фабриканта у післявоєнні часи привів до створення мазерів та лазерів.

3.4.2 Рівняння перенесення променевої енергії у поглинально-випромінювальних та поглинально-випромінювально-розсіювальних спектральних середовищах

Якщо середовище не тільки поглинає променеву енергію, але ще й має власне випромінювання, то диференціальне рівняння (3.55) необхідно записати так [1]:

$$dI_{\lambda,\ell} = k_{\text{п},\lambda} (I_{0,\lambda} - I_{\lambda,\ell}) \cdot dl, \quad (3.58)$$

де $I_{0,\lambda}$ – спектральна яскравість випромінювання абсолютно чорного тіла за температури середовища. Інтегрування рівняння (3.58) за умов постійності оптичних властивостей середовища, температури та тиску (для газів) в ньому дає:

$$I_{\lambda,\ell} = I_{\lambda,\ell=0} e^{-L_{\lambda}} + I_{o,\lambda} (1 - e^{-L_{\lambda}}) = I_{\lambda,\ell=0} (1 - A_{\lambda}) + I_{o,\lambda} A_{\lambda}, \quad (3.59)$$

де враховано, що $A_{\lambda} = 1 - e^{-L_{\lambda}}$ (див. (3.57)).

Зміна яскравості випромінювання в спектральному поглинально-випромінювально-розсіювальному середовищі описується диференціальним рівнянням, аналогічним (3.56):

$$dI_{\lambda,\ell} = (I_{0,\lambda} - I_{\lambda,\ell})k_{o,\lambda}dl, \quad (3.60)$$

де $k_{o,\lambda}$ – спектральна ослаблювальна властивість середовища [17].

3.5 Основні поняття складного теплообміну. Критерії радіаційної подібності

В реальних тілах і середовищах теплота переноситься всіма трьома видами перенесення: теплопровідністю, конвекцією та випромінюванням. Такий вид теплообміну називають складним, який поділяють на **радіаційно-конвективний** та **радіаційно-кондуктивний**. Радіаційно-кондуктивний теплообмін здійснюється в нерухомому ослаблювальному теплопровідному середовищі шляхом теплопровідності та випромінювання. Більш складним є радіаційно-конвективний теплообмін, де теплота переноситься теплопровідністю, випромінюванням і конвекцією.

Як і у випадку конвекції, складний теплообмін описується системою диференціальних рівнянь, що містить рівняння енергії, руху та суцільності (нерозривності потоку) із заданими умовами однозначності. В загальному випадку для стаціонарного радіаційно-конвективного теплообміну в однокомпонентній нестисливій рідині, яка може поглинати, випромінювати та розсіювати енергію випромінювання, рівняння енергії за відсутності внутрішніх джерел теплоти та дисипації механічної енергії, можна подати у вигляді векторної суми [1]:

$$\operatorname{div}\vec{q}_m + \operatorname{div}\vec{q}_k + \operatorname{div}\vec{q}_p = 0, \quad (3.61)$$

де $\vec{q}_m, \vec{q}_k, \vec{q}_p$ – відповідно вектори густини теплового потоку, що сформовані за рахунок теплопровідності, конвекції та радіації (випромінювання).

В загальному випадку задачі складного теплообміну дуже трудомісткі та, зазвичай, розв'язуються числовими методами або шляхом експериментальних досліджень. Стосовно радіаційно-кондуктивного теплообміну в оптично тонких ($L_\lambda \ll 1$) та оптично товстих ($L_\lambda \gg 1$) шарах середовищ знайдено відносно прості розв'язки [1]. Наприклад, залежність (3.60) за відсутності конвекції набуває вигляду:

$$\operatorname{div}(\lambda_m \operatorname{grad} t) = \operatorname{div}q_p. \quad (3.62)$$

Для одновимірної задачі (3.62) можна подати як рівність

$$q = -\lambda_m \frac{dt}{dx} + q_p = \text{const}, \quad (3.63)$$

де λ_m – коефіцієнт теплопровідності тіла (середовища). Наприклад, для оптично тонкого шару середовища, розміщеного між двома непрозорими, паралельно розташованими на відстані l стінками, що мають відповідно температури T_1 та T_2 й коефіцієнти поглинання A_1 та A_2 , густина радіаційного теплового потоку визначається на основі закону Стефана – Больцмана за формулою [1]:

$$q_p = \frac{\sigma_o (T_1^4 - T_2^4)}{A_1^{-1} + A_2^{-1} - 1}. \quad (3.64)$$

Із (3.64) можна зробити висновок, що q_p не залежить від положення будь-якої розглядуваної в цьому середовищі точки. Інтегруючи (3.63), знайдемо:

$$q = q_m + q_p = \lambda_m \Delta T / l + q_p, \quad (3.65)$$

де $q_m = \lambda_m \Delta T / l$ – густина теплового потоку, що переноситься за рахунок теплопровідності середовища; $\Delta T = T_1 - T_2$.

Розв'язки для аналогічного плоско-паралельного середовища, але з оптично товстим шаром, описуються такими залежностями [1]:

$$q_p = -\frac{16\sigma_o t^2}{3k_n} \frac{dt}{dx}; \quad (3.66)$$

$$q = -\lambda_m \frac{dt}{dx} - \frac{16\sigma_o t^2}{3k_n}, \quad (3.67)$$

звідки після інтегрування в межах $[x, l]$ та $[T_1, T_2]$, отримаємо:

$$q = \lambda_m \Delta T / l + 4\sigma_o (T_1^4 - T_2^4) / (3\bar{k}_n l), \quad (3.68)$$

де \bar{k}_n – усереднена за спектром поглинальна властивість середовища.

Для радіаційно-конвективного теплообміну розв'язування задачі навіть для простих випадків значно складніше. Під час практичного розрахунку інженерних задач такого виду теплообміну широко використовують числові методи та теорію подібності, критерії (числа) якої стосовно променевого теплообміну мають свою специфіку та називаються критеріями радіаційної подібності. Розглянемо деякі з цих критеріїв [1].

Радіаційне число Нуссельта

$$Nu_p = \alpha_p l_o / \lambda_p, \quad (3.69)$$

де α_p – радіаційний коефіцієнт тепловіддачі, $Bm/(m^2 \cdot K)$; l_o – характерний розмір тіла, m , наприклад, радіус r_o або діаметр $d_o = 2r_o$ труби, в якій здійснюється радіаційно-конвективний теплообмін; $\lambda_p = \frac{16\sigma_o T^3}{3k_n}$ – радіаційний коефіцієнт теплопровідності [1], $Bm/(m \cdot K)$.

Радіаційне число Пекле

$$Pe_p = w l_o / a_p, \quad (3.70)$$

де $a_p = \lambda_p / (\rho c_p)$ – радіаційний коефіцієнт температуропровідності.

Число Больцмана

$$Bo = \rho c_p w / (\sigma_o T^3) \quad (3.71)$$

– характеризує співвідношення між густинами теплового потоку, що переноситься конвекцією $q_k = \rho c_p w \Delta T$ та випромінюванням $q_p = c_p T^3 \Delta T$ (тут $\Delta T = T - T_o$; T_o – яка-небудь початкова температура).

Число Кірпічова

$$Ki = \sigma_o T^3 / \lambda_c k_o \quad (3.72)$$

– характеризує співвідношення між густинами теплового потоку, що переноситься радіацією q_p та теплопровідністю q_t ; λ_c, k_o – відповідно коефіцієнти теплопровідності та ослаблення середовища.

Число Старка

$$St = \sigma_o T^3 l_o / \lambda_t \quad (3.73)$$

– визначає тепловий баланс на поверхні тіла, що бере участь в радіаційно-кондуктивному теплообміні.

Число Бугера

$$Bu = \bar{k}_o l_{oc} \quad (3.74)$$

– характеризує оптичну густину середовища (тут \bar{k}_o, l_{oc} – відповідно середній коефіцієнт ослаблення та характерний розмір ослаблювального середовища).

3.6 Запитання для самоперевірки до розділу 3

1. Яку природу має теплове випромінювання?
2. Які тіла мають суцільний, а які селективний спектр випромінювання?
3. Який вид теплопередачі є переважним за високих температур?
4. Назвіть основні види та параметри променивих потоків.
5. Як пов'язані між собою параметри інтегрального та спектрального потоків випромінювання?
6. Як пов'язані між собою поверхневі та кутові густини потоків випромінювання?
7. Запишіть закон збереження енергії під час взаємодії потоку випромінювання, що падає, з тілом.
8. Які тіла називають абсолютно чорним, білим і прозорим?
9. Яку величину називають густиною ефективного випромінювання?
10. За якими способами можна визначити густину результуючого теплового потоку випромінювання під час його взаємодії з твердим тілом?
11. Яке випромінювання називається рівноважним або чорним?
12. Запишіть вираз закону Планка і поясніть його.
13. За яких умов із закону Планка можна отримати закони Релея – Джинса та Віна ?
14. Наведіть математичну залежність для закону Стефана – Больцмана і поясніть її.
15. Як можна розрахувати на основі закону Стефана – Больцмана випромінювальну здатність і коефіцієнт випромінювання сірого тіла?
16. Який фізичний зміст має закон Кірхгофа?
17. Що установлює закон косинусів Ламберта?
18. Що розуміють під поняттям «чорна» температура?
19. На які види поділяються «чорні» температури?
20. Перерахуйте методи визначення випромінювальної здатності твердих тіл.
21. Поясніть суть радіаційного методу визначення випромінювальної здатності твердих тіл.
22. Запишіть і поясніть рівняння Бугера для перенесення променевої енергії в поглинальному спектральному середовищі.
23. Що розуміють під оптичною товщиною середовища L_λ ?
24. В чому полягає відмінність між рівняннями для перенесення променевої енергії у поглинально-випромінювальних і поглинально-випромінювально-розсіювальних спектральних середовищах порівняно з рівнянням перенесення енергії в поглинальному спектральному середовищі?
25. На які види поділяють складний теплообмін та як розраховується густина теплового потоку для оптично тонких та товстих середовищ?

4 ТЕПЛОВІ НАПРУЖЕННЯ ТА ДЕФОРМАЦІЇ

Теплота, що виділяється під час роботи теплових машин, таких як двигуни внутрішнього згорання, реактивні двигуни та ін., і нетеплових «холодних» машин, які працюють на високих швидкостях з великими навантаженнями (металорізальні верстати, різного типу транспортувальні машини, преси, молоти, вібраційні технологічні машини тощо), суттєво впливає на роботу механізмів та деталей цих машин. Цей вплив обумовлений тим, що підвищення температури деталей і механізмів машин супроводжується зміною їхніх лінійних розмірів, що може спричинити виникнення в деталях механізмів високих напружень і деформацій.

Якщо матеріал під час змін температури позбавлений можливості вільно розширюватись або стискатись, то в такій деталі виникають теплові напруження, обумовлені гальмуванням теплових деформацій спряженими деталями або їх елементами. Ці гальмування поділяють на два види [18] – гальмування суміжності (гальмування спряженою деталлю) та гальмування форми (гальмування деформацій волокон деталі суміжними волокнами).

Гальмування суміжності виникає у з'єднанні деталей, виготовлених із матеріалів з неоднаковим коефіцієнтом лінійного теплового розширення, які під час роботи механізму мають різні температури.

Суть процесу гальмування суміжності та виникнення в цьому випадку теплових напружень пояснимо на прикладі з'єднання деталей, зображеному на рисунку 4.1 [18].

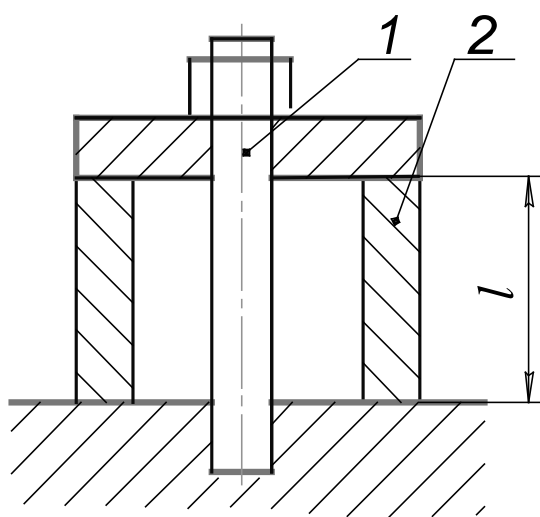


Рисунок 4.1 – Схема гальмування суміжності

Нехай втулка 2 та шпилька 1, що її стягує, виготовлені із матеріалів з різними коефіцієнтами ξ_1 та ξ_2 теплового лінійного розширення.

Під час роботи цього з'єднання в стаціонарному режимі теплообміну шпилька 1 та втулка 2 набувають відповідно температури t_1 та t_2 . Припустимо, що в процесі роботи це з'єднання нагрівалось. Якщо це з'єднання було попередньо затягнутим, то в процесі його нагрівання в цій системі виникає температурний натяг

$$\Delta l = l(\xi_2 \Delta t_2 - \xi_1 \Delta t_1) \quad (4.1)$$

або у відносних величинах

$$e_t = \frac{\Delta l}{l} = \xi_2 \Delta t_2 - \xi_1 \Delta t_1, \quad (4.2)$$

де ℓ – довжина втулки 2; $\Delta t_1 = t_1 - t_o$; $\Delta t_2 = t_2 - t_o$; t_o – початкова температура деталей з'єднання; e_t – відносна деформація.

Сумарна відносна деформація e_t шпильки 1 і втулки 2 може бути на основі закону Гука подана як сума відносних деформацій шпильки e_1 і втулки e_2 :

$$e_t = e_1 + e_2 = F_t \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) = F_t \left(\frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \right), \quad (4.3)$$

звідки

$$F_t = e_t k_1 k_2 / (k_1 + k_2), \quad (4.4)$$

де F_t – термічна сила [18]; $k_1 = E_1 A_1$, $k_2 = E_2 A_2$ – відповідно, жорсткості перерізів шпильки 1 та втулки 2; E_1 , E_2 , A_1 та A_2 – відповідно модулі пружності матеріалів і площі поперечного перерізу шпильки 1 та втулки 2.

За стаціонарного теплового режиму роботи з'єднання $t_1 = t_2 = t$ та $\Delta t = \Delta t_1 = \Delta t_2 = t - t_o$, тоді підставляючи в (4.4) значення e_t із (4.2), отримаємо

$$F_t = \Delta t (\xi_2 - \xi_1) k_1 k_2 / (k_1 + k_2) = \Delta t (\xi_2 - \xi_1) k_1 / \left(1 + \frac{k_1}{k_2} \right). \quad (4.5)$$

Теплові (або термічні) напруження в шпильці 1 σ_{t_1} (розтягування) та втулці 2 σ_{t_2} (стискання) визначаються за відомими [18] простими залежностями:

$$\sigma_{t_1} = F_t / A_1 = e_t E_1 / (1 + k_1 / k_2); \quad (4.6)$$

$$\sigma_{t_2} = F_t / A_2 = e_t E_2 / (1 + k_2 / k_1). \quad (4.7)$$

Потрібно відмітити, що відношення $\sigma_{t_1} / \sigma_{t_2} = A_2 / A_1$ не залежить від модулів пружності матеріалів шпильки 1 та втулки 2.

Для розглянутого з'єднання можливі такі випадки.

1. $\xi_2 > \xi_1$ (наприклад, втулка 2 виготовлена із алюмінієвих, магнієвих або мідних сплавів, а шпилька сталева чи з титанового сплаву). У випадку нагрівання такого з'єднання виникає додатковий натяг, пропорційний добутку $\Delta t (\xi_2 - \xi_1)$, а під час охолодження до мінусових температур (за шкалою Цельсія) складальний натяг зменшується, що негативно позначиться на несучій здатності з'єднання.

2. $\xi_1 > \xi_2$ (наприклад, втулка 2 із титанового сплаву, а шпилька зі сталі). Нагрівання у цьому випадку складальний натяг зменшує, а охолодження до мінусових температур – збільшує.

3. $\xi_1 = \xi_2$ – деталі з'єднання виготовлені із однорідних матеріалів і зміна температури з'єднання не викликає в них теплових напружень і деформацій.

Теплові напруження, які виникають від гальмування форми, обумовлені нерівномірним нагріванням чи охолодженням деталей машин, окремі волокна матеріалів яких через конфігурацію деталей не мають можливості вільно деформуватись. Такого роду напруження мають місце тільки за наявності перепаду температур в тілі деталі. Перепад температур може спричинятись як стаціонарним, так і нестаціонарним тепловим потоком. Зазвичай, в гарячих ділянках деталі з температурою, що перевищує середню, виникають напруження **стискання** [18], а в більш холодних – **розтягування**. Це ж є справедливим і для мінусових температур.

Теплові напруження та деформації обумовлені гальмуванням форми залежать від геометричної конфігурації деталі, її розмірів, механічних властивостей матеріалу та рівня перепаду температур між різними ділянками деталі. Для розрахунку теплових напружень і деформацій, що виникають в деталях простої форми, знайдено нескладні залежності [18], наприклад, для таких форм деталей.

1. Плоскі пластини в жорстких напрямних, нагрівання яких проходить в стаціонарному тепловому режимі, а тепловий потік Q рівномірний, вектор густини q якого перпендикулярний до площини пластини. Відомо (див. підрозділ 1.7, залежність (1.60), що за такого режиму теплопередачі та постійних теплофізичних параметрах матеріалу пластини ($\lambda = const$), температура поперек пластини змінюється лінійно. Нехай один бік пластини має температуру t_1 , а протилежний t_2 , причому $t_1 > t_2$, тоді середня температура цієї стінки відповідно до зроблених зауважень $\bar{t} = 0,5(t_1 + t_2)$. Якби пластинка могла вільно розширюватись під дією температури, то її шари з $t > \bar{t}$ подовжились би відносно середнього шару, а з $t < \bar{t}$ набули б менших розмірів відносно середнього шару. Відносні деформації крайніх шарів пластини:

– відносне подовження найбільш нагрітого шару

$$e_1 = \xi(t_1 - \bar{t}) = 0,5\xi(t_1 - t_2); \quad (4.8)$$

– відносне укорочення найбільш холодного шару

$$e_2 = \xi(\bar{t} - t_2) = 0,5\xi(t_1 - t_2), \quad (4.9)$$

тобто

$$e_1 = e_2 = e_{\max} = \xi(\bar{t} - t_2) = 0,5\xi(t_1 - t_2), \quad (4.10)$$

де ξ – коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу пластини.

Якщо ж пластина під час зміни температури зберігає свою початкову форму, то необхідно, щоб всі її шари внаслідок сумісності деформації [19] мали однакові розміри, тому найбільш гарячі шари **стиснуті** гальмівною дією суміжних більш холодних шарів, а найбільш холодні **розтягнуті** дією більш гарячих шарів, причому ця деформація здійснюється в двох взаємно перпендикулярних напрямках, наприклад, Ox та Oy . Найбільші напруження виникають в крайніх, поверхневих шарах.

Із теорії пружності [20] відомо, що під час симетричного розтягування-стискання (двовісний напружений стан) $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ (напруження вздовж осей Ox і Oy) та $e_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu_n \sigma_y) = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu_n \sigma_x) = e = \frac{\sigma}{E}(1 - \nu_n)$ [19, 20] (тут e_x та e_y – відносні подовження вздовж осей Ox і Oy ; E – модуль пружності матеріалу пластини; ν_n – коефіцієнт Пуассона).

Враховуючи зроблене зауваження та (4.10), отримаємо формулу розрахунку максимального напруження в крайніх шарах пластини:

$$\sigma_{\max} = \pm 0,5 E \xi \Delta t_1 / (1 - \nu_n), \quad (4.11)$$

де $\Delta t_1 = t_1 - t_2$; знак «плюс» відноситься до напружень розтягування, а «мінус» – до стискання.

Якщо відома густина теплового потоку q , то знаходячи із (1.62) температурний напір Δt_1 і підставляючи його в (4.11), знайдемо:

$$\sigma_{\max} = \pm 0,5 q \delta E \xi \Delta t_1 / [\lambda (1 - \nu_n)], \quad (4.12)$$

де δ і λ – відповідно товщина і коефіцієнт теплопровідності матеріалу пластини.

