

В. Ф. ГРАНЯК

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ

Частина 2

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. Ф. Граняк

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ

Частина 2

Конспект лекцій

Вінниця
ВНТУ
2020

УДК 621.3(075)

Г77

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 7 від 27.02.2020 р.)

Рецензенти:

В. А. Матвійчук, доктор технічних наук, професор

Й. Й. Білинський, доктор технічних наук, професор

М. Й. Бурбело, доктор технічних наук, професор

Граняк, В. Ф.

Г77 Теорія електричних та електронних кіл. Частина 2 : конспект лекцій / В. Ф. Граняк. – Вінниця : ВНТУ, 2020 – 134 с.

ISBN 978-966-641-819-0

В конспекті лекцій висвітлено широке коло питань теоретичної електротехніки та теорії сигналів. Він розрахований на студентів, аспірантів та викладачів спеціальностей «Мікро- та наносистемна техніка» та «Електроніка».

УДК 621.3(075)

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Лекція № 1. Електричні кола періодичного несинусоїдного струму. Подання несинусоїдного сигналу у вигляді ряду Фур'є.....	5
Лекція № 2. Електричні кола періодичного несинусоїдного струму. Розрахунок електричних кіл при дії несинусоїдної вхідної напруги	11
Лекція № 3. Поняття перехідного процесу. Закони комутації. Класичний метод розрахунку перехідного процесу у електричних колах першого порядку.....	16
Лекція № 4. Класичний метод розрахунку перехідного процесу у електричних колах другого порядку.....	24
Лекція № 5. Класичний метод розрахунку перехідного процесу у електричних колах з синусоїдальною напругою живлення	33
Лекція № 6. Перетворення Лапласа. Операторні схеми заміщення електричних кіл	40
Лекція № 7. Операторний метод аналізу перехідних процесів.....	49
Лекція № 8. Елементи теорії сигналів.....	53
Лекція № 9. Перехідні процеси при довільному вхідному сигналі	59
Лекція № 10. Спектральний метод розрахунку перехідних процесів	66
Лекція № 11. Поняття нелінійних електричних та електронних кіл	75
Лекція № 12. Графічні методи розрахунку нелінійних кіл.....	84
Лекція № 13. Графоаналітичний та аналітичний методи розрахунку нелінійних кіл	92
Лекція № 14. Фізичні основи напівпровідникової техніки.....	96
Лекція № 15. Напівпровідникові діоди.....	102
Лекція № 16. Біполярні транзистори.....	109
Лекція № 17. Польові транзистори.....	116
Лекція № 18. Тиристори	125
Література	129
Словник іншомовних термінів.....	130

ВСТУП

Дисципліна «Теорія електричних та електронних кіл» (ТЕЕК) є однією з нормативних, які вивчаються студентами закладів вищої освіти спеціальностей «Мікро- та наносистемна техніка» та «Електроніка».

Предметом ТЕЕК є функціонування лінійних і нелінійних електричних кіл в усталених і перехідних режимах під впливом дії сигналів різної форми. Матеріал дисципліни ТЕЕК, таким чином, є теоретичною базою для вивчення і засвоєння таких спеціальних дисциплін, як «Твердотільна електроніка», «Технологічні основи мікроелектроніки», «Вакуумна та плазмозна електроніка», «Елементна база електроніки», «Фізика напівпровідників», «Теорія коливань і хвиль», «Аналогова та цифрова схемотехніка».

В свою чергу, ТЕЕК потребує при його вивченні знання основних розділів фізики і математики, зокрема, операцій з комплексними числами, диференціальних рівнянь, рядів Фур'є, перетворень Лапласа, векторного аналізу тощо.

Курс ТЕЕК викладається протягом двох семестрів і складається з двох частин. Друга частина курсу складається з 18 лекцій.

Для полегшення розуміння та засвоєння курсу основні положення теорії в кожній лекції ілюструються числовими прикладами з детальними розв'язаннями. При розв'язанні цих прикладів широко застосовується (у випадках, коли це доцільно) комп'ютерний програмний комплекс MathCAD.

ЛЕКЦІЯ № 1

ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ. ПОДАННЯ НЕСИНУСОЇДНОГО СИГНАЛУ У ВИГЛЯДІ РЯДУ ФУР'Є

1.1 Подання періодичних несинусоїдних функцій рядами Фур'є

Наявність в електричних колах джерел енергії, напруга яких хоч і періодична, але відрізняється від гармонічної (рис. 1.1), не дозволяє для розрахунку таких кіл використовувати безпосередньо комплексний символічний метод. Тому звичайно періодичну несинусоїдну функцію зображають у вигляді ряду Фур'є.

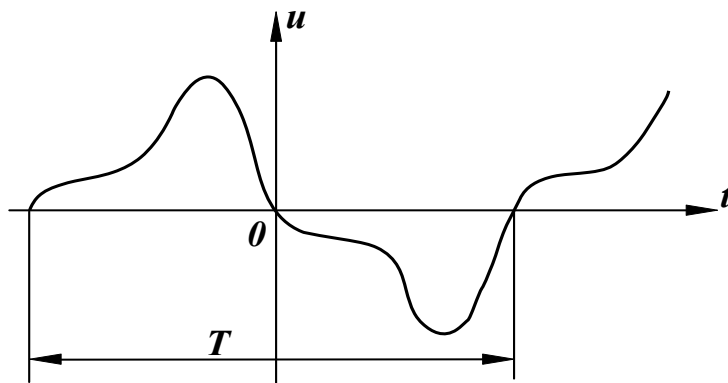


Рисунок 1.1

Така несинусоїдна періодична напруга $u(t)$, яка задовольняє умови Діріхле (функція має за період скінченну кількість розривів першого роду і скінченну кількість максимумів та мінімумів), може бути описана гармонічним рядом

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \sin \frac{2k\pi}{T} t + B_k \cos \frac{2k\pi}{T} t \right), \quad (1.1)$$

де коефіцієнти ряду Фур'є визначаються виразами

$$B_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt,$$
$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin \frac{2k\pi}{T} t dt, \quad (1.2)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos \frac{2k\pi}{T} t dt.$$

Запишемо ряд Фур'є для напруги, зобразивши вираз в дужках (1.1) у вигляді однієї синусоїди

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{mk} \sin(k\omega t + \beta_k), \quad (1.3)$$

де $U_{mk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$,

$$\beta_k = \arctg \frac{B_k}{A_k}.$$

Члени ряду (1.3) називають гармонічними складовими або гармоніками. Перша складова U_0 – нульова гармоніка або стала складова. Складова $U_{m1} \sin(\omega t + \beta_1)$ – основна або перша гармоніка. Всі інші складові – вищі гармоніки. Кожна гармоніка може мати амплітуду (U_{mk}) і початкову фазу (β_k), які відрізняються від інших, але головною відмінністю гармонік є частота, тобто, кожна гармоніка має свою частоту. Можна зобразити на графіку значення амплітуд і початкових фаз гармонік залежно від номера гармоніки (рис. 1.2).

Закон розподілу амплітуд гармонічних складових за частотою називається спектром амплітуд або амплітудно-частотним спектром. Закон розподілу початкових фаз називають спектром фаз або фазочастотним спектром.

Спектр, який складається з ряду окремих ліній, називають дискретним або лінійним. Амплітудно-частотний (рис. 1.2, а) і фазочастотний (рис. 1.2, б) спектри повністю визначають періодичну функцію.

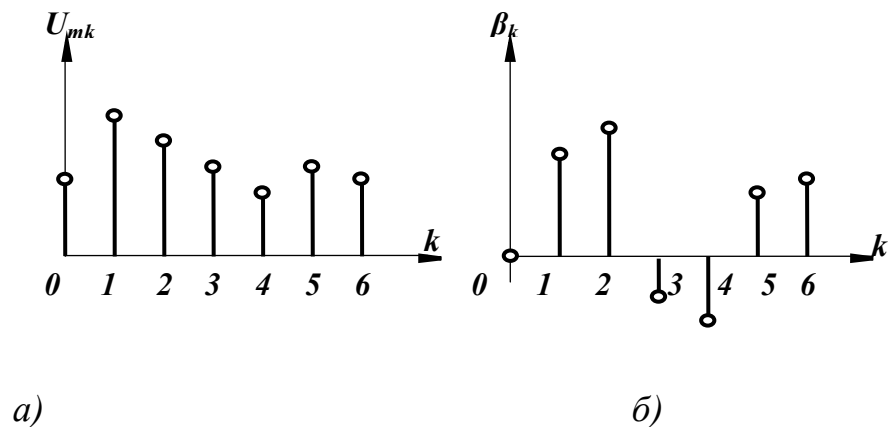


Рисунок 1.2

1.2 Особливості розкладання в ряд Фур'є періодичних функцій зі специфічними властивостями

При визначенні коефіцієнтів ряду Фур'є корисними виявляються деякі попередні знання про характер періодичної функції.

На рис. 1.3 зображена періодична функція, яка симетрична відносно осі ординат. Умови симетрії визначаються рівністю

$$f(x) = f(-x). \quad (1.4)$$

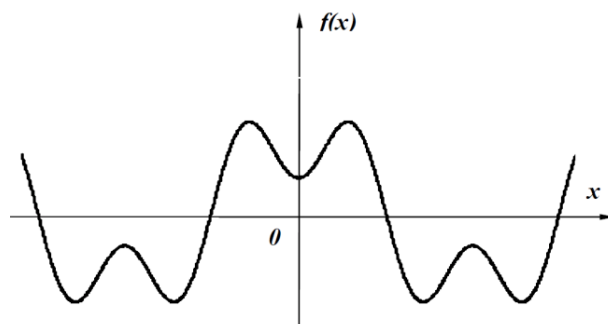


Рисунок 1.3

Функції, які задовольняють умову (1.4), називають парними, тому при розкладанні функції $f(x)$ в ряд Фур'є будуть присутні лише парні функції, тобто косинусоїдні

$$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos(kx)). \quad (1.5)$$

У випадку симетрії кривої відносно початку координат (рис. 1.4) $f(x) = -f(-x)$ функція є непарною і в її розкладі присутні тільки синусоїдні складові, тобто

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin(kx)). \quad (1.6)$$

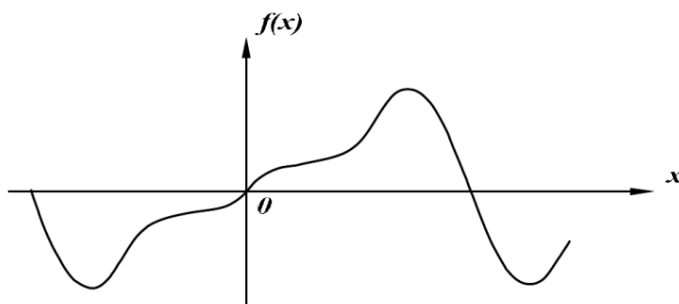


Рисунок 1.4

Якщо крива симетрична відносно осі абсцис (рис. 1.5) $f(x) = -f(x+\pi)$, то при розкладанні $f(x)$ в ряд Фур'є присутні тільки непарні гармоніки

$$f(x) = A_1 \sin(x) + B_1 \cos(x) + A_3 \sin(3x) + B_3 \cos(3x) + A_5 \sin(5x) + B_5 \cos(5x) \dots \quad (1.7)$$

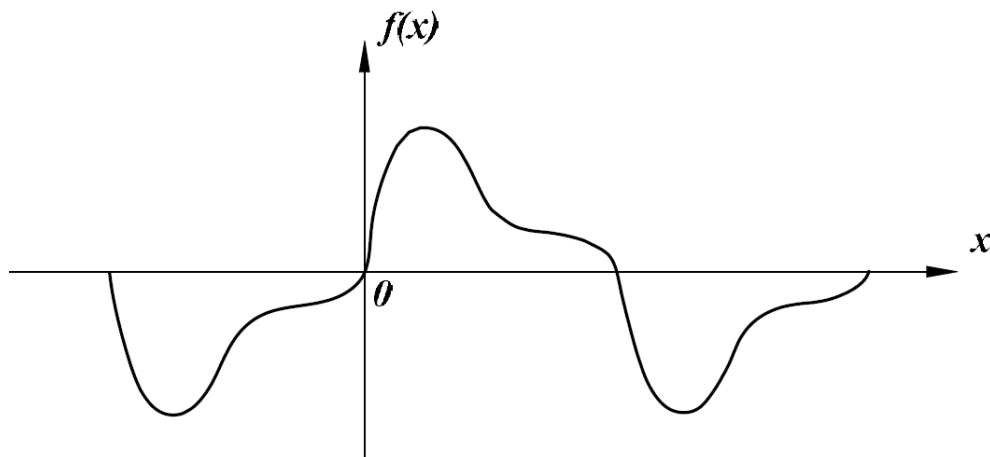


Рисунок 1.5

Доведемо це. Нехай функція $f(x)$ містить всі гармоніки

$$f(x) = B_0 + A_1 \sin(x) + B_1 \cos(x) + A_2 \sin(2x) + B_2 \cos(2x) + \dots$$

Підставимо функції $f(x)$ та $f(x + \pi)$ в умову симетрії кривої.

$$A_1 \sin(x) + B_1 \cos(x) + A_2 \sin(2x) + B_2 \cos(2x) + \dots = -A_1 \sin(x + \pi) - B_1 \cos(x + \pi) - A_2 \sin(2x + 2\pi) - B_2 \cos(2x + 2\pi) - \dots$$

Враховуючи, що для непарних k

$$\begin{aligned} \sin(kx + k\pi) &= -\sin(kx), \\ \cos(kx + k\pi) &= -\cos(kx), \end{aligned}$$

а для парних k

$$\begin{aligned} \sin(kx + k\pi) &= \sin(kx), \\ \cos(kx + k\pi) &= \cos(kx), \end{aligned}$$

отримаємо

$$A_1 \sin(x) + B_1 \cos(x) + A_2 \sin(2x) + B_2 \cos(2x) + \dots = A_1 \sin(x) - \\ - B_1 \cos(x) - A_2 \sin(2x) - B_2 \cos(2x) + \dots$$

Або

$$2A_2 \sin(2x) + 2B_2 \cos(2x) + 2A_4 \sin(4x) + 2B_4 \cos(4x) \dots = 0$$

Отриманий ряд може тотожно дорівнювати нулю лише тоді, коли всі коефіцієнти цього ряду дорівнюють нулю, що і доводить правильність виразу (1.7).

