Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк

Вища математика
Частина 3
Функції багатьох змінних

Практикум

Вінниця
ВНТУ
2020

УДК 51(075)
Х76

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 30.04.2020 р.)

Рецензенти:

А. А. Яровий, доктор технічних наук, професор

Є. А. Іванченко, доктор педагогічних наук, професор

Л. А. Вотякова, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Хом'юк, І. В.

Х76 Вища математика. Ч. 3. Функції багатьох змінних : практикум / І. В. Хом'юк, В. В. Хом'юк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 70 с.

ISBN 978-966-641-799-5

У практикумі на системній основі наводиться: теоретичний мінімум із базової теми курсу вищої математики, а саме з «Функції багатьох змінних», та основні алгоритми розв'язування відповідних практичних задач, запитання для самоперевірки, вправи для практичних занять та самостійного розв'язування. Наведені приклади завдань для індивідуальної роботи студентів.

Розрахований на студентів технічних ЗВО усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 51(075)

ISBN 978-966-641-799-5

ЗМІСТ

Рано чи пізно будь-яка правильна математична ідея
знаходить застосування в тій чи іншій справі
Академік Крилов

ВСТУП

В даному практикумі викладено один із розділів курсу вищої математики «Функції багатьох змінних». Бурхливий розвиток економіки в наш час досить часто потребує розв’язання задач на екстремум функції багатьох змінних, оскільки економічні показники, як правило, залежать від багатьох змінних. Такі задачі добре вивчені теорією функцій багатьох змінних, яка використовує методи диференціального числення.

У **практикумі** подано декілька практичних занять із даного розділу. Кожне практичне заняття містить: тему, мету, питання для самопідготовки, план, термінологічний словник ключових понять, зразки розв’язування типових задач, добірку завдань для аудиторної та самостійної роботи. Для допомоги у підготовці до практичних занять, а також для виконання самостійної роботи у практикумі наведений список рекомендованої літератури.

Практикум призначений для використання студентами різних спеціальностей денної та заочної форм навчання в процесі вивчення вищезгаданого розділу курсу.

Практичне заняття № 1

Тема. Поняття функції багатьох змінних. Неперервність. Частинні похідні. Диференційовність і диференціал функцій.

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з даної теми, набути навичок і вмінь знаходження частинних похідних ФБЗ, обчислення похідних складених функцій.

Питання для самопідготовки

Основні поняття.

Поняття границі та неперервності функції багатьох змінних.

Частинні похідні.

Частинні похідні вищих порядків.

План практичного заняття

1. Поняття ФБЗ. Область визначення, область значень, лінії рівня.
2. Обчислення частинних похідних I та II порядків.

Теоретичний довідник

Нехай $D-$деяка множина впорядкованих пар дійсних чисел: $D = X \times Y$. Припустимо, що кожній парі $(x, y) \in D$ поставлено у відповідність число z із множини Z. Тоді кажуть, що на множині D задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Змінні x, y називають незалежними змінними, або аргументами; $z-$залежною змінною; кажуть також, що $f(x, y)-$значення функції f у точці (x, y). Множину D називають областю визначення функції. Всі значення, яких набуває функція $f(x, y)$ при (x, y), що належать області визначення, утворюють область значень функції z. Аналогічно можна ввести поняття функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$, визначеної на множині D, що складається з упорядкованих трійок чисел (x, y, z). Усі такі функції називаються функціями багатьох змінних. Оскільки кожній впорядкованій парі чисел (x, y) у фіксованій прямокутній системі координат відповідає єдина точка М площини, і навпаки, кожній точці М відповідає єдина впорядкована пара чисел (x, y), то функцію двох змінних можна розглядати як функцію точки М і записувати $z = f(M)$ замість $z = f(x, y)$. Областю визначення функції тоді буде множина $\{M\}$ точок площини.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$. називають множину точок (x, y) площини Oxy, в яких функція набуває одного й того ж самого значення c і визначається співвідношенням $f(x, y) = c$. ***Поверхнею рівня функції*** $u = f(x, y, z)$ називається поверхня $f(x, y, z) = c$, в точках якої функція зберігає стале значення $u = c$.

Стала b називається ***границею функції*** $f(x,y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для будь-якої послідовності точок (з області визначення функції) $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),...,(x_n,y_n),...$, відмінних від $M(x_0,y_0)$, що прямують до точки $M(x_0,y_0)$, відповідна послідовність $f(x_1,y_1), f(x_2,y_2), f(x_3,y_3),..., f(x_n,y_n),...$ значень функції завжди прямує до b. Коротко це записують так: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$.

Функція $f(x,y)$ називається ***неперервною в точці*** $M(x_0,y_0)$, якщо вона визначена в області, що містить точку M_0, та в самій точці M_0 і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$. Функція називається неперервною в деякій області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ є ***повним приростом функції*** $f(x,y)$.

Якщо надається приріст, наприклад, лише змінній x, а y залишається незмінною величиною, то $\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$ є ***частинним приростом функції*** $f(x,y)$ ***за змінною*** x.

Так само $\Delta_y z = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ є ***частинним приростом функції*** $f(x,y)$ ***за змінною*** y.

Функція $f(x,y)$ називається неперервною в точці $M(x_0,y_0)$, якщо нескінченно малим приростам змінних x та y відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \right] = 0$.

Нехай $z = f(x,y)$ є функцією від двох незалежних змінних x та y. Утворимо частинний приріст функції $f(x,y)$ за змінною x

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

(припустимо, що y залишається незмінним) і розглянемо відношення

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Якщо існує границя цього відношення, коли Δx прямує до нуля, то вона називається частинною похідною функції $z = f(x,y)$ за змінною x у точці (x,y) і позначається символом $f_x^{'}(x,y)$ або $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Отже, $f_x^{'}(x,y) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$

Аналогічне означення частинної похідної за y

$$f_y^{'}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Частинні похідні $f_x^{'}(x,y)$ і $f_y^{'}(x,y)$ називають частинними похідними першого порядку, які є функціями від x та y і від них можна шукати частинні похідні. В результаті одержимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}^{''}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}^{''}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}^{''}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}^{''}(x,y).$$

Похідна $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ називається ***мішаною похідною другого порядку***.

Теорема (Шварца). Якщо частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ існують в деякому δ-околі точки $M(x,y)$ і неперервні в самій точці, то вони рівні між собою в цій точці, тобто справедлива рівність $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

З геометричної точки зору $z=f(x,y)$ – це поверхня у просторі прямокутної системи координат. Нехай $A(x_0;y_0;z_0)$ точка цієї поверхні $z_0=f(x_0;y_0)$. Проведемо через неї площину, паралельну Oz і перпендикулярну до Oy. Рівняння площини $y=y_0$. У перетині з поверхнею отримуємо криву, яка проходить через точку $A(x_0;y_0;z_0)$ і належить поверхні. В площині $y=y_0$ крива має рівняння $z=f(x;y_0)$.

Частині похідні першого порядку від $z=f(x,y)$ в точці $(x_0;y_0)$ є ***кутовими коефіцієнтами дотичних ліній*** перетину поверхні площинами, паралельними координатним площинам zOy, zOx, що проходять через точку $A(x_0;y_0;z_0)$.

Теорема. Нехай на множині D визначено складну функцію $z=f(u,v)$, де $u=u(x,y), v=v(x,y)$, і функції $u(x,y), v(x,y)$ у деякому околі точки (x_0,y_0) мають неперервні частинні похідні за x і y, а функція $f(u,v)$ має неперервні частинні похідні за змінними u,v в деякому околі точки (u_0,v_0), де $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,y_0)$. Тоді складна функція $z=f\left[(u(x,y),v(x,y)\right]$ диференційовна в точці (x_0,y_0), причому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Якщо рівність $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z\right)=0$ визначає неявну функцію $z=z\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, яка є диференційовною, то її похідні можуть бути знайдені з рівнянь $\frac{\partial F}{\partial x_k}+\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_k}=0 \quad (k=1,2,\ldots,n)$.

Частинні похідні функції двох незалежних змінних $z=f\left(x;\, y\right)$, яку задано за допомогою рівняння $F\left(x;\, y;\, z\right)=0$, де $F\left(x;\, y;\, z\right)$ – диференційовна функція змінних *x, y, z*, можуть бути обчислені за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ за умови, що } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Якщо рівняння $F(x,y)=0$ задає деяку функцію $y(x)$ в неявному вигляді і $F_x'(x,y) \neq 0,$ то

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

Якщо рівняння $F(x,y,z)=0$ задає функцію двох змінних $z(x,y)$ в неявному вигляді і $F_z'(x,y,z)=0,$ то справедливі формули

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}.$$

Приклади розв’язування типових завдань

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

а) $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$; б) $z=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1-y^2}$; в) $u=\sqrt{x+y+z-2}$

Розв’язування

а) Очевидно, z набуватиме дійсних значень лише тоді, коли $1-x^2-y^2 \geq 0,$ тобто, коли $x^2+y^2 \leq 1.$ Цю нерівність задовольняють координати всіх точок, що лежать на полі круга з радіусом 1, також і точки його контура, тобто точки кола $x^2+y^2=1.$

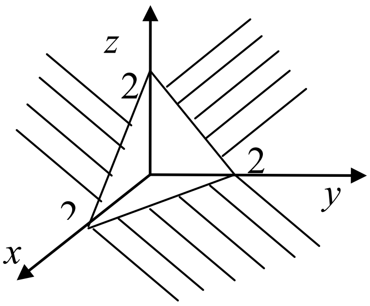
б) Шуканою областю буде прямокутник. Оскільки, з нерівності $4-x^2 \geq 0$ та $1-y^2 \geq 0$ маємо $x^2 \leq 4,\ \ y^2 \leq 1,$ або $-2 \leq x \leq 2,\ \ -1 \leq y \leq 1.$

Отже, до області визначення функції належать всі точки, що знаходяться на полі прямокутника, також точки контура (прямокутника).

$u = \sqrt{x + y + z - 2},$

в) $x + y + z - 2 \geq 0,$

$x + y + z \geq 2.$

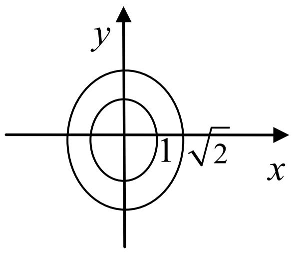


Приклад 2. Побудувати лінії рівня функцій $u = x^2 + y^2$.

Розв'язування

$x^2 + y^2 = 1,$

$x^2 + y^2 = 2.$

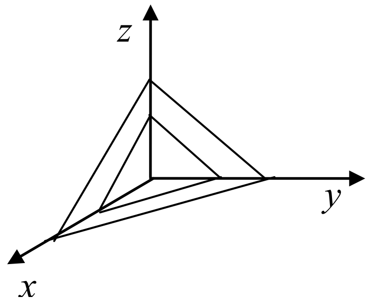


Приклад 3. Побудувати поверхні рівня $u = \dfrac{x + y + z}{3}$.

Розв'язування

$\dfrac{x + y + x}{3} = 1,$

$\dfrac{x + y + x}{3} = 2.$



Приклад 4. Показати, що функція $f(x; y) = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$ неперервна в будь-якій точці своєї області визначення.

Розв'язування

Задана функція в усіх точках $(x;y)$, крім точок, в яких $x^2 = y^2$. Нехай $(x_0;y_0)$ – деяка точка з області визначення функції f, тобто $x_0^2 \neq y_0^2$. Тепер для будь-якої послідовності точок $(x_n;y_n)$такої, що $x_n^2 \neq y_n^2$ і $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$, маємо

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n;y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n^2 - y_n^2} = \frac{x_0}{x_0^2 - y_0^2} = f(x_0;y_0).$$

Отже, задана функція перервна в довільні точці $(x_0;y_0)$ з області визначення.

Приклад 5. Показати, що функція трьох змінних $f(x;y;z) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ неперервна в будь-якій точці з області визначення.

Розв'язування

Задана функція визначена на множині G точок $(x;y;z)$, які задовольняють нерівності $|z| \leq 1, x^2 + y^2 < 1$.

Нехай $(x_0;y_0;z_0) \in G$. Тоді для будь-якої послідовності точок $(x_n;y_n;z_n) \in G$ такої, що $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$, маємо

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n;y_n;z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-z_n^2}}{\sqrt{1-x_n^2 - y_n^2}} = \frac{\sqrt{1-z_0^2}}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} = f(x_0;y_0;z_0)$$

що й треба було довести.

Приклад 6. Знайти частинні похідні першого та другого порядку за кожною незалежною змінною від функції: $z = x^2y^2$.

Розв'язування

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y,\ \frac{\partial z}{\partial y \partial x} = 4xy,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2,\ \frac{\partial z}{\partial x \partial y} = 4xy.$$

Приклад 7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $u = \ln(xy)$.

Розв'язування

Знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку

$$u_x' = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\ln(xy) = \frac{1}{xy}(xy)_x' = \frac{1}{xy}y = \frac{1}{x}$$

$$u_y' = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\ln(xy) = \frac{1}{xy}(xy)_y' = \frac{1}{xy}x = \frac{1}{y}$$

Функція двох змінних має чотири частинних похідних другого порядку, які утворюються диференціюванням кожної похідної першого порядку за кожною незалежною змінною

$$u_{xx}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\ln(xy)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$u_{yx}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\ln(xy)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$u_{yy}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$$

$$u_{xy}'' = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(\ln(xy)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Приклад 8. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3 - 3xyz = 5$.

Розв'язування

У даному разі $F\left(x, y, z\right) = z^3 - 3xyz - 5$. Знайдемо $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

Приклад 9. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = \left(\sqrt[3]{xy}\right)^2 + \left(\sqrt[5]{\frac{x}{y}}\right)^3$.

Розв'язування

Маємо $z = u^2 + v^3$, де $u = \sqrt[3]{xy}$, $v = \sqrt[5]{\frac{x}{y}}$.

Тоді $\frac{\partial z}{\partial u} = 2u$, $\frac{\partial z}{\partial v} = 3v^2$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt[3]{y} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[5]{y}} \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{5}\sqrt[5]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{y^6}}$.

Таким чином, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} + \frac{3v^2}{5\sqrt[5]{x^4 y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} - \frac{3v^2}{5}\sqrt[5]{\frac{x}{y^6}}$ або, після підставляння виразів u і v, дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} + \frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{x^2 y^3}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} - \frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^8}}.$$

,

Приклад 10. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Розв'язування

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Приклад 11. Обсяг x продажу нового продукту залежить від часу t і витрат y підприємства на рекламу. Якщо t вимірювати тижнями, а y у гривнях, тоді ця залежність матиме вигляд $x = 200 \cdot (5 - e^{-0,002y}) \cdot (1 - e^{-t})$. Знайти $\frac{\partial x}{\partial t}$ і $\frac{\partial x}{\partial y}$ та вказати економічний зміст цих похідних при $t = 1$, $y = 400$.