Максимальне термічне напруження згідно з (4.12) для будь-якого матеріалу пластини пропорційне комплексу $E \xi_1 / [\lambda (1 - \nu_n)] = K_t$, що має розмірність c/m^2 . Якщо взяти відношення межі текучості σ_m матеріалу до K_t , то матимемо аналог коефіцієнта запасу міцності n_t , який характеризує термічну міцність матеріалів:

$$n_t = \sigma_m / K_t = \sigma_m \lambda (1 - \nu_n) / (E \xi), \quad Bm / m. \quad (4.13)$$

2. Плоскі тонкі пластини, виготовлені із матеріалу з малим модулем пружності та защемлені двома протилежними краями. Незащемлена така пластина деформується (згинається) у вигляді сферичної поверхні, середній радіус якої $R_{cf} = \delta \left[\frac{1}{\xi \Delta t_1} + 1 \right]$ [18], а якщо пластина закріплена в двох протилежних краях (наприклад, по осі Oy), то вона під час згинання набу-

ває форми циліндричної поверхні, середній радіус якої $R_{цил} = \delta / (\xi \Delta t_1)$. В цьому випадку напруження вздовж осі Oy практично відсутні, а вздовж осі Ox можуть бути розраховані за формулою [18]:

$$\sigma_x = 0,5q\delta E\xi / \lambda. \quad (4.14)$$

3. Трубчасті деталі (циліндрична стінка). Згідно з (1.81) (див. підрозділ 1.7) температура в циліндричній стінці за стаціонарного режиму теплопередачі змінюється за логарифмічним законом, що вносить певні особливості в розрахунок термічних напружень. За аналогічними міркуваннями, зробленими під час виведення формули (4.11), отримуємо залежність для визначення термічних напружень в крайніх шарах циліндричної стінки:

$$\sigma_{max} = \pm 0,5q\delta E\xi \Delta t_1 k_{кор} / (1 - \nu_n), \quad (4.15)$$

де
$$k_{кор} = \left[2\gamma^2 / (\gamma^2 - 1) \right] - 1 / \ln(D / d) \quad (4.16)$$

– корегувальний коефіцієнт для розтягувальних напружень (холодний бік стінки):

і
$$k_{кор} = \left[2 / (\gamma^2 - 1) \right] - 1 / \ln(D / d) \quad (4.17)$$

– корегуючий коефіцієнт для стискальних напружень (гарячий бік стінки); D і d – відповідно зовнішній і внутрішній діаметри труби.

Вільні кінці трубчастих деталей по-різному деформуються залежно від характеру їх нагрівання. У випадку внутрішнього нагрівання вільний кінець труби лійкоподібно розширюється, а якщо труба нагрівається ззовні, то вільні її торці сходяться внаслідок того, що зовнішні, більш гарячі шари стінки труби стискаються, а внутрішні – розтягуються.

В теплообмінних апаратах широко використовуються для переміщення під тиском теплоносіїв тонкостінні труби, в яких напруження розтягування спричиняються діями внутрішнього тиску p та температури t , тобто сумарне напруження

$$\sigma_{\Sigma} = \sigma_p + \sigma_t, \quad (4.18)$$

де $\sigma_p = 0,5pd / \delta$ – напруження розтягу стінок труби із внутрішнім діаметром d від дії внутрішнього тиску p (формула Бойля – Маріотта [9, 18]). Кривизною стінки тонкостінної труби можна знехтувати [18], тоді, визначаючи σ_t за (4.12), знайдемо:

$$\sigma_{\Sigma} = 0,5 \left(\frac{pd}{\delta} + \frac{q\delta E\xi}{\lambda(1 - \nu_n)} \right). \quad (4.19)$$

Якщо взяти похідну $d(\sigma_{\Sigma})/d(\delta)$ та знайти екстремум цієї функції ($d(\sigma_{\Sigma})/d(\delta)=0$), то отримаємо залежність для розрахунку оптимального значення δ , за якого σ_{Σ} буде найменшим [18]:

$$\delta_{opt} = \sqrt{\frac{pd}{q}} \sqrt{\frac{\lambda(1-\nu_n)}{E\xi}}. \quad (4.20)$$

Опис теплових процесів, що виникають під час роботи складних теплових (двигунів внутрішнього згорання, турбін, компресорів та ін.) і технологічних (металорізальних верстатів, ковальських молотів, пресів тощо) машин, і спричинених ними теплових деформацій й напружень вузлів і деталей цих машин математично дуже трудомісткий. Під час розрахунку термічних деформацій і напружень в цих машинах широко використовують методи математичного та експериментального моделювання. Результати таких розрахунків реалізуються різними конструкторськими та технологічними способами зменшення термічних напружень і деформацій [18].

4.1 Запитання для самоперевірки до розділу 4

1. Яка причина виникнення теплових напружень в деталях машин?
2. Наведіть означення явищам «гальмування суміжності» та «гальмування форми». В чому полягає суть цих явищ?
3. Які два види теплових (термічних) напружень виникають в деталях з'єднань, що піддаються тепловим деформаціям? Як вид теплових (термічних) напружень пов'язаний зі знаком температури («плюс» чи «мінус» за шкалою Цельсія) деталей з'єднання?
4. За яким законом механіки розраховуються теплові деформації?
5. Запишіть формулу для розрахунку коефіцієнта запасу термічної міцності матеріалів n_t . Поясніть фізичну суть цього коефіцієнта.
6. У вигляді яких геометричних поверхонь деформуються (згинаються) плоскі тонкі пластини, виготовлені із матеріалу з малим модулем пружності, незащемлені та закріплені в двох протилежних краях?
7. Як деформуються вільні кінці трубчастих деталей залежно від характеру їх нагрівання – внутрішнього чи зовнішнього?
8. Поясніть суть формули для розрахунку оптимальної товщини тонкостінної труби теплообмінного апарата, навантаженої внутрішнім тиском.

5 ТЕПЛОСИЛОВІ ЦИКЛИ ТЕПЛОВИХ МАШИН

Теплові машини широко застосовуються в практичній діяльності людини. За призначенням ці машини можна поділити на три основні типи [6, 7]: теплові двигуни, теплові насоси (нагрівальні машини) та холодильні машини.

Теплові двигуни перетворюють теплоту на механічну роботу. Теплові насоси під час виконання роботи відбирають у середовище з меншою температурою теплоту та за рахунок цього нагрівають якесь тіло (середовище) до більш високої температури. Холодильні машини, виконуючи роботу, відбирають теплоту від охолоджуваного тіла та передають її навколишньому середовищу. У випадку неперервної дії цих машин робоче тіло в них здійснює круговий процес: в тепловому двигуні – прямий, а в тепловому насосі та холодильній машині – зворотний.

Згідно з першим законом термодинаміки **цикл** (cycle) теплової машини описується рівнянням енергобалансу [6]:

$$Q_{\tau_1} = Q_{\tau_2} + W, \quad (5.1)$$

де Q_{τ_1} – кількість теплоти, взята (або передана під час зворотного циклу) від тіла з більш високою температурою; Q_{τ_2} – кількість теплоти, передана (або відібрана) тілу чи навколишньому середовищу із більш низькою температурою; W – робота, яка здійснюється тепловою машиною за цикл. За другим законом термодинаміки для теплового двигуна з прямим циклом завжди $Q_{\tau_1} > W$, а для теплового насоса і холодильника, в яких реалізується зворотний тепловий цикл, $W \leq Q_{\tau_1}$. Рівність $W = Q_{\tau_1}$ можлива тільки у випадку Q_{τ_2} , що на відміну від прямого **теплосилового** (warmly power) циклу можливо завжди, оскільки у цьому випадку в теплоту перетворюється тільки затрачена робота W .

Тепловий двигун характеризують **термічним к. к. д.**

$$\eta_m = W / Q_{\tau_1} < 1. \quad (5.2)$$

Характеристикою теплового насоса є **коефіцієнт перетворення** [6]

$$\varphi = Q_{\tau_1} / W > 1. \quad (5.3)$$

Випадок $\varphi=1$ має місце у випадку Q_{τ_2} , але у цьому випадку тіло з високою температурою отримує теплоту тільки за рахунок роботи W і така машина не є тепловим насосом.

Холодильна машина характеризується **холодильним коефіцієнтом** [6]

$$\psi = Q_{\tau_2} / W = (Q_{\tau_1} / W) - 1 = \varphi - 1. \quad (5.4)$$

Коефіцієнт ψ може бути як більшим, так і меншим одиниці, оскільки завжди $\varphi > 1$. Наприклад, коли $\varphi > 2$, то $\psi > 1$, а коли $1 < \varphi < 2$, то $\psi < 1$, а для $\varphi = 1$ ($Q_{\tau_2} = 0$) – $\psi = 0$.

Якщо об'єднати в один агрегат тепловий двигун, що працює в одному інтервалі температур, з тепловим насосом, який працює в іншому інтервалі температур, то отримуємо пристрій, який називається **термотрансформатором** [6, 7]. Термотрансформатор дозволяє певну кількість теплоти, отриману від тіла певної температури, перетворити в іншу кількість теплоти з іншою температурою. За принципом дії термотрансформатори поділяють на підвищувальні, понижувальні та змішаного типу.

Детальне вивчення теплосилових циклів теплових машин реалізується в курсах «Технічна термодинаміка», «Теоретичні основи теплотехніки» та ін., що читаються для механічних і теплотехнічних спеціальностей закладів вищої освіти (ЗВО), які готують фахівців із конструювання та експлуатації теплових машин. Для спеціальності «Галузеве машинобудування», як уже відмічалось у вступі до цього посібника, переважне значення, враховуючи специфіку цих спеціальностей, має частина дисципліни «Теоретичні основи теплотехніки», що присвячена вивченню теоретичних основ різних видів теплопередачі, на яких ґрунтуються методики теплофізичних розрахунків технологічних процесів оброблення матеріалів різанням і тиском та теплових розрахунків вузлів і деталей механізмів та машин.

Враховуючи зроблені зауваження, в цьому розділі посібника буде розглянуто окремі ідеалізовані теплосилові цикли двигунів внутрішнього згоряння, паротурбінних теплосилових установок і холодильних машин.

Теплові цикли теплосилових установок поділяються на теплосилові газові та теплосилові парові цикли. Ефективність зворотних теплових циклів холодильних машин обумовлена видом холодоагенту, особливостями конструкції цих машин і фізичних ефектів, наприклад, Пельтьє, Еттінгсхаузена (термомагнітний ефект) чи адіабатного розмагнічування парамагнітних солей [7], які використовуються в холодильних установках без холодоагентів.

5.1 Теплосилові газові цикли двигунів внутрішнього згоряння

Двигуни внутрішнього згоряння поділяються на два основні класи: поршневі та газотурбінні. Двигун внутрішнього згоряння – теплова машина, в якій підведення теплоти до робочого тіла здійснюється за рахунок спалювання палива всередині самого двигуна. Робочим тілом в таких двигунах на **першому етапі робочого циклу є повітря або суміш повітря з па-**

ливом, що легко запалюється, а на другому етапі – це продукти згоряння палива, які розширюючись, виконують корисну роботу. Як паливо використовують рідкі або газоподібні горючі речовини: бензин, гас, солярове масло, природний газ, метан, водень тощо.

В двигунах внутрішнього згоряння тиск робочого тіла не дуже високий, а його температура значно перевищує критичну температуру згоряння палива, що з гарним наближенням дозволяє розглядати робоче тіло як ідеальний газ, а це суттєво спрощує термодинамічний аналіз теплосилових циклів цих двигунів.

Розглянемо основні типи теплосилових газових циклів поршневих двигунів внутрішнього згоряння. Основними ланками будь-якого поршневого двигуна (рисунок 5.1) є циліндр 1 з поршнем 2, який через кривошипно-шатунний механізм 3, з'єднується

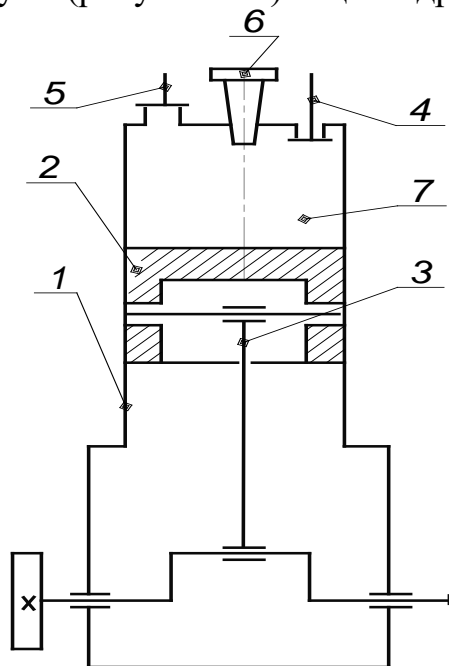


Рисунок 5.1 – Принципова схема двигуна внутрішнього згоряння

через систему механічних передач з виконавчою ланкою (на схемі не показана). Циліндр 1 оснащений двома клапанами 4 та 5, через які здійснюється відповідно подача робочого тіла (повітря або паливної суміші) та видалення продуктів згоряння. 6 – електрична свічка, яка живиться електричним струмом високої напруги (карбюраторний чи інжекторний двигун) або форсунка, через яку вприскується під високим тиском в робочу камеру 7 циліндра 1 паливо (дизельний двигун).

В сучасних поршневих двигунах внутрішнього згоряння реалізуються три основних види теплосилових газових циклів: Отто (згоряння за

$V = const$), Дизеля (згоряння за $p = const$) та Трінклера (спочатку згоряння за $V = const$, а потім за $p = const$). Тут V та p відповідно об'єм робочої камери двигуна та тиск в ній в момент запалювання паливної суміші.

Цикл Отто – це цикл карбюраторних та інжекторних двигунів внутрішнього згоряння, який в 1876 році вперше здійснив німецький конструктор Н. А. Отто.

Ідеалізований цикл Отто [7], поданий в координатах p – V (pV -діаграма), зображено на рисунку 5.2. Цикл Отто складається з двох адіабат: стискання паливної суміші 1–2 й розширення продуктів згоряння паливної суміші 3–4 та двох ізохор 2–3 підведення і 4–1 відведення теплоти.

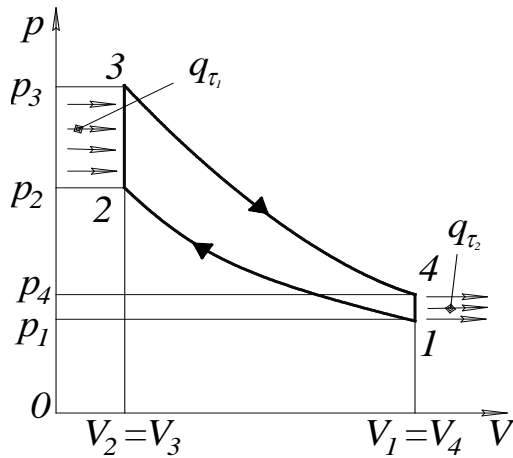


Рисунок 5.2 – Ідеалізований цикл Отто

Термічний к.к.д. циклу Отто визначимо за такими міркуваннями. Питому кількість теплоти q_{τ_1} (Дж/кг), що підводиться до робочого тіла в ізохорному процесі 2–3 згоряння паливної суміші знайдемо за відомою залежністю [6, 7]:

$$q_{\tau_1} = c_v (T_3 - T_2), \quad (5.5)$$

де c_v – середня питома теплоємність робочого тіла для розглядуваного інтервалу температур цього тіла від T_2 до T_3 після підведення теплоти. Якщо вважати робоче тіло ідеальним газом, то $c_v = \text{const}$.

За аналогічною (5.5) формулою розраховується кількість теплоти q_{τ_2} , що відводиться в ізохорному процесі 4–1 від робочого тіла:

$$q_{\tau_2} = c_v (T_4 - T_1), \quad (5.6)$$

тут T_4 та T_1 – температури робочого тіла після здійснення ним роботи розширення на адіабаті 3–4 до та після відведення теплоти.

Використовуючи залежність (5.2), отримаємо формулу для розрахунку термічного к.к.д. $\eta_{\tau.O}$ двигуна, що працює за циклом Отто:

$$\eta_{\tau.O} = \frac{q_{\tau_1} - q_{\tau_2}}{q_{\tau_1}} = 1 - \frac{q_{\tau_2}}{q_{\tau_1}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{(T_4 / T_1 - 1) T_1}{(T_3 / T_2 - 1) T_2}, \quad (5.7)$$

де $W = q_{\tau_1} - q_{\tau_2}$ – питома робота розширення продуктів згоряння за адіабатою 3–4.

Співвідношення між температурами, що входять до формули (5.7), можна визначити, користуючись рівняннями Пуассона та Менделєєва – Клапейрона [6, 7]:

$$\begin{cases} p_1 V_1^k = p_2 V_2^k; \\ p_4 V_4^k = p_3 V_3^k; \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} p_1 = RT_1 / V_1; & p_2 = RT_2 / V_2; \\ p_3 = RT_3 / V_3; & p_4 = RT_4 / V_4, \end{cases} \quad (5.9)$$

де $p_1 \dots p_4$ – тиск в середовищі робочого тіла відповідно в точках діаграми p - V 1...4; $V_1 = V_4$; $V_2 = V_3$ – об’єми робочого тіла, що відповідають ізохорам 4–1 та 2–3; R – універсальна газова стала; $k = c_p / c_v$ – показник адіабати (тут c_p – середня теплоємність робочого тіла для сталого тиску, $c_p = const$).

Із (5.8) з використанням (5.9), знайдемо:

$$p_1 / p_2 = (V_2 / V_1)^k = (RT_1 / V_1) / (RT_2 / V_2) = \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1}, \quad (5.10)$$

звідки

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{k-1} = \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{k-1}, \quad (5.11)$$

де $\varepsilon = V_1 / V_2$ – показник, названий ступенем стискування [7].

З цих самих залежностей (5.8) та (5.9) після нескладних алгебраїчних перетворень із врахуванням, що $V_1 = V_4$ й $V_2 = V_3$, отримаємо:

$$T_4 / T_1 = T_3 / T_2. \quad (5.12)$$

Підставляючи (5.11) та (5.12) в (5.7), матимемо:

$$\eta_{т.о} = 1 - \varepsilon^{-(k-1)}. \quad (5.13)$$

Формула (5.13) показує, що термічний к.к.д. циклу Отто залежить тільки від ступеня стискування ε робочого тіла в адіабатному процесі 1–2, причому чим вищий ε , тим вищий к.к.д. циклу.

Ступінь стискування ε в циклі можна підвищити, якщо стискати не паливну суміш, а чисте повітря та після завершення процесу його стискування вводити в робочу камеру циліндра (камеру 7 згоряння, див. рисунок 5.1) паливо. В 1897 році німецьким інженером Р. Дизелем був створений двигун внутрішнього згоряння, що реалізує теплосиловий газовий цикл згоряння паливної суміші постійного тиску $p = const$. Ідеалізована діаграма в p - V координатах циклу Дизеля подана на рисунку 5.3. Цикл Дизеля складається з адіабати 1–2 стискування чистого повітря, ізобари 2–3 згоряння па-

ливної суміші за $p = const$, що вприскується через форсунку 6 (див. рисунок 5.1) в камеру 7 в кінці процесу стискання повітря. Повітря внаслідок стискання нагрівається до температури T_2 , що перевищує температуру спалаху паливної суміші, продукти згоряння якої розширюються за адіабатою 3–4, під час цього процесу виконується корисна робота переміщення поршня двигуна. Відпрацьовані продукти згоряння разом із залишковою теплотою $q_{\tau 2}$ відводяться за ізохорою 4–1.