1.3 Наближені методи визначення коефіцієнтів ряду Фур'є

Використання виразів (1.2) для визначення коефіцієнтів ряду Фур'є можливе лише у випадку задання функції $f(x)$ у вигляді аналітичного виразу хоча б на окремих інтервалах. В багатьох же випадках криві задані таблично або графічно, що змушує шукати коефіцієнти A_k і B_k наближеними методами.

Одним із таких методів є спосіб заміни інтеграла сумою скінченного числа складових.

Нехай задана графічно періодична функція $f(x)$ з періодом 2π (рис. 1.6). Розіб'ємо весь період на n однакових частин

$$\Delta x = \frac{2\pi}{n}. \quad (1.8)$$

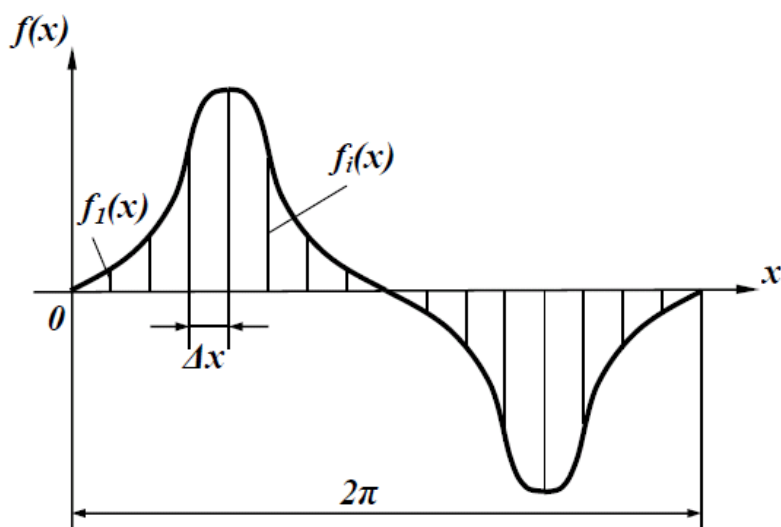


Рисунок 1.6

Позначимо значення функції в точках розбиття через $f_i(x)$. Замінивши в першому виразі (1.2) інтеграл сумою, неперервні значення $f(x)$ дискретними значеннями $f_i(x)$ і нескінченно малі величини dx малими, але скінченними величинами Δx , одержимо

$$B_0 \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n f_i(x) \Delta x, \quad (1.9)$$

або, з урахуванням (1.8),

$$B_0 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x). \quad (1.10)$$

Таким же чином, враховуючи, що

$$x \approx i\Delta x = i \frac{2\pi}{n},$$

одержимо

$$A_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) \sin\left(ki \frac{2\pi}{n}\right), \quad (1.11)$$

$$A_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) \cos\left(ki \frac{2\pi}{n}\right).$$

При розрахунках з використанням рядів звичайно обмежуються скінченним числом гармонік.

Контрольні питання

1. Якими параметрами відрізняються одна від одної гармонічні складові?
2. Як визначити частоту n -ї гармоніки, при відомій частоті 1 -ї гармоніки?
3. Які гармонічні складові присутні у розкладанні в ряд Фур'є парних функцій?
4. Які гармонічні складові присутні у розкладанні в ряд Фур'є непарних функцій?
5. Які гармонічні складові присутні у розкладанні в ряд Фур'є функцій, симетричних відносно осі абсцис?
6. У чому суть наближеного методу розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є?

ЛЕКЦІЯ № 2
ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ПЕРІОДИЧНОГО НЕСИНУСОЇДНОГО
СТРУМУ.
РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ
ПРИ ДІЇ НЕСИНУСОЇДНОЇ ВХІДНОЇ НАПРУГИ

2.1 Діючі значення несинусоїдних струмів і напруг

У першій частині курсу ми познайомилися з поняттям діючого значення струму, та встановили, що його значення розраховується за виразом

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2.1)$$

Визначимо діюче значення несинусоїдного струму

$$i = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \alpha_1) + I_{m2} \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots \quad (2.2)$$

Одержаний ряд необхідно піднести до квадрата і підставити у вираз для діючого значення. Після необхідних перетворень отримаємо

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m1}^2}{2} + \frac{I_{m2}^2}{2} + \frac{I_{m3}^2}{2} + \dots} \quad (2.3)$$

або

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots} \quad (2.4)$$

Таким чином, діюче значення несинусоїдного струму дорівнює кореню квадратному з суми квадратів діючих значень окремих гармонік.

Аналогічно, діюче значення несинусоїдної напруги

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} \quad (2.5)$$

Відзначимо, що діючі значення несинусоїдних струмів та напруг залежать лише від амплітуд гармонік та не залежать від їх початкових фаз.

2.2 Розрахунок електричних кіл при несинусоїдних напругах

Якщо прикладена напруга описується періодичною несинусоїдною функцією, то ця функція може бути зображена рядом Фур'є

$$u = U_0 + U_{m1} \sin(\omega t + \beta_1) + U_{m2} \sin(2\omega t + \beta_2) + \dots \quad (2.6)$$

Вхідну напругу можна розглядати такою, що забезпечується окремими джерелами гармонічних напруг різних частот.

Згідно з теоремою накладання, можна стверджувати, що струми у вітках лінійного електричного кола можна визначати як алгебраїчну суму струмів від дії кожного джерела окремо. Таким чином, розрахунок електричного кола виконується для кожної гармоніки окремо. Оскільки в цьому випадку напруги джерел синусоїдні, то може використовуватися символічний метод, а через те, що частоти гармонік різні, то й опори віток кола для різних гармонік також відрізняються.

Розглянемо методику розрахунку на прикладі електричного кола, зображеного на 2.1.

Нехай до цього кола прикладена напруга (2.6).

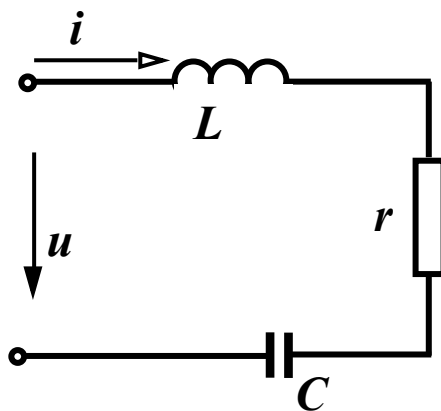


Рисунок 2.1

Для першої гармоніки запишемо

$$\underline{U}_1 = \frac{U_{m1}}{\sqrt{2}} e^{j\beta_1}, \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Для k -ї гармоніки змінюються опори індуктивності і ємності

$$x_L^{(k)} = k\omega L = kx_L^{(1)}, \quad x_C^{(k)} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{x_C^{(1)}}{k} \quad (2.7)$$

Тому

$$\underline{U}_k = \frac{U_{mk}}{\sqrt{2}} e^{j\beta_k}, \quad \underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{r + j\left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)} \quad (2.8)$$

Очевидно, що для сталої складової ($k = 0$) з виразів (2.7) випливає

$$x_L^{(0)} = 0 \cdot \omega L = 0, \quad x_C^{(0)} = \frac{1}{0 \cdot \omega C} = \infty, \quad \underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_k}{r + j(0 - \infty)} = 0.$$

Миттєве значення струму знаходиться як сума миттєвих значень струмів різних гармонік.

Якщо коло складне, то для кожної гармоніки можна використовувати всі відомі методи розрахунку в комплексній формі.

2.3 Потужності в колах несинусоїдного струму

В колах несинусоїдного струму активна потужність дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік, а реактивна потужність – алгебраїчній сумі реактивних потужностей окремих гармонік, тобто

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \phi_1 + U_2 I_2 \cos \phi_2 + U_3 I_3 \cos \phi_3 + \dots, \quad (2.9)$$

$$Q = U_1 I_1 \sin \phi_1 + U_2 I_2 \sin \phi_2 + U_3 I_3 \sin \phi_3 + \dots. \quad (2.10)$$

Повна потужність визначається як

$$S = UI = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + \dots} \cdot \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}. \quad (2.11)$$

На відміну від кіл синусоїдного струму в колах з несинусоїдними струмами і напругами не виконується рівність $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$. Щоб пов'язати певним співвідношенням ці потужності між собою, вводять поняття потужності спотворення T , яка характеризує ступінь відмінності в формах кривих напруги і струму, і тоді

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}. \quad (2.12)$$

Відзначимо, що баланс активних і реактивних потужностей виконується і для цього класу кіл.

Відношення активної потужності до повної називають коефіцієнтом потужності

$$k_n = \frac{P}{S} = \frac{U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \phi_1 + U_2 I_2 \cos \phi_2 + U_3 I_3 \cos \phi_3 + \dots}{\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + \dots} \cdot \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}}.$$

Для кіл синусоїдного струму $k_n = \frac{UI \cos \phi}{UI} = \cos \phi$, тобто, коефіцієнт потужності в цьому випадку дорівнює косинусу кута зсуву фаз ϕ напруги та струму.

2.4 Коефіцієнти, які характеризують відмінність кривої від синусоїди

Для оцінювання ступеня відмінності негармонічної кривої від синусоїдної вводять низку різних коефіцієнтів.

Коефіцієнт амплітуди визначається як відношення максимального значення функції до її діючого значення, тобто

$$K_a = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}}. \quad (2.13)$$

Коефіцієнтом спотворення називається відношення діючого значення першої гармоніки до діючого значення всієї функції

$$K_c = \frac{I_1}{I} = \frac{I_1}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}}. \quad (2.14)$$

Під коефіцієнтом нелінійних спотворень розуміють відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення першої гармоніки

$$K_{н.с} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots}}{I_1}. \quad (2.15)$$

Зазвичай ці коефіцієнти вводять для кривих, які не мають сталих складових. Тому в них немає складової I_0 .

Визначимо можливі межі зміни цих коефіцієнтів. Мінімальне значення $K_a = 1$ при $I = I_m$. У всіх інших випадках $K_a > 1$. Для синусоїди

$$K_a = \frac{I\sqrt{2}}{I} = 1,41.$$

Максимальне значення коефіцієнт спотворення набуває при синусоїдній формі кривої, коли відсутні вищі гармоніки. В цьому випадку

$$K_c = \frac{I_1}{I_1} = 1. \text{ В інших випадках } K_c < 1. \text{ Причому, чим менший } K_c, \text{ тим}$$

сильніше крива відрізняється від синусоїди.

Мінімальне значення коефіцієнта нелінійних спотворень можливе також при синусоїдній формі кривої, якщо відсутні вищі гармоніки: $K_{н.с} = 0$.

Контрольні питання

1. Як залежить діюче значення струму від початкових фаз гармонічних складових?
2. Визначити діюче значення напруги: $u = 30 + 80 \sin \omega t + 40 \sin 3\omega t$ В.
3. В яких випадках вхідний опір кола залишається однаковим для всіх гармонік?
4. Що називають потужністю спотворення?
5. Як визначається коефіцієнт амплітуди?
6. Як визначається коефіцієнт спотворення?
7. Як визначається коефіцієнт нелінійних спотворень?

ЛЕКЦІЯ № 3

ПОНЯТТЯ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ. ЗАКОНИ КОМУТАЦІЇ. КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ У ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.

3.1 Причини виникнення перехідних процесів. Закони комутації

Електричне коло, до складу якого входять ємності та індуктивності, в усталеному режимі містить деяку енергію, яка накопичена в електричному й магнітному полях. Величина цієї енергії в будь-який момент часу визначається за допомогою виразів:

- в електричному полі ємності $W_e = \frac{Cu^2}{2}$;

- в магнітному полі індуктивності $W_m = \frac{Li^2}{2}$.

При зміні усталеного режиму, який відбувається під впливом будь-яких перемикачів, що приводять до зміни параметрів кола або зовнішніх дій, змінюється кількість енергії в полях. Оскільки енергія не може змінитися за одну мить, то і зміна одного усталеного режиму іншим проходить також протягом деякого часу. Процес переходу від одного усталеного стану кола до іншого називається перехідним процесом. Таким чином, основною причиною виникнення перехідного процесу є зміна енергетичного стану кола.

Введемо деякі поняття, які характеризують перехідні процеси. Будь-яку зміну параметрів кола або зовнішніх дій звичайно називають *комутацією* (*switching*), в розрахунках вважають, що усяка комутація відбувається миттєво.

Установлені два закони комутації.

Оскільки енергія магнітного поля в індуктивності не може змінитися за мить, то при постійному значенні L не може змінитися за мить і струм через індуктивність.

Перший закон комутації

Струм через індуктивність в перший момент часу після комутації дорівнює струму через індуктивність в останній момент часу перед комутацією.

Якщо перший момент часу після комутації будемо позначати $t = 0+$, а час безпосередньо перед комутацією через $t = 0-$, то перший закон комутації запишеться як

$$i_L(0+) = i_L(0-). \quad (3.1)$$

Другий закон комутації

Напруга на ємності в перший момент часу після комутації дорівнює напрузі на ємності в останній момент часу перед комутацією.

$$u_c(0+) = u_c(0-). \quad (3.2)$$

Практична тривалість перехідних процесів залежить від параметрів кола і в багатьох випадках складає частки секунди. Проте під час перехідних процесів на окремих елементах кола можуть виникати великі напруги або протікати великі струми.

3.2 Вмикання кола rL на постійну напругу

Розглянемо методику розрахунку перехідного процесу на простому прикладі (рис. 3.1).