Розв'язування

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (200 \cdot (5 - e^{-0,002y}) \cdot (1 - e^{-t}))'_t = 200 \cdot (5 - e^{-0,002y}) \cdot e^{-t}$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=(200\cdot(5-e^{-0,002y})\cdot(1-e^{-t}))'_y=0,4\cdot(1-e^{-t})\cdot e^{-0,002y}$$

При $t=1$ та $y=400$ дістанемо

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\substack{t=1\\ y=400}}=200\cdot(5-e^{-0,002y})\cdot e^{-t}=200\cdot(5-e^{-0,8})\cdot e^{-1}=335$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_{\substack{t=1\\ y=400}}=0,4\cdot(1-e^{-1})\cdot e^{-0,8}=0,11$$

Частинна похідна x'_t характеризує швидкість зміни обсягу продажу нового продукту за тиждень, коли витрати y на рекламу не змінюються.

Частинна похідна x'_y характеризує швидкість зміни обсягу продажу нового продукту при зміні суми витрат y на рекламу і постійному t. За один тиждень при витратах на рекламу 400 гривень швидкість зростання обсягу x продажу продукту буде 0,11.

Приклад 12. Знайти абсолютну і відносну похибки визначення площі трикутника за виміряними довжинами основи a і висоти h. Знайти загальні вирази і значення похибок при a = 20 см, Δa = 1 мм, h = 10 см, Δh = 1 мм.

Розв'язування

Площа S трикутника з основою a і висотою h дорівнює $S=\frac{1}{2}ah.$

Дане вимірювання є непрямим, оскільки результат визначається за допомогою математичного виразу, що пов'язує його з прямо виміряними величинами. З виразу видно, що площа S є функцією двох змінних a та h. За умови, що похибки вимірювання довжини основи та висоти є малими (таке припущення є правдивим, оскільки вимірювання виконуються зазвичай достатньо ретельно та якісно), абсолютну похибку площі ΔS можна замінити її повним диференціалом, взявши замість диференціалів довжини основи і довжини висоти їх абсолютні похибки

$$\Delta S\approx dS=dS_a+dS_h=\frac{\partial S}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial S}{\partial h}\Delta h=\frac{1}{2}h\cdot\Delta a+\frac{1}{2}a\cdot\Delta h=\frac{h\cdot\Delta a+a\cdot\Delta h}{2}.$$

Відносна похибка ε визначається як відношення абсолютної похибки до значення величини

$$\varepsilon_S\approx\frac{\Delta S}{S}=\frac{h\cdot\Delta a+a\cdot\Delta h}{2S}=\frac{h\cdot\Delta a+a\cdot\Delta h}{2\frac{ah}{2}}=\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta h}{h}=\varepsilon_a+\varepsilon_h$$

При заданих числових значеннях, попередньо зводячи їх до одних одиниць вимірювання (до сантиметрів), отримуємо

$$\varepsilon_S \approx \frac{\Delta S}{S} = \frac{h\cdot\Delta a + a\cdot\Delta h}{2S} = \frac{h\cdot\Delta a + a\cdot\Delta h}{2\dfrac{ah}{2}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta h}{h} = \varepsilon_a + \varepsilon_h$$

$$\Delta S \approx \frac{h\cdot\Delta a + a\cdot\Delta h}{2} = \frac{10\cdot 0{,}1 + 20\cdot 0{,}1}{2} = 3(cm^2)$$

$$\varepsilon_S \approx \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta h}{h} = \frac{0{,}1}{20} + \frac{0{,}1}{10} = 0{,}06 = 6\%.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти частинні похідні функцій:

1) $u = x^2 + y^3 + 3x^2y^3$; 2) $u = xyz + \dfrac{x}{yz}$;

3) $u = \sin(xy + yz)$; 4) $u = x^{y^z}$;

5) $u = tg(x+y)e^{\frac{x}{y}}$; 6) $u = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Відповіді: 1) $U'_x = 2x + 6xy^3$; $U'_y = 3y^2 + 9x^2y^2$;

2) $U'_x = yz + \dfrac{1}{yz}$; $U'_y = xz - \dfrac{x}{zy^2}$; $U'_z = xy - \dfrac{x}{yz^2}$;

3) $U'_x = y\cos(xy+yz)$; $U'_y = (x+z)\cos(xy+yz)$; $U'_z = y\cos(xy+yz)$;

4) $U'_x = y^z\cdot x^{y^z-1}$; $U'_y = x^{y^z}\cdot z\cdot y^{z-1}\cdot\ln x$; $U'_z = x^{y^z}\ln x\cdot y^z\cdot\ln y$;

5) $$U'_x = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{\cos^2(x+y)} + tg(x+y)\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y};$$
$$U'_y = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{\cos^2(x+y)} + tg(x+y)\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right);$$

6) $U'_x = \dfrac{|y|}{(x^2+y^2)}$; $U'_y = \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)\cdot|y|}$;

2. Переконатися, що задана функція задовольняє вказане співвідношення:

1) $u = xe^y + ye^x$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = x\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x} + y\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$;

2) $u = (1+x)^3e^y$, $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Запитання для самоперевірки

1) Дати означення функції багатьох змінних, області визначення та значень.
2) Що являє собою графік функції $z = f(x, y)$?
3) Як позначаються та знаходяться частинні похідні першого порядку?
4) Як позначаються та знаходяться частинні похідні другого порядку?
5) Як знаходиться похідна складеної функції?
6) Як формулюється теорема Шварца?

Практичне заняття № 2

Тема. Диференційовність і диференціал функцій багатьох змінних. Застосування диференціала до наближених обчислень

Мета: закріпити отримані теоретичні знання з даної теми, набути навичок і вмінь знаходження диференціалів ФБЗ, знаходження наближених значень виразів за допомогою диференціала.

Питання для самопідготовки

Поняття повного диференціала.

Необхідна та достатня умови диференційовності функції багатьох змінних.

Застосування диференціала.

План практичного заняття

1. Обчислення диференціалів ФБЗ.
2. Застосування диференціала до наближених обчислень.

Теоретичний довідник

Функцію $z = f(x, y)$ називають диференційовною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо її повний приріст Δz у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y \qquad (1)$$

де $A, B -$ числа, а $\alpha, \beta -$ нескінченно малі при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ функції.

Вираз $A\Delta x + B\Delta y$ у рівності (1) називається ***головною лінійною частиною приросту функції*** в точці $(x; y)$.

Диференціалом диференційовної в точці $M(x, y)$ функції $z = f(x, y)$ називається головна, лінійна відносно приростів Δx та Δy, частина повного приросту цієї функції в точці M

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (2)$$

Теорема 1. (необхідна умова диференційовності функцій) Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0,y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$, причому $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)=A, \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)=B,$ де $A,B-$коефіцієнти з формули (1).

Теорема 2. Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0,y_0),$ то вона неперервна в цій точці.

Теорема 3. (достатня умова диференційовності) Якщо функція $z=f(x,y)$ має частинні похідні в деякому δ-околі точки $M_0(x_0,y_0)$ і ці похідні неперервні в точці $M_0,$ то функція диференційовна в цій точці.

Наслідок. Із неперервності частинних похідних у точці випливає неперервність самої функції в цій точці.

Враховуючи означення диференціала, теорему 4 можна сформулювати так.

Теорема 4. (*Достатня умова диференційовності*) Якщо функція двох змінних $u=f(x,y)$ має в деякому околі точки неперервні частинні похідні першого порядку за змінними x та y, то повний диференціал функції в цій точці існує і обчислюється за формулою

$$du=f'_x dx+f'_y dy\,. \tag{3}$$

Як і у випадку функції однієї змінної, диференціалами незалежних змінних x та y назовемо їх прирости, тобто $dx=\Delta x, dy=\Delta y.$ Тоді повний диференціал можна записати так

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \tag{4}$$

Вирази $d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}dx$ та $d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}dy$ називаються ***частинними диференціалами функції*** $z=f(x,y)$ за x та y відповідно. Отже,

$$dz=d_x z+d_y z, \tag{5}$$

або повний диференціал дорівнює сумі частинних диференціалів.

Рівність (3) використовується для наближеного обчислення значень функції.

Нехай $z=f(x,y)$, тоді $z(M)=z(M_0)+dz$, тобто,

$$z(M)=z(M_0)+\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\Delta x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\Delta y\,.$$

Звідки для функції двох змінних матимемо

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$$

Позначивши $a=x_0+\Delta x,\quad b=y_0+\Delta y,$ дістанемо

$$f(a,b)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(a-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(b-y_0). \qquad (6)$$

Цю формулу використовують у наближених обчисленнях. На ній базується ***алгоритм знаходження наближених значень величини*** K.

1. Подаємо величину K у вигляді значення деякої функції $f(x,y)$ у точці $(a,b): K=f(a,b)$.

2. Добираємо такі $x_0, y_0,$ щоб точка (x_0,y_0) була близькою до точки (a,b) і щоб значення $f(x_0,y_0)$ легко обчислювалися.

3. Обчислюємо $f(x_0,y_0),\ f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0).$

4. Підставляємо здобуті значення у формулу (5).

Диференціалом другого порядку від функції $z=f(x;y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2z=d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

$$d^3z=d\left(d^2z\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$d^nz=d\left(d^{n-1}z\right).$$

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Знайти повний диференціал функції $z=x^2\cos 4y$.

Розв'язування

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\cos 4y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-4x^2\sin 4y$. Тоді $dz=2x\cos 4y dx-4x^2\sin 4y dy$.

Приклад 2. Знайти повний диференціал функції $u=x^3-y^3+4xy$.

Розв'язування

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^3-y^3+4xy\right)'_x=3x^2+4y; \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^3-y^3+4xy\right)'_y=-3y^2+4x;$$

Отже, $du=(3x^2+4y)dx+(4x-3y^2)dy$.

Приклад 3. Знайти повний диференціал функції $z = x^3 + y^2 - 3xy$ у точці (2;-1).

Розв'язування

Повний диференціал функції багатьох змінних дорівнює сумі всіх її частинних диференціалів. Знайдемо частинні диференціали функції (частинний диференціал дорівнює добутку частинної похідної на диференціал відповідної незалежної змінної)

$$dz_y = \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(2y - 3x\right)dy\,; \;\; dz_x = \frac{\partial z}{\partial x}dx = \left(3x^2 - 3y\right)dx\,.$$

Повний диференціал функції дорівнює

$$dz = dz_x + dz_y = \left(3x^2 - 3y\right)dx + (2y - 3x)dy\,.$$

Повний диференціал функції у точці (2;-1) знаходимо, підставляючи у вираз повного диференціала значення $x = 2, y = -1$,

$$dz(2;-1) = \left(3\cdot 2^2 - 3\cdot(-1)\right)dx + (2\cdot(-1) - 3\cdot 2)dy = 15dx - 8dy\,.$$

Приклад 4. Знайти диференціал функції $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ в точці $M(0;1;2)$.

Розв'язування

Маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\,; \;\; \frac{\partial u}{\partial x}(M) = e^{0+1+4}\cdot 0 = 0\,.$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2y\,; \;\; \frac{\partial u}{\partial y}(M) = e^{0+1+4}\cdot 2\cdot 1 = 2e^5\,.$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2z\,; \;\; \frac{\partial u}{\partial x}(M) = e^{0+1+4}\cdot 2\cdot 2 = 4e^5\,.$$

Отже, $dU(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\cdot dz = 2e^5dy + 4e^5dz.$

Приклад 5. Обчислити наближено $(1{,}04)^{2{,}02}$.

Розв'язування

1. Тут $K = (1{,}04)^{2{,}02}$. Візьмемо $f(x,y) = x^y, \quad x > 0.$ Тоді $K = f(a,b),$ де $a = 1{,}04, \quad b = 2{,}02.$

2. Виберемо $x_0 = 1, \quad y_0 = 2.$

3. $f_x^{'} = yx^{y-1}, f_y^{'} = x^y \ln x$ і $\begin{array}{l} f(x_0, y_0) = f(1,2) = 1^2 = 1, \\ f_x^{'}(x_0, y_0) = 2 \cdot 1^{2-1} = 2, \quad f_y^{'}(x_0, y_0) = 1^2 \ln 1 = 0. \end{array}$

4. За формулою (6) дістанемо

$f(a,b) \approx 1 + 2(1,04-1) + 0(2,02-2) = 1,08.$

Отже, $(1,04)^{2,02} \approx 1,08.$

Приклад 6. Обчислити наближено значення $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

Розв'язування

Розглянемо функцію $z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$.
Якщо $x_1 = 1,03$; $y_1 = 0,98$.
Тоді $x_0 = 1$; $y_0 = 1$.
$\Delta x = 1,03 - 1 = 0,3$;
$\Delta y = 0,98 - 1 = -0,02$.
Знайдемо:

$$z(x_0, y_0) = \ln(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1) = \ln 1 = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \qquad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{1}{(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1)} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}; \qquad \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{1}{(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1)} \cdot \frac{1}{4\sqrt[4]{1^3}} = \frac{1}{4}.$$

Підставимо отримані значення в формулу

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y.$$

Маємо

$$\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1) \approx 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-2}{100} = 0 + \frac{1}{100} - \frac{1}{200} = \frac{1}{200} = 0,005.$$

Приклад 7. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

Розв'язування

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y,$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y$.

Отже, $d^2 z = -\sin x \sin y\, dx^2 + 2\cos x \cos y\; dx\, dy - \sin x \sin y\, dy^2$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти диференціали функцій:

1) $U = x^2 y^3$ в точці M(2,1);

2) $U = \frac{yz}{x}$ в точці N(1,2,3);

3) $U = \cos(xy + xz)$ в точці F(1, $\pi / 6; \pi / 6$);

4) $U = e^{xy}$ в точці O(0,0,0).

Відповіді: 1) $dU = \left(2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy\right)\big|_M = 4dx + 12dy$;

2) $dU = \left(\frac{-yz}{x^2}dx + \frac{z}{x}dy + \frac{y}{x}dz\right)\Big|_N = -6dx + 3dy + 2dz$;

3) $dU = -\sin x(x+y)[(y+z)dx + xdy + xdz]\Big|_F = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\pi}{3}dx + dy + dz)$;

4) $dU = e^{xy}[ydx + xdy]\big|_M = 0$.

2. Обчислити наближено значення:

1) $(1{,}04)^{2{,}02}$;

2) $(1{,}02)^2(0{,}97)^2$;

3) $\sqrt{(8{,}04)^2 + (6{,}03)^2}$;

4) $\ln((0{,}9)^3+(0{,}09)^3)$.

Відповіді: 1) 1,08; 2) 10,05; 3) 1,00; 4) -0,03.

3. Знайти повні диференціали функцій:

1) $z = \frac{x+y}{x-y}$;   2) $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$.

Відповідь. 1) $dz = \frac{2(xdy - ydx)}{(x-y)^2}$; 2) $dz = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}$.

Запитання для самоперевірки

1. Яка необхідна умова диференційовності ФБЗ?
2. Яка достатня умова диференційовності ФБЗ?
3. Алгоритм знаходження наближеного значення за допомогою диференціала.

Практичне заняття № 3

Тема. Дотична площина та нормаль. Похідна за напрямом. Градієнт. Екстремум ФБЗ.

Мета: знати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні, означення похідної за напрямом, градієнта, екстремуму функції кількох змінних, набути навичок і вмінь побудови дотичної площини і нормалі до поверхні, знаходження градієнта, вміти за допомогою алгоритму знаходити екстремум функції багатьох змінних.