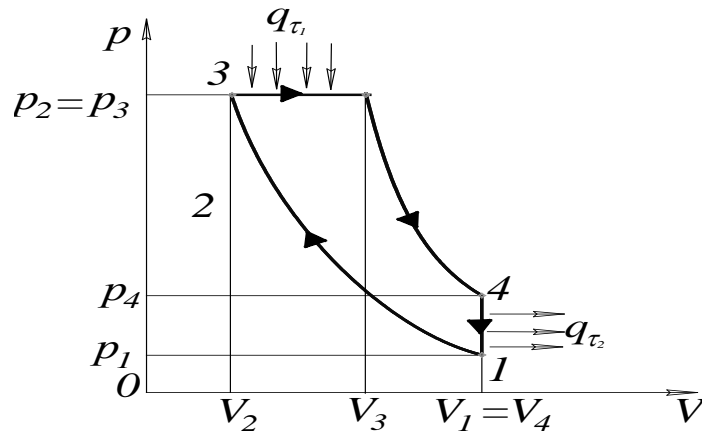


Рисунок 5.3 – Ідеалізований цикл Дизеля

Термічний к.к.д. Дизеля знайдемо за міркуваннями, аналогічними тим, що застосовувались до визначення к.к.д. циклу Отто:

$$\eta_{m.Д} = 1 - \frac{q_{\tau 2}}{q_{\tau 1}} = 1 - \frac{c_v (T_4 - T_1)}{c_p (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{(\varepsilon_{non}^k - 1)}{k(\varepsilon_{non} - 1)} \varepsilon^{-(k-1)}, \quad (5.14)$$

де $q_{\tau 1} = c_p (T_3 - T_2)$ – питома кількість теплоти, що підводиться до робочого тіла в ізобарному процесі 2–3 згоряння паливної суміші [6, 7]; $\varepsilon_{non} = (V_3 / V_2)$ – ступінь попереднього розширення під час згоряння паливної суміші, який для ізобарного процесу ідеального газу пов’язаний з об’ємами V_3 й V_2 та температурами T_2 і T_3 співвідношенням [7]

$$\varepsilon_{non} = V_3 / V_2 = T_3 / T_2. \quad (5.15)$$

Аналіз (5.14) показує, що термічний к.к.д. циклу Дизеля тим вищий, чим більший ступінь стискання ε (як в циклі Отто) та чим менший ступінь попереднього розширення ε_{non} .

В 1904 році російський інженер Г. В. Трінклер запропонував проміжний між циклами Отто та Дизеля тепловий газовий цикл для двигунів внутрішнього згоряння (на Заході цей цикл іноді називають циклом Саба-

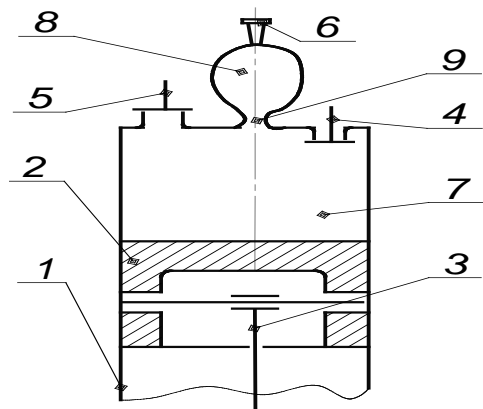


Рисунок 5.4 – Принципова схема двигуна внутрішнього згоряння, що працює за циклом Трінклера

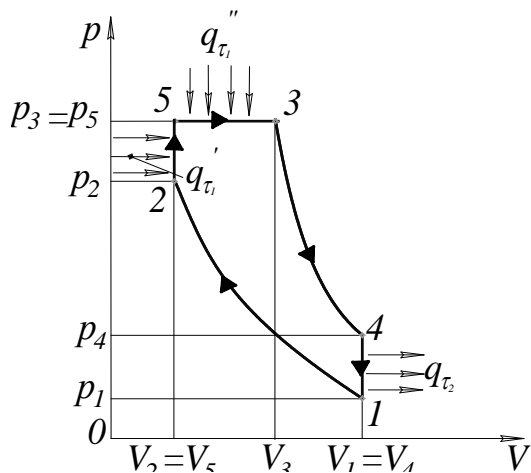


Рисунок 5.5 – Ідеалізований цикл Трінклера

через дросельний канал 9 в робочу камеру 7 та там догоряє за ізобарою 5–3. Розширюючись за адіабатою 3–4, продукти згоряння виконують корисну роботу переміщення поршня 2. Теплота, що залишилась після розширення продуктів згоряння палива, відводиться разом із останніми за ізохорою 4–1.

На відміну від двигуна Дизеля, двигун Трінклера не потребує паливного насоса високого тиску для подавання через форсунку 6 палива. Рідке паливо, що надходить у форкамеру 8, розпилюється струменем стисненого повітря, що надходить з робочої камери 7 циліндра 1.

Термічний к.к.д. циклу Трінклера знаходиться за тими самими теоретичними основами, що й к.к.д. Отто та Дизеля [7]:

те [7]). Двигуни, які працюють за циклом Трінклера, мають так звану форкамеру, з'єднану із робочою камерою циліндра дросельним каналом 9 (рисунок 5.4). Ланкам двигуна Трінклера, які виконують такі самі функції, як і в двигунах Отто та Дизеля, на схемі, зображеній на рисунку 5.4, присвоєно такі самі номери позицій, як на рисунку 5.1.

Ідеалізована діаграма циклу Трінклера подана на рисунку 5.5. Чисте повітря за рахунок інерції маховика двигуна стискається за адіабатою 1–2 та, нагріваючись до високої температури T_2 , запалює паливну суміш, що подається у форкамеру 8 під відносно невисоким тиском через форсунку 6. Розташування та форма форкамери 8 і дросельного каналу 9 вибираються таким чином, щоб змішування повітря з паливом було якнайкращим для забезпечення швидкого згоряння частини палива у маленькому об'ємі форкамери 8 (ізохора 2–5). Через малий об'єм форкамери 8 тиск палива, що не згоріло, повітря та продуктів згоряння перевищує тиск гарячого повітря в робочій камері 7 циліндра 1, внаслідок чого ця суміш проходить

$$\begin{aligned}
\eta_{m.T} &= 1 - \frac{q_{\tau_2}}{q_{\tau_1}} = 1 - \frac{c_v(T_4 - T_1)}{c_v(T_5 - T_2) + c_p(T_3 - T_5)} = \\
&= 1 - \frac{c_v \left(\frac{T_4}{T_1} - 1 \right)}{c_v \left(\frac{T_5}{T_2} - 1 \right) + k \frac{T_5}{T_2} \left(\frac{T_3}{T_5} - 1 \right)} \frac{T_1}{T_2} = \\
&= 1 - \frac{\left(\xi \varepsilon_{non}^k - 1 \right)}{\left(\xi - 1 \right) + k \xi \left(\varepsilon_{non} - 1 \right)} \varepsilon^{-(k-1)},
\end{aligned} \tag{5.16}$$

де $q_{\tau_1} = q'_{\tau_1} + q''_{\tau_1} = c_v(T_5 - T_2) + c_p(T_3 - T_5)$ – питома кількість теплоти, що підводиться до робочого тіла в ізохорному 2–5 та ізобарному 5–3 процесах згоряння палива; $\varepsilon_{non} = V_3 / V_5 = T_3 / T_5$ – ступінь попереднього розширення під час згоряння паливної суміші; $\xi = p_5 / p_2 = T_5 / T_2$; $\xi \varepsilon_{non}^k = T_4 / T_1 = p_4 / p_1$

Порівнянням термічних к.к.д. циклів Отто, Дизеля та Трінклера можна визначити між ними такі співвідношення за умов:

а) однакові ступені стискання ε –

$$\eta_{т.д} < \eta_{т.т} < \eta_{т.о}; \tag{5.17}$$

б) однакові найбільші температури згоряння паливної суміші T_3 –

$$\eta_{т.д} > \eta_{т.т} > \eta_{т.о}. \tag{5.18}$$

Таким чином, оскільки в двигуні Дизеля ступінь стискання $\varepsilon = 15 \dots 16$ [7], що значно вищий, ніж в двигуні Отто, він має найвищий термічний к. к.д. Крім того, двигун Дизеля може працювати на більш дешевому паливі, оскільки не потребує підготовки паливної суміші такими складними механізмами, як карбюратор чи інжектор.

В поршневих двигунах внутрішнього згоряння одним із основних недоліків є наявність кривошипно-шатунного механізму, який обумовлює нерівномірність руху колінчастого вала (кривошипа) двигуна, що не дозволяє зосередити велику потужність в одному агрегаті. Цього недоліку не має двигун іншого типу – газотурбінний, який має відносно високий термічний к.к.д. і дозволяє за малих габаритів отримувати в одному агрегаті великі потужності.

Обмежене використання газотурбінних двигунів внутрішнього згоряння (авіація, силові установки морських суден, залізничний транспорт тощо) обумовлено недостатньою жароміцністю конструкційних матеріалів, з

яких виготовляють деталі турбін. Останніми роками в провідних індустріальних країнах світу в результаті інтенсивних досліджень та інженерного пошуку створено нові високоміцні жаростійкі матеріали, застосування яких в газотурбінних двигунах дозволить підвищити їх ефективність і економічність та розширити сфери використання.

Газотурбінні двигуни внутрішнього згоряння, як і поршневі двигуни, поділяють на два основні типи: із згорянням палива за $p = const$ та за $V = const$.

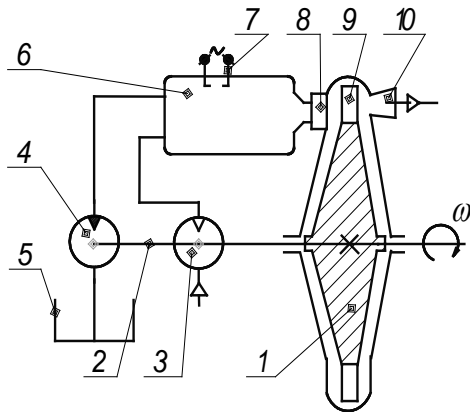


Рисунок 5.6 – Принципова схема газотурбінного двигуна внутрішнього згоряння, що працює за теплосиловим циклом згоряння палива за $p = const$

Принципова схема газотурбінного двигуна внутрішнього згоряння, в якому здійснюється теплосиловий цикл згоряння палива за $p = const$, зображена на рисунку 5.6. Двигун складається із турбіни 1, на валу 2 якої встановлено компресор 3 і паливний насос 4. Паливний насос 4 всмоктує паливо із бака 5 та подає його в камеру згоряння 6, куди компресором 3 також подається повітря, стиснуте до потрібного тиску. В камері 6 суміш палива спочатку запалюється, наприклад, від електричної свічки 7,

яка потім може від'єднуватись від джерела струму, оскільки на відміну від поршневого двигуна, який є машиною періодичної дії, газотурбінний двигун – це машина неперервної дії. Продукти згоряння, розширюючись в соплах 8 газової турбіни 1, потрапляють на її лопаті 9, де їх енергія перетворюється на механічну енергію обертального руху турбіни 1, яка розганяється до кутової швидкості ω . Відпрацьовані продукти згоряння викидаються в атмосферу через випускний патрубок 10 під тиском, який є постійним і трохи перевищує атмосферний, тоді як в поршковому двигуні під час відкриття вихлопного клапана тиск відпрацьованих продуктів практично миттєво знижується до атмосферного, за час, впродовж якого поршень переміщується дуже мало ($V \approx const$).

Ідеалізований цикл описаної схеми газотурбінного двигуна в p - V координатах зображено на рисунку 5.7, де процес 1–2 стискання повітря в компресорі 3 є ізотермічним ($T_1 = T_2$), а згоряння палива в камері 6 відбувається в ізобарному процесі 2–3, розширення продуктів згоряння в соплах 8 проходить за адіабатою 3–4, а відводиться теплота за ізобарою 4–1. Ізотермічність процесу 1–2 стискання повітря реалізується багатоступінчастим стисканням повітря в компресорі 3 з проміжним охолодженням повітря в спеціальних холодильниках – теплообмінниках [7].

Термічний к.к.д. $\eta_{m.ГД_i}$ описаної схеми газотурбінного двигуна розраховується за тими самими принципами, що й к.к.д. поршневих двигунів внутрішнього згоряння:

$$\begin{aligned} \eta_{т.ГД_i} &= 1 - \frac{q_{\tau_2}}{q_{\tau_1}} = 1 - \frac{c_p(T_4 - T_1) + C}{c_p(T_3 - T_2)} = \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{T_4}{T_2} - 1\right) + \frac{k-1}{k} \ln \frac{p_2}{p_1}}{\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)} = 1 - \frac{\gamma^{\frac{k-1}{k}} \left[\frac{k-1}{k} \ln \gamma - 1 \right] + \varepsilon_{non}}{\gamma^{\frac{k-1}{k}} (\varepsilon_{non} - 1)}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

де $q_{\tau_1} = c_p(T_3 - T_2)$ – питома кількість теплоти, що підводиться до робочого тіла в ізобарному процесі 2–3, який характеризується температурами T_3 та T_2 ; $q_{\tau_2} = q'_{\tau_2} + q''_{\tau_2} = c_p(T_4 - T_1) + RT_1 \ln(p_2/p_1)$ – питома кількість теплоти, яка відводиться від робочого тіла в ізобарному 4–1 та ізотермічному 1–2 процесах, яким відповідають температури $T_1 = T_2$ й T_4 та тиски p_2 і p_1 (див. рисунок 5.7); $\gamma = p_2/p_1$; $\varepsilon_{non} = V_3/V_2 = T_3/T_2$ – ступінь попереднього розширення робочого тіла; $R/c_p = (c_p - c_v)/c_p = (k-1)/k$, оскільки $T_1 = T_2$.

Максимальне значення $\eta_{т.ГД_i}$ можна визначити з (5.19), якщо частинна похідна $\partial \eta_{т.ГД_i} / \partial \gamma = 0$, тоді, знаходячи звідси значення $\gamma = \varepsilon_{non}^{k/(k-1)}$, отримаємо:

$$\eta_{m.ГД_i}^{\max} = 1 - \frac{\ln \varepsilon_{non}}{\varepsilon_{non} - 1}. \quad (5.20)$$

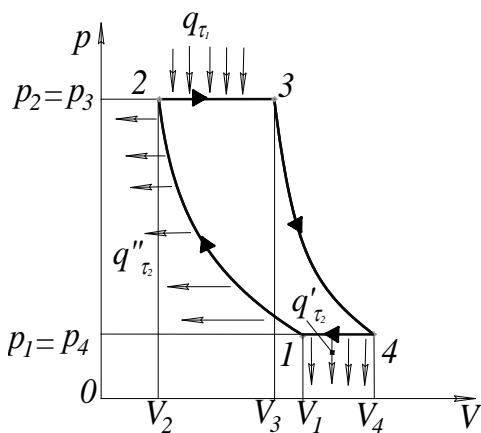


Рисунок 5.7 – Ідеалізований цикл газотурбінного двигуна із згорянням палива за $p = \text{const}$

У випадку адіабатного стискання повітря в компресорі 3 (процес 1–2) $q_{\tau_2} = c_p(T_4 - T_1)$ і термічний к.к.д. $\eta_{т.ГД_a}$ такого циклу розраховується за формулою:

$$\eta_{m.ГД_a} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\gamma^{(k-1)/k}}. \quad (5.21)$$

Порівняння циклів газотурбінних двигунів зі згорянням палива за $p = \text{const}$ для випадків ізотермічного та адіабатного стискання повітря в процесі 1–2, за умов

рівності підведених питомих кількостей теплоти q_{T_1} , максимальних тисків p_3 та максимальних температур T_3 , показує, що цикл роботи газотурбінного двигуна з адіабатними стисканням повітря є більш економічним, оскільки

$$\eta_{т.ГД_а} > \eta_{т.ГД_і} \cdot \quad (5.22)$$

Газотурбінні двигуни внутрішнього згоряння можуть працювати і на газоподібному паливі. В цьому випадку паливо в камеру б подається не насосом 4 (див. рисунок 5.6), а газовим компресором.

Нині розроблено багато схем газотурбінних двигунів, які працюють за різними теплосиловими газовими циклами. З особливостями схемних рішень таких двигунів та розрахунку їх термічних к.к.д. можна ознайомитись в роботах [7, 21].

5.2 Теплосилові парові цикли

В сучасній стаціонарній теплоенергетиці здебільшого використовують для приведення в рух генераторів електричного струму парові теплосилові турбінні установки (двигуни), робочим тілом в яких є водяна пара. Вода – це найдоступніше та найдешевше робоче тіло. Оскільки робоче тіло парових установок впродовж циклу змінює свій агрегатний стан від рідкого до газоподібного, то теплові парові цикли мають ряд особливостей, які суттєво відрізняються від теплосилових газових циклів.

Робочий процес паросилових установок може бути реалізований за циклами Карно та Ренкіна [6, 7]. На рисунку 5.8 зображено схему паросилової установки, котра працює за циклом Карно (рисунок 5.9), який здійснюється за умови, що робоче тіло змінює свій агрегатний стан від рідини до **вологоді** пари.

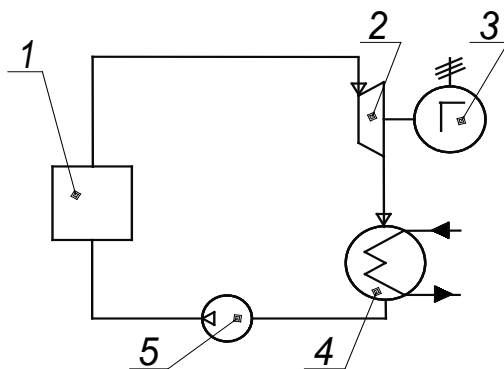


Рисунок 5.8 – Схема паросилової установки, що працює за циклом Карно

В технічній термодинаміці [6, 7] доводиться, що ізобарні процеси підведення 4–1 та відведення 2–3 теплоти за постійних температур $T_1 = T_4 = const$ та $T_2 = T_3 = const$ одночасно є ізотермічними, якщо в цей самий час відбувається процес переходу чистої речовини із рідкого в газоподібний стан і якщо під час цього зміна тиску в робочому тілі після підведення та відведення теплоти здійснюється адіабатично (див. адіабати 3–4 й 1–2 на рис. 5.9), то це й є цикл Карно.

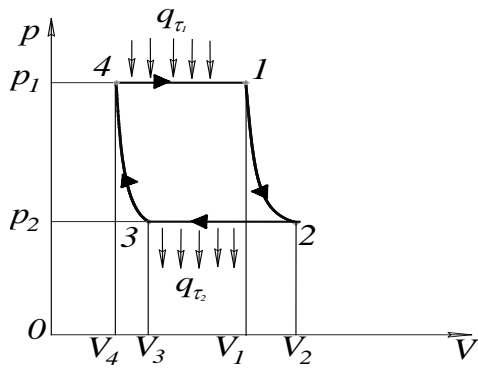


Рисунок 5.9 – Ідеалізований теплосиловий паровий цикл Карно

чної кінетичної енергії, яка на лопатях парової турбіни 2 перетворюється на кінетичну енергію обертального руху вала парової турбіни 2, з'єданого з валом електрогенератора 3. В електрогенераторі 3 механічна енергія перетворюється на електричну.

На виході із парової турбіни 2 уже більш волога пара (відбулась часткова конденсація) має тиск p_2 і відповідну йому температуру $T_2 = const$. Ця пара надходить в теплообмінник 4 (конденсатор), де вона охолоджується до температури T_3 , і за рахунок конденсації ступінь вологості пари зростає. Після конденсатора 4 волога стискається до тиску p_1 і направляється в котел 1. Таким чином термодинамічний цикл замикається.

Термічний к.к.д. циклу Карно знаходиться за простою формулою:

$$\eta_{m.K} = 1 - \frac{q_{\tau_2}}{q_{\tau_1}} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad (5.23)$$

де $q_{\tau_1} = c_p T_1$ і $q_{\tau_2} = c_p T_2$ – відповідно питомі кількості теплоти, що підводиться до робочого тіла і відводиться від нього.

Промислові установки, що працюють за циклом Карно, широкого практичного застосування не знайшли через те, що умови роботи проточних частин парових турбін і компресорів цих установок, через які проходить волога пара із завислими в ній краплинами води, дуже важкі, оскільки вода є агресивним середовищем. Крім того, течія такої вологої пари є газодинамічно недосконалою, що суттєво знижує внутрішній відносний к.к.д. паросилової установки в цілому, а компресор для стискання вологої пари великого об'єму з малим тиском є громіздким і складним пристроєм, привод якого споживає значну потужність [7].