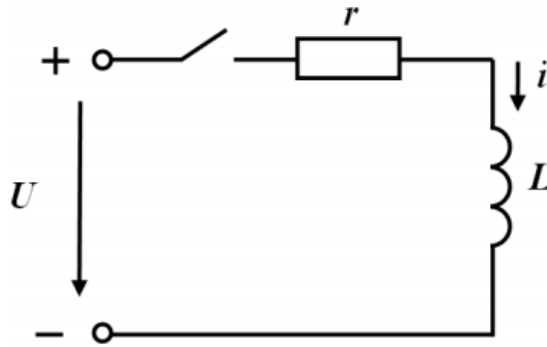


Рисунок 3.1

При замиканні ключа в колі виникає перехідний процес, оскільки коло переходить із одного усталеного режиму в інший. Під час перехідного процесу струми і напруги в колі змінюються залежно від часу, тому, складаючи рівняння, яке описує процес в колі, використаємо другий закон Кірхгофа.

$$L \frac{di}{dt} + ri = U. \quad (3.3)$$

Одержано неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами. Його розв'язок складається з двох складових – загального і часткового розв'язків. Загальний розв'язок одержуємо при розв'язанні однорідного диференціального рівняння, коли права частина дорівнює нулю. В електротехніці цю складову прийнято називати *вільною* складовою i_e , оскільки вона не залежить від зовнішнього впливу. Частко-

вий розв'язок, який називається примусовою складовою i_{np} , залежить від вигляду правої частини.

Таким чином

$$i = i_{np} + i_g. \quad (3.4)$$

Для визначення i_g рівняння (3.3) має вигляд

$$L \frac{di_g}{dt} + ri_g = 0. \quad (3.5)$$

Його розв'язок

$$i_g = Ae^{pt}, \quad (3.6)$$

де p – корінь характеристичного рівняння,

A – стала інтегрування.

Характеристичне рівняння можна отримати, якщо в однорідному рівнянні (3.5) замінити змінну на одиницю і першу похідну на p , тобто

$$Lp + r = 0, \text{ звідки } p = -\frac{r}{L}.$$

Зазначимо, що корінь характеристичного рівняння може бути лише від'ємним.

Оскільки права частина рівняння (3.3) є сталою величиною, то примусова складова теж стала, тому $i_{np} = I$. Тоді $L \frac{dI}{dt} + rI = U$ або $rI = U$, тому

що в новому усталеному режимі $\frac{dI}{dt} = 0$.

Звідси

$$i_{np} = I = \frac{U}{r}. \quad (3.7)$$

Легко побачити, що примусова складова є струмом в новому усталеному режимі. Тому, зазвичай, числові значення цієї складової і визначаються з розрахунку нового усталеного режиму.

Повний розв'язок рівняння (3.4) має вигляд

$$i = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L}t}. \quad (3.8)$$

Для визначення сталої інтегрування використаємо початкові умови. Знайдемо значення струму в момент часу $t=0+$, використавши перший закон комутації. Оскільки до комутації струму в колі не було $i_L(0-)=0$ (ключ розімкнутий), то, згідно з першим законом комутації, $i_L(0+)=0$.

$$\text{Тоді } i(0+) = \frac{U}{r} + Ae^{-\frac{r}{L} \cdot 0} = \frac{U}{r} + A = 0, \text{ звідки } A = -\frac{U}{r}.$$

Таким чином

$$i = \frac{U}{r} - \frac{U}{r} e^{-\frac{r}{L}t} = \frac{U}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t} \right). \quad (3.9)$$

Графіки зміни струму через індуктивність показані на рис. 3.2.

Примусова складова на графіку має вигляд прямої лінії, а вільна складова – експоненти. Повний розв'язок теж являє собою експоненту, яка починається з нуля і асимптотично наближається до усталеного значення.

Коефіцієнт при t в показнику експоненти має розмірність $1/c$, тому обернена величина має розмірність часу, позначається літерою τ і називається сталою часу перехідного процесу.

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{r}. \quad (3.10)$$

Стала часу залежить від параметрів кола і характеризує тривалість протікання перехідного процесу.

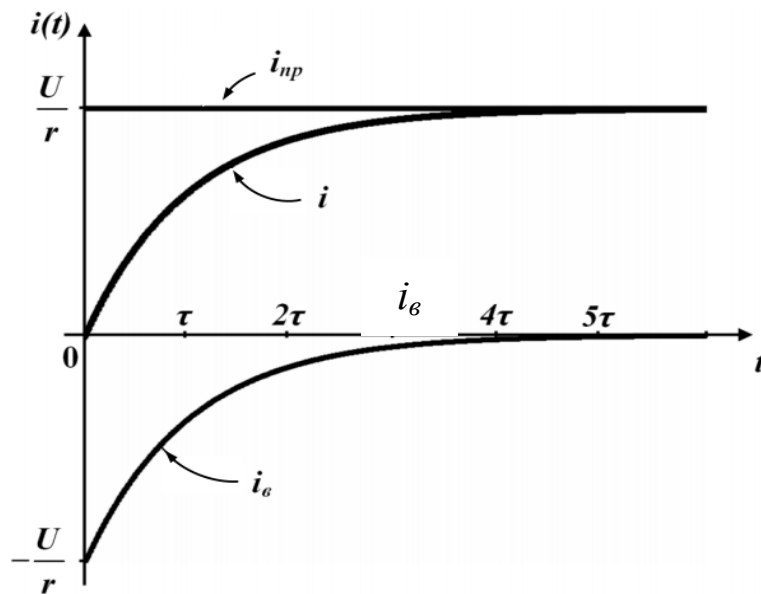


Рисунок 3.2

Не дивлячись на те, що теоретично перехідний процес триває нескінченно довго (лише при $t \rightarrow \infty$ вільна складова наближається до нуля), можна вважати, що перехідний процес практично закінчується, коли вільна складова стає меншою 1% від усталеного значення. Тому практична тривалість перехідного процесу $t_{пер.проц.} = (4 \div 5)\tau$.

3.3 Вмикання кола rC на постійну напругу

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для кола з послідовно з'єднаними r і C при вмиканні на постійну напругу (рис. 3.3).

$$ri + u_C = U. \quad (3.11)$$

Оскільки $i = C \frac{du_C}{dt}$, отримаємо

$$rC \frac{du_C}{dt} + u_C = U. \quad (3.12)$$

Повний розв'язок цього рівняння $u_C = u_{Cnp} + u_{Cв}$.

Із розрахунку нового усталеного режиму визначаємо $u_{Cnp} = U$.

Вільна складова розв'язку диференціального рівняння першого порядку $u_{Cв} = Ae^{pt}$.

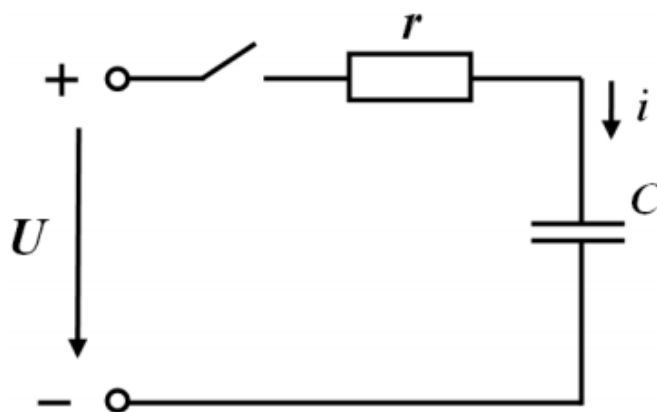


Рисунок 3.3

Характеристичне рівняння

$$rCp + 1 = 0, \quad (3.13)$$

звідки $p = -\frac{1}{rC}$, а $\tau = \frac{1}{|p|} = rC$. Тоді повний розв'язок $u_C = U + Ae^{-\frac{t}{rC}}$.

Постійну інтегрування A знаходимо, використовуючи початкові умови. Відповідно до другого закону комутації $u_C(0+) = u_C(0-)$, тому $u_C(0-) = U + A$ і $A = u_C(0-) - U$. Якщо до комутації конденсатор не був заряджений, то $u_C(0-) = 0$ і $A = -U$.

Остаточний повний розв'язок

$$u_C = U \left(1 - e^{-\frac{t}{rC}} \right). \quad (3.14)$$

Визначимо закон зміни струму в ємності.

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \left[-U \left(-\frac{1}{rC} \right) e^{-\frac{t}{rC}} \right] = \frac{U}{r} e^{-\frac{t}{rC}}. \quad (3.15)$$

Графіки зміни струму і напруги на ємності показані на рис. 3.4 та 3.5.

Із графіків видно, що u_C в момент комутації нерозривна лінія, а i змінюється стрибком від нуля до величини $\frac{U}{r}$.

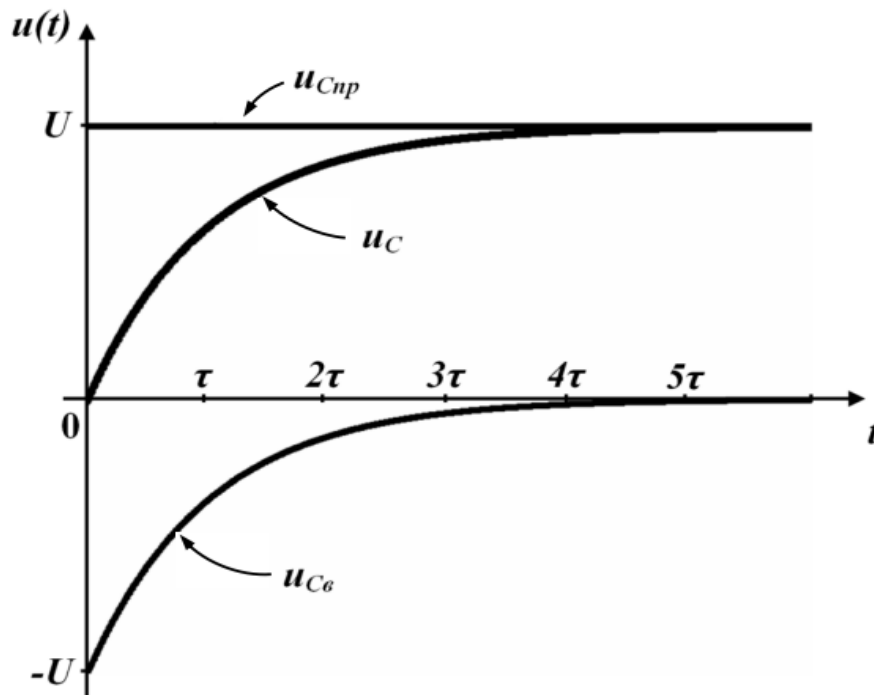


Рисунок 3.4

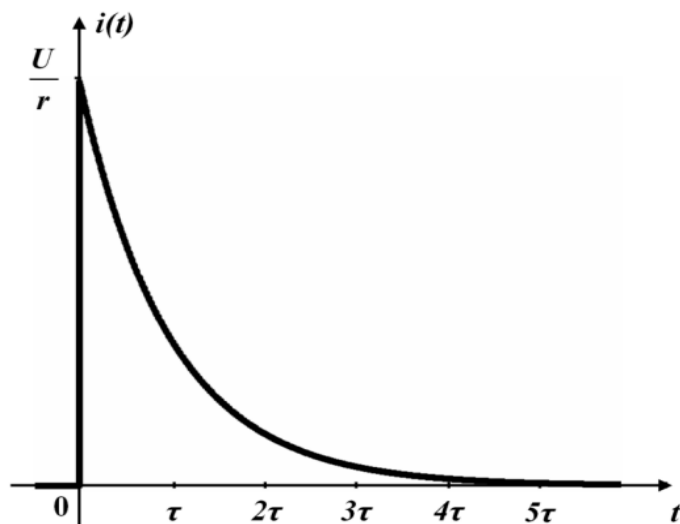


Рисунок 3.5

3.4 Незалежні і залежні початкові умови

Як видно з матеріалу попередніх розділів, стала інтегрування завжди визначається, виходячи з початкових умов. При цьому, для довільного параметра режиму кола X (це може бути напруга чи струм в будь-якому елементі) стала інтегрування дорівнює

$$A = X(0+) - X_{np}. \quad (3.16)$$

Існують два методи визначення $X(0+)$.

1. Якщо $X(0+)$ це струм в індуктивності або напруга на ємності, то ця величина визначається, виходячи з законів комутації (3.1), (3.2). В цьому випадку $X(0+)$ називають *незалежними початковими умовами* (*independent entry conditions*).

2. Якщо $X(0+)$ це будь-який інший параметр, тоді цю величину називають *залежними початковими умовами* (*dependent entry conditions*). Для визначення $X(0+)$ в цьому випадку необхідно скласти і розв'язати систему рівнянь за законами Кірхгофа, в яку мають входити всі незалежні початкові умови цього кола.

Контрольні питання

1. Що таке перехідний процес? Чому він виникає?
2. Сформулюйте перший закон комутації.
3. Сформулюйте другий закон комутації.

4. Запишіть компонентні співвідношення між струмом і непругою на ємності.

5. Запишіть компонентні співвідношення між струмом і непругою на індуктивності.

6. Що називається незалежними початковими умовами при розрахунку перехідного процесу?

7. Для яких параметрів у електричному колі знаходяться незалежні початкові умови?

8. Чи може струм в резисторі після комутації змінитися стрибком?

9. Чи може напруга на резисторі після комутації змінитися стрибком?

ЛЕКЦІЯ № 4
КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ
У ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ.

4.1 Вмикання кола rLC на постійну напругу

Проведемо аналіз перехідного процесу в колі з двома реактивними елементами, яке зображене на рис. 4.1.

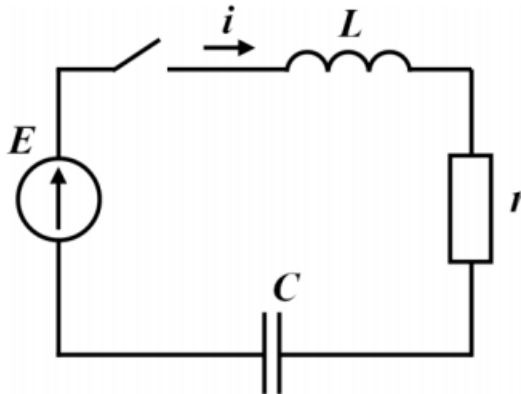


Рисунок 4.1

Згідно з другим законом Кірхгофа для кола можна скласти систему рівнянь

$$\begin{aligned}ir + L \frac{di}{dt} + u_C &= E, \\ i &= C \frac{du_C}{dt}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Після перетворень отримаємо рівняння другого порядку

$$rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = E.\tag{4.2}$$

Характеристичне рівняння

$$rCp + LCp^2 + 1 = 0\tag{4.3}$$

має корені

$$p_{1,2} = -\frac{r}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (4.4)$$

Залежно від співвідношення складових під знаком радикала будемо мати три види коренів

1. $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ – корені комплексно-спряжені;
2. $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ – корені дійсні різні;
3. $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ – корені дійсні однакові.