Питання для самопідготовки

Поняття дотичної площини і нормалі до поверхні.
Похідна за напрямом, градієнт.
Екстремум ФБЗ.
Необхідні та достатні умови існування екстремуму.

План практичного заняття

1. Знаходження дотичної площини та нормалі до поверхні, що задана явно та неявно.
2. Обчислення похідної за напрямом та градієнта.
3. Дослідження довільних функцій багатьох змінних на екстремум.

Теоретичний довідник

Нехай задано диференційовну функцію $z = f(x, y)$ в області D площини xOy. Її геометричним образом є поверхня S. Вибравши точку $P_0(x_0, y_0) \in D$, знайдемо $z_0 = f(x_0, y_0)$ і, отже, точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить поверхні S. Через цю точку можна провести нескінченну множину ліній, що лежать на поверхні, а також і нескінченну множину дотичних до цих ліній у точці M_0. Сукупність цих прямих утворює ***дотичну площину***.

Дотичною площиною до поверхні в точці M називається площина, яка має у собі усі дотичні до кривих, проведених на поверхні через точку M.

Якщо поверхня задана рівнянням $f(x, y, z) = 0$, то рівняння дотичної площини в точці $M(x_0; y_0)$ до поверхні має вигляд

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_M (y - y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_M (z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то рівняння (1) має вигляд

$$z'_x(M)(x - x_0) + z'_y(M)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Нормаллю до поверхні S, заданої рівнянням $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини.

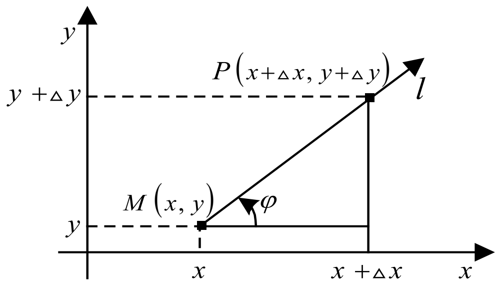
Якщо поверхня задана рівнянням $f(x, y, z) = 0$, то канонічне рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M)}. \tag{3}$$

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то канонічне рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{4}$$

Частинні похідні дають «швидкість змін» функції $f(x, y)$ в напрямах, паралельних координатним осям. Проте часто буває, що потрібно знайти швидкість зміни $f(x, y)$ в будь-якому напрямі.



На довільній осі l візьмемо фіксовану точку $M(x, y)$ і змінну точку $P(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Позначимо через φ кут, що його утворює вісь l з віссю Ox, а через ρ – відстань точки P від точки M. Утворимо відношення

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho}.$$

Якщо існує

$$\lim_{P \to M} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\rho}, \tag{5}$$

коли точка P по осі l наближається до M, то цю границю називають ***похідною від функції*** $z = f(x, y)$ в точці M ***за напрямом*** l і позначають $\frac{\partial f}{\partial l}$.

Нехай $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Точка P наближається до M по прямій l, отже,

$\Delta x = \rho \cos\varphi,$

$\Delta y = \rho \sin\varphi.$

Таким чином,

$$\frac{df}{dl} = f_x'(x,y)\cos\varphi + f_y'(x,y)\sin\varphi \text{ або } \frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi. \qquad (6)$$

Це і є виразом похідної за даним напрямом.

У фіксованій точці похідна є функцією кута φ. Постає питання: в якому ж напрямі похідна має найбільшу величину. Інакше кажучи, в якому напрямі функція $f(x,y)$ найшвидше зростає.

Розглянемо вектор $\vec{g}$, який має за проекції на координатних осях величини $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$ (частинні похідні функції $f(x,y)$, обчислені в точці $M(x,y)$).

Довжина або модуль цього вектора буде

$$\left|\vec{g}\right| = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2} = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}.$$

Праву частину рівності (6) помножимо і поділимо на $\left|\vec{g}\right|$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \left|\vec{g}\right| \cdot \left[\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2}} \cos\varphi + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2}} \sin\varphi \right]. \qquad (7)$$

Очевидно, дріб $\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\left|\vec{g}\right|}$ дорівнює косинусові кута (позначимо цей кут через λ), що його утворює вектор $\left|\vec{g}\right|$ з віссю Ox, а дріб $\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\left|\vec{g}\right|}$

дає величину синуса цього самого кута. Отже, $\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}}{|\vec{g}|}=\cos\lambda;$ $\dfrac{\frac{\partial z}{\partial y}}{|\vec{g}|}=\sin\lambda$.

Підставимо ці вирази у (7), матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial l}=|\vec{g}|\cdot[\cos\lambda\cos\varphi+\sin\lambda\sin\varphi]=|\vec{g}|\cos(\lambda-\varphi). \qquad (8)$$

З рівності (8) бачимо, що найбільшу величину похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ матиме тоді, коли $\cos(\lambda-\varphi)=1$, тобто коли вісь l збігається з вектором $|\vec{g}|$.

Вектор $|\vec{g}|$, який має за проекції на координатних осях $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ і вказує напрям найшвидшого зростання функції $f(x,y)$, називається ***градієнтом функції в точці*** M і позначається

$$\vec{g}=grad\ f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}. \qquad (9)$$

Якщо розглядати функцію від трьох змінних $u=f(x,y,z)$, то для похідної за напрямом l дістанемо

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (10)$$

де $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma-$напрямні косинуси l, а для градієнта мали б вираз

$$grad\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (11)$$

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$ і є неперервною в цій точці.

Функція $z=f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0,y_0)$ ***локальний максимум***, якщо існує такий окіл точки M_0, для довільної точки $M(x,y)$ якого виконується нерівність $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ і ***локальний мінімум***, якщо $f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$.

Точки локального максимуму й мінімуму функції багатьох змінних називають ***точками екстремуму***.

З означення випливає: якщо $z=f(x,y)$ має в точці M_0 екстремум, то повний приріст $\Delta z=f(M)-f(M_0)$ цієї функції в точці M_0 задовольняє в деякому околі точки M_0 одну з нерівностей:

1) $\Delta z \le 0,$ коли в точці M_0 функція має максимум;

2) $\Delta z \ge 0,$ коли в точці M_0 функція має мінімум, і навпаки.

Якщо, крім того, при $M \ne M_0$ виконується нерівність $f(M) \ne f(M_0),$ то точку M_0 називають точкою строго локального максимуму (мінімуму).

Теорема 1. (необхідні умови екстремуму функції) Якщо функція $z = f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум і частинні похідні першого порядку, то в цій точці частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{12}$$

Зауваження. Якщо функція $z = f(M)$ має екстремум у точці M_0 і є диференційовною в точці M_0, то $df(M_0) = 0$ або $grad\ f(M_0) = 0$.

Точки, в яких перші похідні деякої функції дорівнюють нулю, називають ***стаціонарними***.

Теорема 2. (достатні умови екстремум функції двох змінних) Припустимо, що функція $z = f(x,y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні першого та другого порядків, причому $f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Нехай $f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \quad f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \quad f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$ Тоді, якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$ і $A < 0,$ то $M_0(x_0, y_0)$ є точкою максимуму функції $z = f(x,y)$; якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$ і $A > 0,$ то $M_0(x_0, y_0)$ є точкою мінімуму; якщо $\Delta = AC - B^2 < 0$, то в точці M_0 екстремуму немає.

Сформулюємо алгоритм дослідження функції $z = f(x,y)$ на екстремум:

1) знаходимо перші похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

2) визначаємо критичні точки, тобто точки, в яких $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$;

3) знаходимо другі частинні похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

4) знаходимо для кожної критичної точки значення $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_i),$

$B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_i), \quad C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_i)$ та $\Delta = AC - B^2$ і робимо висновки на підставі теореми 2.

Приклади розв’язування типових завдань

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної площини нормалі до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 169 = 0$ у точці P(3;4;12).

Розв’язування

Знайдемо частинні похідні в точці P(3;4;12)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_P = \left(2x\right)_P = 6\,,\ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_P = \left(2y\right)_P = 8\,,\ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_P = \left(2z\right)_P = 24\,.$$

Тоді рівняння нормалі набуде вигляду

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-12}{24}\text{, або } \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}\,,$$

а рівняння дотичної площини –

$$3\left(x-3\right) + 4\left(y-4\right) + 12\left(z-12\right) = 0\text{, або } 3x + 4y + 12z - 169 = 0\,.$$

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної до нормалі в точці $M(1;1;1)$ $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$.

Розв’язування

$$z'_x = (2x - 2y - 1),\quad z'_x(M) = -1;$$
$$z'_y = -2x + 2y + 2,\quad z'_y(M) = 2.$$

Рівняння дотичної площини $-(x-1) + 2(y-1) - (z-1) = 0,$

$-x + 1 + 2y - 2 - z + 1 = 0,$

$-x + 2y - z = 0,$

$x - 2y + z = 0.$

Рівняння нормалі – $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{-1}.$

Приклад 3. Знайти похідну функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точці $M_1(-2;3;6)$ в напрямку до точки $M_2(-1;1;4)$.

Розв’язування

Знайдемо частинні похідні функції в точці M_1:

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial x} = \frac{\partial u(M_1)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(M_1) = -\frac{2}{7},$$

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(M_1) = \frac{3}{7},$$
$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(M_1) = \frac{6}{7}.$$

Знайдемо одиничний вектор, який збігається за напрямком з вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$,

$$s^0 = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = (\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}).$$

Тоді з формули

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

маємо

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial s} = -\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{7}\cdot(-\frac{2}{3}) + \frac{6}{7}\cdot(-\frac{2}{3}) = -\frac{20}{21}.$$

Приклад 4. Обчислити похідну функції $z = arctg(xy)$ в точці $M_0(1;1)$, що належить параболі $y = x^2$ за напрямком цієї кривої (в напрямку зростання абсциси).

Розв'язування

За напрямок s^0 параболи $y = x^2$ в точці $M_0(1;1)$ беремо напрямок дотичної до параболи в цій точці, який задається кутом α, що утворює дотична з віссю Ox. Тоді маємо:

$$y' = 2x, tg\alpha = y'(1) = 2,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Знаходимо частинні похідні функції z в точці M_0:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \frac{y}{1 + x^2y^2}(M_0) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \frac{x}{1 + x^2y^2}(M_0) = \frac{1}{2}.$$

Підставимо отримані значення у формулу

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta,$$

де $s^0 = (\cos\alpha; \cos\beta)$; $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Приклад 5. Дослідити функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ на локальний екстремум.

Розв'язування

1) Знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12$.

2) Розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 15, \\ 6xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1, \\ y_1 = 1, \quad y_2 = -1, \quad y_3 = 2, \quad y_4 = -2 \end{cases}$$

Функція z має чотири критичних точки:

$M_1(2;1)$, $M_2(-2;-1)$, $M_3(1;2)$, $M_4(-1;-2)$.

3) Знаходимо другі похідні: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$.

4) Для точки $M_1(2;1)$ маємо:

$A = 12$; $B = 6$; $C = 12$; $\Delta = 12 \cdot 12 - 6^2 = 108 > 0$,
$\Delta > 0$; $A > 0$.

Отже, $M_1(2;1)$ є точкою мінімуму; $z_{\min} = z(2;1) = -28$.
Решта точок досліджуються аналогічно.

Приклад 6. Дослідити на екстремум функцію $u(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 5x + 6y$.

Розв'язування

Знайдемо стаціонарні точки функції $u(x, y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ -x + 4y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -1.$$

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2;-1) = 2; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4,$$

$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7 > 0$. Оскільки $\Delta = 2 \cdot 4 - 1 = 7 > 0$ і $d^2u(2;-1) = 2 > 0$, то в точці $(2;-1)$ досягається строгий локальний мінімум

$$u(2;-1) = 4 + 2 + 2 - 10 - 6 = -8.$$

Приклад 7. При лікуванні деякого захворювання одночасно використовують два препарати. Реакція u (подана в одиницях деякого фізіологічного параметра) на $\boldsymbol{x}$ одиниць першого препарату та $\boldsymbol{y}$ одиниць другого описується залежністю $u(x,y) = x^2y^2(a-x)(b-y)$. Яка кількість другого препарату $\boldsymbol{y}$ викликає максимальну реакцію при фіксованій дозі першого?

Розв'язування

При фіксованій кількості першого препарату залежність $u(x,y)$ є функцію однієї змінної y. Таким чином, задача зводиться до знаходження максимуму функції однієї змінної y. У точці максимуму перша похідна (яка є нічим іншим, як частинною похідною за y) цієї функції дорівнює нулю.

Знайдемо частинну похідну функції $u(x,y)$ за y (змінну x при цьому розглядаємо як константу)

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = x^2(a-x)[2y(b-y) - y^2] = x^2(a-x)y(2b-3y).$$

Для знаходження екстремумів прирівнюємо похідну до нуля і розв'язуємо отримане рівняння відносно y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2(a-x)y(2b-3y) = 0.$$

Дане рівняння має два корені $y_1 = 0$, $y_2 = \dfrac{2b}{3}$. Оскільки при переході через точку y_1 у напрямку збільшення y похідна $u_y^{'}$ змінює знак з «–» на «+», а при переході через точку y_2 – з «+» на «–», то точка $y = 0$ є точкою мінімуму, а точка $y = \dfrac{2b}{3}$ – точкою максимуму.

Отже, максимальна реакція досягається при дозі другого препарату $y = \dfrac{2b}{3}$, причому ця доза не залежить від дози першого препарату і є оптимальною завжди.

Принагідно зауважимо, що мінімум реакції при $y = 0$ означає, що дані препарати разом дають більший ефект, ніж окремо, і, таким чином, їх змішане застосування є доцільним.

Приклад 8. Задано виробничу функцію фірми $Q = f(x, y)$, де $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$, x і y – обсяги двох видів ресурсів, які використовують у виробництві. Ринкова ціна продукції $p_0 = 2$ *умов. грош. од.*, а ринкові ціни на ресурси, відповідно, $p_1 = 1$ *умов. грош. од.* $p_2 = \dfrac{1}{2}$ *умов. грош. од.* Знайти комбінацію ресурсів (x^*, y^*), за якої фірма одержить максимальний прибуток.

Розв'язування

Складаємо функцію прибутку

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = p_0\, f(x_1, x_2, ..., x_n) - (p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n),$$

де, відповідно до умови задачі, $P(x_1, x_2, ..., x_n) = P(x, y)$; $p_0 = 2$;

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x, y) = x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{2}};$$

$$(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n) = p_1x + p_2y = 1 \cdot x + \frac{1}{2}y.$$

Отже, функція прибутку має вигляд $P(x, y) = 2 \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot y^{\frac{1}{2}} - (1 \cdot x + \dfrac{1}{2}y)$.

Досліджуємо функцію прибутку фірми на екстремум.

За необхідної умови ($P'_x(x, y) = 0$ і $P'_y(x, y) = 0$) існування локального екстремуму шукаємо точку (x, y), в якій прибуток, можливо, максимальний.

$$\begin{cases} P'_x = 2\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} - 1 \\ P'_y = 2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}} - 1 = 0 \\ x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{4}} \\ \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{2x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 4x^{\frac{3}{2}} \\ x^2 = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Отже, $M(1, 4)$ – точка, в якій функція прибутку, можливо, має екстремум.