Відмічені недоліки циклу Карно частково можуть бути усунені, якщо відведення теплоти в конденсаторі буде мати такий рівень, за якого волога пара повністю сконденсується. В цьому випадку після конденсатора стискати від тиску p_2 до тиску p_1 потрібно буде не вологу пару малої густини, а

воду, стисливість якої значно менша стисливості пари, а також суттєво меншим від об'єму пари є об'єм води, що вийде з конденсатора. Важливим моментом також є те, що для переміщення води із конденсатора в котел паросилової установки можна застосувати конструктивно прості, компактні та дешеві гідронасоси, які до того ж для приведення в дію відносно мало споживають енергії.

Теплосиловий паровий цикл, побудований на описаних принципах, в 50-х роках 19 століття був запропонований шотландським інженером У. Ренкіним і німецьким фізиком, одним із творців термодинаміки, Р. Клазіусом. В технічній літературі цей цикл називається циклом Ренкіна.

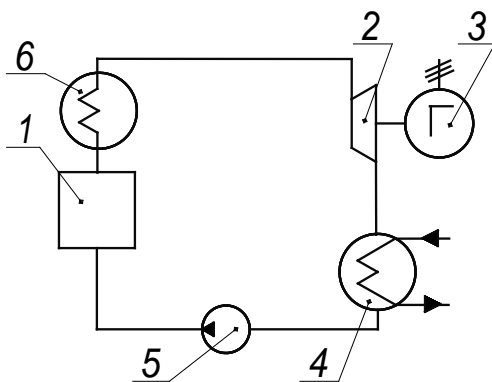


Рисунок 5.10 – Схема паросилової установки, що працює за циклом Ренкіна

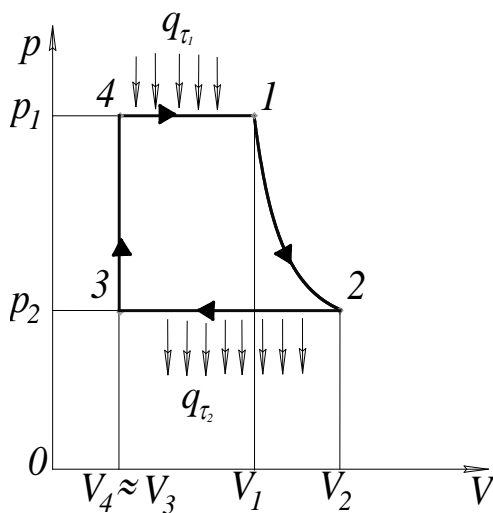


Рисунок 5.11 – Ідеалізований теплосиловий паровий цикл Ренкіна

Схема теплосилової установки, що працює за циклом Ренкіна (рисунок 5.10), структурно аналогічна установці, принцип дії якої ґрунтується на циклі Карно (див. рисунок 5.8). Різниця між цими установками полягає в заміні компресора вологої пари на водяний гідронасос 5 і вмиканні у лінію гарячої пари пароперегрівника 6 з метою підвищення термічного к.к.д. циклу Ренкіна.

Використання пароперегрівника 6 дозволяє підвищити температуру пари вище температури насичення, яка регламентується рівнем тиску p_1 (рисунок 5.11).

За рахунок перегрівання пари її вологість в кінці процесу розширення за адиабатою 1–2 в паровій турбіні 2 буде меншою, ніж в циклі Карно, що покращує умови роботи поточної частини турбіни та підвищує її внутрішній відносний к.к.д., тому цикл Ренкіна з перегрівом пари є основним теплосиловим циклом силових установок сучасної теплоенергетики. В циклі Ренкіна доцільно питоми кількості теплоти підведеної $q_{\tau 1}$ та відведеної $q_{\tau 2}$ відповідно в ізобарних процесах 4–1 і 2–3 до робочого тіла, визначати через питомі ентальпії:

$$q_{\tau 1} = h_1 - h_4; \quad (5.24)$$

$$q_{\tau 2} = h_2 - h_3, \quad (5.25)$$

де h_1 – ентальпія перегрітої пари на виході з пароперегрівника 6; h_4 – ентальпія води на виході з гідронасоса 5 (на вході в котел 1); h_2 – ентальпія вологої пари на виході з турбіни 2 при тиску p_2 ; h_3 – ентальпія води з температурою T_2 на виході з конденсатора 4.

Із врахуванням (5.24) та (5.25), отримаємо формулу для розрахунку термічного к.к.д. циклу Ренкіна:

$$\eta_{т.р} = \frac{q_{\tau_1} - q_{\tau_2}}{q_{\tau_1}} = \frac{(h_1 - h_4) - (h_2 - h_3)}{h_1 - h_4} \quad (5.26)$$

або

$$\eta_{т.р} = \frac{(h_1 - h_2) - (h_4 - h_3)}{h_1 - h_4}, \quad (5.27)$$

де $(h_4 - h_3)$ – питома робота гідронасоса 5, що затрачується на стискання води та переміщення її в котел 1; $(h_1 - h_2)$ – питома робота, затрачена на розгін турбіни до кутової швидкості ω обертання вала генератора 3.

Для паросилових установок низького тиску робота гідронасоса $(h_4 - h_3)$ мала порівняно з роботою $(h_1 - h_2)$ в турбіні 2, тобто можна вважати, що $h_3 \approx h_4$, тоді

$$\eta_{м.р} \approx \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_4}. \quad (5.28)$$

У випадку паросилових установок високого тиску нехтувати роботою гідронасоса 5 не можна і термічний к. к. д. необхідно визначати за формулою (5.27).

5.3 Зворотні теплові цикли холодильних машин

Холодильні машини (далі холодильники) прийнято характеризувати холодопродуктивністю Q_{px} – кількістю теплоти, що відбирається від охолоджуваного об'єму за одиницю часу. В міжнародній системі одиниць Q_{px} вимірюється у *Вт*.

В ідеальному холодильнику здійснюється зворотний цикл Карно [6, 7], який є найбільш ефективним з усіх холодильних циклів. Холодильний коефіцієнт цього циклу знаходять за формулою

$$\psi = T_2 / (T_1 - T_2). \quad (5.29)$$

де T_1 і T_2 – відповідно температури холодоагенту до та після його адиабатного розширення. Зворотні (оборотні) цикли реальних холодильників відрізняються від циклу Карно.

Найбільш поширені холодильники (за видом холодоагенту) таких груп:

а) газові, зокрема повітряні, в яких холодоагентом є повітря, стан якого далекий від лінії насичення;

б) парові, холодоагентом яких є пари різних речовин (аміак, фреон, хладон, сірчаний ангідрид, хлористий метил, рідкий двоокис вуглецю тощо). Парові холодильники поділяються на парокомпресорні, пароінжекторні та абсорбційні.

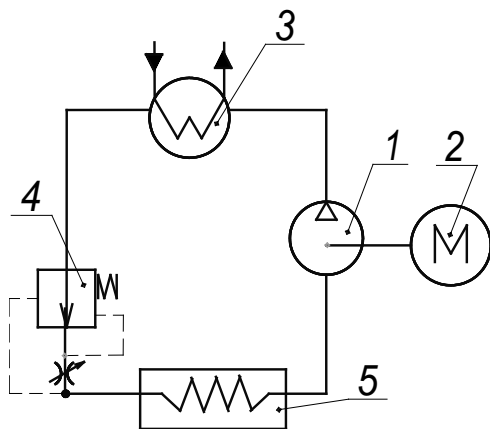


Рисунок 5.12 – Спрощена схема парокомпресорного холодильника

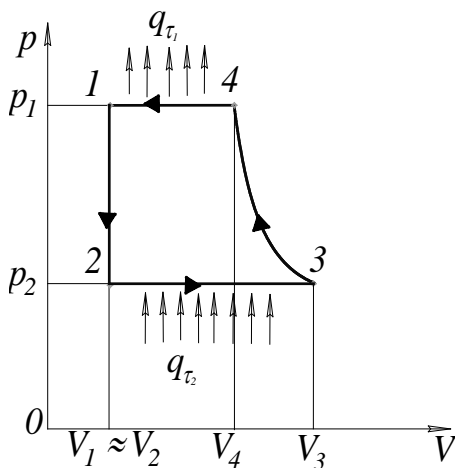


Рисунок 5.13 – Ідеалізований цикл парокомпресорного холодильника

параметрами тиску p_1 та температури T_1 направляється в дросельний (редукційний) клапан 4, де її тиск знижується до рівня p_2 , внаслідок чого з клапана 4 виходить волога пара з температурою T_2 . Волога пара з клапана 4 надходить у випарник 5 холодної камери, де за рахунок теплоти, яка відбирається від охолоджуваних об'єктів, рідина, що міститься у вологій

Теплові цикли холодильників різних типів детально вивчають в спеціалізованих курсах дисциплін, що викладаються для теплотехнічних спеціальностей, тому, з метою ознайомлення з принципом роботи холодильної машини, розглянемо тільки цикл роботи парокомпресорного холодильника, який широко використовується в промисловості та побуті.

Спрощена схема парокомпресорного холодильника зображена на рисунку 5.12. Працює цей холодильник таким чином. Волога пара легко киплячого рідкого холодоагенту (температура кипіння за атмосферного тиску $t_k \leq 0$ °С) стиснута до тиску p_1 в компресорі 1, що приводиться в дію від двигуна 2, надходить в охолоджувач (конденсатор) 3, в якому внаслідок теплопередачі відбувається конденсація цієї пари.

Охолодження конденсатора в промислових холодильниках здійснюється проточною водою, а побутових – повітрям навколишнього середовища. Процес конденсації відбувається за ізобароізотермою 4–1 (рисунок 5.13) таким чином, що із конденсатора 3 рідина виходить в стані насичення. Далі ця рідина з

парі холодоагенту випаровується і ступінь сухості цієї пари зростає.

Суха пара із випарника 5 направляється в компресор 1, який стискає її в адіабатному процесі 3–4 від тиску p_2 до тиску p_1 . Таким чином із компресора 1 виходить суха насичена пара, яка направляється в конденсатор 3, внаслідок чого цикл замикається. В деяких холодильниках пара холодоагенту після випарника 3 сепарується з метою відділення вологи та підвищення внутрішнього відносного к.к.д. компресора.

Зворотний тепловий цикл парокompресорного холодильника є дещо подібним до теплосилового циклу Ренкіна, на відміну від якого процес 1–2 розширення холодоагенту в дросельному клапані 4 здійснюється за необоротною адіабатою.

Необоротність процесу дроселювання обумовлена зростанням ентропії холодоагенту внаслідок розсіювання енергії через внутрішнє тертя в останньому, що дещо зменшує холодопродуктивність цього типу холодильника порівняно з холодильними машинами, які працюють за зворотним циклом Карно [7]. Холодильний коефіцієнт ψ парокompресорного холодильника можна розрахувати на підставі таких міркувань. Оскільки розширення за процесом 1–2 холодоагенту у зворотному тепловому циклі цього холодильника відбувається без виконання зовнішньої роботи, то питома ентальпія h_1 холодоагенту на початку його розширення дорівнює питомій ентальпії h_2 холодоагенту в кінці процесу 1–2, тобто $h_1 = h_2$, тому затрачена в циклі питома робота буде дорівнювати питомій роботі компресора 1

$$w_{\text{компр}} = h_4 - h_3, \quad (5.30)$$

де h_3 і h_4 – питомі ентальпії холодоагенту відповідно на початку та в кінці адіабатного процесу 3–4. Питому теплоту, яка підводиться до холодоагенту у випарнику 5, знайдемо за формулою [7].

$$q_{\tau_2} = h_3 - h_2. \quad (5.31)$$

Підставляючи значення q_{τ_2} із (5.31) та $w_{\text{компр}}$ з (5.30) у (5.4), отримаємо залежність для визначення холодильного коефіцієнта парокompресорного циклу:

$$\psi = (h_3 - h_2) / (h_4 - h_3). \quad (5.32)$$

Більш детально із іншими принципами побудови холодильних машин та особливостями їх зворотних теплових циклів можна ознайомитись в роботах [7, 21].

5.4 Запитання для самоперевірки до розділу 5

1. На які основні типи за призначенням поділяють теплові машини?
2. Наведіть означення теплових двигунів, теплових насосів, холодильників і теплових трансформаторів.
3. Які теплові кругові процеси здійснює робоче тіло в теплових двигунах, теплових насосах і холодильниках, відповідно?
4. Запишіть і поясніть формули для розрахунку термічного к.к.д. η_T , коефіцієнта перетворення φ , та холодильного коефіцієнта ψ .
5. На які два класи поділяють двигуни внутрішнього згорання?
6. Що є робочим тілом у двигунах внутрішнього згорання, які працюють відповідно за циклами Отто та Дизеля, на першому та другому етапах їх робочого циклу?
7. Які фізичні припущення дозволяють розглядати робоче тіло в двигунах внутрішнього згорання як ідеальний газ?
8. Наведіть і поясніть ідеалізовані pV -діаграми циклів Отто, Дизеля та Трінклера.
9. За якими теоретичними законами термодинаміки для ідеального газу виведено формули для розрахунку термічних к.к.д. двигунів внутрішнього згорання, які працюють за циклами Отто, Дизеля та Трінклера?
10. Чому в двигуні, що працює за циклом Отто, не можна підвищити ступінь стискання робочого тіла до рівня ступеня стискання робочого тіла в двигуні, що працює за циклом Дизеля?
11. За якої умови термічний к.к.д. двигуна, що працює за циклом Дизеля буде вищим термічних к.к.д. двигунів внутрішнього згорання, які працюють за циклами Отто та Трінклера?
12. В чому полягає принципова відмінність між поршневыми та газотурбінними двигунами внутрішнього згорання?
13. Накресліть принципову схему газотурбінного двигуна внутрішнього згорання та поясніть принцип роботи цього двигуна.
14. Термічний к.к.д. якого газотурбінного двигуна внутрішнього згорання вищий – з ізотермічним чи адіабатним стисканням повітря?
15. В чому полягає принципова відмінність між теплосиловими паровими та теплосиловими газовими циклами?
16. Чому теплосиловий паровий цикл Ренкіна економічно більш вигідний, ніж такий самий цикл Карно?
17. Накресліть спрощену схему парокомпресорного холодильника та поясніть принцип його роботи на основі ідеалізованої pV -діаграми робочого циклу цього холодильника.
18. Чому процес розширення холодоагенту в дросельному (редукційному) клапані парокомпресорного холодильника здійснюється за необоротною адіабатою та як це впливає на холодопродуктивність цього типу холодильників?

6 ПРАКТИКУМ

Мета практикуму – закріплення в свідомості студентів основних теоретичних положень дисципліни «Теоретичні основи теплотехніки» та набуття практичних навичок розв’язування теплофізичних задач для різних видів тепломасообміну.

Задачі для самостійного розв’язування складені відповідно до теоретичного змісту розділів посібника. В кінці умови кожної задачі наведено відповідь для контролю правильності розв’язку. Для полегшення розв’язування задач в кінці переліку їх умов розміщено приклади типового розв’язання задач.

Для самоконтролю ступеня засвоєння дисципліни «Теоретичні основи теплотехніки» в кінці практикуму наведено тести із 40 питань, що охоплюють зміст основних розділів посібника. На кожне питання тестів надано чотири варіанти відповідей, один з яких правильний.

6.1 Умови задач

1. Під час калібрування отвору діаметром $d = 20,6$ мм до інструмента (дорн), після того як він повністю увійде в заготовку, прикладена сила $F = 22$ кН, під дією якої дорн рухається рівномірно зі швидкістю $v = 12$ м/хв. Довжина заготовки $l = 42$ мм, осьовий крок між зубцями дорна $t = 6$ мм, ширина зубців $B = 1$ мм. Вважаючи, що вся потужність тертя переходить в тепло, визначити: 1) середню густину теплового потоку на поверхнях контакту зубців інструмента з поверхнею оброблюваної заготовки; 2) кількість теплоти, що виділяється під час оброблення; 3) середній градієнт температури на внутрішній поверхні заготовки, якщо коефіцієнт теплопровідності матеріалу заготовки $\lambda = 40$ Вт/(м·°С).

Відповідь: $q = 9,71 \cdot 10^6$ Вт/м²; $Q_{\tau} = 924$ Дж; $gradt = - 2,43 \cdot 10^5$ °С/м.

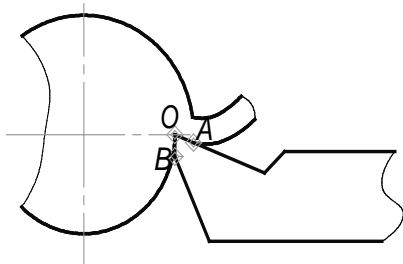


Рисунок 6.1

2. Під час точіння заготовки із сталі затрачується ефективна потужність $P_{ef} = 2780$ Вт. 5% від цієї потужності повністю перетворюється в теплоту і передається через контактну площадку $OA = 1,5$ мм (рис. 6.1) в різець, а з нього 1% від P_{ef} повертається в заготовку через контактну площадку $OB = 0,12$ мм. Визначити: 1) густини теплового потоку через площадки OA та OB , якщо ширина обох площадок $b_1 = b_2 = 5$ мм, а теплові потоки по поверхні площадок розподілені рівномірно;

2) кількості теплоти, що виділяються на площадках *OA* та *OB* за час оброблення $\tau = 30$ с і середні градієнти температури на цих площадках, якщо коефіцієнт теплопровідності матеріалу заготовки $\lambda = 36,9$ *Вт/(м·°С)*.

Відповідь: $q_{OA} = 1,85 \cdot 10^7$ *Вт/м²*; $q_{OB} = 4,63 \cdot 10^7$ *Вт/м²*;

$Q_{\tau OA} = 4170$ *Дж*; $Q_{\tau OB} = 834$ *Дж*; $(gradt)_{OA} = - 5,01 \cdot 10^5$ *°С/м*; $(gradt)_{OB} = - 1,26 \cdot 10^6$ *°С/м*.

3. Під час тривалої роботи токарного верстата установлюється стаціонарний тепловий режим, за якого верхня кришка шпиндельної коробки має температуру на зовнішньому боці $t_1 = 34,7$ *°С*, а на внутрішньому – $t_2 = 35$ *°С*. Кришка виготовлена з чавуну, коефіцієнт теплопровідності якого $\lambda = 40$ *Вт/(м·°С)*. Визначити: 1) кількість теплоти $Q_{\tau\Sigma}$, що її віддає кришка за кожну хвилину роботи верстата; 2) середнє значення градієнта температури між боками кришки; 3) густину теплового потоку на поверхні кришки. Розміри кришки $900 \times 660 \times 12$ *мм³*.

Відповідь: $Q_{\tau\Sigma} = 35640$ *Дж*; $gradt = - 25$ *°С/м*; $q = 1000$ *Вт/м²*.

4. Під час тривалої роботи гідронасоса установлюється стаціонарний тепловий режим, за якого через задню кришку гідронасоса проходить тепловий потік $Q = 17$ *Вт*, який спричиняє градієнт температури між зовнішнім та внутрішнім боками кришки, $grad t = - 40$ *°С/м*. Визначити коефіцієнт теплопровідності матеріалу кришки, якщо її діаметр $d_k = 130$ *мм* і товщина $h = 16$ *мм*, а також розрахувати густину q теплового потоку, що проходить через кришку, і температуру t_1 зовнішнього боку кришки, якщо внутрішній бік кришки нагрівається до температури $t_2 = 43$ *°С*.

Відповідь: $\lambda = 31,95$ *Вт/(м·°С)*; $q = 1278$ *Вт/м²*; $t_1 = 42,36$ *°С*.

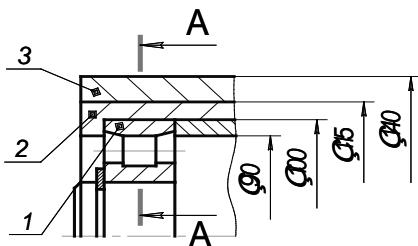


Рисунок 6.2

5. Для оцінювання кількості теплоти, що відводиться від доріжки кочення роликів підшипника (рис. 6.2), розрахувати в перерізі А–А еквівалентний коефіцієнт теплопровідності підшипникового вузла (розміри вказані на рисунку 2.3), який складається із зовнішнього кільця 1 підшипника (сталь ШХ15, $\lambda_1 = 33,4$ *Вт/(м·°С)*), стакана 2 (сталь 40Х, $\lambda_2 = 34$ *Вт/(м·°С)*) та маточини 3 (чавун СЧ12, $\lambda_3 = 40$ *Вт/(м·°С)*), а також визначити загальний лінійний термічний опір шарів 1...3 і лінійні термічні опори окремих шарів цієї циліндричної стінки.