Перед тим, як розглянути всі три випадки, знайдемо для кола незалежні початкові умови та примусову складову напруги на ємності.

Оскільки ключ до комутації було вимкнено, то очевидно, що

$$i(0+) = i(0-) = 0, \quad u_C(0+) = u_C(0-) = 0.$$

Струм в колі після комутації дорівнює нулю (конденсатор не пропускає постійний струм), тому з першого рівняння системи (4.1) випливає, що $u_{Cпр} = E$.

1. *Нехай корені будуть комплексно-спряженими.*

Тоді їх можна подати у вигляді $p_1 = -\delta + j\omega_0$, $p_2 = -\delta - j\omega_0$, де

$\delta = \frac{r}{2L}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{r}{2L}\right)^2}$, а перехідний процес буде періодичним (коливальним).

Перехідна напруга на ємності може бути записана як

$$u_C(t) = E + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (4.5)$$

Знайдемо сталі інтегрування A_1, A_2 .

Підставляючи $t = 0$ і $u_C(0) = 0$ в (4.5), маємо $0 = E + 1(A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1)$, звідки $A_2 = -E$.

Для визначення A_1 виразимо струм в колі через сталі інтегрування

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d[E + e^{-\delta t} (A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t)]}{dt} = \\ &= C e^{-\delta t} [(-\delta)(A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t) + \omega_0 (-A_2 \sin \omega_0 t + A_1 \cos \omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Підставивши $t = 0$ і $i(0) = 0$, одержимо

$$0 = C \cdot 1 [(-\delta)(A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1) + \omega_0(-A_2 \cdot 0 + A_1 \cdot 1)], \text{ або } 0 = -\delta A_2 + \omega_0 A_1.$$

Враховуючи, що $A_2 = -E$, отримаємо $A_1 = -\frac{\delta}{\omega_0} E$.

Отже

$$u_C(t) = E - e^{-\delta t} \left(\frac{\delta}{\omega_0} E \sin \omega_0 t + E \cos \omega_0 t \right). \quad (4.6)$$

2. Нехай корені будуть дійсними різними.

Тоді перехідна напруга на ємності може бути записана як

$$u_C(t) = E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (4.7)$$

Перехідний процес буде аперіодичним (неколивальним).

Тоді для знаходження сталих інтегрування слід скласти систему рівнянь. Перше з цих рівнянь одержимо, підставивши $t = 0$ і $u_C(0) = 0$ в (4.7)

$$0 = E + A_1 + A_2 \quad (4.8)$$

Друге рівняння знайдемо з виразу

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d(E + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t})}{dt} = C(A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}).$$

Підставивши $t = 0$ і $i(0) = 0$, одержимо $0 = C(A_1 p_1 + A_2 p_2)$ або

$$0 = A_1 p_1 + A_2 p_2. \quad (4.9)$$

Розв'язок системи рівнянь (4.8), (4.9): $A_1 = \frac{E p_2}{p_1 - p_2}$, $A_2 = -\frac{E p_1}{p_1 - p_2}$.

Таким чином

$$u_C(t) = E + \frac{E p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{E p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}. \quad (4.10)$$

3. Якщо корені однакові, тобто $\left(\frac{r}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$, то перехідний процес є критичним. Він перехідний між аперіодичним та коливальним процесами.

В цьому випадку $p_1 = p_2 = -\frac{r}{2L}$ і напруга на ємності записується як

$$u_C = E + (A_1 + A_2 t)e^{pt} \quad (4.11)$$

Знайдемо сталі інтегрування. Підставляючи $t=0$ і $u_C(0)=0$ в (8.28), маємо $0 = E + A_1$, звідки $A_1 = -E$.

Виразимо струм в колі через сталі інтегрування

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d[E + (A_1 + A_2 t)e^{pt}]}{dt} = Ce^{pt} [p(A_1 + A_2 t) + A_2].$$

Підставивши $t=0$ і $i(0)=0$, одержимо $0 = C(pA_1 + A_2)$, звідки, з урахуванням $A_1 = -E$, отримаємо $A_2 = pE$.

Отже

$$u_C(t) = E + (pEt - E)e^{pt}. \quad (4.12)$$

4.2 Формування характеристичного рівняння методом вхідного опору

В попередніх прикладах характеристичне рівняння формувалося на основі однорідного диференціального рівняння. В цьому дифрівнянні потрібно виконувати заміну змінної на одиницю, першої похідної – на p , другої похідної – на p^2 , k -ї похідної – на p^k тощо.

Разом з тим, для складного кола формування диференціального рівняння є непростю задачею, оскільки потребує іноді досить трудомістких алгебраїчних перетворень. Тому в складних колах доцільного застосовувати *метод вхідного опору (method of entrance resistance)*.

За цим методом характеристичне рівняння формується за алгоритмом:

1. Для кола визначається вхідний опір кола як функція комплексної частоти $Z_{ex}(j\omega)$;

2. В одержаній функції виконується заміна комплексної частоти $j\omega$ на параметр p ;

3. Функцію $Z_{ex}(p)$ прирівнюють до нуля і розв'язують отримане характеристичне рівняння

$$Z_{ex}(p) = 0. \quad (4.13)$$

4.3 Аналіз складного кола другого порядку

Розглянемо приклад розрахунку перехідного процесу в складному колі з двома реактивними елементами.

Знайти перехідні струми i_1 , i_2 , i_3 та напруги на ємності u_C та на індуктивності u_L в колі постійного струму, яке зображене на рис. 4.2. Побудувати графіки цих величин в часі. Параметри кола: $U = 200$ В, $L = 100$ мГн, $C = 50$ мкФ, $r_1 = 200$ Ом, $r_2 = 50$ Ом.

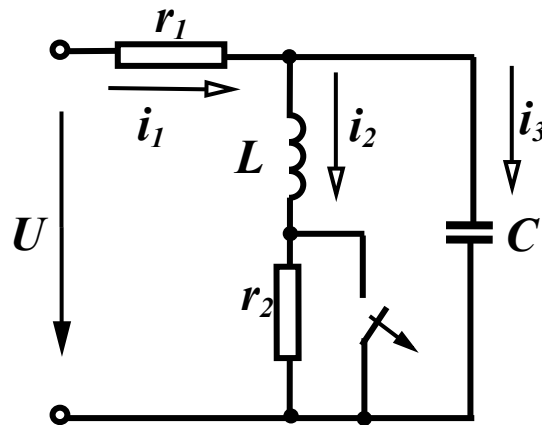


Рисунок 4.2

Спочатку визначимо перехідний струм через індуктивність i_2 .

В загальному вигляді $i_2(t) = i_{2np} + i_{2\epsilon}$.

Знайдемо примусову складову. Оскільки в післякомутаційний період

$$i_{3np} = 0, \text{ то } i_{1np} = i_{2np} = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Вигляд вільної складової можна буде записати лише після визначення коренів характеристичного рівняння, яке ми запишемо за методом вхідно-

$$\text{го опору } Z(p) = r_1 + \frac{(r_2 + pL) \cdot \frac{1}{pC}}{r_2 + pL + \frac{1}{pC}} = 0.$$

Реалізуємо ці вирази в MathCAD.

$$U := 200 \quad L := 0.1 \quad C := 50 \cdot 10^{-6} \quad r1 := 200 \quad r2 := 50$$

$$i2pr := \frac{U}{r1 + r2} \quad i2pr = 0.8$$

$$r1 + \frac{(r2 + p \cdot L) \cdot \frac{1}{p \cdot C}}{r2 + p \cdot L + \frac{1}{p \cdot C}} \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} -300. - 400. i \\ -300. + 400. i \end{pmatrix}$$

$$p1 := -300. - 400. \cdot i \quad p2 := -300. + 400. \cdot i$$

Оскільки коренями характеристичного рівняння є два спряжених комплексних числа, то вільна складова $i_{2e} = e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t)$, де $\delta = 300$, $\omega_0 = 400$.

Повний розв'язок

$$i_2(t) = \frac{U}{r_1 + r_2} + e^{-\delta t}(A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t). \quad (4.14)$$

Для визначення сталих інтегрування A_1 , A_2 знайдемо незалежні початкові умови.

Значення $i_2(0_-)$ і $u_C(0_-)$ можна знайти, якщо розрахувати коло до комутації. Оскільки прикладена до кола напруга постійна, то в колі до комутації (при замкненому ключі) текли постійні струми. Струм у вітці з ємністю не протікав. Також не протікав струм і через опір R_2 , оскільки він закорочений ключем, тому $i_2(0_+) = i_2(0_-) = \frac{U}{r_1}$.

Напруга на ємності при замкненому ключі дорівнює напрузі на індуктивності (паралельно з'єднані вітки). Оскільки опір індуктивності при постійному струмі дорівнює нулю, то і напруга на індуктивності дорівнює нулю, і, відповідно, $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$.

Сталі інтегрування можна визначити, розв'язавши систему рівнянь (за умови $t = 0$): $i_2(0_+) = i_2(t)|_{t=0}$, $L \frac{di_2(t)}{dt} /_{t=0} + r_2 i_2(t) /_{t=0} = u_C(0_+)$.

Виконаємо ці процедури в MathCAD, використавши для розв'язання системи рівнянь блок «**Given-Find**» і одну з процедур символьних перетворень «**simplify**». Разом з нею доцільно застосовувати процедуру «**float**», яка дасть можливість задати кількість цифр після десяткової точки.

$$\begin{aligned} i20 &:= \frac{U}{r1} & UC0 &:= 0 & \delta &:= \text{Re}(p2) & \omega &:= \text{Im}(p2) \\ iv(t, A1, A2) &:= e^{\delta \cdot t} \cdot (A1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + A2 \cdot \cos(\omega \cdot t)) & t &:= 0 \\ \text{Given} \\ i2pr + iv(t, A1, A2) &= i20 \\ (i2pr + iv(t, A1, A2)) \cdot r2 + L \cdot \frac{d}{dt}(iv(t, A1, A2)) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Find}(A1, A2) \text{ simplify float, 3} \rightarrow \begin{pmatrix} -1.10 \\ .200 \end{pmatrix}$$

$$A1 := -1.1 \quad A2 := 0.2$$

$$i2(t) := i2pr + e^{\delta \cdot t} \cdot (A1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + A2 \cdot \cos(\omega \cdot t))$$

$$i2(t) \text{ simplify float, 3} \rightarrow .800 - 1.10 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) + .200 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t)$$

Знайдемо струми $i_1(t)$, $i_3(t)$ та напруги $u_L(t)$, $u_C(t)$. Напруги визначаються як: $u_L(t) = L \frac{di_2(t)}{dt}$, $u_C(t) = u_L(t) + r_2 i_2(t)$. Струм в конденсаторній вітці: $i_3(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$. Вхідний струм: $i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$.

В MathCAD це виглядатиме так.

$$uL(t) := \left(L \cdot \frac{d}{dt} i2(t) \right) \quad uC(t) := uL(t) + i2(t) \cdot r2 \quad i3(t) := C \cdot \frac{d}{dt} uC(t) \quad i1(t) := i2(t) + i3(t)$$

$$uL(t) \text{ simplify float, 3} \rightarrow 25 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) - 50 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t)$$

$$uC(t) \text{ simplify float, 3} \rightarrow -30 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) - 40 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) + 40$$

$$i1(t) \text{ simplify float, 3} \rightarrow .800 + .150 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) + .200 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t)$$

$$i3(t) \text{ simplify float, 3} \rightarrow 1.25 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t)$$

Побудуємо графіки знайдених параметрів (рис. 4.3–4.7), для чого визначимо докомутаційні значення параметрів $u_L(t)$, $i_1(t)$, $i_3(t)$

$$u_L(0_-) = 0, \quad i_1(0_-) = i_2(0_-), \quad i_3(0_-) = 0.$$

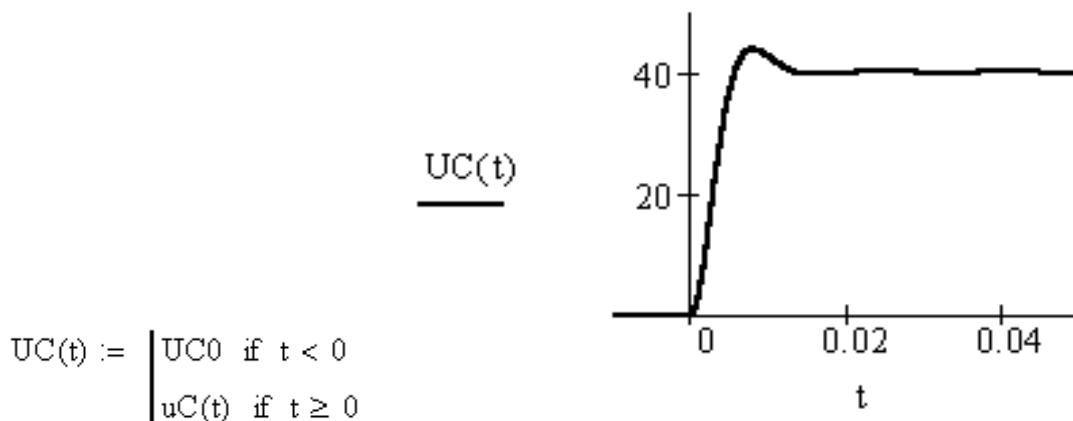


Рисунок 4.3

$$i_{10} := i_{20}$$

$$I_1(t) := \begin{cases} i_{10} & \text{if } t < 0 \\ i_1(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

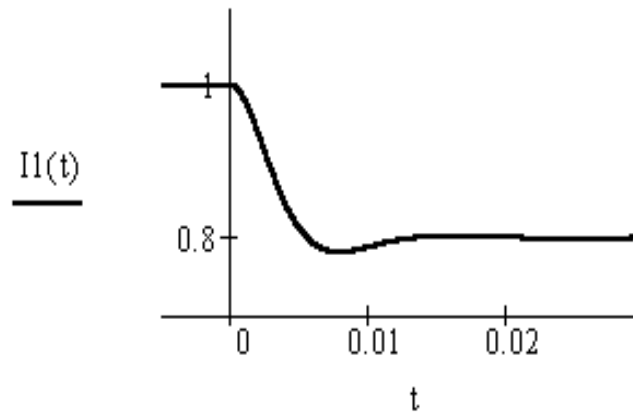


Рисунок 4.4

$$I_2(t) := \begin{cases} i_{20} & \text{if } t < 0 \\ i_2(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