Впевнитись в тому, що це точка екстремуму, можна за допомогою достатніх умов.

Знаходимо частинні похідні другого порядку

$$P''_{xx} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot x^{-\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{2}}; \qquad P''_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{2}}; \qquad P''_{yy} = -\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{2}}$$

Визначаємо частинні похідні другого порядку в точці $M(1, 4)$:

$$P''_{xx}(1, 4) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 1^{-\frac{7}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{8}\cdot 1\cdot 2 = -\frac{3}{4};$$

$$P''_{xy}(1, 4) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1^{-\frac{3}{4}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8};$$

$$P''_{yy}(1, 4) = -\frac{1}{2}\cdot 1^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{16}.$$

Із одержаних значень частинних похідних другого порядку в точці $M(1, 4)$ складаємо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \end{vmatrix} = \frac{3}{64} - \frac{1}{64} = \frac{2}{64} = \frac{1}{32} > 0$$

В точці $M(1, 4)$ функція $P(x, y)$ має екстремум, бо $\Delta > 0$. Оскільки перший елемент визначника менший від нуля $\left(-\frac{1}{3} < 0\right)$, то в точці $M(1, 4)$ функція $P(x, y)$ має максимум.

Обчислимо максимальний прибуток фірми

$$P_{\max} = P(1, 4) = 2\cdot 1^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}\cdot 4 = 2\cdot 1\cdot 2 - 1 - 2 = 1.$$

Отже, фірма одержить максимальний прибток $P_{\max} = 1$ *ум. грош. од.*, якщо ресурси першого виду будуть використовувати у кількості $x = 1$ *од.*, а другого – $y = 4$ *од.*

Приклад 9. Мале підприємство виготовляє два види товарів у кількості x і y відповідно. Загальні щоденні витрати C *умов. грош. од.* виробництва задані функцією $C(x, y) = 250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2$. Визначити кількість x і y одиниць товарів, яку потрібно виготовляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

Розв'язування

Досліджуємо функцію витрат на екстремуми.

За допомогою необхідної умови $C'_x(x, y) = 0$ і $C'_y(x, y) = 0$ знаходимо критичну точку.

$$C'_x(x, y) = (250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2)'_x = -4 + 0,4x$$
$$C'_y(x, y) = (250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2)'_y = -7 + 0,2y$$

$$\begin{cases} C'_x = 0 \\ C'_y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -4 + 0,4x = 0 \\ -7 + 0,2y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 10 \\ y = 35 \end{cases};$$

$M(10, 35)$ – критична точка, в якій функція витрат $C = C(x, y)$, можливо, має мінімальне значення.

Впевнитись в тому, що M – точка екстремуму можна за допомогою достатніх умов.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$C''_{xx}(x, y) = (-4 + 0,4x)'_x = 0,4; \quad C''_{xy}(x, y) = (-4 + 0,4x)'_y = 0;$$
$$C''_{yy}(x, y) = (-7 + 0,2y)'_y = 0,2.$$

Із одержаних значень частинних похідних другого порядку складаємо визначник

$\Delta = \begin{vmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,08 > 0$, в точці $M(10, 35)$ функція $C(x, y)$ має екстремум, бо $\Delta > 0$.

Оскільки перший елемент визначника більший від нуля $(0,4 > 0)$, то в точці $M(10; 35)$ функція $C(x, y)$ має локальний мінімум.

Обчислимо мінімальні витрати підприємства.

З умови $C(x, y) = 250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2$, тому $C_{\min} = C(10, 35) = 250 - 4 \cdot 10 - 7 \cdot 35 + 0,2 \cdot 10^2 + 0,1 \cdot 35^2 = 250 - 40 - 245 + 20 + {}$ $+122,5 = 107,5.$

Отже, мале підприємство буде мати мінімальні щоденні витрати $C_{\min} = 107{,}5$ *умов. грош. од.*, якщо продукцію першого виду буде випускати у кількості $x = 10$ *од.*, а другого $y = 35$ *од.*

Приклад 10. $z = x^4 + y^4 + 2x^3 y$, $\bar{l}$=(3,4) . Знайти $\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}$ в точці М (1; 2).

Розв'язування

$\overline{grad}\; z = (z'_x, z'_y)$

$z'_x = 4x^3 + 2y3x^2 = 4x^3 + 6x^2 y; \quad z'_x(M) = 4 + 12 = 16,$

$z'_y = 4y^3 + 2x^3; \quad z'_y(M) = 32 + 2 = 34.$

$\overrightarrow{grad} z(M) = \overrightarrow{(16;34)}$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{l}} = \text{пр}\bar{l}\; \overrightarrow{grad}\; z = \frac{\overrightarrow{grad}\; z \cdot \bar{l}}{|\bar{l}|} = \frac{16 \cdot 3 + 34 \cdot 4}{\sqrt{9+16}} = \frac{48+136}{5} = \frac{184}{5} = 36{,}8.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 2x - 4y^2$ в точці (2,1,4).

Відповідь: $2x - 8y + z - 8 = 0; \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{1}.$

2. Знайти точку екстремуму функції $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

Відповідь: $M(-1,1)$ локальний мінімум.

3. Дослідити дані функції на локальний екстремум:

а) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y;$

б) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y;$

в) $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y.$

Відповідь: а) $z_{\min} = z(2,1) = -28, z_{\max} = z(-2,-1) = 28;$ б) $z_{\min} = z(1,0) = -1;$ в) точок екстремуму немає).

4. Обчислити похідну функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точці $M_0(3;4)$ в напрямку: а) вектора $\vec{a} = \overrightarrow{(1;1)}$; б) радіуса-вектора точки M_0; в) вектора $\vec{s} = \overrightarrow{(4;3)}$.

Відповідь: а) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) 0.

5. Знайти $grad\; u$ в точці $M_0(1;1;1)$, якщо $u = x^2 yz - xy^2 z + xyz^2$.

Відповідь: $grad\; u = 2i - 2j + 2k.$

6. Знайти кут φ між градієнтами функцій $u=\frac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2$ і $v=x^2yz$ в точці $M_0(2;\frac{1}{3};\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Відповідь: $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Запитання для самоперевірки

1. Як скласти рівняння площини, дотичної до поверхні, що задана явно (неявно)?
2. Як скласти рівняння нормалі до поверхні, що задана явно (неявно)?
3. Що називають локальним максимумом (локальним мінімумом)?
4. Які точки називають точками екстремуму?
5. Як визначити критичні точки?
6. Що таке необхідні умови існування екстремуму?
7. Сформулюйте достатні умови існування екстремуму.
8. Як визначають екстремум функції багатьох змінних?
9. В якому напрямку похідна має найбільшу величину?
10. Як визначається градієнт?
11. Як визначається швидкість зміни $f(x,y)$ в будь-якому напрямку?
12. В чому полягає фізичний зміст похідної за напрямом?

Практичне заняття № 4

Тема. Умовний екстремум. Найбільше та найменше значення функції багатьох змінних.

Мета: знати метод множників Лагранжа, необхідні та достатні умови умовного екстремуму, означення умовного екстремуму, набути навичок і вмінь побудови функції Лагранжа, вміти за допомогою алгоритму знаходити найбільше та найменше значення функції багатьох змінних.

Питання для самопідготовки:

Поняття умовного екстремуму.
Необхідні та достатні умови існування умовного екстремуму.
Найбільше та найменше значення функції багатьох змінних.

План практичного заняття

1. Дослідження довільних функцій багатьох змінних на умовний екстремум.

2. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції багатьох змінних.

Теоретичний довідник

Нехай маємо функцію багатьох змінних $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, аргументи якої пов'язані рівнянням зв'язку $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$.

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)-$ функції, неперервні разом зі своїми частинними похідними

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max \quad (\min); \tag{1}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \quad (i = \overline{1,m}). \tag{2}$$

У курсі математичного аналізу задачу (1), (2) називають задачею на умовний екстремум або класичною задачею оптимізації.

Щоб знайти розв'язок цієї задачі, вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, які називають ***множниками Лагранжа,*** складають функцію Лагранжа

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \right] \tag{3}$$

знаходять частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial x_j} (j = \overline{1,n})$ і $\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} (i = \overline{1,m})$ і розглядають систему $n+m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1,n}); \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \end{cases} \tag{4}$$

з $(n+m)$ невідомими $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Довільний розв'язок системи рівнянь (4) визначає точку $X = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, у якій може мати місце екстремум функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Отже, розв'язавши систему рівнянь (4), одержують усі точки, у яких функція (1) може мати екстремальні значення. Подальше дослідження знайдених точок проводять так само, як і у випадку безумовного екстремуму.

Таким чином, визначення екстремальних точок задачі (1), (2) методом множників Лагранжа охоплює такі етапи:

1. Складають функцію Лагранжа.;

2. Знаходять частинні похідні від функції Лагранжа за змінними x_j і λ_i та прирівнюють їх до нуля;

3. Розв’язуючи систему рівнянь (4), знаходять точки, у яких цільова функція задачі може мати екстремум.

4. Серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, у яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції (1) у цих точках.

Умовним екстремумом функції $f(x,y)$ називають екстремум цієї функції за умови, що її аргументи пов’язані рівнянням зв’язку $\varphi(x,y)=0$. Для знаходження умовного екстремуму функції $f(x,y)$ за умови $\varphi(x,y)=0$ складають функцію Лагранжа $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, де λ – невизначений сталий множник. Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=\varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай $P_0(x_0,y_0),\lambda-$довільний розв’язок цієї системи і

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(P_0) & \varphi_y'(P_0) \\ \varphi_x'(P_0) & F_{xx}''(P_0,\lambda) & F_{xy}''(P_0,\lambda) \\ \varphi_y'(P_0) & F_{xy}''(P_0,\lambda) & F_{yy}''(P_0,\lambda) \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta<0,$ то функція $z=f(x,y)$ має в точці $P_0(x_0,y_0,\lambda_0)$ умовний максимум; якщо $\Delta>0-$то умовний мінімум.

Функція $z = f(x, y)$, неперервна в обмеженій замкненій області D, обов’язково має в цій області найбільше і найменше значення.

Цих значень функція досягає або в стаціонарних точках (які знаходяться всередині D), або в точках, які належать межі області D.

Тому, щоб знайти найбільше і найменше значення функції в області D, потрібно:

1) знайти стаціонарні точки, які розташовані всередині області та обчислити значення функції в цих точках;

2) знайти найбільше і найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області (на цих лініях функція двох змінних перетворюється у функцію однієї змінної);

3) з усіх знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше.

Зауваження. Найбільше (найменше) значення можуть бути не єдиними.

Приклади розв'язування типових завдань

Приклад 1. Знайти умовний екстремум функції $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5.$

Розв'язування

Складемо функцію Лагранжа $F(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$

Маємо $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2 + 2\lambda y, \quad \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5.$

Система набуде вигляду:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Система має два розв'язки: $x_1 = -1, y_1 = -2, \lambda_1 = \dfrac{1}{2};\ x_2 = 1, y_2 = 2, \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Дослідимо дані точки на екстремум. Для цього обчислимо

$\varphi'_x = 2x, \varphi'_y = 2y, \varphi'_x(-1,-2) = -2, \varphi'_y(-1,-2) = -4, F''_{xx} = 1, F''_{yy} = 1, F''_{xy} = 0$ якщо $\lambda = \dfrac{1}{2};$ тоді, відповідно, $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0,$ тобто функція має умовний мінімум в точці $P_1(-1,-2).$ Аналогічно для точки $P_2(1,2)$ $\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0,$ тобто, $P_2(1,2)$ – точка умовного максимуму.

Приклад 2. Знайти екстремуми функції $F(x, y) = x + 5y$ за умови $x^2 + 2xy + 3y^2 = \dfrac{1}{4}$.

Розв'язування

Побудуємо функцію Лагранжа

$$F(x, y, \lambda) = x + 5y + \lambda(x^2 + 2xy + 3y^2 - 1/4).$$

Знайдемо стаціонарні точки функції Лагранжа

$$\begin{cases} F_x^{'} = 0 \\ F_y^{'} = 0 \\ F_\lambda^{'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x + 2\lambda y + 1 = 0 \\ 2\lambda x + 6\lambda y + 5 = 0 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1/\lambda \\ x = 1/2\lambda \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} - \dfrac{2}{2\lambda^2} + \dfrac{3}{\lambda^2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}, \lambda^2 = 9, \lambda = \pm 3.$$

Стаціонарні точки: $\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; 3\right)$ і $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; -3\right)$.

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму в стаціонарних точках. Для цього обчислимо

$$F_{xx}^{''} = 2\lambda;\ F_{yy}^{''} = 6\lambda;\ F_{xy}^{''} = 2\lambda,$$

$$\varphi_x^{'} = 2x + 2y, \varphi_y^{'} = 2x + 6y.$$

$$d^2F = 2\lambda dx^2 + 4\lambda dxdy + 6\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + 2dxdy + 3dy^2).$$

Крім того, диференціювання рівняння зв'язку дасть рівняння

$$2xdx + 2ydx + 2xdy + 6ydy = 0, \text{ звідки } dy = -\frac{x+y}{x+3y}dx.$$

Враховуючи зв'язок між dy і dx отримаємо

$$\widetilde{d^2F} = 2\lambda\left(1 - \frac{2(x+y)}{(x+3y)} + \frac{3(x+y)^2}{(x+3y)^2}\right)dx^2,$$

в точці $\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}; 3\right)$ $\widetilde{d^2F} = 6\left(1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\right)dx^2 = \frac{96}{25}dx^2 > 0$, відповідно в точці $\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{3}\right)$ досягається умовний мінімум.

В точці $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; -3\right)$ $\widetilde{d^2F} = -6\left(1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{25}\right)dx^2 = \frac{-96}{25}dx^2 < 0$, в точці $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$ досягається умовний максимум.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області D, обмеженій лініями $x = 0, y = 0, x + y + 3 = 0$.

Розв'язування

Зобразимо область D. Це трикутник у третій координатній чверті.

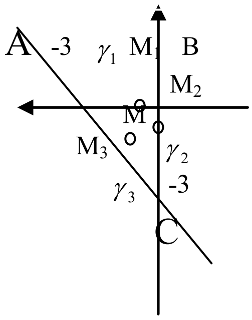
$$\begin{cases} z'_x = 2x - y + 1 = 0 \,\big|\cdot 2 & 3x = -3 & x = -1 \\ z'_y = 2y - x + 1 = 0 & y = 2x + 1 & y = -1 \end{cases} \quad M(-1;-1) \in D.$$

$\gamma_1 : y = 0 \quad z = x^2 + x, \quad z' = 2x + 1 = 0, \quad x = -1/2, \quad M_1(-1/2;0) \in D,$

$\gamma_2 : x = 0 \quad z = y^2 + y, \quad z' = 2y + 1 = 0, \quad y = -1/2, \quad M_2(0;-1/2) \in D,$

$\gamma_3 : y = -3 - x, \quad z = x^2 + (3+x)^2 + (3+x)x + x - 3 - x = 3x^2 + 9x + 6,$

$z' = 6x + 9 = 0, \quad x = -3/2, \quad M_3(-3/2;-3/2) \in D.$



Додамо ще точки $A(-3;0), B(0;0), C(0;-3)$.