Відповідь: $\lambda_{екв} \approx 36$ *Вт/(м·°С)*; $R_{\Sigma} = 6,10 \cdot 10^{-3}$ *(°С·м)/Вт*;

$R_1 = 1,58 \cdot 10^{-3}$ *(°С·м)/Вт*; $R_2 = 2,06 \cdot 10^{-3}$ *(°С·м)/Вт*; $R_3 = 2,46 \cdot 10^{-3}$ *(°С·м)/Вт*.

6. Сталева циліндрична втулка спеціального вузла тертя з метою підвищення зносостійкості покрита по зовнішній поверхні нітридом титану, товщиною $\delta = 0,03$ мм. Діаметри втулки: $d_{зов} = 52$ мм; $d_{внут} = 42$ мм. Коефіцієнти теплопровідності: сталі – $\lambda_1 = 40$ Вт/(м·°С), покриття – $\lambda_2 = 10$ Вт/(м·°С). Тепловий режим – стаціонарний. Температури поверхонь втулки: $t_{зов} = 310$ °С; $t_{внут} = 120$ °С. Визначити температуру t_n втулки, розташовану під покриттям.

Відповідь: $t_n = 308,97$ °С.

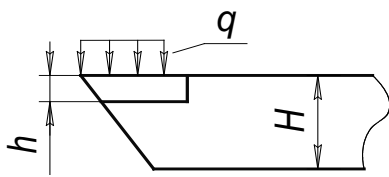


Рисунок 6.3

7. Сталеву заготовку обробляли різцем, оснащеним пластинками з твердого сплаву Т14К8 ($\lambda_1 = 34,2$ Вт/(м·°С). За виробничої необхідності за тих самих умов різання перейшли на різці з пластинками із твердого сплаву Т15К6 ($\lambda_2 = 27,3$ Вт/(м·°С). Теплопровідність сталевий державки $\lambda_3 = 39,6$ Вт/(м·°С).

Як потрібно змінити товщину пластинки h на h' за $H = const$ (товщина державки, рис. 6.3), щоб під час переходу до нового ріжучого матеріалу еквівалентний коефіцієнт теплопровідності не змінився?

Оцініть термічні опори пластинок для вказаних твердих сплавів.

Відповідь: $h/h' = [\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1)] / [\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2)] \approx 0,35$; $R_h / R_{h'} \approx 0,44$.

8. Визначити коефіцієнт теплопровідності λ матеріалу труби теплообмінного апарата, якщо критичний діаметр (зовнішній) труби $d_{2кр} = 404$ мм за коефіцієнта тепловіддачі її зовнішньої поверхні $\alpha_2 = 180$ Вт/(м²·°С), а також розрахувати: 1) лінійний термічний опір циліндричної стінки для d_2 та $d_1 = 200$ мм (внутрішній діаметр труби); 2) лінійний коефіцієнт теплопередачі k_l і тепловий потік Q через циліндричну стінку, якщо довжина труби $l = 1$ м, коефіцієнт тепловіддачі внутрішньої поверхні $\alpha_1 = 360$ Вт/(м²·°С), а перепад температур на стінці труби $\Delta t = 70$ °С.

Відповідь: $\lambda = 36,36$ Вт/(м·°С); $R_{lc} = 9,67 \cdot 10^{-3}$ (°С·м)/Вт;

$k_l = 26,8$ Вт/(м·°С); $Q = 5890,64$ Вт.

9. Металевий провідник приєднано до джерела електроенергії потужністю $P = 60$ Вт. Розміри провідника: діаметр $d = 2,5$ мм; довжина $l = 110$ мм. За час $\tau = 5$ с провідник нагрівається рівномірно по об'єму до температури $t_1 = 190$ °С. Температура навколишнього середовища $t_0 = 20$ °С. Термічний опір провідника $R_T = 890$ °С/Вт. Нехтуючи теплообміном у навколишнє середовище, визначити: 1) коефіцієнти теплопровідності λ і температуропровідності a та питому теплоємність c

матеріалу провідника, якщо густина його матеріалу $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$;
2) густину теплового потоку q на поверхні провідника.

Відповідь: $\lambda = 25,19 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$; $a = 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; $c = 408,73 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$;
 $q = 6,95 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$.

10. Мідний провідник напівприродної термопари діаметром $d = 0,3 \text{ мм}$ і довжиною $l = 30 \text{ мм}$, покритий низькотеплопровідною ізоляційною плівкою, затиснуто між двома половинками пластини, торець якої з'єднаний з провідником. Пластину разом з провідником шліфують. За яким законом змінюватиметься температура по довжині провідника x , якщо надлишкова температура його торця, що шліфується, $t_2 = 400 \text{ °C}$, а температура другого торця $t_0 = 20 \text{ °C}$? Який тепловий потік відводиться через провідник, якщо коефіцієнт теплопровідності міді $\lambda_m = 361 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$. Взяти до уваги, що на торці провідника, який шліфується, виникають межові умови другого роду: для $x = 0$ густина теплового потоку $q_0 = -\lambda \cdot dt/dx$.

Відповідь: $t = 13,33 \cdot (30-x) + 20$ (тут x в мм); $Q \approx 0,34 \text{ Вт}$.

11. Через тришарову плоску стінку проходить під час стаціонарного процесу теплопровідності тепловий потік густиною $q = 6 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$. Товщина зовнішніх шарів стінки $\delta_1 = \delta_3 = 0,5 \text{ мм}$, а середнього – $\delta_2 = 2 \text{ мм}$. Коефіцієнти теплопровідності шарів: $\lambda_1 = \lambda_3 = 5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$; $\lambda_2 = 40 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$. Температура зовнішнього боку стінки $t_{c1} = 300 \text{ °C}$. Визначити температури t_{c2} та t_{c3} середнього шару і t_{c4} внутрішнього боку стінки та еквівалентний коефіцієнт теплопровідності стінки $\lambda_{екв}$.

Відповідь: $t_{c2} = 294 \text{ °C}$; $t_{c3} = 291 \text{ °C}$; $t_{c4} = 285 \text{ °C}$; $\lambda_{екв} = 12 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$.

12. Через тришарову плоску стінку проходить під час стаціонарного процесу теплопровідності тепловий потік, густиною $q = 8 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$. Товщина зовнішніх шарів $\delta_1 = \delta_3 = 1 \text{ мм}$, а середнього – $\delta_2 = 5 \text{ мм}$. Коефіцієнти теплопровідності зовнішніх шарів $\lambda_1 = \lambda_3 = 20 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$. Температури зовнішніх боків стінок $t_{c1} = 300 \text{ °C}$ та $t_{c4} = 150 \text{ °C}$. Визначити: температури середнього шару t_{c2} та t_{c3} і коефіцієнт теплопровідності матеріалу цього шару; термічний опір стінки.

Відповідь: $t_{c2} = 296 \text{ °C}$; $t_{c3} = 154 \text{ °C}$; $\lambda_2 = 2,82 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$;

$R_c = 1,87 \cdot 10^{-3} \text{ (°C} \cdot \text{м)/Вт}$.

13. Через тришарову циліндричну стінку під час стаціонарного процесу теплопровідності проходить тепловий потік з лінійною густиною $q_l = 2 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}$. Товщина зовнішнього шару стінки $\delta_2 = 0,4 \text{ мм}$, а зовнішній діаметр труби $d_2 = 60 \text{ мм}$. Внутрішній діаметр труби $d_1 = 40 \text{ мм}$, а товщина внутрішньої стінки $\delta_1 = 0,5 \text{ мм}$. Теплопровідності шарів: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$; $\lambda_3 = 361 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$. Температура внутрішнього боку стінки

$t_{c1} = 250 \text{ }^\circ\text{C}$. Визначити температури t_{c2} зовнішнього боку труби та t_{c3} і t_{c4} внутрішнього шару, де відповідно t_{c3} та t_{c4} – температури на внутрішньому і зовнішньому боках внутрішнього шару.

Відповідь: $t_{c2} = 246,64 \text{ }^\circ\text{C}$; $t_{c3} = 248,03 \text{ }^\circ\text{C}$; $t_{c4} = 247,71 \text{ }^\circ\text{C}$.

14. Через сферичну стінку відбувається стаціонарний процес теплопередачі від одного середовища до іншого за таких значень параметрів процесу: $t_{внут} = t_{c1} = 150 \text{ }^\circ\text{C}$ – температура внутрішнього боку сфери з $d_{внут} = d_1 = 80 \text{ мм}$, $d_{зов} = d_2 = 100 \text{ мм}$; $t_{p2} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ – температура зовнішнього середовища; $\lambda = 40 \text{ Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу сфери; $Q = 25 \text{ Вт}$ – тепловий потік через сферичну стінку; $\alpha_1 = 20 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$ та $\alpha_2 = 6,14 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$ – коефіцієнти тепловіддачі поверхонь (внутрішньої та зовнішньої) сфери. Визначити: температури t_{c2} , t_{p1} ; коефіцієнт теплопередачі $k_{сф}$ через сферичну стінку; густини теплового потоку на поверхнях сфери q_1 та q_2 .

Відповідь: $t_{c2} = 149,75 \text{ }^\circ\text{C}$; $t_{p1} = 212,20 \text{ }^\circ\text{C}$; $k_{сф} = 0,04 \text{ Вт/}^\circ\text{C}$;
 $q_1 = 1244,03 \text{ Вт/м}^2$; $q_2 = 796,18 \text{ Вт/м}^2$.

15. Через нескінченний стержень квадратного перерізу ($b = 20 \text{ мм}$ – довжина ребра квадрата перерізу) проходить тепловий потік з початковим температурним напором $\Delta t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Коефіцієнт теплопровідності матеріалу стержня $\lambda = 361 \text{ Вт/м}\cdot^\circ\text{C}$, а коефіцієнт тепловіддачі поверхні стержня $\alpha_p = 20 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$. Знайти: температурні напори на поверхні стержня на відстанях від його початку $x_1 = 1 \text{ м}$ та $x_2 = 3 \text{ м}$; темп охолодження стержня m ; побудувати графік залежності $\theta = f(x)$, де $\theta = \Delta t / \Delta t_0$ – безрозмірна температура.

Відповідь: $\Delta t_1 = 0,72 \text{ }^\circ\text{C}$; $\Delta t_2 = 9,17 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$; $m = 3,33 \text{ м}^{-1}$;
 графік $\theta = f(x)$ – експонента $\theta = e^{-mx}$.

16. Під час теплопередачі через стержень $\varnothing 10 \text{ мм}$ та довжиною $L = 3 \text{ м}$ температурний напір на відстані від початку стержня $x = 1,5 \text{ м}$ $\Delta t = 4,23 \cdot 10^{-9} \text{ }^\circ\text{C}$. Матеріал стержня має коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 40 \text{ Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$. Коефіцієнти тепловіддачі поверхні стержня $\alpha_p = 30 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$ і торця $\alpha_L = 5 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$. Визначити: 1) темп охолодження стержня m ; 2) температурний напір на початку стержня Δt_0 із врахуванням відношення $\alpha_L / (m \cdot \lambda)$; 3) температурний напір на початку стержня $\Delta t'_0$, припустивши, що $\alpha_L / (m \cdot \lambda) = 0$; 4) відносну похибку $\delta = \pm (\Delta t_0 - \Delta t'_0) / \Delta t_0$ на основі розрахунків за п. 2 і 3.

Відповідь: $m = 17,32 \text{ м}^{-1}$; $\Delta t_0 \approx 800 \text{ }^\circ\text{C}$; $\Delta t'_0 \approx 812 \text{ }^\circ\text{C}$; $\delta = -0,015 (-1,5\%)$.

17. В трубі теплообмінного апарата установився стаціонарний режим теплообміну (потік гідродинамічно стабілізований) з температурним напо-

ром $\Delta t = 40 \text{ }^\circ\text{C}$. Режим теплообміну характеризується: числом $Pe = 5800$; густиною теплоносія $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$; коефіцієнтом теплопровідності носія $\lambda = 0,62 \text{ Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$. Потік рухається в трубі діаметром $d_0 = 40 \text{ мм}$ (d_0 – діаметр отвору труби). Визначити: густини (питомі кількості теплоти) теплоти, які переносяться за рахунок конвекції $q_{\text{конв}}$ і теплопровідності $q_{\text{тепл}}$ рідини (теплоносія), взявши за характерний розмір **радіус** труби, а також швидкість w потоку, якщо питома теплоємність енергоносія $c_p = 4174 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$.

Відповідь: $q_{\text{конв}} = 7,192 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$; $q_{\text{тепл}} = 1240 \text{ Вт/м}^2$; $w = 0,048 \text{ м/с}$.

18. Визначити коефіцієнт теплопровідності λ матеріалу труби теплообмінного апарата, якщо критичний діаметр (зовнішній) труби $d_{2\text{кр}} = 404 \text{ мм}$, а коефіцієнти тепловіддачі її зовнішньої поверхні $\alpha_2 = 180 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$, а також розрахувати: 1) термічний лінійний опір циліндричної стінки для $d_2 = d_{2\text{кр}}$ та $d_1 = 200 \text{ мм}$ (внутрішній діаметр труби); 2) лінійний коефіцієнт теплопередачі k_l і тепловий потік Q через циліндричну стінку, якщо довжина труби $l = 1 \text{ м}$, коефіцієнт тепловіддачі внутрішньої поверхні $\alpha_1 = 360 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$, а $\Delta t = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ – температурний напір на стінці труби.

Відповідь: $\lambda = 36,36 \text{ Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$; $R_{lc} = 9,67 \cdot 10^{-3} \text{ (м}\cdot^\circ\text{C)/Вт}$;

$k_l = 26,55 \text{ Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$; $Q = 6,67 \cdot 10^3 \text{ Вт}$.

19. Процес вимушеної конвекції відбувається в трубі з внутрішнім діаметром $d_0 = 50 \text{ мм}$ при температурі рідини $t_p = 90 \text{ }^\circ\text{C}$, яка має коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,68 \text{ Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$, коефіцієнт температуропровідності $a = 16,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ і кінематичну в'язкість $\nu = 3,26 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. Процес конвекції характеризується числом Пекле. $Pe = 3900$. Визначити: 1) число Прандтля; 2) число Рейнольдса; 3) усталену швидкість потоку, взявши за характерний розмір **внутрішній діаметр** труби; 4) режим руху рідини (ламінальний, перехідний чи турбулентний); 5) питому теплоємність води c_p , якщо за заданої температури вона має густину $\rho = 926 \text{ кг/м}^3$.

Відповідь: $Pr = 1,94$; $Re = 1994$; $w = 0,013 \text{ м/с}$; *перехідний, близький до ламінарного*; $c_p = 4371 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$.

20. Під час роботи важкого редуктора установився стаціонарний режим теплопередачі від картера редуктора до навколишнього середовища. Температура мастила в редукторі $t_m = 45 \text{ }^\circ\text{C}$, а температура навколишнього середовища $t_p = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Товщина стінки корпусу редуктора $\delta = 10 \text{ мм}$, а площа його зовнішньої поверхні $A = 4 \text{ м}^2$. Коефіцієнт теплопровідності стінки (еквівалентний) редуктора $\lambda_{\text{екв.}} = 32 \text{ Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$, а коефіцієнт тепловіддачі зовнішньої поверхні $\alpha_{\text{зовн.}} = 18 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$. Тепловий потік, що проходить через стінки корпусу редуктора $Q = 1000 \text{ Вт}$. Враховуючи коефіцієнт $Kp = 1,3$ тепловіддачу в металеву раму редуктора, визначити: 1) густину

теплогового потоку, що проходить через стінку редуктора; 2) коефіцієнт теплопередачі; 3) термічні опори тепловіддачі внутрішньої і зовнішньої поверхонь корпусу редуктора та стінки редуктора.

Відповідь: $q = 250 \text{ Вт/м}^2$; $k_m = 9,62 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}$; $R_{\text{теп}} \approx 4,81 \times 10^{-2} \text{ (м}^2 \cdot \text{°C)/Вт}$; $R_{\text{мзн}} \approx 5,56 \times 10^{-2} \text{ (м}^2 \cdot \text{°C)/Вт}$; $R_{\text{мс}} \approx 3,13 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2 \cdot \text{°C)/Вт}$.

21. Під час роботи закритого вузла тертя температура мастила зросла від $t_0 = 20 \text{ °C}$ до $t_1 = 45 \text{ °C}$. Визначити: 1) тиск мастила у вузлі, якщо коефіцієнт теплового об'ємного розширення $\beta = 9,7 \cdot 10^{-7} \text{ °C}^{-1}$, модуль пружності рідини $\kappa = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$, а початковий тиск $p_0 = 0,2 \text{ МПа}$; 2) чи зміниться густина мастила внаслідок збільшення температури і тиску, якщо початкова густина мастила $\rho_0 = 900 \text{ кг/м}^3$?

Відповідь: $p_1 = 0,234 \text{ МПа}$; густина мастила не зміниться, оскільки внаслідок зростання тиску на $0,034 \text{ МПа}$ вона збільшиться на $0,0218 \text{ кг/м}^3$ і на таку саму величину зменшиться через зростання температури на 25 °C .

22. Під час роботи підшипника ковзання температура мастила, що використовується для його змащення, зросла від $t_0 = 20 \text{ °C}$ до $t_1 = \text{const}$, а тиск в мастильному шарі зменшився з $p_0 = 1 \text{ МПа}$ до $p_1 = 0,5 \text{ МПа}$. Визначити робочу температуру t_1 , якщо п'єзокоефіцієнт $\alpha_n = 4 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, а показник степеня в температурній залежності динамічної в'язкості мастила $m = 3$. Густина мастила $\rho = \text{const}$.

Відповідь: $t_1 \approx 20,001 \text{ °C}$.

23. В трубі з внутрішнім діаметром $d_{\text{вн}} = 40 \text{ мм}$ рухається зі швидкістю $w = 5 \text{ м/с}$ потік нагрітої до $t_{p1} = 90 \text{ °C}$ рідини з питомою теплоємністю $c_p = 4,21 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$ і кінематичною в'язкістю $\nu_p = 3,26 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. Температура внутрішньої стінки труби $t_{c1} = 88 \text{ °C}$, а зовнішньої – $t_{c2} = 80 \text{ °C}$. Теплопровідність матеріалу труби $\lambda = 34 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$, а температура навколишнього середовища $t_{p2} = 20 \text{ °C}$. Визначити: 1) число Рейнольдса, взявши за характерний розмір $d_{\text{вн}}$; 2) вважаючи тепловий процес стаціонарним, лінійну густину теплового потоку q_l через стінку труби для $d_{\text{зовн}} = 50 \text{ мм}$; 3) лінійний коефіцієнт теплопередачі k_l ; 4) питому кількість теплоти $q_{\text{конв}}$, що переноситься рухомою рідиною, якщо густина рідини $\rho_p = 900 \text{ кг/м}^3$.

Відповідь: $Re \approx 6,13 \cdot 10^5$; $q_l \approx 7655 \text{ Вт/м}$; $k_l \approx 34,83 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$;

$q_{\text{конв}} \approx 1,71 \cdot 10^9 \text{ Вт/м}^2$.

24. Процес кипіння перегрітої до $t_p = 110 \text{ °C}$ рідини відбувається за таких значень параметрів рідини і пари: $t_n = 99,6 \text{ °C}$ – температура насичення при тиску $p = 0,1 \text{ МПа}$; $r = 2,257 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ – теплота пароутворення; $l_* = d_0 = 5,06 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ – характерний розмір парової бульбашки; $\rho_n = 0,59 \text{ кг/м}^3$

– густина пари; $\rho_p = 990 \text{ кг/м}^3$ – густина рідини; $Re_* = 0,01$ – число Рейнольдса під час кипіння; $\lambda_p = 0,68 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$ – коефіцієнт теплопровідності рідини; $a_p = 1,69 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ – коефіцієнт температуропровідності рідини; $\nu_p = 2,95 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ – кінематична в'язкість рідини; $C = 6,25 \cdot 10^2$, $m = 0,5$ та $n = 0,33$ – відповідно стала та показники степенів в критеріальному рівнянні для розрахунку тепловіддачі під час кипіння. Визначити: 1) коефіцієнт тепловіддачі α_k під час кипіння; 2) густину теплового потоку q ; 3) умовну швидкість пароутворення w_n ; 4) критерії Nu_* та Pr_* 5) питому теплоємність рідини c_p .