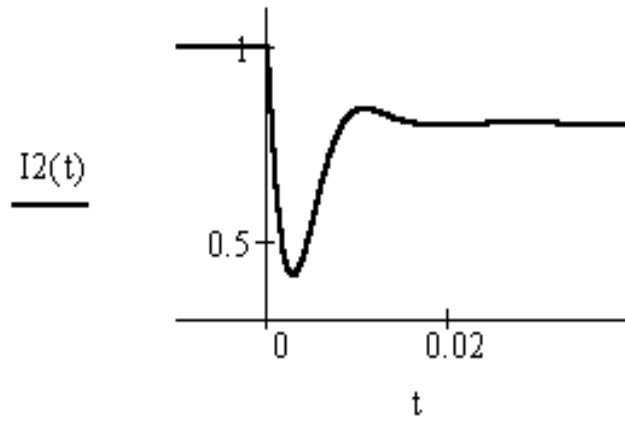


Рисунок 4.5

$$i_{30} := 0$$

$$I_3(t) := \begin{cases} i_{30} & \text{if } t < 0 \\ i_3(t) & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

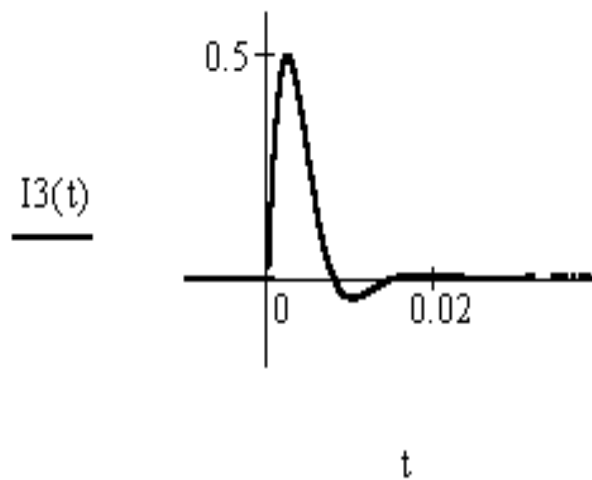


Рисунок 4.6

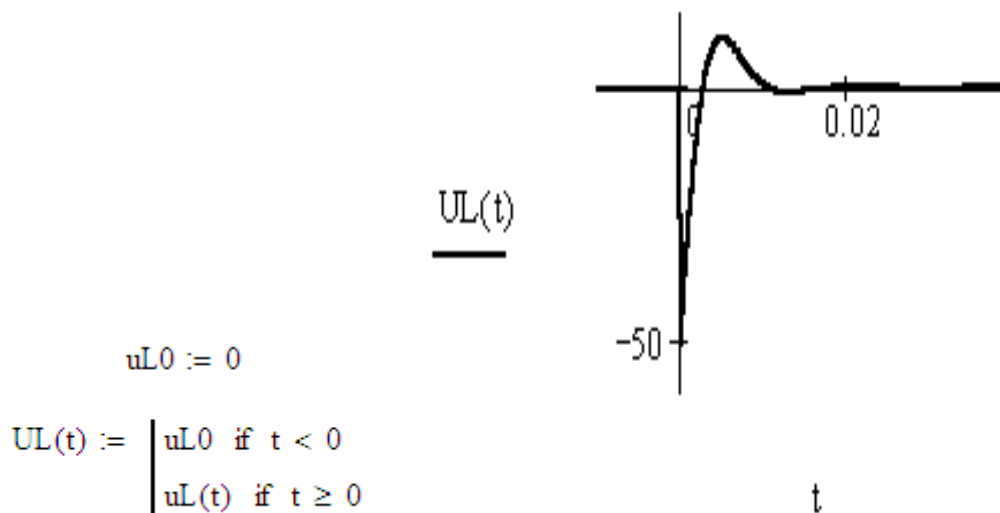


Рисунок 4.7

Контрольні питання

1. Чи може корінь характеристичного рівняння бути додатним?
2. Чи може дійсна частина комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння бути додатною?
3. Які існують три типи перехідного процесу другого порядку?
4. Якими є корені характеристичного рівняння при аперіодичному перехідному процесі другого порядку?
5. Якими є корені характеристичного рівняння при критичному перехідному процесі другого порядку?
6. Якими є корені характеристичного рівняння при коливальному перехідному процесі другого порядку?
7. Чи може коло другого порядку мати два однакових комплексних корені характеристичного рівняння?
8. Чи може коло другого порядку мати один комплексний та один дійсний корені характеристичного рівняння?
9. У якому місці потрібно розірвати електричне коло, щоб застосувати метод вхідного опору для складання характеристичного рівняння?
10. Як знаходиться фактична тривалість перехідного процесу при перехідному процесі другого порядку аперіодичного типу?

ЛЕКЦІЯ № 5
КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ
У ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ
З СИНУСОЇДНОЮ НАПРУГОЮ ЖИВЛЕННЯ

5.1 Вмикання кола R, L до джерела синусоїдної напруги

Розглянемо коло, схема якого зображена на рис. 5.1, коли прикладена напруга змінюється за синусоїдним законом

$$u = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (5.1)$$

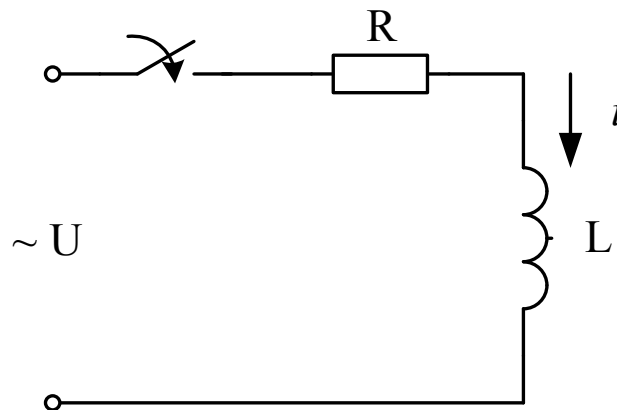


Рисунок 5.1

Складаючи рівняння за другим законом Кірхгофа, одержуємо

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \beta). \quad (5.2)$$

Повний розв'язок рівняння

$$i = i_{\text{пр}} + i_{\text{в}}.$$

Примусова складова струму знаходиться з розрахунку нового усталеного режиму, тому ця складова може бути розрахована комплексним методом і змінюється за синусоїдним законом

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi),$$

де амплітуда струму

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

а

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Вільна складова, яка є розв'язком однорідного диференціального рівняння, має такий же вигляд, як і при підключенні кола R, L до джерела постійної напруги, тобто

$$i_B = Ae^{pt}.$$

Характеристичне рівняння $Lp + R = 0$, а його корінь $p = -R/L$. Таким чином повний розв'язок

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) + Ae^{pt}. \quad (5.3)$$

Постійну інтегрування A знаходимо, використовуючи початкові умови, тому що в розглядуваному колі початкові умови нульові (струму в колі до комутації не було), то при $t = 0$

$$i(0_+) = i(0_-) = 0.$$

Підставимо $t = 0$ і $i(0) = 0$ в (5.3), держимо

$$0 = I_m \sin(\beta - \varphi) + A.$$

Звідси

$$A = -I_m \sin(\beta - \varphi), \quad (5.4)$$

і

$$i = I_m \sin(\omega t + \beta - \varphi) - [I_m \sin(\beta - \varphi)] e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (5.5)$$

Побудуємо графік зміни струму в колі (рис. 5.2), коли постійна часу кола значно більша періоду синусоїдної функції $\tau \gg T$.

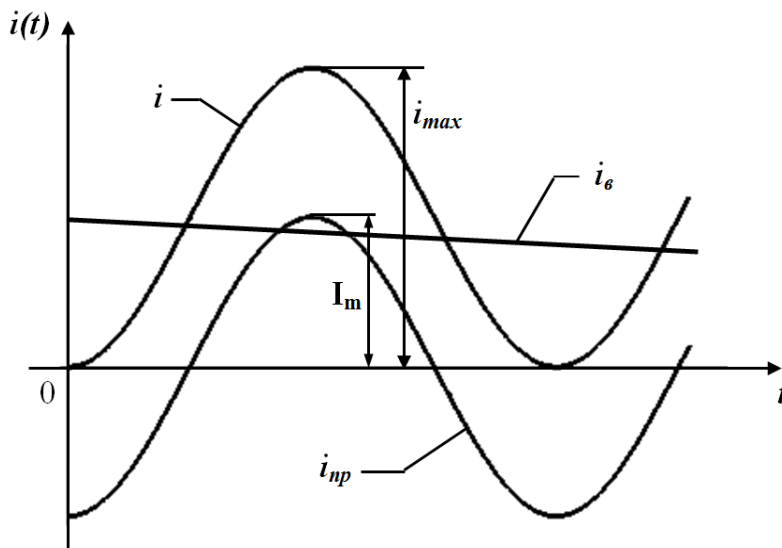


Рисунок 5.2

Примусова складова є синусоїдною функцією. Припустимо, що ключ замикається в момент, коли примусова складова приймає максимальне від'ємне значення ($\beta - \varphi = -\pi/2$).

$$i_{np}(0_+) = -I_m.$$

В цьому випадку вільна складова при $t = 0$

$$i_e(0_+) = -i_{np}(0_+) = I_m,$$

оскільки повний струм при $t=0$ $i(0_+)=0$. Максимальне значення струму перехідного процесу i_{max} перевищує амплітуду усталеного значення струму майже в два рази (рис. 5.2), тоді як при підключенні такого кола до джерела постійної напруги струм перехідного процесу не перевищує усталеного значення.

При зміні моменту вмикання змінюються значення $i_{np}(0_+)$ і $i_e(0_+)$, що змінює і характер перехідного процесу.

Нехай, наприклад, коло вмикається в момент, коли $\beta - \varphi \ll 90^\circ$, як це показано на рис. 5.3.

В цьому випадку $i_e(0_+) = -i_{np}(0_+)$ приймають значення, близькі до нуля, і струм i перехідного процесу мало відрізняється від усталеного значення. Якщо ключ замикається в момент часу, коли примусова складова струму проходить через нуль ($\beta - \varphi = 0$), то вільна складова дорівнює нулю, і в колі зразу ж встановлюється новий усталений режим.

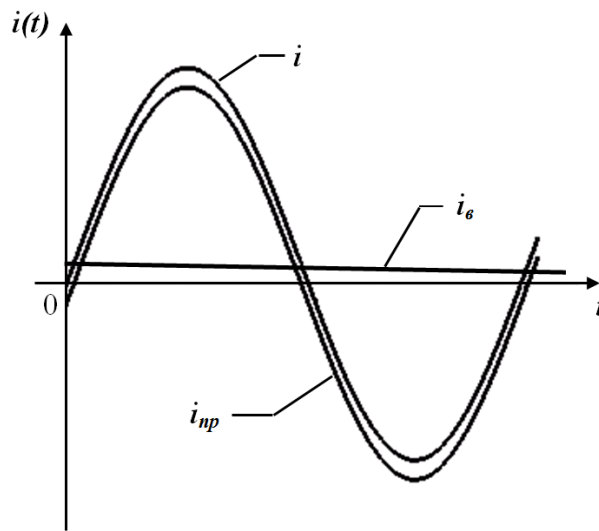


Рисунок 5.3

Таким чином, при вмиканні кола R, L до джерела синусоїдної напруги струм перехідного процесу може перевищувати амплітуду струму усталеного режиму, а характер перехідного процесу залежить від моменту вмикання.

5.2 Аналіз перехідного процесу у розгалуженому кола при синусоїдній напрузі живлення

Знайдемо перехідну напругу на обкладинках конденсатора після вимикання вимикача S в колі, зображеному на рис. 5.4, якщо $u=200\sin(1000t+\psi_u)$ В, $R=50$ Ом, $L=0,05$ Гн, $C=20$ мкФ і при $t=0$ напруга, зростаючи, досягає позитивної величини, що дорівнює її діючому значенню.

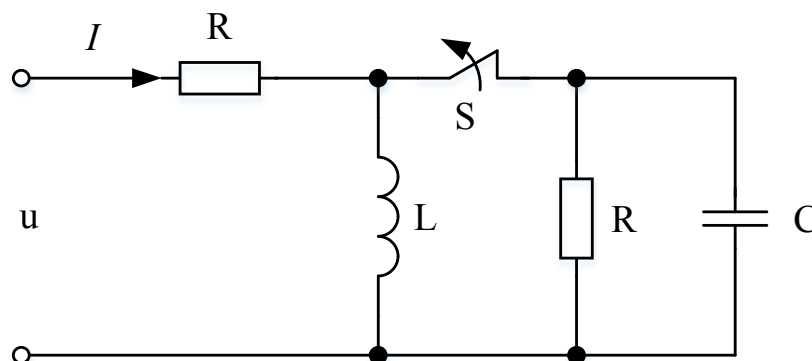


Рисунок 5.4

Попередньо знаходимо початкову фазу прикладеної напруги u з умови

$$u(0) = 200 \sin(\psi_u) = \frac{200}{\sqrt{2}}$$

$$\psi_u = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ, \text{ або } 135^\circ.$$

В нашому випадку $\psi_u=45^\circ$, оскільки комутація виконується в той момент, коли напруга зростає на ділянці позитивних значень.