$z(M) = z(-1;-1) = 1 + 1 - 1 - 1 - 1 = -1$ – найменше значення z;

$z(M_1) = z(-\frac{1}{2};0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4};$

$z(M_2) = -\frac{1}{4};$

$z(M_3) = \frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4};$

$z(A) = z(C) = z(-3;0) = 9 - 3 = 6$ – найбільше значення z;

$z(B) = z(0;0) = 0.$

Приклад 4. За планом виробництва продукції підприємство має виготовити 180 виробів. Ці вироби можуть бути виготовлені двома технологічними способами. При виробництві x_1 виробів I способом витрати складають $4x_1 + x_1^2$ грн, а при виготовленні x_2 виробів II способом – $8x_2 + x_2^2$ грн. Визначити, скільки виробів кожним зі способів доцільно виготовити, щоб загальні витрати на виробництво продукції були мінімальними.

Розв'язування

Математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \tag{1}$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 180, \tag{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{3}$$

Спочатку знайдемо розв'язок задачі, використовуючи її геометричну інтерпретацію. Областю допустимих розв'язків вихідної задачі є відрізок прямої AB (рис. 1), а лініями рівня – кола з центром у точці $(-2; -4)$.

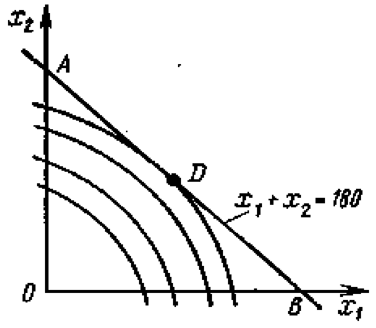


Рисунок 1 – Область допустимих розв'язків

Проводячи кола різних радіусів, бачимо, що мінімальне значення цільова функція приймає в точці D. Щоб знайти координати цієї точки, скористаємося тим, що кутовий коефіцієнт кола $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = C$ в точці D збігається з кутовим коефіцієнтом прямої $x_1 + x_2 = 180$ і, отже, дорівнює -1. Розглядаючи x_2 як неявну функцію від x_1 і диференціюючи рівняння кола, маємо

$$4 + 2x_1 + 8x_2' + 2x_2x_2' = 0, \text{ або } x_2' = -\frac{(2 + x_1)}{(4 + x_2)}.$$

Прирівнюючи отриманий вираз до числа -1, одержуємо одне з рівнянь для визначення координат точки D. Приєднуючи до нього рівняння прямої, на якій лежить точка D, маємо систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180, \end{cases}$$

звідки $x_1^* = 91; x_2^* = 89.$ Це означає, що якщо підприємство виготовить 91 виріб І технологічним способом і 89 виробів ІІ способом, то загальні витрати будуть мінімальними і складуть 17278 грн.

Розв'яжемо тепер задачу, використовуючи метод множників Лагранжа. Знайдемо мінімальне значення функції (1) за умови (2), тобто без врахування умови невід'ємності змінних. Для цього складемо функцію Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2),$$

обчислимо її частинні похідні за x_1, x_2, λ і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Переносячи в праві частини перших двох рівнянь λ і прирівнюючи їхні ліві частини, одержимо $4 + 2x_1 = 8 + 2x_2$, або $x_1 - x_2 = 2$.

Розв'язуючи останнє рівняння в поєднанні з рівнянням $x_1 + x_2 = 180$, знаходимо $x_1^* = 91$ і $x_2^* = 89$, тобто, одержали координати точки D, що задовольняє умову (3). Ця точка є підозрілою на екстремум. Використовуючи другі частинні похідні, можна показати, що в точці D функція f має умовний мінімум. Цей результат і був отриманий вище.

Слід зазначити, що такий же результат ми одержимо й у тому випадку, якщо дослідження на умовний екстремум функції f зведемо до дослідження на безумовний екстремум функції f_1, що отримана з f у результаті її перетворень. А саме: якщо з рівняння зв'язку (2) знайдемо $x_2 = 180 - x_1$ і підставимо цей вираз в (1), то одержимо функцію однієї змінної x_1:

$$f_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8(180 - x_1) + (180 - x_1)^2.$$

Знайдемо стаціонарну точку цієї функції з рівняння $\dfrac{df_1}{dx_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2(180 - x_1) = 0$, або $4x_1 - 364 = 0$, звідки $x_1^* = 91$ і $x_2^* = 89$. Так само як і вище, встановлюємо, що в даній точці функція f має мінімальне значення.

Приклад 5. Знайти точки екстремуму функції $f = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 = 5$.

Розв'язування

Складемо функцію Лагранжа $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2)$, знайдемо її частинні похідні за x_1, x_2 і λ та прирівняємо їх до нуля. У результаті одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

З першого і другого рівнянь маємо $x_1 - x_2 = 0$. Розв'язуючи це рівняння разом з третім із системи (10), знаходимо $x_1 = 5/2$; $x_2 = 5/2$. Таким чином, у точці (5/2; 5/2) дана функція може мати умовний екстремум. Щоб визначити, чи досягається в цій точці умовний екстремум, потрібно провести додаткові дослідження. Зокрема, використовуючи другі частинні похідні, можна показати, що в цій точці функція має умовний мінімум і $F_{\min} = 25/2$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y$ у замкнутій області D, що обмежена параболою $y = 1 - x^2$ та віссю Ox.

Відповідь: $\max z = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ в точках $(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}), (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2})$;

$\min z = 0$ досягається в точках відрізків $y = 0, 0 \le x \le 1$.

2. Знайти екстремуми функції $z = x + 2y$ за умови $x^2 + y^2 = 5$.

Відповідь: $z_{\min} = -5$ при $x = -1, y = -2$; $z_{\max} = 5$ при $x = 1, y = 2$.

3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$ в області, що обмежена прямими $y = 0, x = 0, x + y = 3$.

Відповідь: $z_{найм} = z(3,0) = -9$, $z_{найб} = z(0,0) = 5$.

4. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в області, що обмежена прямими $y = 0, x = 0, x + y = 6$.

Відповідь: $z_{найм} = z(4,2) = -64, z_{найб} = z(2,1) = 4$.

Запитання для самоперевірки

1. Яку задачу називають задачею на умовний екстремум або класичною задачею оптимізації?
2. Що таке множники та функція Лагранжа?
3. Як скласти функцію Лагранжа?
4. Що називають умовним екстремумом функції $f(x, y)$?
5. Функція Лагранжа для випадку двох змінних.

6. Які етапи визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа?

7. Що таке необхідні умови існування екстремуму?

8. Сформулюйте достатні умови існування екстремуму.

9. Сформулюйте алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значень функції багатьох змінних.

Індивідуальні домашні завдання

Завдання 1. Знайти і зобразити область визначення функцій

1.1 а) $z=\dfrac{3xy}{2x-5y}$; б) $z=\sqrt{y\sin x}$.

1.2 а) $z=\arcsin(x-y)$; б) $z=\ln(2-x-y)+\sqrt{x}$.

1.3 а) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; б) $z=\ln(1-x^2-y^2)+\sqrt{x-y}$.

1.4 а) $z=\ln(4-x^2-y^2)$; б) $z=y+\arcsin(x+2)$.

1.5 а) $z=\dfrac{2}{6-x^2-y^2}$; б) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$.

1.6 а) $z=\sqrt{x^2+y^2-5}$; б) $z=\left(4-x^2-y^2\right)+\sqrt{y-x}-\sqrt{y+x}$.

1.7 а) $z=\arccos(x+y)$; б) $z=\sqrt{2x}-\sqrt{3y}-\sqrt{1-x-y}$.

1.8 а) $z=\ln(x^2+y^2-3)$; б) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$.

1.9 а) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$; б) $z=\arcsin(3-x^2-y^2)$.

1.10 а) $z=\sqrt{2x^2-y^2}$; б) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

1.11 а) $z=\ln(y^2-x^2)$; б) $z=\dfrac{\sqrt{y-2x^2}}{y}$.

1.12 а) $z=\ln(16-x^2-y^2)$ б) $z=\arcsin(x+y)$.

1.13 а) $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$; б) $z=\ln(4+4x-y^2)$.

1.14 а) $z=\sqrt{1-x-y}$; б) $z=\arcsin 3xy$.

1.15 а) $z=\arccos(x+2y)$; б) $z=\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}$.

1.16 а) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$; б) $z=\sqrt{x+y}+\ln(y^2-x^2)$.

1.17 а) $z=\ln(x^2-y^2)$; б) $z=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

1.18 а) $z=\ln(y^2-x^2)$; б) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.

1.19 а) $z=\sqrt{x^2+y^2-8}$; б) $z=\ln(6-x-y)+\dfrac{x}{y}$.

1.20 а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2-5}}$; б) $z=\dfrac{1}{x-2}-\ln xy$.

1.21 а) $z=\ln(3x-y)$; б) $z=\sqrt{\dfrac{xy}{x+y}}$.

1.22 а) $z=y-\sqrt{y^2-x^2}$; б) $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$.

1.23 а) $z=\sqrt{x^2-y^2-x}$; б) $z=\arcsin(1-x^2-y^2)+\arcsin 2xy$.

1.24 а) $z=\ln(25-x^2-y^2)$; б) $z=arctg\dfrac{x}{x+y}$.

1.25 а) $z=\dfrac{x^3y}{3+x-y}$; б) $z=\sqrt{x-2y}+\dfrac{1}{x+y-1}$.

1.26 а) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2-5}}$; б) $z=\arcsin\dfrac{2x}{y}$.

1.27 а) $z=\arccos(2x+y)$; б) $z=\dfrac{\sqrt{y-2x^2}}{y}$.

1.28 а) $z=\ln(36-x^2-y^2)$; б) $z=\dfrac{1}{x-2}-\ln xy$.

1.29 а) $z=\arcsin 5xy$; б) $z=\dfrac{2}{6-x^2-y^2}$.

1.30 а) $z=\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}$; б) $z=\arcsin\dfrac{5y}{x}$.

Завдання 2. Знайти частинні похідні I та II порядків і повний диференціал функції

2.1 $z=\ln(y^2-e^{-x})$; **2.2** $z=arctg(y^2+x^2)$; **2.3** $z=\arcsin\sqrt{xy}$;

2.4 $z=\arccos(x-y^2)$; **2.5** $z=\cos(x^3-2xy)$; **2.6** $z=\cos\sqrt{2x^2+y^2}$;

2.7 $z=\arcsin\sqrt{2x^3y}$; **2.8** $z=\ln(3xy^2-x^2)$; **2.9** $z=e^{-(x^3+y^2)}y$;

2.10 $z=\ln(\sqrt{xy}-1)$; **2.11** $z=tg(y^4x^3)$; **2.12** $z=2xy+ctg\dfrac{x}{y^2}$;

2.13 $z=2-\ln\sqrt{xy}$; **2.14** $z=\cos(x-\sqrt{xy^3})$; **2.15** $z=tg\dfrac{x}{2y^3}$;

2.16 $z=\sin x-y^3+\dfrac{x}{y}$; **2.17** $z=\arccos(3xy^2)$; **2.18** $z=5x^2y+\ln xy^2$;

2.19 $z=-4xy+\sin 2xy^2$; **2.20** $z=\ln(y-x^2-3)$; **2.21** $z=\arcsin(2x-y^3)$;

2.22 $z=x^2y\sin x-3y$; **2.23** $z=\arcsin xy-3xy^2$; **2.24** $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2+4}$;

2.25 $z=e^{2xy}-\sqrt{yx}$; **2.26** $z=\sin\sqrt{3x^2+2y^2}$; **2.27** $z=6xy^2+\ln yx^2$;

2.28 $z=e^{-(x^2+y^2)}x$; **2.29** $z=\ln(5x^2y-y)$; **2.30** $z=\cos(y-\sqrt{x^3y})$.

Завдання 3. Обчислити значення похідної складеної функції з точністю до двох знаків після коми:

3.1 $u = e^{x-2y}$, де $x = \sin t, y = t^3$ при $t = 0$;

3.2 $u = arctg(x+y)$, де $x = t^2 + 2$, $y = 4 - t^2$ при $t = 1$; $x =$

3.3 $u = \sqrt{x+y+3}$, де $x = \ln t, y = t^2$ при $t = 1$;

3.4 $u = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$, де $x = \sin 2t, y = tg^2 t$ при $t = \dfrac{\pi}{4}$;

3.5 $u = \arcsin \dfrac{x}{2y}$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$ при $t = \pi$;

3.6 $u = \sqrt{x^2 + y + 2}$, де $x = \ln t, y = t$ при $t = 1$;

3.7 $u = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$ при $t = \dfrac{\pi}{4}$;

3.8 $u = \dfrac{y^2}{x}$, де $x = 1 - 2t$, $y = 1 + arctgt$ при $t = 0$;

3.9 $u = \arcsin \dfrac{x^2}{y}$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$ при $t = \pi$;

3.10 $u = \dfrac{x^2}{y+1}$, де $x = 1 - 2t$, $y = arctgt$ при $t = 0$;

3.11 $u = e^{y-2x-1}$, де $x = \cos t$, $y = \sin t$ при $t = \dfrac{\pi}{2}$;

3.12 $u = \ln(e^{-x} + e^{y})$, де $x = t^2$, $y = t^3$ при $t = -1$;

3.13 $u = x^2 e^{-y}$, де $x = \sin t$, $y = \sin t^3$ при $t = \dfrac{\pi}{2}$;

3.14 $u = e^{y-2x}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$ при $t = 0$;

3.15 $u = x^y$, де $x = e^t$, $y = \ln t$ при $t = 1$;

3.16 $u = \ln(e^x + e^y)$, де $x = t^4$, $y = t^2$ при $t = 1$;

3.17 $u = x^2 e^y$, де $x = \cos t$, $y = \sin t$ при $t = \pi$;

3.18 $u = e^{y-2x+4}$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$ при $t = \dfrac{\pi}{2}$;

3.19 $u = y^x$, де $x = \ln(t-1)$, $y = e^{\frac{t}{2}}$ при $t = 2$;

3.20 $u = \ln(e^x + e^{-y})$, де $x = t^2$, $y = t^3$ при $t = -2$;

3.21 $u = e^{x-2y}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$ при $t = 0$;

3.22 $u = \arcsin \dfrac{x^3}{y^2}$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$ при $t = \pi$;

3.23 $u=\dfrac{x}{y}$, де $x=e^t$, $y=3-e^{3t}$ при $t=0$;

3.24 $u=\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{x^2}{y^2}$, де $x=\sin t$, $y=\cos t$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$;

3.25 $u=e^{x+5y}$, де $x=\sin t$, $y=t^3$ при $t=0$;

3.26 $u=arctg(x+y)$, де $x=t^2+6$, $y=5-t^3$ при $t=1$;

3.27 $u=\sqrt{x+2y-4}$, де $x=\ln t$, $y=t^3$ при $t=1$;

3.28 $u=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}$, де $x=\sin 3t$, $y=tg^3 t$ при $t=\dfrac{\pi}{4}$;

3.29 $u=\dfrac{x^3}{y^2+2}$, де $x=2-3t$, $y=arctgt$ при $t=0$;