Відповідь: $\alpha_k \approx 101,06 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}$; $q \approx 1051 \text{ Вт/м}^2$; $w_n \approx 7,9 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$; $Nu_* \approx 7,52 \cdot 10^3$; $Pr_* \approx 1,75$; $c_p \approx 4064 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$.

25. Процес конденсації водяної пари, що має температуру $t_n = 100 \text{ °C}$ відбувається за температури стінки посудини $t_c = 60 \text{ °C}$. Взявши температуру поверхні конденсату $t_{нов} = 1,5t_c$, розрахувати густину потоку маси j пари, густину теплового потоку q до поверхні конденсату та міжфазний опір R_ϕ , якщо відповідно: тиск пари для $t = t_n$, $p_n = 0,12 \text{ МПа}$; $t = t_{нов}$, $p_{нов} = 0,02 \text{ МПа}$, газова стала пари $R_n = 455 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$, а теплота фазового переходу $r = 2,36 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$; $k_k = 0,7$ – коефіцієнт конденсації. Вважаючи, що рух рідини в плівці конденсату ламінарний і теплопередача через плівку відбувається тільки за рахунок теплопровідності, визначити товщину плівки конденсату $\delta_{конд}$, якщо коефіцієнт теплопровідності води $\lambda = 0,62 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$.

Відповідь: $j \approx 67,62 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$; $q \approx 1,6 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$; $R_\phi \approx 6,25 \times 10^{-8} \text{ м}^2 \cdot \text{K/Вт}$; $\delta_{конд} \approx 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ м}$.

26. Процес конденсації водяної пари відбувається за тиску пари $p_n = 0,1 \text{ МПа}$ і за температури пари $t_n = 99,6 \text{ °C}$ з коефіцієнтом конденсації $k_k = 0,8$ і газової сталої пари $R_n = 450 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$. За цих умов температура і тиск пари на поверхні конденсату, відповідно, становлять: $t_{нов} = 89 \text{ °C}$, $p_{нов} = 0,06 \text{ МПа}$, а теплота фазового переходу $r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$. Визначити: 1) густину потоку маси пари j ; 2) густину q теплового потоку на поверхні конденсату; 3) густини пари за температур t_n і $t_{нов}$ і тисків p_n і $p_{нов}$, відповідно.

Відповідь: $j \approx 30,5 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$; $q \approx 7,9 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$; $\rho_n \approx 0,6 \text{ кг/м}^3$; $\rho_{нов} \approx 0,4 \text{ кг/м}^3$.

27. Черв'ячний редуктор має потужність на валу колеса $P_2 = 12 \text{ кВт}$ і к.к.д. $\eta = 0,8$. Охолодження редуктора здійснюється за рахунок природної конвекції з його корпусу. Коефіцієнт теплопередачі $k = 18 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}$, а температура навколишнього середовища $t_p = 22 \text{ °C}$. Міжосьова відстань $a_w = 260 \text{ мм}$ пов'язана з поверхнею тепловіддачі залежністю $A = 20 \cdot a_w^{1,7}$ (де

a_w – в м, а A – в m^2). Тепловіддачу в металеву раму, на якій встановлено редуктор, врахувати коефіцієнтом $K_p = 1,32$. Визначити: 1) температуру t_m мастила в корпусі редуктора; 2) тепловий потік Q та густину теплового потоку q на поверхні редуктора; 3) потужність P_1 на валу черв'яка.

Відповідь: $t_m \approx 84,35 \text{ }^\circ\text{C}$; $Q \approx 3 \text{ кВт}$; $q \approx 1481 \text{ Вт}$; $P_1 = 15 \text{ кВт}$.

28. Режим бульбашкового кипіння води у відкритій посудині починається внаслідок перегрівання води до температури $t_c = 110 \text{ }^\circ\text{C}$. Розрахувати силу поверхневого натягу σ на межі бульбашки (пара – рідина), перепад тиску Δp між рідиною і паром та похідну $(\partial p / \partial T)_n$ за умови термодинамічної рівноваги в киплячій рідині, якщо: $t_n = 99,6 \text{ }^\circ\text{C}$ – температура насичення пари за тиску в рідині $p = 0,1 \text{ МПа}$; $r = 2,257 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ – теплота фазового переходу; $\rho_n = 0,59 \text{ кг/м}^3$ – густина пари; $R_k = 50 \text{ мкм}$ – критичний радіус бульбашки; $\rho_p = 900 \text{ кг/м}^3$ – густина води за температури кипіння.

Відповідь: $\sigma \approx 1,57 \text{ Н/м}$; $\Delta p \approx 0,063 \text{ МПа}$; $(\partial p / \partial T)_n \approx 3576 \text{ (Дж кг)/(м}^3 \text{ К)}$.

29. На тіло падає потік інтегрального випромінювання густиною $E = 2,97 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$. Частина цього потоку поглинається тілом, а 30% відбивається в простір. Вважаючи, що система тіл, які беруть участь в променевому теплообміні, знаходиться в термодинамічній рівновазі, визначити: 1) густину поглинутого $E_{\text{погл}}$ і відбитого $E_{\text{відб}}$ потоків інтегрального випромінювання; 2) коефіцієнт поглинання A та коефіцієнт відбиття R ; 3) температуру T випромінювального тіла, взявши $A = \varepsilon$ (ε – коефіцієнт випромінювання). $C_0 = 5,67 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла.

Відповідь: $A = 0,7$; $R = 0,3$; $E_{\text{погл}} = 2,079 \cdot 10^6 \text{ Вт/м}^2$;
 $E_{\text{відб}} = 8,91 \times 10^5 \text{ Вт/м}^2$; $T \approx 2941 \text{ К}$.

30. Густина інтегрального потоку півсферичного випромінювання абсолютно чорного тіла становить $E_0 = 500 \text{ Вт/м}^2$. Скориставшись законом Стефана – Больцмана, визначити температуру T тіла, якщо стала Стефана – Больцмана $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$, а також розрахувати для знайденої температури густину інтегрального потоку випромінювання E та випромінювальну здатність C_c сірого тіла, коефіцієнт випромінювання якого $\varepsilon = 0,04$.

Відповідь: $T \approx 306,44 \text{ К}$; $E \approx 20 \text{ Вт/м}^2$; $C_c \approx 0,23 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

31. Тіло, нагріте до температури $T = 1550 \text{ }^\circ\text{C}$, має коефіцієнт випромінювання $\varepsilon = 0,06$. Визначити: 1) густину інтегрального півсферичного потоку E випромінювання цього тіла, якщо стала Стефана – Больцмана $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$; 2) випромінювальну здатність тіла C_c ; 3) густину

E_o інтегрального потоку випромінювання абсолютно чорного тіла з такою самою температурою поверхні.

Відповідь: $E \approx 1,96 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$; $E_o \approx 3,27 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2$; $C_c \approx 0,34 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

32. Абсолютно чорне тіло випромінює тепловий потік, який характеризується довжиною хвилі $\lambda = 700 \text{ мкм}$ та температурою випромінювання $T = 3200 \text{ К}$. Розрахувати спектральну густину теплового потоку $E_{o\lambda}$ цього випромінювання за законами Планка та Релея – Джинса і визначити похибку, яку дає розрахунок за законом Релея – Джинса. Константи випромінювання: $C_1 = 5,94 \cdot 10^{-17} \text{ Вт} \cdot \text{м}^2$; $C_2 = 1,44 \cdot 10^2 \text{ м} \cdot \text{К}$.

Відповідь: $(E_{o\lambda})_{пл.} \approx 343,99 \text{ Вт/м}^3$; $(E_{o\lambda})_{рд} \approx 345,26 \text{ Вт/м}^3$; $\delta E \approx - 0,37\%$.

33. Півсфера радіусом $r = 80 \text{ мм}$ випромінює інтегральний потік $Q = 1 \text{ кВт}$. Коефіцієнт випромінювання півсфери $\varepsilon = 0,8$. Процес випромінювання стабілізований. Взявши випромінювальну здатність абсолютно чорного тіла $C_0 = 5,67 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$, визначити: 1) густину E потоку інтегрального випромінювання півсфери; 2) температуру T поверхні півсфери; 3) яскравість I потоку випромінювання півсфери в межах тілесного кута $\omega = 2\pi$, взявши площу випромінювальної площадки такою, що дорівнює площі поверхні півсфери.

Відповідь: $E \approx 2,49 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$; $T \approx 860,76 \text{ К}$; $I \approx 7,93 \cdot 10^3 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{ср)}$.

34. Абсолютно чорне тіло випромінює спектральний потік, максимальній густині $(E_{o\lambda})_{max}$ якого відповідає довжина хвилі $\lambda_{max} = 5 \text{ мкм}$. Розрахувати за законом Віна температуру T та $(E_{o\lambda})_{max}$ цього тіла і спектральну густину $(E_\lambda)_{max}$ сірого тіла з коефіцієнтом випромінювання $\varepsilon_\lambda = 0,39$, якщо константи випромінювання в різних формах закону зміщення Віна $C_3 = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м/К}$ та $C_4 = 1,286 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/(м}^3 \cdot \text{К}^5)$.

Відповідь: $T \approx 579,6 \text{ К}$; $(E_{o\lambda})_{max} \approx 8,41 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^3$; $(E_\lambda)_{max} \approx 3,28 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^3$.

35. Між двома непрозорими паралельними стінками, розташованими на відстані $l = 0,6 \text{ м}$, в оптично тонкому середовищі здійснюється радіаційно-кондуктивний теплообмін. Температури стінок, відповідно, $T_1 = 650 \text{ }^\circ\text{C}$ та $T_2 = 120 \text{ }^\circ\text{C}$, коефіцієнт теплопровідності середовища $\lambda_c = 0,62 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$, стала Стефана – Больцмана $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$, коефіцієнти поглинання стінок, відповідно, $A_1 = 0,2$ та $A_2 = 0,08$. Визначити густини теплових потоків, які переносяться випромінюванням q_p і за рахунок теплопровідності q_m середовища, знайти сумарну густину теплового потоку q та співвідношення q_p/q і q_m/q .

Відповідь: $q_p \approx 2,41 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$; $q_m \approx 547,67 \text{ Вт/м}^2$; $q \approx 2,96 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$; $q_p/q \approx 0,81$; $q_m/q \approx 0,19$.

36. Плоска деталь механізму у вигляді пластини в жорстких напрямних піддається інтенсивному нагріванню тепловим потоком густиною $q = 8 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$, вектор якої перпендикулярний до пластини товщиною $\delta = 5 \text{ мм}$. Фізичні параметри матеріалу (сталь 40Х) пластини: коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 34 \text{ Вт/(м}\cdot\text{°C)}$; модуль пружності $E = 2,15 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; коефіцієнт лінійного теплового розширення $\xi = 10 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$; коефіцієнт Пуассона $\nu_n = 0,3$; напруження текучості $\sigma_m = 350 \text{ МПа}$. Температурний напір між боками пластини $\Delta t = t_1 - t_2 = 0,2 \text{ °C}$, де $t_1 > t_2$, а $t_1 = 150 \text{ °C}$. Тепловий процес – стаціонарний. Визначити: 1) температуру t_2 («холодний» бік пластини); 2) максимальні термічні напруження в крайніх шарах пластини σ_{max} ; 3) коефіцієнт n_t термічної міцності матеріалу пластини.

Відповідь: $t_2 = 149,8 \text{ °C}$; $\sigma_{max} = \pm 723 \text{ МПа}$ (знак «плюс» відноситься до напружень розтягування (холодний бік пластини), а «мінус» – до стискання (гарячий бік пластини)); $n_t = 3874,42 \text{ Вт/м}$.

37. В тонкостінній трубі з внутрішнім діаметром $d = 20 \text{ мм}$ і товщиною стінки $\delta = 2 \text{ мм}$ теплообмінного апарата рухається теплоносії під тиском $p = 1 \text{ МПа}$ і переноситься тепловий потік з середньою густиною $q = 8 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$. Матеріал труби – латунь з такими фізичними параметрами: коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 111 \text{ Вт/(м}\cdot\text{°C)}$; модуль пружності $E = 9,8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; коефіцієнт лінійного теплового розширення $\xi = 18,4 \cdot 10^{-6} \text{ °C}^{-1}$; коефіцієнт Пуассона $\nu_n = 0,35$. Тепловий процес – стаціонарний. Визначити: 1) сумарне напруження σ_Σ розтягування в стінці труби; 2) оптимальну товщину δ_{opt} стінки труби, за якої сумарне напруження $\sigma_\Sigma = \sigma_{min}$.

Відповідь: $\sigma_\Sigma \approx 70 \text{ МПа}$; $\delta_{opt} = 3,2 \text{ мм}$.

38. Під час роботи карбюраторного двигуна внутрішнього згорання, що працює за ідеальним циклом Отто (див. рис. 5.2) температура паливної суміші (робочого тіла) на початку процесу її стиснення $T_1 = 125 \text{ °C}$, а в кінці етапу стискання за адіабатою 1–2 (див. рис. 5.2) стала $T_2 = 350 \text{ °C}$. На момент загорання температура згорання паливної піднялась до $T_3 = 2000 \text{ °C}$. Взявши показник адіабати $k = 1,4$, визначити: 1) ступінь ϵ стискання паливної суміші; 2) термічний к.к.д. двигуна; 3) температуру T_4 продуктів згорання паливної суміші на початку її випускання (див. рис. 5.2 – ізохора 4–1).

Відповідь: $\epsilon = 12,9$; $\eta_{m.o} = 0,64$; $T_4 = 714,3 \text{ °C}$.

39. Під час роботи карбюраторного двигуна внутрішнього згорання, що працює за ідеальним циклом Дизеля (див. рис. 5.3), ступінь стискання повітря $\epsilon = 16$, за якого в циліндрі двигуна в кінці процесу стискання температура повітря піднялась до рівня $T_2 = 700 \text{ °C}$. Термічний к.к.д. двигуна $\eta_{m.д} = 0,67$, а показник адіабати $k = 1,4$. Визначити: 1) ступінь попередньо-

го розширення ε_{non} під час загоряння паливної суміші; 2) температуру T_3 в кінці процесу згоряння паливної суміші за ізобарою 2–3 (див. рис. 5.3).

Відповідь: $\varepsilon_{non} \approx 1,02$; $T_3 \approx 714$ °C.

40. Газотурбінний двигуна внутрішнього згоряння (див. рис. 5.6), що працює за ідеалізованим циклом згоряння палива за $p = const$ (див. рис. 5.7), має ступінь попереднього розширення $\varepsilon_{non} = 2,2$, а тиск вихлопу відпрацьованих продуктів згоряння $p_1 = 0,12$ МПа. Показник адіабати $k = 1,4$. Температура в камері згоряння на початку процесу запалювання $T_2 = 700$ °C. Визначити: 1) максимальний термічний к.к.д. $\eta_{m.ГДі}$ двигуна за ізотермічного процесу стискання повітря в камері згоряння; 2) температуру T_3 та тиск p_2 в камері згоряння в кінці процесу згоряння паливної суміші; 3) термічний к.к.д. $\eta_{m.ГДа}$ двигуна за адіабатного процесу стискання повітря в камері згоряння.

Відповідь: максимальний термічний к.к.д. $\eta_{m.ГДі} \approx 0,28$; $T_3 \approx 1540$ °C; $p_2 \approx 1,89$ МПа, $\eta_{m.ГДа} \approx 0,55$.

41. Обґрунтувати математично, за яких умов термічний к.к.д. циклу Карно $\eta_{m.к} = 1 - (T_2 / T_1)$ (тут T_1 , T_2 – відповідно, температури водяної пари на вході та на виході з парової турбіни) може мати максимально можливе значення. Пояснити, чи можливо це з фізичної точки зору?

42. Парокомпресорний холодильник працює за зворотним циклом Карно. $T_1 = 20$ °C, $T_2 = -18$ °C – відповідно температури холодоагенту до та після його адіабатного розширення. Визначити холодильний коефіцієнт цього холодильника ψ .

Відповідь: $\psi \approx -0,47$.

6.2 Приклади розв'язування задач

1. Під час точіння заготовки із сталі затрачується ефективна потужність $P_{ef} = 2780$ Вт. 5% від цієї потужності повністю перетворюється на теплоту і передається через контактну площадку $OA = 1,5$ мм (рис. 2.1) в різець, а з нього 1% від P_{ef} повертається в заготовку через контактну площадку $OB = 0,12$ мм. Вважаючи процес теплопередачі теплопровідністю під час цієї обробки стаціонарним, визначити: 1) густини теплових потоків, що проходять через площадки OA та OB , якщо ширина обох площадок $b_1 = b_2 = 5$ мм, а теплові потоки по поверхні площадок розподілені рівномірно; 2) кількості теплоти, що виділяються на площадках OA і OB за час оброблення $\tau = 30$ с та середні градієнти температури на цих площадках, якщо коефіцієнт теплопровідності матеріалу заготовки $\lambda = 36,9$ Вт/(м·°C).

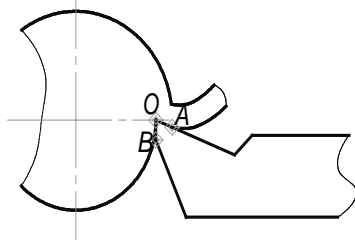


Рисунок 6.2.1

Розв'язування

1. Розраховуємо теплові потоки, що проходять через площадки **OA** та **OB** згідно з умовами задачі:

$$Q_{OA} = P_{ef} \cdot 0,05 = 2780 \cdot 0,05 = 139 \text{ Вт};$$

$$Q_{OB} = P_{ef} \cdot 0,01 = 2780 \cdot 0,01 = 27,8 \text{ Вт}.$$

2. Визначаємо густини теплових потоків, що проходять через площадки **OA** та **OB**, за відомими з курсу ТОТ формулами:

$$q_{OA} = Q_{OA}/A_{OA} = 139/7,5 \cdot 10^{-6} = 1,85 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2; q_{OB} = Q_{OB}/A_{OB} = 27,8/6 \cdot 10^{-7} = 4,58 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2,$$

де $A_{OA} = b_1 \cdot OA = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$; $A_{OB} = b_2 \cdot OB = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2$ – відповідно площі площадок **OA** і **OB**.

3. Знаходимо кількості теплоти, що виділяються на площадках **OA** і **OB** за час оброблення $\tau = 30 \text{ с}$ за відомими залежностями:

$$Q_{\tau OA} = Q_{OA} \cdot \tau = 139 \cdot 30 = 4170 \text{ Дж}; Q_{\tau OB} = Q_{OB} \cdot \tau = 27,8 \cdot 30 = 834 \text{ Дж}.$$

4. Середні градієнти температури на площадках **OA** і **OB** розраховуємо за законом Фур'є;

$$(\text{grad } t)_{OA} = - q_{OA}/\lambda = 1,85 \cdot 10^7/36,9 = - 5,01 \cdot 10^5 \text{ }^\circ\text{C/м};$$

$$(\text{grad } t)_{OB} = - q_{OB}/\lambda = 4,58 \cdot 10^7/36,9 = - 1,24 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{C/м}.$$

Відповідь: $q_{OA} = 1,85 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$; $q_{OB} = 4,58 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^2$; $Q_{\tau OA} = 4170 \text{ Дж}$; $Q_{\tau OB} = 834 \text{ Дж}$; $(\text{grad } t)_{OA} = - 5,01 \cdot 10^5 \text{ }^\circ\text{C/м}$; $(\text{grad } t)_{OB} = - 1,24 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{C/м}$.