Таким чином

$$u = 200 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ В.}$$

Знаходимо напругу на конденсаторі в колі до комутації

$$\underline{X}_L = j\omega L = j1000 \cdot 0,05 = j50 \text{ Ом},$$

$$\underline{X}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{10^6}{10^3 \cdot 20} = -j50 \text{ Ом},$$

$$\underline{U}_C = \underline{U} - R\underline{I} = \underline{U} - R \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{екв}},$$

де

$$\underline{Z}_{екв} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{X}_L} + \frac{1}{\underline{X}_C}} = 50 + \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{j50} - \frac{1}{j50}} = 100 \text{ Ом}.$$

В показниковій формі

$$\underline{U}_C = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{j45} - 50 \frac{\frac{200}{\sqrt{2}} e^{j45}}{100} = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45}.$$

Переходячи до миттєвої форми, отримаємо напругу на конденсаторі до комутації

$$u_c = 100 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ В.}$$

Визначимо незалежні початкові умови

$$u_c(0) = 100 \sin(45^\circ) = 50\sqrt{2} \text{ В.}$$

Складемо рівняння перехідного процесу за другим законом Кірхгофа для контуру R, C відносно u_c

$$\begin{cases} iR + u_c = 0, \\ i = C \frac{du_c}{dt}, \end{cases}$$

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0.$$

На основі отриманого диференціального рівняння отримаємо та розв'яжемо характеристичне рівняння

$$RCp + 1 = 0,$$

$$p = -\frac{1}{RC}.$$

Враховуючи структуру кола після комутації запишемо примусове значення напруги на ємності

$$u_{cnp} = 0.$$

Запишемо вільну складову напруги на ємності

$$u_{cв}(t) = Ae^{\frac{-1}{RC}t} = Ae^{\frac{-10^6}{50 \cdot 20}t} = Ae^{-1000t}.$$

Запишемо математичний вираз повної напруги на ємності

$$u_c(t) = u_{cв}(t) + u_{cnp}(t) = Ae^{-1000t}$$

При $t=0$

$$u_c(0) = A = 50\sqrt{2} \text{ В.}$$

Тому

$$u_c(t) = 50\sqrt{2} \cdot e^{-1000t}.$$

Контрольні питання

1. Чи відрізняються корені характеристичного рівняння у колах постійного та змінного струмів?
2. Чи виконуються закони комутації у колах змінного струму?
3. Чи може дійсна частина комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння у колах змінного струму бути додатною?
4. Як знаходяться нульові початкові умови у колах змінного струму?
5. У яких випадках у колі змінного струму величина, для якої виконується закон комутації, матиме нульове значення? Як це пов'язано з моментом здійснення комутації?
6. Якою буде примусова складова напруги та струму у колах змінного струму?

ЛЕКЦІЯ № 6 ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА. ОПЕРАТОРНІ СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

6.1 Суть та деякі властивості перетворення Лапласа

В попередніх лекціях було показано, що розрахунок перехідних процесів класичним методом зводиться до розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

Основою операторного методу є те, що диференціальні рівняння в області дійсної змінної t перетворюються в алгебраїчні рівняння в області комплексної змінної $s = \sigma + j\omega$, ($\sigma > 0$).

Такий перехід здійснюється за допомогою перетворення Лапласа, яке має вигляд

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (6.1)$$

Перетворення Лапласа однозначно переводить функцію дійсної змінної $f(t)$, яку називають оригіналом, в функцію комплексної змінної $F(s)$, яку називають зображенням $f(t)$. Таке перетворення умовно записують в формі $F(s) \doteq f(t)$ або $f(t) \doteq F(s)$.

Часто використовують і другу умовну форму запису $F(s) = L[f(t)]$ і $f(t) = L^{-1}[F(s)]$.

Перетворенню Лапласа властива єдиність, яка доводиться в курсі математики і яка може бути сформульована таким чином: якщо функція $f(t)$ має перетворення Лапласа $F(s)$, то це перетворення єдине; з іншого боку, якщо задана функція $F(s)$ і знайдена функція $f(t)$, яка задовольняє перетворення (6.1), то функція $f(t)$ єдина.

Функція $f(t)$ має зображення, якщо вона задовольняє умови Діріхле (має кінцеве число розривів першого роду і кінцеве число мінімумів і максимумів), при $t < 0$ тотожна нулю і є функцією обмеженого зростання, тобто

$$|f(t)| < Ae^{at}, \quad (6.2)$$

де A і a – постійні додатні величини, причому $a > \sigma$.

Відмітимо, що функції, які описують можливі реальні зовнішні дії на електричні кола, струми і напруги, які при цьому виникають, завжди задовольняють вказані умови і можуть бути перетворені за Лапласом.

Припустимо, що оригінал $f(t)$ має зображення $F(s)$, знайдемо зображення функції

$$f_1(t) = Cf(t), \quad (6.3)$$

де C – постійна величина.

Підставимо (6.3) в (6.1), тоді

$$f_1(t) \doteq F_1(s) = \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Cf(t)e^{-st} dt = C \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = CF(s). \quad (6.4)$$

Таким чином, зображення функції $f(t)$, помножене на постійну величину (6.3), дорівнює постійній величині, помноженій на зображення цієї функції (6.4).

Нехай є декілька функцій $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$, які мають, відповідно, зображення $F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)$. Знайдемо зображення суми цих функцій

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t). \quad (6.5)$$

Використовуючи (6.1), одержуємо

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} (f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t))e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt + \\ &+ \int_0^{\infty} f_2(t)e^{-st} dt + \dots + \int_0^{\infty} f_n(t)e^{-st} dt = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_n(s). \end{aligned} \quad (6.6)$$

тобто, зображення суми функцій дорівнює сумі зображень цих окремих функцій.

Така властивість перетворення Лапласа, коли виконуються умови (6.4) і (6.6), називається властивістю лінійності.

Знайдемо зображення деяких функцій, які широко використовуються в теорії кіл.

Нехай $f(t) = A$, де A є сталою величиною. Знайдемо зображення цієї функції, використовуючи (6.1).

$$F(s) = A \int_0^{\infty} e^{-st} dt = A \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{A}{s}, \quad (6.7)$$

тобто

$$A \doteq \frac{A}{s}.$$

Якщо $f(t) = e^{-\alpha t}$, (α може бути дійсним або комплексним числом), то

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{-(\alpha+s)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}.$$

Таким чином,

$$e^{-\alpha t} \doteq \frac{1}{s+\alpha}. \quad (6.8)$$

Якщо $f(t) = e^{\alpha t}$, то, змінивши знак перед α в (6.8), одержуємо

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{s-\alpha}. \quad (6.9)$$

Використаємо вираз (6.9) для знаходження зображення синусоїдної і косинусоїдної функцій, прийнявши $\alpha = j\omega$.

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t). \quad (6.10)$$

Зображення $e^{j\omega t}$

$$\frac{1}{s-j\omega} = \frac{s+j\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + j \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \quad (6.11)$$

Порівнюючи (6.10) і (6.11), одержуємо

$$\cos(\omega t) \doteq \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad (6.12)$$

$$\sin(\omega t) \doteq \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \quad (6.13)$$

Нехай функція $f(t)$ має зображення $F(s)$. Знайдемо зображення похідної цієї функції.

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Візьмемо інтеграл частинами. Як відомо

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Позначимо $u = e^{-st}$, $v = f(t)$, тоді $du = (-s)e^{-st} dt$ і підставимо одержані значення

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)e^{-st} dt = \frac{f(t)}{e^{st}}\Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

Згідно з умовою (6.2) функція $f(t)$ зростає не швидше ніж функція e^{st} , тому при підстановці верхньої межі в першу складову, вона перетворюється на нуль, а при підстановці нижньої межі перша складова перетворюється в $f(0)$, тобто, в значення функції $f(t)$ при $t = 0$. Інтеграл в другій складовій, відповідно до (6.1), є зображенням функції $f(t)$, тобто $F(s)$. Таким чином

$$\frac{df(t)}{dt} \doteq sF(s) - f(0). \quad (6.14)$$

Знайдемо зображення інтеграла від попередньої функції $f(t)$. Позначимо

$$\phi(t) = \int f(t) dt = \int_0^t f(t) dt + \phi(0). \quad (6.15)$$

де $\phi(0)$ є значення функції $\phi(t)$ при $t = 0$.

Враховуючи (6.15) і властивість лінійності, запишемо

$$L\left[\int f(t) dt\right] = L\left[\int_0^t f(t) dt\right] + L[\phi(0)]. \quad (6.16)$$

Оскільки

$$\left[\int_0^t f(t) dt\right]' = f(t),$$

то

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right]' = L[f(t)] = F(s) \quad (6.17)$$

і, відповідно до (6.14),

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right]' = sL\left[\int_0^t f(t) dt\right] - \int_0^0 f(t) dt \quad (6.18)$$

Оскільки останній інтеграл дорівнює нулю, то, з врахуванням (6.17),

$$F(s) = sL\left[\int_0^t f(t) dt\right],$$

і

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}. \quad (6.19)$$

У виразі (6.16) $\phi(0)$ – постійна величина, тому, згідно з (6.7), і

$$L[\phi(0)] = \frac{\phi(0)}{s}.$$

Таким чином

$$\phi(t) = \int f(t) dt \doteq \frac{F(s)}{s} + \frac{\phi(0)}{s}. \quad (6.20)$$

Вирази (6.14) і (6.20) показують, що операціям диференціювання та інтегрування функцій дійсної змінної t відповідають алгебраїчні операції множення і ділення зображень цих функцій на комплексну змінну s (за нульових початкових умов). Якщо початкові умови не нульові, їх враховують так, як показано в (6.14) і (6.20). Це означає, що диференціальним рівнянням оригіналів відповідають алгебраїчні рівняння зображень.

Відмітимо ще деякі теореми, які відомі з курсу математики.

Теорема про запізнення. Якщо $f(t) \doteq F(s)$, то

$$f(t - t_0) \doteq e^{-st_0} F(s). \quad (6.21)$$

Теорема зсуву. Якщо $f(t) \doteq F(s)$, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \doteq F(s + \alpha). \quad (6.22)$$

6.2 Операторні зображення електротехнічних параметрів

Вхідна напруга кола $u(t)$ або діюча в ньому е.р.с. $e(t)$ зображуються в операторному вигляді як $U(s)$ або $E(s)$.

Для кіл постійного струму можна записати

$$U(s) = \frac{U}{s}, \quad E(s) = \frac{E}{s}. \quad (6.23)$$

Для кіл синусоїдного струму

$$u(t) = U_m \sin(\omega t) \rightarrow U(s) = \frac{U_m \omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (6.24)$$

Розглянемо операторні зображення пасивних елементів і закон Ома в операторному вигляді для них.

Резистор

Операторне зображення резистора показано на рис. 6.1.

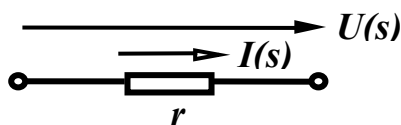


Рисунок 6.1

Закон Ома в операторному вигляді

$$U_r(s) = I(s)r. \quad (6.25)$$

Індуктивність

Операторне зображення індуктивності (рис. 6.2) окрім операторного опору може містити в собі і тимчасову додаткову е.р.с, яка є наслідком накопиченої в елементі енергії магнітного поля (якщо, звичайно, через індуктивність до комутації протікав струм). Напрямок цієї е.р.с. збігається з напрямком струму в індуктивності до комутації.

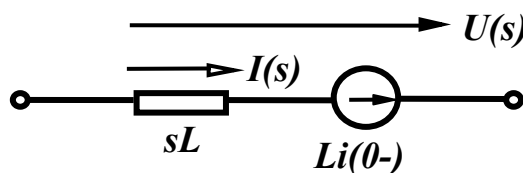


Рисунок 6.2

Закон Ома в операторному вигляді

$$U_L(s) = I(s)sL - Li(0-). \quad (6.26)$$

Ємність

Операторне зображення ємності (рис. 6.3) окрім операторного опору може містити в собі і тимчасову додаткову е.р.с, яка є наслідком накопиченої в елементі енергії електричного поля (якщо, звичайно, напруга на ємності до комутації не дорівнювала нулю). Напрямок цієї е.р.с. протилежний напрямку струму.

Закон Ома в операторному вигляді

$$U_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{u_C(0-)}{s}. \quad (6.27)$$

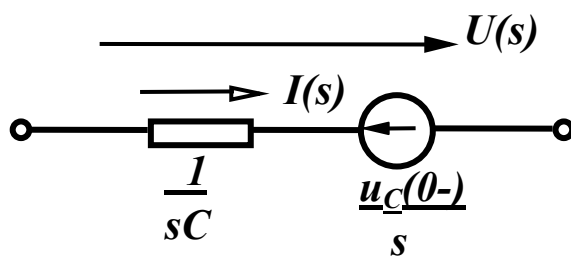


Рисунок 6.3

6.3 Операторні схеми

Операторні схеми – це такі схеми, в вітках яких діють зображення джерел енергії, містяться операторні елементи і протікають зображення струмів.

При складанні операторної схеми треба враховувати такі правила.

1. Операторна схема складається для післякомутаційного стану, тому в операторній схемі не показується ключ і вилючаються елементи, в яких *одразу після комутації* перестає протікати струм. Можуть існувати кола, для яких операторні схеми складаються з окремих, не пов'язаних між собою, частин.

2. Додаткові тимчасові е.р.с. в реактивних елементах доцільно показувати на операторних схемах лише у випадку ненульових початкових умов.

Розглянемо приклад.

Розглянемо ще один приклад (рис. 6.4).

Операторна схема, яка відповідає заданій, зображена на рис. 6.4, б. Визначимо початкові значення $i_3(0)$ і $u_C(0)$ та, відповідно, додаткові е.р.с.