3.30 $u=\ln(e^{-x}-e^{-y})$, де $x=t^3$, $y=t^4$ при $t=1$;

Завдання 4. Обчислити наближено

4.1 $(e^{1,15})^{1,1}$;

4.2 $(0,99)^{5,05}$;

4.3 $3,01+\sqrt{3,01^2+4,02^2}$

4.4 $\dfrac{4}{(1,03)^2+(2,97)^2}$;

4.5 $3,09e^{0,09}$;

4.6 $\dfrac{2,03}{(2,03)^4+(2,97)^2}$;

4.7 $\dfrac{(2,03)^2}{\sqrt{(2,03)^3+(1,05)^3+7}}$;

4.8 $tg46^0\sin 29^0$;

4.9 $(2-\sqrt{0,97})^{3,02}$;

4.10 $\dfrac{2,01\cdot 1,03}{(2,01)^4+(1,03)^2}$;

4.11 $3,03^4+1,98^5+2$;

4.12 $arctg\dfrac{0,96}{1,05}$;

4.13 $\sin 62^0\cos 58^0$;

4.14 $3,02^3\sqrt[5]{0,97}$;

4.15 $\ln(\sqrt{4,02}-\sqrt[3]{0,97})$;

4.16 $\dfrac{10}{(2,98)^3-(5,03)^2}$;

4.17 $0,97^{1,05}$;

4.18 $\ln((2,02)^2+\sqrt[3]{0,98-8})$;

4.19 $\sqrt[5]{2,97^3+2,02^2+1}$;

4.20 $arctg\dfrac{1,04^2}{0,98}$;

4.21 $\dfrac{2,05^2}{2,05^2+3,01^2}$;

4.22 $\cos 59^0\sin 32^0$;

4.23 $\sqrt{3,98}(1,03)^{3,98}$;

4.24 $\dfrac{(1,03)^2}{\sqrt[3]{0,98\sqrt[4]{(1,03)^3}}}$;

4.25 $\cos 61^0\sin 47^0$;

4.26 $(3+\sqrt{1,97})^{3,02}$;

4.27 $\dfrac{13}{(3,98)^4-(6,03)^2}$;

4.28 $1,98^{2,05}$;

4.29 $tg47^0\sin 31^0$;

4.30 $\dfrac{3,01\cdot 2,03}{3,01^4+2,03^2}$.

Завдання 5. Обчислити значення частинних похідних функції $z = z(x, y)$, що задана неявно в даній точці M_0 з точністю до двох знаків після коми.

5.1 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4,\ M_0(2;1;1)$;

5.2 $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2,\ M_0(-1;0;1)$;

5.3 $3x - 2y + z = xz + 4,\ M_0(2;1;-1)$;

5.4 $3x - 2y + z = xz + 4,\ M_0(2;1;-1)$;

5.5 $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0,\ M_0(1;1;-1)$;

5.6 $z^3 + 3xyz + 3y = z,\ M_0(1;1;1)$;

5.7 $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1{,}5,$ $M_0(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4})$;

5.8 $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1,\ M_0(0;\frac{\pi}{2};1)$;

5.9 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0,\ M_0(1;2;1)$;

5.10 $x^2 - 3y^2 + z^2 - 2xy - 2y - 8z = 0,$ $M_0(1;-1;2)$;

5.11 $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2,$ $M_0(1;1;1)$;

5.12 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5,$ $M_0(0;2;1)$;

5.13 $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \frac{\pi}{2},$ $M_0(0;\frac{\pi}{2};\pi)$;

5.14 $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4,$ $M_0(2;1;2)$;

5.15 $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0,$ $M_0(1;1;1)$;

5.16 $x + y + z + 2 = xyz,$ $M_0(2;-1;-1)$;

5.17 $x^2 + y^2 + z^2 - 4xz = 2,$ $M_0(0;1;-1)$;

5.18 $e^z - xyz - x + 1 = 0,\ M_0(2;1;0)$;

5.19 $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0,$ $M_0(1;-1;2)$;

5.20 $xy = z^2 - 1,\ M_0(0;1;-1)$;

5.21 $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3,$ $M_0(1;2;0)$;

5.22 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3y - z = 0,$ $M_0(1;-1;1)$;

5.23 $x^2 - y^2 - z^2 + 2x - 4y + 6z + 12 = 0,$ $M_0(0;1;-1)$;

5.24 $\sqrt{x^2 + y^2} + z^3 - 3z = 3,$ $M_0(4;3;1)$;

5.25 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59,\ M_0(2;1;1)$;

5.26 $2x + y + 3z + 2 = xyz,$ $M_0(-2;-2;-1)$;

5.27 $x^3 + y^3 + z^3 - 2xz = 2,$ $M_0(0;1;-1)$;

5.28 $z^2 + 2xyz + 2y = z,\ M_0(-1;1;1)$;

5.29 $x^3 - 3y^3 + 3z^2 - 2yz + y = 1,$ $M_0(1;1;1)$;

5.30 $e^z + y + 2x + z = 1,\ M_0(1;-1;0)$;

Завдання 6. Перевірити, чи задовольняє дана функція вказаному співвідношенню

6.1 $u = \dfrac{y}{x}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.2 $u = e^{-\cos(4y+x)}$, $\quad 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

6.3 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.4 $u = 3 + \ln(x^2 + (y+1)^2)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.5 $u = \sqrt{\dfrac{y^3}{x}}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.6 $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.7 $u = e^{-\cos(x+3y)}$, $\quad 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

6.8 $u = \ln(x^2 - y^2)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.9 $u = \ln(x + e^{-y})$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

6.10 $u = arctg \dfrac{y}{x}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.11 $u = xe^{\frac{y}{x}}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.12 $u = e^{-(x+3y)} \sin(x+3y)$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.13 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\quad \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 0$.

6.14 $u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.15 $u = e^{xy}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy = 0$.

6.16 $u = e^{-\cos(x+ay)}$, $\quad a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

6.17 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

6.18 $u = y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.19 $u = \sin^2(x - ay)$, $\quad a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

6.20 $u = e^{xy}$, $\quad x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.21 $u = \dfrac{xy}{x + y}$, $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

6.22 $u = x^y$, $\quad y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

6.23 $u = \ln(x^2 + (y+1)^2)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

6.24 $u = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$, $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$.

6.25 $u = \ln\left(e^x + e^y\right)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

6.26 $u = \ln(1 + \cos(x^2 + y^2))$, $\quad y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

6.27 $u = \ln(x^2 - y^2)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{4}{y^2 - x^2}$.

6.28 $u = arctg(x^2 - y^2)y$, $\quad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{y^2}$.

6.29 $u = y\ln(1 + e^{x^2 - y^2})$, $\quad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{u}{y^2}$.

6.30 $u = \cos(7x + t) + \sin(7x - t)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 49\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

Завдання 7. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до заданої поверхні S в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Поверхню, задану в пункті б), зобразити графічно

7.1 а) $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0$, $M_0(2;1;-1)$; б) $S: 4x^2 - 9y^2 - 9z^2 - 36 = 0$, $M_0(3;0;0)$.

7.2 а) $S: x^2 - 4y^2 + z^2 = -2xy$, $M_0(-2;1;2)$; б) $S: x^2 + y^2 - z = 6$, $M_0(1;-1;-1)$.

7.3 а) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 3z - xy = 7$, $M_0(1;2;1)$; б) $S: 4x^2 - 9y^2 = 36$, $M_0(-3;0;0)$;.

7.4 а) $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x = 8$, $M_0(-1;1;2)$; б) $S: x^2 + y + z^2 - 6 = 0$, $M_0(1;-1;2)$.

7.5 а) $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 4x + y = 13$, $M_0(2;1;-1)$; б) $S: -4x^2 + 25y^2 - 4z^2 - 5 = 0$, $M_0(1;1;2)$.

7.6 а) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 4$, $M_0(2;1;-1)$; б) $S: x^2 - 5y^2 + z^2 = 0$, $M_0(-1;1;3)$.

7.7 а) $S: x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46$, $M_0(1;2;-3)$; б) $S: 3x^2 + y^2 = 9$, $M_0(-\frac{1}{3};2;1)$.

7.8 а) $S: x^2 + y^2 - xz - yz = 0$, $M_0(0;2;2)$; б) $S: x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$, $M_0(-2;2;1)$.

7.9 а) $S: x^2 + y^2 - z^2 + 2yz + y - 2z = 2$, $M_0(1;1;1)$; б) $S: x^2 - y^2 = 16$, $M_0(5;3;-1)$.

7.10 а) $S: x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2x = 4$, $M_0(1;1;1)$; б) $S: 3x^2 - 11y^2 + 3z^2 + 5 = 0$, $M_0(1;1;1)$.

7.11 а) $S: z = x^2 + y^2 + 2x - 2xy - y$, $M_0(-1;-1;-1)$; б) $S: x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$, $M_0(1;1;2)$.

7.12 а) $S: z = -x^2 + y^2 + 2xy - 3y$, $M_0(1;-1;1)$; б) $S: x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$, $M_0(1;2;-1)$.

7.13 а) $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - 2y - x$, $M_0(-1;1;1)$; б) $S: x^2 - 5y + z^2 = 0$, $M_0(1;2;-3)$.

7.14 а) $S: x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13$, $M_0(3;1;2)$; б) $S: x^2 - 7y + z^2 = 4$, $M_0(3;2;3)$.

7.15 а) $S: -z^2 + 4y^2 + 3z + 4xy - xz = 9$, $M_0(1;-2;1)$; б) $S: x^2 - 4y^2 + z^2 - 4 = 0$, $M_0(-2;1;2)$.

7.16 а) $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2$, $M_0(2;1;0)$; б) $S: x^2 + y^2 - z - 6 = 0$, $M_0(2;1;-1)$.

7.17 а) $S: 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xz + xy = 3$, $M_0(1;2;1)$; б) $S: x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$, $M_0(2;-1;1)$.

7.18 а) $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14$, $M_0(3;1;-4)$; б) $S: x^2 + y^2 = 5z$, $M_0(1;3;2)$.

7.19 а) $S: x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4$, $M_0(1;1;2)$; б) $S: x^2 + 5y^2 + z^2 = 10$, $M_0(1;-1;2)$.

7.20 а) $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz - 4x = -5$, б) $S: x^2 - y^2 + z^2 = 30$, $M_0(3;2;5)$.

$M_0(-2;1;0)$;

7.21 а) $S: x^2+y^2-xz+yz-3x=11$, $M_0(1;4;-1)$; б) $S: x^2+y^2-4x+2y+4=0$, $M_0(2;-2;0)$.

7.22 а) $S: x^2+2y^2+z^2-4xz=8$, $M_0(0;2;0)$; б) $S: 2x^2-y+2z^2=0$, $M_0(1;10;2)$.

7.23 а) $S: x^2-y^2-2z^2-2y=0$, $M_0(-1;-1;1)$; б) $S: x^2+y^2+2z^2=10$, $M_0(-1;1;2)$.

7.24 а) $S: x^2+y^2-3z^2+xy=-2z$, $M_0(1;0;1)$; б) $S: y^2-4y+z=0$, $M_0(1;-2;-12)$.

7.25 а) $S: 2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0$, $M_0(1;-1;1)$; б) $S: z=y^2-y-2$, $M_0(0;\frac{1}{2};\frac{-9}{4})$.

7.26 а) $S: 2x^2+y^2+z^2=15$, $M_0(1;2;3)$; б) $S: 4y^2-3y+z=0$, $M_0(-1;-3;10)$.

7.27 а) $S: x^2-y^2+z^2-3x+2y=10$, $M_0(3;1;-2)$; б) $S: x^2+y^2=6z$, $M_0(1;2;3)$.

7.28 а) $S: z=4x^2+3y^2+2x-3xy-y$, $M_0(-1;-1;-2)$; б) $S: x^2+y^2+3z^2=9$, $M_0(1;1;2)$.

7.29 а) $S: 3x^2+z^2-4yz+3y=16$, $M_0(-1;2;-2)$; б) $S: 4x^2+y^2=16$, $M_0(-\frac{1}{3};11;1)$.

7.30 а) $S: 4x^2+3y^2-xz-yz=0$, $M_0(0;3;3)$; б) $S: x^2+y^2-5z^2=8$, $M_0(-2;1;3)$.

Завдання 8. Дослідити на екстремум функцію

8.1 $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$;

8.2 $z=x^2+y^2-xy+x+y$;

8.3 $z=xy(6-x-y)$;

8.4 $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$;

8.5 $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$;

8.6 $z=x^3+8y^3-6xy+1$;

8.7 $z=2xy-3x^2-2y^2+10$;

8.8 $z=xy-x^2-y^2+9$;

8.9 $z=xy(12-x-y)$;

8.10 $z=2xy-5x^2-3y^2+2$;

8.11 $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$;

8.12 $z=2xy-2x^2-4y^2$;

8.13 $z=x^3+y^3-3xy$;

8.14 $z=(x-5)^2+y^2+1$;

8.15 $z=(x-2)^2+2y^2-10$;

8.16 $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$;

8.17 $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$;

8.18 $z=4(x-y)-x^2-y^2$;

8.19 $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$;

8.20 $z=3x^3+3y^3-9xy+10$;

8.21 $z=2x^3+2y^3-6xy+5$;

8.22 $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$;

8.23 $z=1+6x-x^2-xy-y^2$;

8.24 $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$;

8.25 $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;

8.26 $z = e^{-x}(x^2 + y^2 - 2y - 2).$;

8.27 $z = x^2 y - 3x^2 + 2y - 1$;

8.28 $z = x^3 + x^2 - 2y^2 + 2xy - 7x + 2y$;

8.29 $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$;

8.30 $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

Завдання 9. Визначити градієнт та похідну за напрямом

9.1 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = \ln(x + y)$ в т. $M_0(1;3)$ в напрямку лінії $y^2 = 9x$ в сторону зростання аргумента x.

9.2 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ в т. $M_0(2;1)$ в напрямку від т. M_0 до т. $N(5;5)$.

9.3 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = x^2 + y^2$ в т. $M_0(6;-8)$ в напрямку лінії $y = -\frac{2}{9}x^2$ в сторону спадання аргумента x.

9.4 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = \arcsin\frac{x}{x+y}$ в т. $M_0(5;5)$ в напрямку лінії $y^2 = 5x$ в сторону спадання аргумента x.

9.5 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = xe^y$ в т. $M_0(1;4)$ в напрямку лінії $xy = 4$ в сторону спадання аргумента x.

9.6 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = x^2 + y^2 + xy$ в т. $M_0(3;1)$ в напрямку лінії $4x - 3y - 9 = 0$ в сторону зростання аргумента x.

9.7 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = ye^x$ в т. $M_0(2;2)$ в напрямку лінії $xy = 9$ в сторону зростання аргумента x.

9.8 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = \arcsin\frac{y}{x+y}$ в т. $M_0(4;4)$ в напрямку лінії $y^2 = 6x$ в сторону зростання аргумента x.

9.9 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в т. $M_0(1;1)$ в напрямку лінії $x^2 + y^2 = 2$ в сторону зростання аргумента x.