2. Процес вимушеної конвекції відбувається в трубі з внутрішнім діаметром $d_0 = 50 \text{ мм}$ за температури рідини $t_p = 90 \text{ }^\circ\text{C}$, яка має коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,68 \text{ Вт/(м}\cdot^\circ\text{C)}$, коефіцієнт температуропровідності $a = 16,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ і кінематичну в'язкість $\nu = 3,26 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$. Процес конвекції характеризується числом Пекле. $Pe = 3900$. Визначити: 1) число Прандтля; 2) число Рейнольдса; 3) усталену швидкість потоку, взявши за характерний розмір внутрішній діаметр труби; 4) режим руху рідини (ламінарний, перехідний чи турбулентний); 5) питому теплоємність води c_p , якщо за заданої температури вона має густину $\rho = 926 \text{ кг/м}^3$.

Розв'язування

1. Розраховуємо число Прандтля за формулою

$$Pr = \nu/a = 3,26 \cdot 10^{-7}/16,8 \cdot 10^{-8} = 1,94.$$

2. З формули для числа Пекле знаходимо усталену швидкість потоку та розраховуємо число Рейнольдса і визначаємо режим руху рідини:

$Pe = w \cdot d_0 / a$, звідси отримуємо:

$$w = Pe \cdot a / d_0 = 3900 \cdot 1,68 \cdot 10^{-7} / 5 \cdot 10^{-2} = 0,013 \text{ м/с};$$

$$Re = w \cdot d_0 / \nu = 0,013 \cdot 5 \cdot 10^{-2} / 3,26 \cdot 10^{-7} = 1994 \text{ – це перехідний режим.}$$

3. Питому теплоємність води визначаємо з формули для коефіцієнта температуропровідності:

$$a = \lambda / (c_p \cdot \rho), \text{ звідси знаходимо: } c_p = \lambda / (a \cdot \rho) = 0,68 / (1,68 \cdot 10^{-7} \cdot 926) = 4371 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}.$$

Відповідь: $Pr = 1,94$; $Re = 1994$; $w = 0,013 \text{ м/с}$; *перехідний, близький до ламінарного*; $c_p = 4371 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$.

3. Розрахувати критерій Нуссельта Nu та коефіцієнт тепловіддачі α вертикальної стінки важкого верстата за природної конвекції, якщо задано: $h = 1,25 \text{ м}$ – висота стінки; $\lambda = 2,59 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/(м} \cdot \text{°C)}$ – коефіцієнт теплопровідності повітря; $Ra = 120$ – критерій Релея; $c = 1,18$; $n = 0,125$ – відповідно коефіцієнт і показник степеня в критеріальному рівнянні, що описує природну конвекцію. Визначити також критерій Прандтля Pr і коефіцієнт температуропровідності a , якщо критерій Грасгофа $Gr = 142,25$, а кінематична в'язкість повітря $\nu = 1,51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Розв'язування

1. За відомим з курсу ТОТ критеріальним рівнянням, що описує природну конвекцію, і критеріальними формулами розраховуємо критерій Нуссельта та коефіцієнт тепловіддачі:

$$Nu = c \cdot Ra^n = 1,18 \cdot 120^{0,125} = 2,15; \text{ } Nu = \alpha \cdot h / \lambda, \text{ звідки знаходимо}$$

$$\alpha = Nu \cdot \lambda / h = 2,15 \cdot 2,59 \cdot 10^{-2} / 1,25 = 0,045 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}.$$

2. З відомих залежностей між критеріями Релея, Грасгофа та Прандтля і критеріальної формули останнього, знаходимо критерій Прандтля Pr та коефіцієнт температуропровідності a :

$$Ra = Gr \cdot Pr, \text{ звідки отримуємо: } Pr = Ra / Gr = 120 / 142,25 = 0,84;$$

$$Pr = \nu / a, \text{ звідки } a = \nu / Pr = 1,51 \cdot 10^{-5} / 0,84 = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

$$\text{Відповідь: } Nu = 2,15; \alpha = 0,045 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°C)}; Pr = 0,84; a = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

4. Процес конденсації водяної пари, що має температуру $t_n = 100 \text{ °C}$, відбувається за температури стінки посудини $t_c = 60 \text{ °C}$. Взавши температуру поверхні конденсату $t_{нов} = 1,5t_c$, розрахувати густину потоку маси j пари, густину теплового потоку q до поверхні конденсату та міжфазний опір R_ϕ ,

якщо відповідно: тиск пари для $t = t_n$, $p_n = 0,12$ МПа; $t = t_{нов}$, $p_{нов} = 0,02$ МПа, газова стала пари $R_n = 455$ Дж/(кг·К), а теплота фазового переходу $r = 2,36 \cdot 10^6$ Дж/кг; $k_k = 0,7$ – коефіцієнт конденсації. Вважаючи, що рух рідини в плівці конденсату ламінарний і теплопередача через плівку відбувається тільки за рахунок теплопровідності, визначити товщину плівки конденсату $\delta_{конд}$, якщо коефіцієнт теплопровідності води $\lambda = 0,62$ Вт/(м·°С).

Розв'язування

1. За відомим з курсу ТОТ рівнянням Герца – Кнудсена розраховуємо густину потоку маси пари

$$j = \frac{k_k}{\sqrt{2\pi R_n}} \cdot \left(\frac{p_n}{\sqrt{T_n}} - \frac{p_{нов}}{\sqrt{T_{нов}}} \right) = \frac{0,7 \cdot 10^6}{\sqrt{6,28 \cdot 455}} \cdot \left(\frac{0,12}{\sqrt{373}} - \frac{0,02}{\sqrt{363}} \right) \approx 67,62 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}),$$

де $T_n = t_n + 273 = 100 + 273 = 373$ К; $T_{нов} = 1,5 \cdot t_c + 273 = 1,5 \cdot 60 + 273 = 363$ К.

2. Розраховуємо густину теплового потоку та міжфазний опір за відомими з курсу ТОТ формулами:

$$q = r \cdot j = 2,36 \cdot 10^6 \cdot 67,62 \approx 1,6 \cdot 10^8 \text{ Вт}/\text{м}^2; R_\phi = \frac{t_n - t_{нов}}{q} = \frac{100 - 90}{1,6 \cdot 10^8} = 6,25 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 \cdot \text{К}/\text{Вт}.$$

3. Припускаючи, що плівка конденсату має форму плоскої стінки, визначаємо товщину плівки із залежності для густини теплового потоку через плоску стінку за стаціонарного режиму теплопередачі:

$$q = \lambda \cdot (t_{нов} - t_c) / \delta_{конд}, \text{ звідки знаходимо: } \delta_{конд} = \lambda \cdot (t_{нов} - t_c) / q = 0,62 \cdot (90 - 60) / 1,6 \cdot 10^8 \approx 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 1,16 \cdot 10^{-4} \text{ мм}.$$

Відповідь: $j \approx 67,62$ кг/(м²·с); $q \approx 1,6 \cdot 10^8$ Вт/м²; $R_\phi \approx 6,25 \cdot 10^{-8}$ м²·К/Вт; $\delta_{конд} \approx 1,16 \cdot 10^{-7}$ м.

5. В трубі об'ємом $V = 10^{-3}$ м³ і довжиною $L = 2$ м відбувається процес концентраційної дифузії в суміші кисню (O₂) та азоту (N₂) за постійних тиску $p = 200$ кПа й температури $T = 373,15$ К. Відносні концентрації кисню та азоту, відповідно $m_O = 0,6$ і $m_N = 0,4$. Густина кисню та азоту за нормальних умов ($p_n = 101,325$ кПа і $T_n = 273,15$ К) $\rho_{On} = 1,47$ кг/м³ та $\rho_{Nn} = 1,25$ кг/м³ і газові сталі $R_O = 260$ Дж/(кг·К) та $R_N = 297$ Дж/(кг·К). Коефіцієнт дифузії кисню відносно азоту $D = 1,74$ м²/с. Визначити маси та густини компонентів і середню густину суміші для нормальних умов (M_{On} , M_{Nn} , ρ_{On} , ρ_{Nn} , $\rho_{\Sigma n}$) і заданих (M_O , M_N , ρ_O , ρ_N , ρ_Σ) тиску та температури.

Знайти середню газову сталу суміші R_{Σ} , а також розрахувати для стаціонарного процесу концентраційної дифузії густину потоку $j_{к.д.о}$ та потік $J_{к.д.о}$ маси кисню відносно азоту, вважаючи зміни цих величин вздовж труби і в її поперечному перерізі рівномірними.

Розв'язування

1. Оскільки за умовою задачі об'єм газової суміші в трубі постійний, то за відомими з елементарної фізики формулами розраховуємо маси кисню та азоту для нормальних умов:

$$M_{O_2} = \rho_{O_2} \cdot V = 1,47 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; M_{N_2} = \rho_{N_2} \cdot V = 1,25 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

2. За відомими з термодинаміки формулами визначаємо середню густину суміші для нормальних умов, густини та маси компонентів і середню густину суміші для заданих тиску та температури і середню газову сталу:

$$\begin{aligned} \rho_{\Sigma H} &= (\rho_{O_2} M_{O_2} + \rho_{N_2} M_{N_2}) / (M_{O_2} + M_{N_2}) = \\ &= (1,47 \cdot 1,47 \cdot 10^{-3} + 1,25 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3}) / (1,47 \cdot 10^{-3} + 1,25 \cdot 10^{-3}) = 1,37 \text{ кг/м}^3; \\ \rho_O &= \rho_{O_2} \cdot T_H \cdot p / (T \cdot p_H) = 1,47 \cdot 273,15 \cdot 200 / (373,15 \cdot 101,325) = 2,12 \text{ кг/м}^3; \\ \rho_N &= \rho_{N_2} \cdot T_H \cdot p / (T \cdot p_H) = 1,25 \cdot 273,15 \cdot 200 / (373,15 \cdot 101,325) = 1,81 \text{ кг/м}^3; \\ M_O &= \rho_O \cdot V = 2,12 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; M_N = \rho_N \cdot V = 1,81 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = \\ &= 1,81 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; \\ \rho_{\Sigma} &= (\rho_O \cdot M_O + \rho_N \cdot M_N) / (M_O + M_N) = \\ &= (2,12 \cdot 2,12 \cdot 10^{-3} + 1,81 \cdot 1,81 \cdot 10^{-3}) / (2,12 \cdot 10^{-3} + 1,81 \cdot 10^{-3}) = 1,98 \text{ кг/м}^3; \\ R_{\Sigma} &= (R_O \cdot M_O + R_N \cdot M_N) / (M_O + M_N) = \\ &= (260 \cdot 2,12 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 297 \cdot 1,81 \cdot 10^{-3}) / (2,12 \cdot 10^{-3} + 1,81 \cdot 10^{-3}) = 277 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}. \end{aligned}$$

3. Використовуючи закон Фіка, розраховуємо густину потоку та потік маси кисню за умови рівномірного потоку:

$$\begin{aligned} j_{к.д.о} &= -D \cdot (\text{grad } m_O)_m = -1,74 \cdot (-0,3) \approx 0,52 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}; \\ J_{к.д.о} &= j_{к.д.о} \cdot A = j_{к.д.о} \cdot V/L = 0,52 \cdot 1 \cdot 10^{-3} / 2 = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с}, \end{aligned}$$

де $(\text{grad } m_O)_m = -m_O / L = -0,3 \text{ м}^{-1}$ – середній градієнт відносної концентрації кисню (знак «мінус» в формулі для градієнта відносної концентрації кисню обумовлений тим, що вектор градієнта направлений в бік більшої концентрації, а вектор густину потоку маси компонента суміші в бік меншої концентрації); $A = V/L = 1 \cdot 10^{-3} / 2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ – площа поперечного перерізу труби.

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } M_{O_2} &= 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; M_{N_2} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; \rho_{\Sigma H} = 1,37 \text{ кг/м}^3; \\ \rho_O &= 2,12 \text{ кг/м}^3; \rho_N = 1,81 \text{ кг/м}^3; M_O = 2,12 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; M_N = 1,81 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; \\ \rho_{\Sigma} &= 1,98 \text{ кг/м}^3; R_{\Sigma} = 277 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}. \end{aligned}$$

6. Густина інтегрального потоку півсферичного випромінювання абсолютно чорного тіла становить $E_0 = 500 \text{ Вт/м}^2$. Скориставшись законом Стефана – Больцмана, визначити температуру T тіла, якщо стала Стефана–Больцмана $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$, а також розрахувати для знайденої температури густину інтегрального потоку випромінювання E та випромінювальну здатність C_c сірого тіла, коефіцієнт випромінювання якого $\varepsilon = 0,04$.

Розв'язування

1. Із закону Стефана – Больцмана $E_0 = \sigma_0 \cdot T^4$ знаходимо:

$$T = (E_0/\sigma_0)^{0,25} = (500/(5,67 \cdot 10^{-8}))^{0,25} \approx 306,44 \text{ К.}$$

2. За законом Стефана – Больцмана для сірих тіл розраховуємо густину інтегрального потоку випромінювання та випромінювальну здатність сірого тіла:

$$E = \varepsilon \cdot E_0 = 0,04 \cdot 500 \approx 20 \text{ Вт/м}^2; C_c = \varepsilon \cdot C_0 = 0,04 \cdot 5,67 \approx 0,23 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4),$$

де $C_0 = \sigma_0 \cdot 10^8 \approx 5,67 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла.

Відповідь: $T \approx 306,44 \text{ К}; E \approx 20 \text{ Вт/м}^2; C_c \approx 0,23 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

6.3 Тести для самоконтролю ступеня засвоєння дисципліни

1. Яка умова має виконуватись, щоб температурне поле було стаціонарним?

Відповіді.

1. Температура має бути постійною. 2. Незмінність температури в часі. 3. Температура не змінюється в часі, але в просторі змінюється від точки до точки. 4. Незмінність температур в просторі.

2. Як розташовані ізотермічні поверхні в просторі тіла?

Відповіді.

1. Хаотично. 2. Є дотичними між собою. 3. Можуть перетинатись і обриватись всередині тіла. 4. Є паралельними між собою, замкнутими всередині тіла і закінчуються тільки на поверхні тіла.

3. Як розташовуються відносно ізотермічних поверхонь поверхні теплового потоку?

Відповіді.

1. Ці поверхні є дотичними між собою. 2. Перетинаються під довільним кутом. 3. Ортогональні між собою, тобто перетинаються під кутом 90° . 4. Є паралельними між собою.

4. Як співвідносяться між собою вектори градієнта температури та густини теплового потоку?

Відповіді.

1. Перетинаються під довільним кутом. 2. Лежать на одній прямій, але направлені в різні боки: вектор градієнта температури в бік зростання температури, а вектор густини теплового потоку в бік її зменшення. 3. Лежать на одній прямій і направлені в один бік. 4. Перетинаються під кутом 90° .

5. Який закон визначає напрям вектора густини теплового потоку?

Відповіді.

1. Закон Фур'є. 2. Закон Ньютона – Ріхмана. 3. Перший закон термодинаміки. 4. Другий закон термодинаміки.

6. Який із названих видів теплопередачі є чисто молекулярним переносенням теплоти?

Відповіді.

1. Конвективний. 2. Променевий. 3. Теплопровідність. 4. Кондуктивний.

7. Який закон природи описує залежність $q = -\lambda \text{ grad } t$, де q – густина теплового потоку; λ – коефіцієнт теплопровідності речовини; $\text{grad } t$ – градієнт температури?

Відповіді.

1. Закон Ньютона – Ріхмана. 2. Закон Фур'є. 3. Закон Ома. 4. Закон Планка.

8. Яка розмірність в системі одиниць СІ коефіцієнта теплопровідності λ ?

Відповіді.

1. $\text{Вт}/\text{м}^2$. 2. $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. 3. $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. 4. $\text{Дж}/(\text{кгК})$.

9. Що характеризує в теплових процесах коефіцієнт температуропровідності a , $\text{м}^2/\text{с}$?

Відповіді.

1. Теплову провідність. 2. Зміну температури в просторі та часі. 3. Теплоінерційні властивості речовини і швидкість поширення теплоти в речовині. 4. Здатність речовини проводити теплоту.

10. Як здійснюється процес теплопровідності в металах та їх сплавах?

Відповіді.

1. Шляхом проходження через метал хвилі пружної деформації. 2. За рахунок теплових коливань атомів кристалічних ґраток. 3. Внаслідок теплового руху вільних електронів та пружних коливань іонів, що розташовані

ні у вузлах кристалічних ґраток. 4. Через пружну взаємодію між собою іонів, що розташовані у вузлах кристалічних ґраток.

11. Як змінюється теплопровідність газів із зростанням їх температури?

Відповіді.

1. Зменшується. 2. Зростає. 3. Залишається постійною. 4. Спочатку зростає, а потім зменшується.

12. За якої температури за шкалою Цельсія дистильована вода має найбільшу густину?

Відповіді.

1. 0 °C. 2. 2 °C. 3. 4 °C. 4. 10 °C.

13. Який тепловий процес описує окремий вид рівняння теплопровідності $\lambda \nabla^2 t + q_v = 0$, де $\lambda = const$ – коефіцієнт теплопровідності речовини; $\nabla^2 t = \partial^2 t / \partial x^2 + \partial^2 t / \partial y^2 + \partial^2 t / \partial z^2$ – оператор Лапласа в декартовій системі координат; q_v – інтенсивність внутрішніх джерел теплоти, що діють в тілі?

Відповіді.

1. Нестационарний просторовий процес теплопровідності. 2. Стационарний двовимірний тепловий процес. 3. Тривимірний стационарний процес теплопровідності за наявності внутрішніх джерел теплоти. 4. Це рівняння Фур'є.

14. Якого виду процес теплопровідності описує рівняння $q_v = c \cdot \rho \cdot \partial t / \partial \tau$, де q_v – інтенсивність внутрішніх джерел теплоти; c – питома теплоємність тіла; ρ – густина тіла; $\partial t / \partial \tau$ – локальна швидкість зміни температури (t – температура, τ – час)?

Відповіді.

1. Нестационарний процес теплопровідності в тривимірному твердому тілі за рахунок дії внутрішніх джерел теплоти та за відсутності підведення теплоти в тіло ззовні. 2. Стационарний процес теплопровідності в тривимірному тілі за рахунок дії внутрішніх джерел теплоти і відсутності підведення теплоти в тіло ззовні. 3. Це локальне рівняння теплопровідності. 4. Це рівняння теплопровідності Пуассона.

15. За яким законом змінюється температура в поперечному перерізі плоскої стінки товщиною δ , через яку відбувається стационарний процес теплопередачі теплопровідністю за $\lambda = const$ (λ – коефіцієнт теплопровідності стінки)?

Відповіді.

1. Нелінійним. 2. Логарифмічним. 3. Лінійним. 4. Експоненціальним.

16. За яким законом змінюється температура вздовж нескінченного стержня, якщо $\lambda = const$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стержня та $\alpha_p = const$ – коефіцієнт тепловіддачі поверхні стержня?

Відповіді.

1. Параболічним. 2. Гіперболічним. 3. Лінійним. 4. Експоненціальним.

17. За яким законом змінюється температура під час стаціонарного процесу теплопровідності в напрямку радіуса циліндричної стінки, якщо $\lambda = const$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки?

Відповіді.

1. Гіперболічним. 2. Лінійним. 3. Логарифмічним. 4. Експоненціальним.

18. Що характеризує число БіО $Bi = \alpha \ell_o / \lambda$, де α – коефіцієнт тепловіддачі поверхні твердого тіла; ℓ_o – характерний розмір тіла; λ – коефіцієнт теплопровідності тіла?

Відповіді.

1. Це безрозмірний градієнт температури на поверхні тіла. 2. Співвідношення між термічними опорами тіла та тепловіддачі. 3. Процес тепловіддачі з поверхні тіла. 4. Безрозмірний термічний опір теплопередачі.

19. Який закон описує залежність $(grad t)_c = -(\alpha/\lambda) \cdot \Delta t_c$, де $(grad t)_c$ – градієнт температури на поверхні твердого тіла; α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні тіла; Δt_c – температурний напір на поверхні тіла?

Відповіді.

1. Це закон Ньютона – Ріхмана. 2. Це закон Фур'є. 3. Закон збереження енергії для поверхні тіла в умовах стаціонарного процесу теплопередачі. 4. Закон конвективної тепловіддачі.