У колі до комутації протікали постійні струми I_1, I_2, I_3 , в вітці з розімкнутим ключем і в вітці, яка містить послідовно з'єднані елементи C і R_4 , струми не протікали, тому

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Отже,

$$i_3(0_+) = i_3(0_-) = i_3(0) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$$

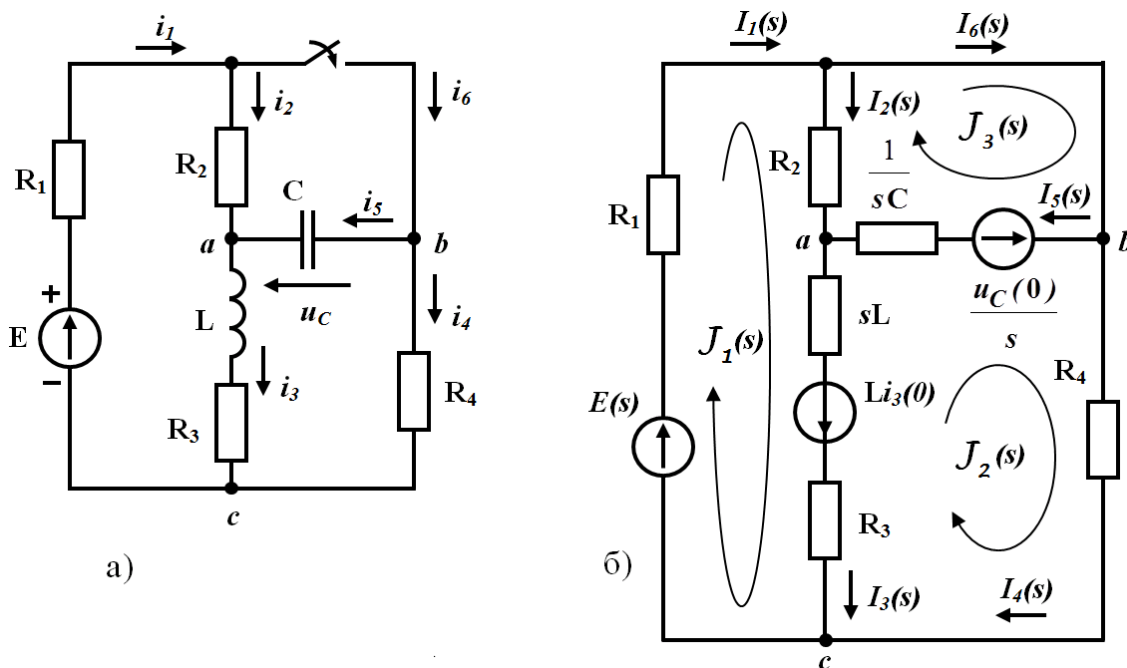


Рисунок 6.4

Напруга на ємності до комутації дорівнює напрузі між точками a і b , а оскільки при відсутності струму через опір R_4 , потенціал точки b дорівнює потенціалу точки c , то

$$U_{ab} = U_{ac} = I_3 R_3 = \frac{E R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Перехідна напруга u_C при вибраних напрямках струмів після комутації направлена назустріч напрузі U_{ab} , тому

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0) = -U_{ab} = \frac{E R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Складемо для знаходження зображень струмів систему рівнянь за методом контурних струмів. В схемі три незалежних контури і при вибраних напрямках контурних струмів одержуємо

$$\begin{aligned} J_1(s)(R_1 + R_2 + sL + R_3) - J_2(s)(sL + R_3) - J_3(s)R_2 &= \frac{E}{s} + Li_3(0), \\ - J_1(s)(sL + R_3) - J_2(s)(R_3 + sL + \frac{1}{sC} + R_4) - J_3(s) \frac{1}{sC} &= - Li_3(0) + \frac{u_c(0)}{s}, \\ - J_1(s)R_2 - J_2(s) \frac{1}{sC} + J_3(s) (R_2 + \frac{1}{sC}) &= - \frac{u_c(0)}{s}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему, можна знайти зображення контурних струмів, зображення струмів в вітках визначаються через зображення контурних струмів

$$\begin{aligned} I_1(s) &= J_1(s), & I_2(s) &= J_1(s) - J_3(s), & I_3(s) &= J_1(s) - J_2(s), \\ I_4(s) &= J_2(s), & I_5(s) &= - J_2(s) + J_3(s), & I_6 &= J_3(s). \end{aligned}$$

Контрольні питання

1. Що таке перетворення Лапласа? Як воно реалізується?
2. Як Ви розумієте «єдність» перетворення Лапласа?
3. Які основні властивості перетворення Лапласа?
4. Що таке зображення функції?
5. Що є операторним еквівалентом джерела е.р.с.?
6. Що є операторним еквівалентом резистивного елемента?
7. Що є операторним еквівалентом індуктивності?
8. Що є операторним еквівалентом ємності?
9. Що є причиною можливої появи в операторній схемі додаткової е.р.с. індуктивності?
10. Що є причиною можливої появи в операторній схемі додаткової е.р.с. ємності?

ЛЕКЦІЯ № 7 ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

7.1 Закони Кірхгофа в операторній формі

Операторна форма запису першого закону Кірхгофа виглядає як

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = 0. \quad (7.1)$$

Перед записом другого закону Кірхгофа введемо поняття повного операторного опору ділянки кола rLC

$$Z(s) = r + sL + \frac{1}{sC}. \quad (7.2)$$

Тоді другий закон Кірхгофа запишеться як

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) Z_k(s) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(s) + L_k i_{Lk}(0-) - \frac{u_{Ck}(0-)}{s} \right]. \quad (7.3)$$

Розглянемо приклад.

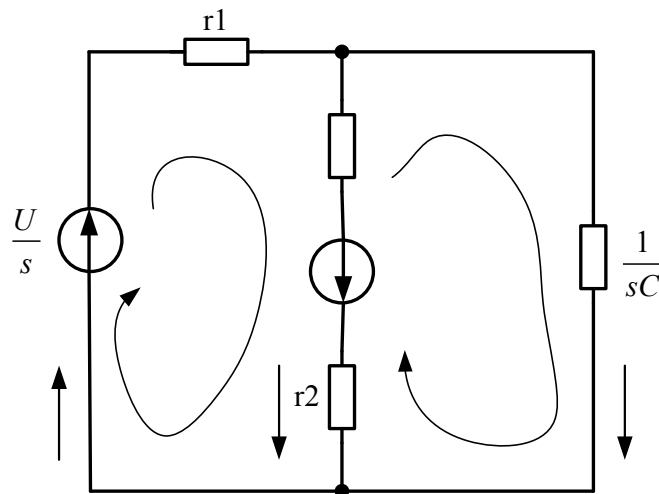


Рисунок 7.1

Складемо систему рівнянь за законами Кірхгофа в операторному вигляді для схеми (рис. 7.1). Прийнемо напрямок обходу контурів за годинниковою стрілкою.

$$I_1(s) - I_2(s) - I_3(s) = 0,$$

$$I_1(s)r_1 + I_3(s)\frac{1}{sC} = \frac{U}{s}, \quad (7.4)$$

$$I_1(s)r_1 + I_2(s)(r_2 + sL) = \frac{U}{s} + Li_2(0).$$

7.2 Перехід від зображення до оригіналу

Одержані операторні значення шуканих параметрів потрібно записати у вигляді функцій часу, тобто знайти оригінал одержаних зображень. Існують різні шляхи знаходження оригіналів. В теорії кіл, зазвичай, використовують теорему розкладання.

Теорема розкладання використовується в тих випадках, коли зображення деякої функції $F(s)$ записано у вигляді відношення двох правильних поліномів

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}, \quad (7.5)$$

при цьому $m < n$.

Як правило, зображення величин, які визначаються при розрахунку перехідних процесів в лінійних колах, задовольняють цю умову.

Далі перехід до оригіналу здійснюється за таким алгоритмом:

1. Визначаються корені рівняння $Q(s) = 0$. Максимально можлива кількість коренів на одиницю більша за кількість реактивних елементів в колі.
2. Знаходиться перша похідна знаменника $Q'(s)$.
3. Оригінал функції $F(s)$ визначається за формулою

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}, \quad (7.6)$$

де s_k – корінь знаменника;

$P(s_k)$ – значення чисельника функції $F(s)$ при $s = s_k$;

$Q'(s_k)$ – значення похідної знаменника функції $F(s)$ при $s = s_k$;

n – кількість коренів знаменника.

Розглянемо приклад.

Нехай зображення деякої функції має вигляд

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^2 + 4s + 8}{s(s^2 + 6s + 8)}.$$

Знайти оригінал цієї функції.

Знаходимо корені знаменника

$$s(s^2 + 6s + 8) = 0 \Rightarrow s_1 = 0, s_2 = -2, s_3 = -4.$$

Визначаємо значення чисельника для $s = s_k$

$$P(s_1) = 8; P(s_2) = 4 - 8 + 8 = 4; P(s_3) = 16 - 16 + 8 = 8.$$

Знаходимо похідну знаменника $Q'(s) = s^2 + 6s + 8 + s(2s + 6)$ і її значення для $s = s_k$: $Q'(s_1) = 8$; $Q'(s_2) = -4$; $Q'(s_3) = 8$.

Підставляємо одержані значення в (7.6)

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^3 \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t} = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{P(s_2)}{Q'(s_2)} e^{s_2 t} + \frac{P(s_3)}{Q'(s_3)} e^{s_3 t} = \\ &= \frac{8}{8} e^{0t} + \frac{4}{-4} e^{-2t} + \frac{8}{8} e^{-4t} = 1 - e^{-2t} + e^{-4t}. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер розрахунок переходного процесу в колі (див. рис. 7.1) операторним методом. Операторна система рівнянь записана вище (7.4).

Розв'яжемо цю систему рівнянь в середовищі MathCAD, застосувавши процедурний блок «**Given-Find**» разом з функцією символічних перетворень « \leftrightarrow ».

$$U := 200 \quad L := 0.1 \quad C := 50 \cdot 10^{-6} \quad r1 := 200 \quad r2 := 50 \quad i20 := \frac{U}{r1}$$

Given

$$I1 - I2 - I3 = 0 \quad I1 \cdot r1 + I3 \cdot \frac{1}{s \cdot C} = \frac{U}{s} \quad I1 \cdot r1 + I2 \cdot (r2 + s \cdot L) = \frac{U}{s} + L \cdot i20$$

$$\text{Find}(I1, I2, I3) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(600 \cdot s + s^2 + 200000.)}{s \cdot (250000. + 600 \cdot s + s^2)} \\ \frac{(s^2 + 100 \cdot s + 200000.)}{s \cdot (250000. + 600 \cdot s + s^2)} \\ \frac{500.}{(250000. + 600 \cdot s + s^2)} \end{bmatrix}$$

$$I1(s) := \frac{(600 \cdot s + s^2 + 200000.)}{s \cdot (250000. + 600 \cdot s + s^2)} \quad I2(s) := \frac{(s^2 + 100 \cdot s + 200000.)}{s \cdot (250000. + 600 \cdot s + s^2)}$$

$$I3(s) := \frac{500.}{(250000. + 600 \cdot s + s^2)}$$

Таким чином, ми отримали операторні зображення струмів $I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$. Операторні зображення напруг на індуктивності та ємності знайдемо за формулами

$$u_L(s) = I_2(s)sL - Li_2(0), \quad u_C(s) = u_L(s) + I_2(s)r_2.$$

Повернутися до оригіналів, тобто знайти функції $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_C(t)$, $u_L(t)$ в Mathcad можна зробити за допомогою процедури оберненого перетворення Лапласа «*invlaplace*», наприклад,

$$\begin{aligned} UL(s) &:= I2(s) \cdot s \cdot L - L \cdot i20 & UC(s) &:= UL(s) + I2(s) \cdot r2 \\ i3(t) &:= I3(s) \text{ invlaplace, } s \text{ float, } 3 \rightarrow 1.25 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) \\ i1(t) &:= I1(s) \text{ invlaplace, } s \text{ float, } 3 \rightarrow .800 + \\ &+ .200 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) + .150 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) \\ i2(t) &:= I2(s) \text{ invlaplace, } s \text{ float, } 3 \rightarrow .800 + \\ &+ .200 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) - 1.10 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) \\ uL(t) &:= UL(s) \text{ invlaplace, } s \rightarrow \\ &-50 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) + 25 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) \\ uC(t) &:= UC(s) \text{ invlaplace, } s \rightarrow \\ &-40 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \cos(400 \cdot t) - 30 \cdot \exp(-300 \cdot t) \cdot \sin(400 \cdot t) + 40. \end{aligned}$$

Контрольні питання

1. Чи можуть поліноми $P(s)$ або $Q(s)$ містити складову s^{-k} ?
2. Чи потрібно в операторному методі розрахунку визначати примусові складові параметрів?
3. У чому полягає положення теореми розкладання?
4. Чи можуть поліноми, що використовуються у теоремі розкладання, мати від'ємний показник степеня?
5. Чи потрібно в операторному методі розрахунку визначати незалежні початкові умови?
6. Чи потрібно в операторному методі розрахунку визначати залежні початкові умови?

ЛЕКЦІЯ № 8 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СИГНАЛІВ

8.1 Одинична функція і перехідна характеристика кола

Одинична східчаста функція (рис. 8.1,а), яка називається функцією Хевісайда, визначається так:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 ; \\ 1, & t > 0 . \end{cases} \quad (8.1)$$

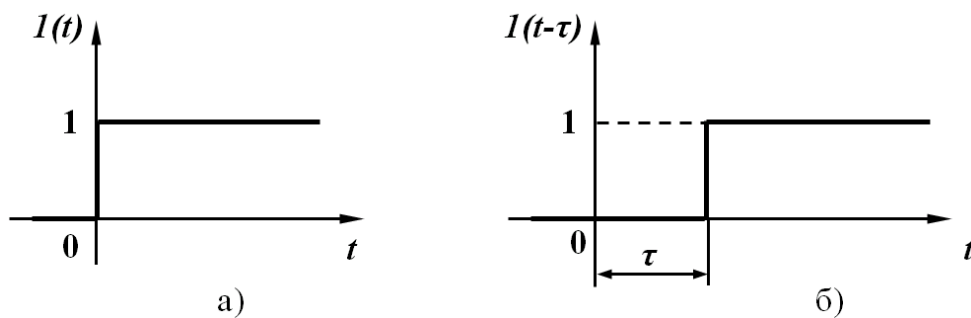


Рисунок 8.1

З допомогою одиничної функції діяння будь-якої напруги на коло може бути описано з допомогою добутку

$$f(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 ; \\ f(t), & t > 0 . \end{cases}$$

Якщо коло в момент $t = 0$ вмикається на постійну напругу U_0 , то це можна описати добутком

$$U_0 \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 ; \\ U_0, & t > 0 . \end{cases}$$

Цей вираз вказує на те, що напруга зростає від нуля до U_0 стрибком в момент вмикання ($t = 0$), далі діє безперервно, залишаючись постійною, тобто відпадає необхідність у використанні ключа.