9.10 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = x^2 + y^2$ в т. $M_0(6;8)$ в напрямку лінії $x^2 + y^2 = 100$ в сторону зростання аргумента x.

9.11 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в т. $M_0(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$ в напрямку лінії $x^2 + y^2 = 2x$ в сторону спадання аргумента x.

9.12 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = arctg(xy)$ в т. $M_0(1;-1)$ в напрямку лінії $y = -x$ в сторону зростання аргумента x.

9.13 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}$ в т. $M_0(1;1)$ в напрямку лінії $x^2 + y^2 = 2y$ в сторону зростання аргумента x.

9.14 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = xe^y$ в т. $M_0(1;1)$ в напрямку лінії $xy = 1$ в сторону зростання аргумента x.

9.15 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ в т. $M_0(1;-1)$ в напрямку лінії від т. $N(2;2)$ до т. M_0.

9.16 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$ в т. $M_0(-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ в напрямку лінії $x^2 + y^2 + 2x = 0$ в сторону зростання аргумента x.

9.17 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = arctg\left(xy\right)$в т. $M_0(-1;4)$ в напрямку лінії $y = -x + 3$ в сторону спадання аргумента x.

9.18 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = x^2 + y^2$ в т. $M_0(-6;8)$ в напрямку лінії $y = \dfrac{2}{9}x^2$ в сторону зростання аргумента x.

9.19 Знайти напрямок найбільшого зростання функції $u = x^2y^2z$ в довільній точці і в т. $M_0(2;-1;3)$ та швидкість зростання в цьому напрямку.

9.20 В напрямку якої лінії: $y^2 = 4x$ чи $x^2 + y^2 = 5$ в т. $M_0(1;2)$ функція $z = x^3 + y^3$ змінюється швидше в сторону спадання аргумента x?

9.21 В якому напрямку має рухатися т. $M(x;y;z)$ при переході через т. $M_0(-1;1;-1)$, щоб функція $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x}$ зростала з найбільшою швидкістю?

9.22 В напрямку якої лінії: $xy = 4$ чи $x = y$ в т. $M_0(2;2)$ функція $z = x^3 + y^3 - 3xy$ змінюється швидше в сторону зростання аргумента x?

9.23 В напрямку якої лінії $y^2 = 2x$ чи $x^2 + y^2 = 9$ в т. $M_0(1;1)$ функція $z = x^2 + y^2$ змінюється швидше в сторону зростання аргумента x?

9.24 В напрямку якої лінії $x^2 + y^2 = 8$ чи $y = -x$ в т. $M_0(-2;2)$ функція $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$ змінюється швидше в сторону зростання аргумента x?

9.25 З якою найбільшою швидкістю може спадати функція $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ при переході т. $M(x;y;z)$ через т. $M_0(1;1;1)$?

9.26 Визначити градієнт і похідну даної функції $z = ye^x$ в т. $M_0(1;4)$ в напрямку лінії $3xy = 5$ в сторону спадання аргумента x.

9.27 Знайти похідну функції $u = 13x^2y - 42xz^3 + 5y^2$ у напрямі від точки $M(-2;1;-1)$ до точки $N(2;3;1)$.

9.28 Знайти похідну функції $u = 3x^2y - 4xz^3 + 5y^2\sqrt{z}$ у точці $M(2;-3;1)$ у напрямі найбільшого її зростання.

9.29 Знайти кут між градієнтами функції $z = arctg(xy)$ в точках $M(-1;3)$ та $N(3;-3)$.

9.30 Знайти градієнт функції $u = z \cdot \sqrt[3]{x^2 + y^2} - \dfrac{zy}{x}$ у точці $M(-2;2;6)$.

Завдання 10. Знайти найбільше та найменше значення функції в області D.

10.1 $z = xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4x$,
D: $y = 0, y = 2, x = 0, x = 1.$

10.2 $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x,$
D: $y = 0, y = x + 1, x = 3.$

10.3 $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$,
D: $2y + x = 4, x - 2y = 4.$

10.4 $z = x^3 - y^3 - 3xy$,
D: $y = -1, y = 2, x = 0, x = 2.$

10.5 $z = x^2y(4 - x - y),$
$D: y = 6 - x, y = 0, x = 0.$

10.6 $z = x^2 + xy - 2$,
D: $y = 4x^2 - 4, y = 0.$

10.7 $z = xy - 3x - 2y$;
D: $y = 0, y = 4, x = 0, x = 4.$

10.8 $z = x^2 + 2{,}5y^2 - 2xy - 2x$,
D: $y = 0, y = 2, x = 0, x = 2.$

10.9 $z = 2x^2 + 2xy - 0{,}5y^2 - 4x$,
$D: y = 2x, y = 2, x = 0.$

10.10 $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$,
D: $y = 0, x - y - 1 = 0, x = 5.$

10.11 $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$,
$D: y = 0, x + y + 1 = 0, x = -3.$

10.12 $z = 2x^2 + 3y^2 - 1$,
$D: y = \sqrt{9 - \dfrac{9}{4}x^2}, y = 0.$

10.13 $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$,
$D: y + x - 1 = 0, y = 0, x = 0.$

10.14 $z = 0{,}5x^2 - xy$,
$D: y = 2x^2, y = 8.$

10.15 $z = xy - 2x - y$,
$D: y = 0, y = 4, x = 4, x = 0.$

10.16 $z = x^2 + 2xy - 10$,
$D: y = 0, y = x^2 - 4.$

10.17 $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$,
$D: y = 0, x + y = 3, x = 0.$

10.18 $z = 3x + 6y - xy - x^2 - y^2$,
$D: y = 0, y = 1, x = 0, x = 1.$

10.19 $z = 2x^3 + xy^2 + y^2$,
$D: y = 0, y = 6, x = 1, x = 0.$

10.20 $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$,
$D: y + x - 1 = 0, y = 0, x = 0.$

10.21 $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$,
$D: x - y + 1 = 0, y = 0, x = 3.$

10.22 $z = 5x^2 + y^2 - 3xy$,
$D: y = 1, y = 0, x = 0, x = 1.$

10.23 $z = x^2 + 8y + 2xy - 4x$,
$D: y = 0, y = 2, x = 0, x = 1.$

10.24 $z = xy - x - 2y$,
$D: y = 0, y = x, x = 3.$

10.25 $z = 3x + y - xy$,
$D: y = x,\ y = 4,\ x = 0.$

10.26 $z = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 2y + 5$,
$D: x + y - 2 = 0,\ y = 0,\ x = 0.$

10.27 $z = x^2 + 3xy - 8$,
$D: y = x^2 - 6,\ y = 0.$

10.28 $z = 4xy - 2x - 3y$,
$D: y = 3,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3.$

10.29 $z = 4x^2 + 4xy - 0,5y^2 - 2x$,
$D: y = 4x,\ y = 2,\ x = 0.$

10.30 $z = 3x^3 - 3y^3 - 2xy$,
$D: y = 3,\ y = -1,\ x = 0,\ x = 3.$

Завдання 11. Знайти умовні екстремуми функцій

11.1
$f = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4$ *при умові* $x_1 + x_2 + 3 = 0$

$f_{\min} = -\frac{19}{4};\ (-\frac{3}{2};-\frac{3}{2})$

11.2 $f = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ *при умові* $x_1 + x_2 = 2$ $f_{\min} = 2;\ (1;1)$

11.3
$f = \frac{x_1 - x_2 - 4}{\sqrt{2}}$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $f_{\min} = -1 - 2\sqrt{2};\ (-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}})$

$f_{\max} = 1 - 2\sqrt{2};\ (\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}})$

11.4
$f = x_1x_2^2$ *при умові* $x_1 + 2x_2 = 1$ $f_{\min} = 0;\ (1;0),\ f_{\max} = \frac{1}{27};\ (\frac{1}{3};\frac{1}{3})$

11.5
$f = 2x_1 + x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $f_{\min} = -\sqrt{5};\ (-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}})$,

$f_{\max} = \sqrt{5};\ (\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}})$

11.6 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $x_1 + x_2 = 2$ $f_{\min} = 2;\ (1;1)$

11.7
$f = x_1x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 18$ $f_{\min} = -9;\ (3;-3),\ (-3;3)$,

$f_{\max} = 9;\ (3;3),\ (-3;-3)$

11.8 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $3x_1 + 4x_2 = 12$ $f_{\min} = \frac{144}{25};\ (\frac{36}{25};\frac{48}{25})$

11.9

$f = \frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2}$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $f_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$

$f_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}; (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

11.10 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $3x_1 + 2x_2 = 6$ $f_{\min} = \frac{36}{13}; \quad (\frac{18}{13}; \frac{12}{13})$

11.11

$f = x_1 x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 2$ $f_{\min} = -1; \quad (1;-1), (-1;1),$

$f_{\max} = 1; \quad (1:1), (-1;-1)$

11.12 $f = x_1^3 + x_2^3$ *при умові* $x_1 + x_2 = 2$ $f_{\min} = 2; \quad (1;1)$

11.13 $f = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ *при умові* $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$ $f_{\min} = -\sqrt{2}; \quad (-\sqrt{2}; -\sqrt{2}),$

$f_{\max} = \sqrt{2}; \quad (\sqrt{2}; \sqrt{2})$

11.14 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $x_1 + x_2 = 3$ $f_{\min} = \frac{81}{18}; \quad (\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$

11.15

$f = 6 - 4x_1 - 3x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $f_{\min} = 1; \quad (\frac{4}{5}; \frac{3}{5}),$

$f_{\max} = 11; \quad (-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5})$

11.16 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} = 0$ $f_{\min} = \frac{32}{9}; \quad (\frac{16}{9}; \frac{8}{9})$

11.17 $f = x_1^4 + x_2^4$ *при умові* $x_1 + x_2 = 2$ $f_{\min} = 2; \quad (1;1)$

11.18

$f = x_1 x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 32$ $f_{\min} = -16; \quad (4;-4), (-4;4),$

$f_{\max} = 16; \quad (4;4), (-4;-4)$

11.19 $f = x_1^2 + x_2^2$ *при умові* $x_1 + x_2 = 4$ $f_{\min} = 8; \quad (2;2)$

11.20

$f = \frac{x_1}{2} + x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $f_{\min} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; $(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}})$,

$f_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}})$

11.21 $f = x_1 x_2$ *при умові* $2x_1 + 3x_2 = 6$ $f_{\max} = \frac{3}{2}$; $(\frac{3}{2}; 1)$

11.22 $f = x_1^4 + x_2^4$ *при умові* $x_1 + x_2 = 4$ $f_{\min} = 32$; $(2; 2)$

11.23

$f = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ *при умові* $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{9}$ $f_{\min} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$; $(-3\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$,

$f_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$

11.24 $f = x_1 x_2$ *при умові* $2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$ $f_{\max} = \frac{25}{24}$; $(\frac{5}{4}; \frac{5}{6})$

11.25

$f = x_1 + 2x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 5$ $f_{\min} = -5$; $(-1; -2)$,

$f_{\max} = 5$; $(1; 2)$

11.26 $f = x_1 x_2$ *при умові* $x_1 + x_2 = 1$ $f_{\max} = \frac{1}{4}$; $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

11.27

$f = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ *при умові* $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{4}$ $f_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$,

$f_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$

11.28 $f = x_1^3 + x_2^3$ *при умові* $x_1 + x_2 = 4$ $f_{\min} = 16$; $(2; 2)$

11.29 $f = \frac{x_1}{3} + x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $f_{\min} = -\frac{\sqrt{10}}{3}$; $(-\frac{1}{\sqrt{10}}; -\frac{3}{\sqrt{10}})$,

$f_{\max} = \frac{\sqrt{10}}{3}$; $(\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}})$

11.30 $f = x_1 x_2$ *при умові* $x_1^2 + x_2^2 = 50$ $f_{\min} = -25$; $(5; -5), (-5; 5)$,

$f_{\max} = 25$; $(5; 5), (-5; -5)$

Тестові завдання для перевірки знань

1. Що називається поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$?

а) Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $M(x, y, z)$, які задовольняють нерівність $f(x, y, z) > 0$;

+б) Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $M(x, y, z)$, які задовольняють рівняння $f(x, y, z) = C$, де C – довільна стала;

в) Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $M(x, y, z)$, які задовольняють нерівність $f(x, y, z) < 0$;

г) Поверхнею рівня функції $u = f(x, y, z)$ називається множина всіх точок простору $M(x, y, C)$, які задовольняють рівняння $f(x, y, C) = 0$, де C – довільна стала.

2. Що називається лінією рівня функції $z = f(x, y)$?

а) Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ координатної площини Oxy, які задовольняють нерівність $f(x, y) > 0$;

б) Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ координатної площини Oxy, які задовольняють нерівність $f(x, y) < 0$;

+в) Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$ координатної площини Oxy, які задовольняють рівняння $f(x, y) = C$, де C – довільна стала;

г) Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина всіх точок $M(x, C)$ координатної площини Oxy, які задовольняють рівняння $f(x, C) = 0$, де C – довільна стала.

3. Що називається повним диференціалом du функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$?

а) $du = f'_x(M_0) + f'_y(M_0) + f'_z(M_0)$;

б) $du = f'_x(M_0) \cdot f'_y(M_0) \cdot f'_z(M_0) \Delta x \Delta y \Delta z$, де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – прирости аргументів в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

+ в) $du = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + f'_z(M_0)\Delta z$, де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – прирости аргументів в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

г) $du = \left(f'_x(M_0) + f'_y(M_0) + f'(M_0)\right)\Delta x \Delta y \Delta z$, де $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – прирости аргументів в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

4. Що називають стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$?

а) Стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ називається точка, в якій всі частинні похідні одночасно задовольняють нерівності: $f'_x(M_0) < 0$, $f'_y(M_0) < 0$, $f'_z(M_0) < 0$;

б) Стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ називається точка, в якій всі частинні похідні одночасно задовольняють нерівності: $f'_x(M_0) > 0$, $f'_y(M_0) > 0$, $f'_z(M_0) > 0$;

+в) Стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ називається точка, в якій всі частинні похідні одночасно задовольняють рівності: $f'_x(M_0) = 0$, $f'_y(M_0) = 0$, $f'_z(M_0) = 0$;

г) Стаціонарною точкою $M_0(x_0, y_{0,} z_0)$ функції $u = f(x, y, z)$ називається точка, в якій частинні похідні задовольняють хоча б одну з рівностей: $f'_x(M_0) = 0$, $f'_y(M_0) = 0$, $f'_z(M_0) = 0$.

5. Сформулюйте достатню умову існування гладкого екстремуму для функції двох змінних $z = f(x, y)$.

а) Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$ і справедлива нерівність $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0} < 0$, тоді функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0) > 0$;

б) Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$ і справедлива нерівність $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0} > 0$, тоді функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0) > 0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0) < 0$;

+в) Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$ і справедлива нерівність $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0} > 0$, тоді функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0) > 0$;

г) Якщо $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$ і справедлива рівність $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}_{M_0} = 0$, тоді функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, причому максимум, якщо $f''_{xx}(M_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''_{xx}(M_0) > 0$.

6. Чому дорівнює похідна функції $u = f(x, y, z)$ в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{s}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$?