20. Як пов'язані між собою залежність $(grad t)_c = -(\alpha/\lambda) \cdot \Delta t_c$ та число Нуссельта $Nu = \alpha \ell_o / \lambda_p$, де $(grad t)_c$ – градієнт температури на поверхні тіла; α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні тіла; Δt_c – температурний напір на поверхні тіла; ℓ_o – характерний розмір тіла; λ , λ_p – відповідно коефіцієнти теплопровідності тіла та середовища, які взаємодіють в режимі стаціонарної теплопередачі?

Відповіді.

1. Ці залежності ніяк не пов'язані між собою. 2. Обидві залежності описують конвекцію. 3. Фактично це одне і те саме, тільки перша залежність – це градієнт температури на поверхні тіла в розмірній формі, а число Нуссельта в безрозмірній. 4. Обидві залежності описують процес теплопередачі між тілом і середовищем.

21. Який фізичний зміст має число Пекле $Pe = w\ell/a$ у випадку конвективного процесу теплопередачі?

Відповіді.

1. Характеризує теплоінерційні властивості рідини. 2. Установлює співвідношення між питомими кількостями теплоти (густинами теплового потоку), що переносяться за рахунок руху рідини (газу) та теплопровідності речовини. 3. Характеризує швидкість передачі теплоти в рідині або газі. 4. Є критерієм швидкохідності джерел теплоти, що діють в рідині або газі.

22. Що є причиною появи примежового гідродинамічного шару під час набігання потоку рідини (газу) на тверду нерухому поверхню?

Відповіді.

1. Гальмівна сила тертя рідини між поверхнею і частинками рідини та між шарами рідини. 2. Внутрішнє тертя в рідині. 3. Зміна режиму руху рідини. 4. Інерційні сили, що діють в рідині.

23. Чому під час теплообміну між рідиною і твердою стінкою через примежовий тепловий шар основний тепловий потік передається за рахунок теплопровідності рідини?

Відповіді.

1. Через малу швидкість руху рідини в примежовому тепловому шарі. 2. Через малу товщину примежового теплового шару, поперек (по товщині) якого градієнт швидкості частинок рідини $\partial w/\partial y \rightarrow 0$. 3. Внаслідок ламінарного руху рідини в примежовому тепловому шарі. 4. Тому що, мабуть, в цьому шарі відсутня конвекція.

24. Чому за турбулентного режиму руху рідини інтенсивність теплопередачі вища ніж під час ламінарного руху?

Відповіді.

1. Через інтенсивне перемішування рідини. 2. Внаслідок додаткового перенесення кількості руху та турбулентного перенесення теплоти, за якого коефіцієнт турбулентного перенесення теплоти $\lambda_m \gg \lambda$, де λ – коефіцієнт теплопровідності рідини. 3. Через можливе руйнування примежових гідродинамічного та теплового шарів. 4. Через більшу середню швидкість руху рідини.

25. В чому полягає різниця між фізичними змістами чисел Грасгофа $Gr = g\beta\ell_o^3\Delta t/\nu^2$ та Архімеда $Ar = g\ell_o^3\Delta\rho/(\rho_o\nu^2)$, де g – прискорення вільного падіння; β – коефіцієнт об'ємного теплового розширення рідини; Δt – перепад (температурний напір) температури в рідині; ν – кое-

фіцієнт кінематичної в'язкості рідини; $\Delta\rho = \rho_t - \rho_o$ – зміна густини рідини через зміну її температури $\Delta t = t - t_o$ (тут має місце відповідність між t та ρ_t і t_o та ρ_o)?

Відповіді.

1. Обидва числа, Грасгофа та Архімеда, характеризують виникнення підіймальної сили в рідині через зміну її густини, але число Грасгофа є тепловим критерієм подібності, оскільки визначає підіймальну силу тільки внаслідок зміни густини рідини через виникнення в останній перепаду температури, а число Архімеда є гідродинамічним критерієм, оскільки причину зміни густини рідини не регламентує. 2. Обидва числа, Грасгофа і Архімеда, це один і той самий критерій, що характеризує виникнення підіймальної сили в рідині через змінення її густини, але записані в різних формах. 3. Фізичний зміст критеріїв Грасгофа та Архімеда різний, оскільки перший з них є тепловим критерієм подібності, а другий – гідродинамічним. 4. Критерії Грасгофа і Архімеда є безрозмірними підіймальними силами в рідині, що виникають через зміну її густини.

26. За якого режиму кипіння більше інтенсивність тепловіддачі – бульбашкового чи плівкового?

Відповіді.

1. Інтенсивність тепловіддачі за бульбашкового і плівкового режимів кипіння одна і та сама. 2. За бульбашкового режиму кипіння інтенсивність тепловіддачі значно більша, ніж за плівкового, оскільки поверхня кипіння під час бульбашкового режиму значно більша. 3. Інтенсивність тепловіддачі під час плівкового кипіння більша, ніж під час бульбашкового. 4. Інтенсивність тепловіддачі під час бульбашкового кипіння більша через велику швидкість зародження і спливання бульбашок пари.

27. Яка умова має бути виконаною, щоб у киплячій рідині утворилися парові бульбашки критичного радіуса?

Відповіді.

1. Необхідне значне перегрівання рідини відносно температури насичення. 2. Потрібно, щоб на поверхні кипіння були дефекти у вигляді лунок чи виступів, які є центрами зародження бульбашок. 3. Необхідною умовою зародження бульбашок критичного радіуса є механічна та термічна рівновага парової фази у бульбашці. 4. Необхідно, щоб тиск пари у бульбашці дорівнював або був більшим за тиск, що створюється силами поверхневого натягу в рідині на міжфазній поверхні бульбашки.

28. Який фізичний зміст має число Якоба $Ja = c_p \rho_p \Delta t / (r\rho_n)$, де c_p – питома теплоємність рідини; ρ_p – густина рідини; Δt – перепад темпе-

ратури в киплячій рідині; r – питома теплота фазового переходу під час кипіння; ρ_n – густина пари рідини під час кипіння?

Відповіді.

1. Число Якоба характеризує швидкість зростання парової фази під час кипіння. 2. Це число є співвідношенням між кількістю теплоти, що затрачується на перегрівання одиниці об'єму рідини відносно температури насичення, і кількістю теплоти, що переноситься паровою фазою. 3. Критерій Якоба характеризує швидкість зміни радіуса парової бульбашки. 4. Число Якоба установлює характер підведення енергії до парової бульбашки під час кипіння рідини.

29. Який фізичний зміст вкладають у поняття «потрійна точка» для речовини?

Відповіді.

1. «Потрійна точка» – це температура речовини, за якої вона одночасно може перебувати в трьох агрегатних станах – твердому, рідкому і газоподібному. 2. Це точка фазового переходу речовини з рідкого стану в твердий. 3. Це температура безпосереднього переходу речовини з пароподібного стану в тверду фазу. 4. Це температура речовини, за якої вона може одночасно перебувати в рідкому та твердому агрегатних станах.

30. Що є причиною стрибка температури на межі розділення конденсату і парової фази під час конденсації?

Відповіді.

1. Зміна режиму конденсації з крапельного на плівковий. 2. Причиною так званого стрибка температур є наявність біля поверхні конденсату тонкого шару пари (шар Кнудсена), в якому рухаються два зустрічних потоки молекул, один з яких захоплюється поверхнею конденсату, а інший відбивається цією поверхнею назад в об'єм пари. 3. Фізичні явища під час фазового переходу на межі конденсату. 4. Зміна характеру конвекції на межі конденсату.

31. В чому полягає відмінність тепломасоперенесення під час однокомпонентної конвекції та конденсації?

Відповіді.

1. Обидва процеси тепломасоперенесення конвективного характеру є ідентичними. 2. Під час конденсації тепломасоперенесення є більш інтенсивним. 3. Під час однокомпонентної конвекції тепломасоперенесення процес відбувається внаслідок дії поверхневих (примусова конвекція) або масових (вільна конвекція) сил, а під час конденсації основний тепловий потік визначається потоком маси речовини із об'єму пари в конденсат. Густина потоку маси, згідно з законом Герца–Кнудсена, залежить від пе-

репадів тиску й температури між об'ємом пари і поверхнею конденсату, фізичних параметрів пари та коефіцієнта конденсації. 4. Тепловий потік під час конденсації більше залежить від потоку маси речовини, ніж під час однокомпонентної конвекції.

32. В чому полягає різниця між насиченою і ненасиченою парою?

Відповіді.

1. Насичена пара має більшу густину. 2. Насиченою є пара, тиск в якій дорівнює тиску рідини, що випаровується, а температура пари близька до температури насичення за цього тиску і відсутня межа між рідкою і газоподібною фазами. 3. Температура насиченої пари близька до температури фазового переходу для цієї речовини з одного агрегатного стану в інший. 4. Тиск і густини в насиченій парі більші, ніж в ненасиченій.

33. В чому полягає різниця між концентраційною дифузією і однокомпонентною конвекцією?

Відповіді.

1. Концентраційна дифузія є молекулярним масоперенесенням речовини в багатокомпонентній суміші з області з більшою концентрацією в область з меншою концентрацією одного із компонентів за макронерухомої суміші, а конвекція є масоперенесенням речовини з однієї області об'єму в інший під дією на текуче середовище поверхневих або об'ємних сил. 2. Обидва процеси є масоперенесенням, тільки концентраційна дифузія є молекулярним масоперенесенням, а конвекція – макромасоперенесенням. 3. Це різні явища, одне з яких – концентраційна дифузія є молекулярним процесом, а конвекція – макропроцес. 4. Обидва явища не мають між собою нічого спільного.

34. В чому полягає різниця між термодифузією та термoeфектом, що може виникнути під час концентраційної дифузії?

Відповіді.

1. Різниці між цими явищами немає, це одне і те саме. 2. Термодифузія виникає в суміші газів за наявності в об'ємі суміші градієнта температури, коли молекули компонентів мають або різну масу, або різний діаметр (розміри), а термoeфект – це виникнення градієнта температури під час концентраційної дифузії, що починалась в суміші газів за рівномірного розподілу температури по об'єму суміші. 3. Термодифузію спричиняє градієнт температури в суміші з декількох компонентів, а термoeфект – це виникнення градієнта температури під час концентраційної дифузії в суміші, в якій на початковій стадії процесу по всьому об'єму температура була постійною. 4. Термодифузія виникає в суміші компонентів з нерівно-

мірним розподіленням температури та тиску, а термoeфект під час концентраційної дифузії спричиняє виникнення градієнта температури.

35. Який дифузійний процес описує закон Фіка $j_{k,gi} = -\rho D(\partial t_i/\partial n)$, де $j_{k,gi}$ – густина потоку маси одного із компонентів суміші, в якій відбувається дифузійний процес; ρ – густина суміші; D – коефіцієнт дифузії; t_i – відносна концентрація одного із компонентів; n – нормаль до поверхні рівних концентрацій компонента?

Відповіді.

1. Молекулярну дифузію. 2. Термодифузію. 3. Бародифузію. 4. Молекулярну концентраційну дифузію за рівномірних розподілів температури та тиску компонентів суміші.

36. Який тепловий процес в суміші газів описує залежність $\vec{q} = -\lambda \nabla t + \rho \vec{w} h + \sum_{i=1}^n j_{m,gi} \cdot h_i$, де q – густина теплового потоку; $\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z}$ – об'ємний градієнт температури; ρ – густина суміші; h – питома ентальпія суміші; $j_{m,gi}$ – густина молекулярного потоку маси одного з i -х компонентів суміші; h_i – ентальпія i -го компонента суміші?

Відповіді.

1. Залежність описує процес конвективної теплопередачі. 2. Наведена залежність є локальним вектором густини тепломасоперенесення в суміші, де мають місце конвекція та молекулярна дифузія. 3. Залежність описує процес конвективної теплопередачі за наявності молекулярної дифузії в суміші. 4. Наведене рівняння описує молекулярний процес тепломасоперенесення в суміші.

37. В чому полягає різниця між інтегральним та спектральним випромінюванням тіла чи середовища?

Відповіді.

1. Ці види випромінювання мало відрізняються один від одного. 2. Інтегральне випромінювання – це сумарне випромінювання в якомусь діапазоні довжин хвиль, а спектральне – у вузькому діапазоні довжин хвиль. 3. Інтегральне випромінювання є сумарним випромінюванням в діапазоні довжин хвиль $[0 \dots \infty]$ (або частот $[0 \dots \infty]$) електромагнітного спектра, а спектральне випромінювання – це випромінювання практично на одній довжині (частоті) електромагнітної хвилі. 4. Спектральне випромінювання характеризується довжиною хвилі $\lambda \pm \Delta\lambda$, де $\Delta\lambda$ – мала величина, а інтегральне випромінювання здійснюється в усьому електромагнітному спектрі.

38. Як співвідносяться між собою густини спектрального E_λ та інтегрального E випромінювань?

Відповіді.

1. Ці густини рівні між собою. 2. $E_\lambda = dE/d\lambda$, причому в системі СІ розмірність E_λ , Вт/м³, а E – Вт/м². 3. $E = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda \cdot d\lambda$ – інтегральне випромінювання є сумарним випромінюванням в діапазоні довжин електромагнітних хвиль $[\lambda_1, \lambda_2]$. 4. Густина інтегрального випромінювання E пов'язана із

густиною спектрального випромінювання залежністю $E = \sum_{i=1}^n (E_{\lambda_i} / \lambda_i)$.

39. В чому полягає різниця між абсолютно чорним та абсолютно білим тілами?

Відповіді.

1. Абсолютно чорне тіло поглинає падаючий на нього потік електромагнітного випромінювання, а абсолютно біле тіло – відбиває. 2. Абсолютно біле тіло відбиває потік електромагнітного випромінювання в усьому діапазоні електромагнітного спектра, а абсолютно чорне тіло поглинає випромінювання в усьому цьому діапазоні. 3. Абсолютно чорне тіло має коефіцієнт поглинання $A \leq 1$, а абсолютно біле тіло – це тіло з коефіцієнтом відбивання $R \leq 1$. 4. Абсолютно чорне тіло поглинає падаючий потік випромінювання в дуже широкому діапазоні довжин електромагнітних хвиль, а абсолютно біле тіло в такому самому діапазоні хвиль відбиває потік випромінювання.

40. Який закон описує залежність $E_{o\lambda} = \frac{2\pi C_1}{\lambda^5} [e^{C_2/(\lambda T)} - 1]^{-1}$, де C_1 – перша константа випромінювання; C_2 – друга константа випромінювання; λ – довжина електромагнітного тіла; $E_{o\lambda}$ – густина спектрального потоку випромінювання абсолютно чорного тіла?

Відповіді.

1. Ця залежність описує закон Релея – Джинса. 2. Це закон зміщення Віна. 3. Це теоретичний закон Планка. 4. Це закон Стефана – Больцмана.

ЛІТЕРАТУРА

1. Исаченко В. П. Теплопередача : учеб. для вузов / Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. – [4-е изд., перераб. и доп.] – М. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
2. Резников А. Н. Тепловые процессы в технологических системах : учеб. для вузов по специальностям «Технология машиностроения» и «Металлорежущие станки и инструменты» / А. Н. Резников, Л. А. Резников. – М. : Машиностроение, 1990. – 288 с.
3. Афанасьев В. Н. Лабораторный практикум по термодинамике и теплопередаче : учеб. пособие для энергомашиностроительных спец. вузов / Афанасьев В. Н., Афонин А. А., Исаев С. И. и др.; под ред. Крутова В. И., Шишова Е. В. – М. : Высш. шк., 1988. – 216 с.
4. Кухлинг Х. Справочник по физике / Кухлинг Х. ; пер. с нем. – М. : Мир, 1982. – 520 с.
5. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1973. – 832 с.
6. Базаров И. П. Термодинамика : учеб. / Базаров И. П. – [3-е изд., перераб. и доп.] – М. : Высш. шк., 1983. – 344 с.
7. Кирилин В. А. Техническая термодинамика : учеб. для вузов / Кирилин В. А., Сычев В. В., Шейндлин А. Е. – [4-е изд.] – М. : Энергия, 1974. – 448 с.
8. Решетов Д. Н. Детали машин : учеб. для студентов машиностроит. и механических спец. вузов / Решетов Д. Н. – [4-е изд., перераб. и доп.] – М. : Машиностроение, 1989. – 496 с.
9. Абрамов Е. И. Элементы гидропривода : справочник / Абрамов Е. И., Колесниченко К. А., Маслов В. Т. – [2-е изд., перераб. и доп.] – Киев : Техніка, 1977. – 320 с.
10. Башта Т. М. Машиностроительная гидравлика : справочное пособие / Башта Т. М. – [2-е изд. перераб. и доп.] – М. : Машиностроение, 1971. – 672 с.
11. Куталеладзе С. С. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое / С. С. Куталеладзе, А. И. Леонтьев. – М. : Энергия, 1972. – 341 с.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Лойцянский Л. Г. – М. : Наука, 1973. – 904 с.
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Шлихтинг Г. – М. : Наука, 1969. – 744 с.
14. Гухман А. А. Введение в теорию подобия / Гухман А. А. – М. : Высш. шк., 1973. – 254 с.
15. Алферов В. И., Соколов Ю. Н. Теплообмен деталей станков с воздухом цеха // Станки и инструмент. – 1968. – № 9. – С. 10–11.
16. Обертюх Р. Р. Теоретичні основи теплотехніки : лабораторний практикум / Р. Р. Обертюх, Ю. В. Булига. – Вінниця : ВНТУ, 2004. – 103 с.

17. Теория теплообмена. Сборник рекомендуемых терминов. Вып. 83. – М. : Наука, 1971. – 80 с.

18. Орлов П. И. Основы конструирования : справочно-методическое пособие; в 2-х кн. / Орлов П. И.; под ред. П. Н. Учаева. – [3-е изд., испр.] – М. : Машиностроение, 1988: Кн. 1. – 560 с.

19. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов : учеб. для машиностроительных вузов / Феодосьев В. И. – [5-е изд.] – М. : Наука, 1970. – 544 с.

20. Рекач В. Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости : учеб. пособие для вузов / Рекач В. Г. – М. : Наука, 1973. – 384 с.

21. Гуржий А. А. Теплотехника : курс лекций / А. А. Гуржий, П. И. Огородников. – Киев : Издательский Дом «Слово», 2003. – 254 с.

Українсько-англійський словник найбільш вживаних термінів

відбивання – reflection
випромінювання – radiating
градієнт – gradient
густина – density
деформація – deformation
диференціальний – differential
дифузія – diffusion
ентальпія – enthalpy
закон – law
ізобара – isobar
ізотерма – isotherm
ізохора – isochore
інтегральний – integral
кипіння – boiling
конвекція – convection
конденсація – condensation
кондуктивний – conductive
константа – constant
крайовий – marginal
криза – crisis
критерій – criterion
ламінарний – laminar
масообмін – mass exchange
молекулярний – molecular
напір – head
напруження – intension
нерозривність – continuity
нестационарний – unstationary
об'єм – volume
опір – resistance
перепад – overfall
поглинання – absorption
подібність – similarity
поле – field

потік – stream
примежовий – frontier
прозорість – transparency
променевий – radiation
режим – regime
рівняння – equation
розширення – extension
статистичний – statistic
стаціонарний – stationary
стехіометричний – stehiometric
стисливість – compressibility
суцільність – integrity
температура – temperature
температуропровідність – temperature conducting
теплообмін – heat exchange
теплопередача – heat transfer
теплопровідність – heat-conducting
теплосиловий – warmly power
теплота – heat
термодинамічний – thermodynamic
термопара – thermopair
турбулентний – turbulent
фаза – phase
феноменологічний – the phenomenon is logical
цикл – cycle
шар – layer
швидкість – speed
яскравість – brightness

*Електронне навчальне видання
комбінованого використання.*

Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Обертюх Роман Романович
Слабкий Андрій Валентинович

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ТЕПЛОТЕХНІКИ

Навчальний посібник

2-ге видання, перероблене та доповнене

Рукопис оформлено Р. Обертюхом

Редактор Т. Старічек

Оригінал-макет виготовив О. Ткачук

Підписано до видання 19.05.2020 р.
Гарнітура Times New Roman. Зам. № W2020-03.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.