+а) $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma$;

б) $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial s} = |f'_x(M_0)\cos\alpha| + |f'_y(M_0)\cos\beta| + |f'_z(M_0)\cos\gamma|$;

в) $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cos^2\alpha + f'_y(M_0)\cos^2\beta + f'_z(M_0)\cos^2\gamma$;

г) $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cdot f'_y(M_0)\cdot f'_z(M_0)\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

7. Градієнтом $grad\, f(M_0)$ функції $u = f(x,y,z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається…

а) вектор $grad\, f(M_0) = f(M_0)\left(f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j} + f'_z(M_0)\vec{k}\right)$;

+б) вектор $grad\, f(M_0) = f'_x(M_0)\vec{i} + f'_y(M_0)\vec{j} + f'_z(M_0)\vec{k}$;

в) величина $grad\, f(M_0) = f'_x(M_0) + f'_y(M_0) + f'_z(M_0)$;

г) величина $grad\, f(M_0) = f'_x(M_0)\cdot f'_y(M_0)\cdot f'_z(M_0)$.

8. Який геометричний зміст градієнта $grad\, f(M_0)$ функції $u = f(x,y,z)$?

+а) Вектор $grad\, f(M_0)$ є вектором нормалі в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x,y,z)$, яка проходить через цю точку;

б) Вектор $grad\, f(M_0)$ розташований під кутом 60° до вектора нормалі в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x,y,z)$, яка проходить через цю точку;

в) Вектор $grad\, f(M_0)$ утворює кут 45° з вектором нормалі в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x,y,z)$, яка проходить через цю точку;

г) Вектор $grad\, f(M_0)$ перпендикулярний до вектора нормалі в точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до поверхні рівня функції $u = f(x,y,z)$, яка проходить через цю точку.

9. Чому дорівнює частинна похідна $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = arctg\dfrac{y}{x}$ в точці $M_0(1,1)$?

+а) $-1/2$; б) 1; в) -1; г) 2.

10. Чому дорівнює частинна похідна $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = arctg\dfrac{x}{y}$ в точці $M_0(2,1)$?

а) $-4/5$; б) $1/5$; +в) $-2/5$; г) $-2/3$.

11. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = \arcsin\frac{x^2}{y^2}$ в точці $M_0(1,2)$?

а) $-1/\sqrt{15}$; б) $-2/\sqrt{15}$; в) $3/\sqrt{15}$; +г) $2/\sqrt{15}$.

12. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = \arcsin\frac{x^2}{y^2}$ в точці $M_0(1,2)$?

+а) $-1/\sqrt{15}$; б) $-2/\sqrt{15}$; в) $3/\sqrt{15}$; г) $2/\sqrt{15}$.

13. Чому дорівнює похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = \sin(x^2 y)$, $x = t^2$, $y = \frac{\pi}{4}t$ в точці $t_0 = 1$?

+а) $\frac{5\sqrt{2}}{8}\pi$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$; г) $\frac{5\sqrt{2}}{4}\pi$.

14. Чому дорівнює похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = tg(x+y)$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot t$, $y = t^2$ в точці $t_0 = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$?

а) $\sqrt{2\pi}$; б) $\sqrt{3\pi}$; в) $\sqrt{6\pi}$; +г) $2\sqrt{6\pi}$.

15. Чому дорівнює похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = \cos(x y^2)$, $x = \frac{\pi}{2}t^2$, $y = t^3$ в точці $t_0 = 1$?

а) 3π; +б) -4π; в) -3π; г) 5π.

16. Чому дорівнює похідна $\frac{dz}{dt}$ складеної функції $z = ctg(x-y)$, $x = \frac{\pi}{2}t$, $y = \frac{\pi}{4}t^2$ в точці $t_0 = 1$?

а) $\pi/4$; б) π; +в) 0; г) 1.

17. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = z(x,y)$, яка задана неявно рівнянням $\ln(x^2 - 4y^3 - z^2 + 4xy + 1) = 0$, в точці $M_0(4;\,-1;2)$?

а) -1; б) -2; +в) 1; г) 4.

18. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = z(x, y)$, яка задана неявно рівнянням $\ln\left(x^2 - 4y^3 - z^2 + 4xy + 1\right) = 0$, в точці $M_0(4; -1; 2)$?

а) -1; +б) 1; в) -2; г) 4.

19. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ функції $z = z(x, y)$, яка задана неявно рівнянням $e^{xy-z} + xy^2 z + z + 1 = 0$, в точці $M_0(1; -1; -1)$?

а) -1; б) -3; в) 1; +г) 2.

20. Чому дорівнює частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = z(x, y)$, яка задана неявно рівнянням $e^{xy-z} + xy^2 z + z + 1 = 0$, в точці $M_0(1; -1; -1)$?

+а) -3; б) -1; в) 1; г) 2.

21. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функції $z = e^{x^2 - y^2}$ в точці $M_0(1; -1)$?

а) -4; +б) 6; в) -3; г) 2.

22. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = e^{x^2 - y^2}$ в точці $M_0(1; -1)$?

а) -4; б) -3; в) 6; +г) 2.

23. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функції $z = e^{x^2/y}$ в точці $M_0(-1; 1)$?

+а) $-2e$; б) 1; в) $6e$; г) 0.

24. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = ye^{x+y}$ в точці $M_0(-1; 1)$?

а) -4; +б) 3; в) -3; г) 2.

25. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функції $z = 4arctg(xy)$ в точці $M_0(-1; 1)$?

а) -4; б) 3; в) -3; +г) 2.

26. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = \ln\left(x + 2e^y\right)$ в точці $M_0(-1;0)$?

+а) -2; б) 2; в) -3; г) -1.

27. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = e^{x y^2 + 1}$ в точці $M_0(-1;1)$?

+ а) -2; б) -1; в) 4; г)2.

28. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ функції $z = e^{x^2 y - 1}$ в точці $M_0(1;1)$?

а)-1; б) -2; +в) 4; г) 6.

29. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = \cos\left(x^2 - y^2\right)$ в точці $M_0(1;1)$?

а)-1; б) 6; +в)4; г) 2.

30. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = \cos\left(x^2 + 2y^3 - 3x\right)$ в точці $M_0(1;1)$?

а)-2; б) 2; в) 4; +г)6.

31. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = \cos\left(y^3 - x^2 y\right)$ в точці $M_0(1;1)$?

а)-2; б) 6; +в)4; г) 2.

32. Чому дорівнює друга частинна похідна $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції $z = x\sin(2x - y)$ в точці $M_0(1;2)$?

а)-2; б) 1; в) 0; +г) -1.

33. Якщо $u = x^3 + y^2 - 2xyz + z^4$, $\vec{s}(2;-1;2)$ і $M_0(0;1;-1)$, то похідна за напрямом $\frac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ дорівнює…

+а) -2; б) 4; в) 3; г)10.

34. Якщо $u=\dfrac{z^3}{2x^3-3y^2}$, $\vec{s}(1;-2;2)$ і $M_0(1;-1;2)$, то похідна за напрямом $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ дорівнює…

а) -2; б) 10; +в) -6; г) -1.

35. Якщо $u=3e^{x+y^2z^3}$, $\vec{s}(1;-2;-2)$ і $M_0(1;1;-1)$, то похідна за напрямом $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ дорівнює…

а) -2; б) 4; +в) -1; г) -6.

36. Якщо $u=3\sin(xy+3xz-2yz)$, $\vec{s}(1;2;-2)$ і $M_0(1;3;1)$, то похідна за напрямом $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ дорівнює…

а) 2; б) -4; в) -1; +г) 10.

37. Якщо $u=3\arcsin\dfrac{x+y^2}{z}$, $\vec{s}(-2;1;2)$ і $M_0(-1;1;1)$, то похідна за напрямом $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ дорівнює…

а) 10; +б) 2; в) -1; г) -6.

38. Якщо $z=\ln(xy^2-1)$ і $M_0(2,1)$, то $grad\,z(M_0)$ дорівнює…

а) $2\vec{i}+3\vec{j}$; +б) $\vec{i}+4\vec{j}$; в) $3\vec{i}-2\vec{j}$; г) $2\vec{i}-4\vec{j}$.

39. Якщо $z=x^2y+xy^2$ і $M_0(-1,3)$, то $grad\,z(M_0)$ дорівнює…

а) $3\vec{i}+5\vec{j}$; б) $5\vec{i}-3\vec{j}$; +в) $3\vec{i}-5\vec{j}$; г) $2\vec{i}+3\vec{j}$.

40. Якщо $z=8\,tg\dfrac{x}{y}$ і $M_0(\pi,4)$, то $grad\,z(M_0)$ дорівнює…

а) $4\vec{i}+\pi\vec{j}$; б) $4\vec{i}-2\pi\vec{j}$; в) $2\vec{i}-\pi\vec{j}$; +г) $4\vec{i}-\pi\vec{j}$.

41. Якщо $z=\sin\dfrac{x}{y^2}$ і $M_0(\pi,1)$, то $grad\,z(M_0)$ дорівнює…

+а) $-\vec{i}+2\pi\vec{j}$; б) $\vec{i}-2\pi\vec{j}$; в) $2\vec{i}-\pi\vec{j}$; г) $4\vec{i}+2\pi\vec{j}$.

42. Якщо $u=\ln(xy^2+z^3-1)$ і $M_0(3;1;-1)$, то $grad\,u(M_0)$ дорівнює…

а) $2\vec{i}+6\vec{j}-3\vec{k}$; +б) $\vec{i}+6\vec{j}+3\vec{k}$; в) $\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$; г) $3\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$.

43. Якщо $u=\dfrac{2}{x^2y+2z^3}$ і $M_0(2;1;-1)$, то $grad\,u(M_0)$ дорівнює…

а) $\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}$; б) $\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$; в) $4\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$; +г) $-2\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$.

44. Якщо $u=2y+2xz^3-x^2yz$ і $M_0(1;3;-1)$, то $grad\,u(M_0)$ дорівнює…

а) $\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$; +б) $4\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$; в) $3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$; г) $-2\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$.

45. Для функції $z=3x^2-6xy+2y^2+5x+3y+5$ стаціонарними точками є…

а) $M_1(11/6,2)$; + б) $M_1(19/6,4)$; в) $M_1(3,4)$, $M_2(-1,2)$; г) $M_1(3/4,-5)$.

46. Для функції $z=2x^2-5xy+3y^2-3x+y-3$ стаціонарними точками є…

а) $M_1(10,-7)$; б) $M_1(-12,-15)$; в) $M_1(-3,5)$, $M_2(2,4)$; +г) $M_1(-13,-11)$.

47. Для функції $z=x^2-3xy+2y^2-x+y-6$ стаціонарними точками є

+ а) $M_1(-1,-1)$; б) $M_1(2,-7)$; в) $M_1(-2,-3)$, $M_2(2,-4)$; г) $M_1(-2,1)$.

48. Для функції $z=x^2-4xy+3y^2+x+2y-8$ стаціонарними точками є…

а) $M_1(1/6,3)$; б) $M_1(2,-13)$, $M_2(2/5,-2)$; в) $M_1(3/4,-5)$; +г) $M_1(7/2,2)$.

49. Для функції $z=x^2(2\ln x-3)$ стаціонарними точками є…

+а) $M_1(e,-e^2)$; б) $M_1(1,2)$, $M_2(\sqrt{e},-2e)$; в) $M_1(e^2,e^4)$; г) $M_1(1,-3)$.

50. Для функції $z=xe^{-x^2/2}$ стаціонарними точками є…

а) $M_1(1,e^{-1/2})$, $M_2(0,1)$; б) $M_1(2,e^{-2})$, $M_2(-2,e^{-2})$; +в) $M_1(1,e^{-1/2})$, $M_2(-1,e^{-1/2})$;
г) $M_1(0,1)$.

Література

1. Бугір М. К. Математика для економістів : посібник. / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с.
2. Валєєв К. Г. Вища математика : навч. посібник : у 2 ч. Ч. 1. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – 546 с.
3. Валєєв К. Г. Математичний практикум : навч. посібник / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2004. – 682 с.
4. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання, 2007. – 454 с.
5. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : КнигиУкраїниЛТД, 2009. – 578 с.
6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебн. пособие для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. школа, 1980. – 320 с.
7. Демчишин О. І. Вища математика : навч. посіб. / О. І. Демчишин, Б. Г. Шелестовський. – Тернопіль : Навчальна книга - Богдан, 2010. – 592 с.
8. Дюженкова Л. І. Вища математика. Приклади і задачі : посібник / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
9. Красс М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб. : Питер, 2005. – 464 с.
10. Кривуца В. Г. Вища математика : практикум / В. Г. Кривуца, В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : ЦУЛ, 2003. – 536 с.
11. Лиман Ф. М. Вища математика : навч. посібник / Ф. М. Лиман, С. В. Петренко, О. О. Одинцова – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2002. – Ч. 1. – 224 с.
12. Лозовий Б. Л. Практикум з вищої математики : навч. посіб. / Б. Л. Лозовий, Я. С. Пушак, О. Є. Шабат. – Львів : «Магнолія – 2006», 2007. – 285 с.
13. Лунгу К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю.А. Шевченко. — М. : Айрис-пресс, 2007. – 576 с.
14. Міхайленко В. М. Збірник прикладних задач з вищої математики : навч. посіб. / В. М. Міхайленко, Н. Д. Федоренко. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.
15. Огурцов А. П. Вища математика для підготовки бакалаврів з інженерії : навч. посіб. : у 3 ч. / А. П. Огурцов, Т. В. Наконечна, О. В. Нікулін; за заг. ред. А. П. Огурцова. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2008. – Ч. 1. – 428 с.; Ч. 2. – 340 с.; Ч. 3. – 320 с.

16. Овчинников П. Ф. Высшая математика / П. Ф. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К. : Вища школа, 1987. – 552 с.
17. Пастушенко С. М. Вища математика. Основні поняття, формули, зразки розв'язування задач : навч. посібник / С. М. Пастушенко, Ю. П. Підченко. – К. : Діал, 2000. – 160 с.
18. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебн. пособие : в 3 ч. / под общей редакцией А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйша школа, 1990. – Ч. 2. – 270 с.
19. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный и др.; под. ред. С. Н. Федина. – 4-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2006. – 592 с.

ГЛОСАРІЙ

аргумент – argument

вектор – vector

градієнт – gradient, grad

границя – limit

диференціал – differential

диференціальне числення – differential calculus

добуток векторів – vector product

дотична – tangent

екстремум функції – extreme of function

збіжність – convergence

координати – coordinates

кут нахилу – angle of inclination

кутовий коефіцієнт – angular coefficient

максимум функції – maximum of function

наближене обчислення – approximate calculation

нескінченність – infinity

неперервність – continuity

нормаль – normal

область – area (domain)

послідовність – sequence

похідна – derivative

рівняння – equation

стаціонарні точки – fixed point

теорема – theorem

умовний – conditional

функція – function

швидкість– speed

Навчальне видання

Хом'юк Ірина Володимирівна

Хом'юк Віктор Вікторович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 3

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Практикум

Рукопис оформила *І. Хом'юк*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет підготував *О. Ткачук*

Підписано до друку 05.06.2020.
Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 4,2.
Наклад 50 (1-й запуск 1-21) пр. Зам. № 2020-062.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.