Якщо діяння подається на коло не в момент $t = 0$, а з запізненням на час τ , то його слід записувати з допомогою одиничної функції (рис. 8.1, б) з аргументом з запізненням ($t - \tau$)

$$1(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau ; \\ 1, & t > \tau . \end{cases} \quad (8.2)$$

Добуток

$$U_0 \cdot 1(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau ; \\ U_0, & t > \tau \end{cases}$$

вказує на те, що напруга величиною U_0 вмикається в коло в момент часу $t = \tau$.

Реакція кола на одиничну східчасту функцію при нульових початкових умовах називається перехідною характеристикою кола і позначається $h(t)$. Під нульовими початковими умовами розуміють нульові значення незалежних початкових умов.

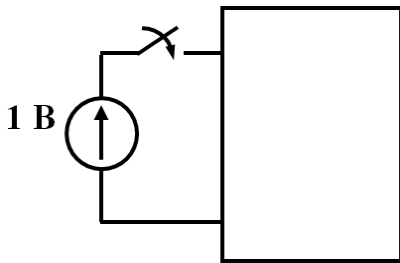


Рисунок 8.2

З електротехнічної точки зору дія одиничної східчастої напруги на коло рівноцінна вмиканню кола в момент $t = 0$ під постійну напругу 1 В. Таким чином, для визначення перехідної характеристики кола $h(t)$ слід знайти необхідну реакцію (згідно з умовою задачі), розраховувши перехідний процес в колі, схема якого наведена на рис. 8.2 (початкові умови нульові).

Такий розрахунок можна проводити як класичним так і операторним методом. Знайдена реакція і буде шуканою перехідною характеристикою $h(t)$.

Наприклад, при вмиканні кола, яке складається з послідовно з'єднаних опору R і індуктивності L , на напругу складної форми, де як реакції треба знайти струм, перехідною характеристикою є струм від дії постійної напруги на вході 1 В. Оскільки струм в такому колі від дії постійної напруги U визначається, як відомо, за ф-лою

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

то перехідна характеристика

$$h(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (8.3)$$

В складних колах зручно спочатку знаходити зображення перехідної характеристики $H(s)$, а потім за теоремою розкладання визначити $h(t)$.

Подамо будь-яке коло в вигляді чотирьох полюсів (рис. 8.3, а), до якого прикладене деяке діяння $f(t)$, і реакція на це діяння на виході $x(t)$. Для знаходження зображення реакції $X(s)$ перерисуємо схему в операторній формі (рис. 8.3, б).

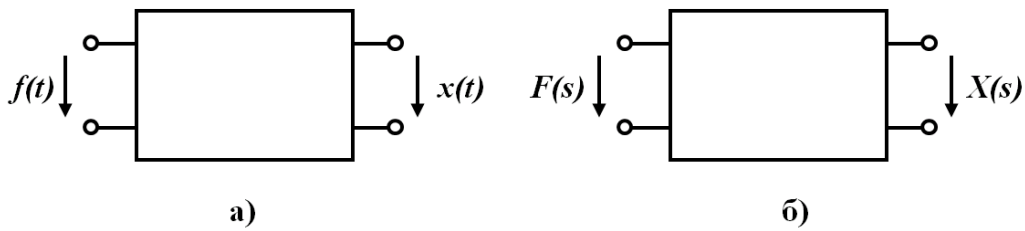


Рисунок 8.3

Оскільки початкові умови нульові, то ніяких додаткових е.р.с. в чотирьох полюсів не з'являється, а зв'язок між зображеннями реакції $X(s)$ і діяння $F(s)$ записується у вигляді

$$X(s) = K(s)F(s), \quad (8.4)$$

де $K(s)$ – передатна функція кола, яка залежить тільки від параметрів кола і виду їх з'єднання між собою.

Якщо діяння є одиничною східчастою функцією $1(t)$, то її зображення можна знайти, використовуючи інтеграл Лапласа

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t)e^{-st} dt = \frac{1}{s}; \quad 1(t) \doteq \frac{1}{s}. \quad (8.5)$$

Тоді зображення перехідної характеристики визначається за виразом

$$H(s) = \frac{K(s)}{s}. \quad (8.6)$$

Приклад. Знайти перехідну характеристику для напруги на ємності в колі, яке зображено на рис. 8.4, а.

Наведемо схему в операторній формі (початкові умови нульові, рис. 8.4, б) і виразимо напругу $U_C(s) = U_2(s)$ через вхідну напругу $U_1(s)$.

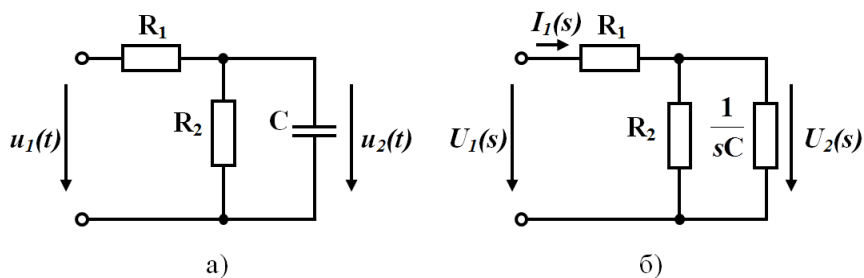


Рисунок 8.4

Вхідний струм

$$I_1(s) = \frac{U_1(s)}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}}} = \frac{U_1(s)}{R_1 + \frac{R_2}{R_2Cs + 1}} = \frac{U_1(s)(R_2Cs + 1)}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}$$

Шукана напруга

$$U_2(s) = I_1(s) \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = I_1(s) \frac{R_2}{R_2Cs + 1} = \frac{U_1(s)R_2}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}$$

Враховуючи, що $F(s) = U_1(s)$, $X(s) = U_2(s)$, передаточна функція кола

$$K(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2}$$

і зображення перехідної характеристики для напруги на ємності, згідно з (8.6)

$$H_U(s) = \frac{K(s)}{s} = \frac{R_2}{s(R_1R_2Cs + R_1 + R_2)}$$

Використовуючи теорему розкладання, знаходимо оригінал перехідної характеристики

$$h_U(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C}t}$$

Знаючи перехідну характеристику, легко визначити значення $u_C(t)$ при будь-якій величині постійної вхідної напруги. Дійсно, якщо на вході включена постійна напруга U_1 , то

$$u_2(t) = U_1 h_U(t).$$

8.2 Імпульсна функція і вагова характеристика кола

Імпульсною характеристикою кола або ваговою характеристикою називають реакцію кола на одиничну імпульсну функцію при нульових початкових умовах.

Одинична імпульсна функція, її називають функцією Дірака або δ -функцією, визначається тим, що її площа дорівнює одиниці, величина

імпульсна прямує до нескінченності при $t \rightarrow 0$, а при всіх інших значеннях t вона дорівнює нулю

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

На рис. 8.5 показаний імпульс шириною T і висотою $1/T$, площа якого дорівнює одиниці.

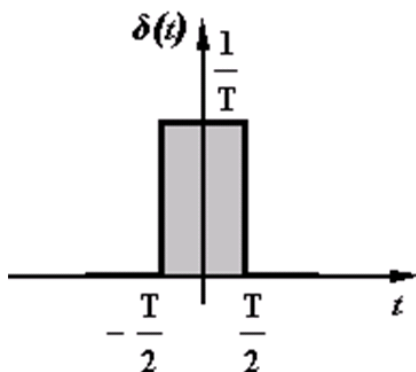


Рисунок 8.5

Одиничну імпульсну функцію $\delta(t)$ одержують із цього імпульсу при $T \rightarrow 0$. Для δ -функції справедливе співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1, \quad (8.8)$$

якщо $t_1 < 0$, $t_2 > 0$.

Добре видно, що

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

отже

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = 1(t),$$

або

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (8.9)$$

Якщо взяти добуток функцій $f(t)$ на $\delta(t)$, то цей добуток при всіх $t \neq 0$ перетворюється на нуль, а при $t = 0$ має значення $f(0)\delta(t)$, тобто

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$

Згідно з цим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0). \quad (8.10)$$

Операторне зображення δ -функції

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} \int_0^{\infty} \delta(t)dt = 1. \quad (8.11)$$

Враховуючи одержане співвідношення і визначення імпульсної характеристики можна стверджувати, що операторне зображення імпульсної характеристики дорівнює зображенню передатної функції.

Якщо позначити зображення імпульсної характеристики $g(t)$ через $G(s)$, то

$$G_U(s) = K(s). \quad (8.12)$$

Для кола, яке розглядалося вище (рис. 8.4, а),

$$G_U(s) = K(s) = \frac{R_2}{R_1 R_2 C s + R_1 + R_2} \quad \text{і} \quad g_U(t) = \frac{1}{R_1 C} e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t}.$$

Якщо на вході кола (рис. 8.4, а) діє імпульс напруги, площа якого дорівнює A , тобто $u_1(t) = A\delta(t)$, то напруга на ємності $u_2(t) = Ag_U(t)$.

Контрольні питання

1. Що таке одинична східчаста функція або функція Хевісайда?
2. Що таке перехідна характеристика?
3. Що таке імпульсна функція або функція Дірака?
4. Як пов'язані між собою функції Хевісайда та Дірака?
5. Що таке вагова характеристика?
6. Чому для знаходження перехідної та вагової характеристик зручно використовувати операторний метод розрахунку?
7. Чому при розрахунку перехідної та вагової характеристик кола у операторних схемах заміщення не виникає тимчасових е.р.с.?

ЛЕКЦІЯ № 9

ПЕРЕХІДНІ ПРОЦЕСИ ПРИ ДОВІЛЬНОМУ ВХІДНОМУ СИГНАЛІ

9.1 Використання перехідних характеристик для розрахунку перехідних процесів

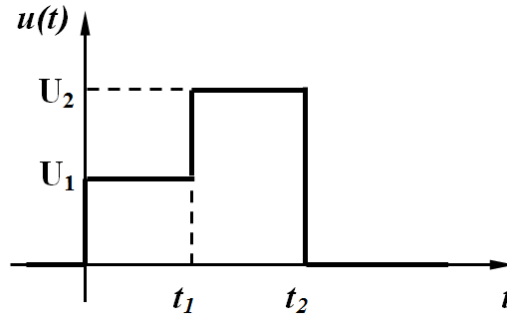


Рисунок 9.1

Нехай до деякого кола, для якого відома перехідна характеристика $h(t)$, прикладене східчасте діяння $u(t)$ (рис. 9.1).

Визначимо реакцію кола через перехідну характеристику. Підкреслимо ще раз, що всі подальші міркування стосуються кіл з нульовими початковими умовами.

Перехідний процес в цих випадках визначають окремо на різних інтервалах часу.

На інтервалі $0 < t < t_1$ до кола прикладена постійна напруга U_1 , тому

$$x(t) = U_1 h(t), \quad 0 < t < t_1. \quad (9.1)$$

На інтервалі $t_1 < t < t_2$ продовжує діяти постійна напруга U_1 і, відповідно, існує реакція на цю напругу $U_1 h(t)$. В момент часу t_1 додатково підключається постійна напруга $(U_2 - U_1)$ і з'являється складова реакції від цього стрибка напруги, яка зміщена на час t_1 , тобто $(U_2 - U_1)h(t - t_1)$. Таким чином, загальна реакція на цьому інтервалі

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1), \quad t_1 < t < t_2. \quad (9.2)$$

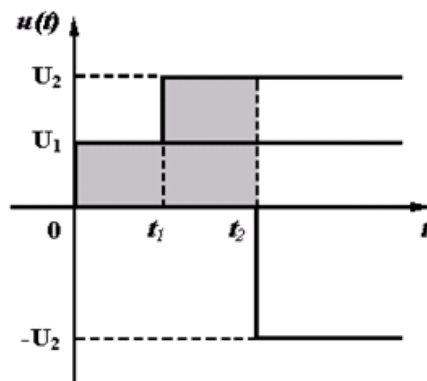


Рисунок 9.2

На інтервалі $t_2 < t < \infty$ реакція кола складається з трьох складових (рис. 9.2):

- продовжує діяти напруга U_1 – реакція $U_1 h(t)$;
- продовжує діяти постійна напруга $(U_2 - U_1)$, яка виникає в момент t_1 – реакція $(U_2 - U_1) h(t - t_1)$;
- в момент $t = t_2$ з'являється постійна напруга $(-U_2)$, реакція від якої – $(-U_2) h(t - t_2)$.

Таким чином, для $t_2 < t < \infty$

$$x(t) = U_1 h(t) + (U_2 - U_1) h(t - t_1) - U_2 h(t - t_2), \quad t > t_2. \quad (9.3)$$

9.2 Розрахунок перехідних процесів при довільних вхідних сигналах з використанням перехідної характеристики

Такий підхід до визначення реакції кола на східчасте діяння дозволяє розглядати перехідний процес при будь-яких складних діяннях.

Розглянемо знаходження реакції кола, перехідна характеристика $h(t)$ якого відома, при вмиканні його до джерела напруги $u(t)$ довільної форми (рис. 9.3) при нульових початкових умовах.

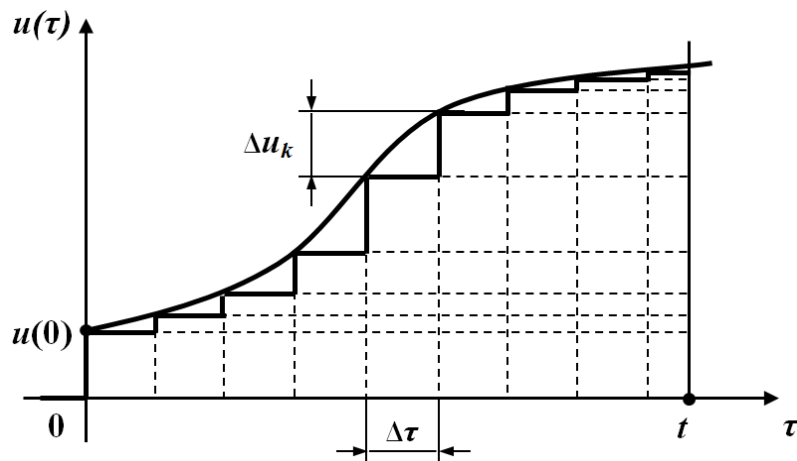


Рисунок 9.3

Виберемо деякий довільний фіксований момент спостереження t і розрахуємо реакцію (струм або напругу) до цього часу. Не дивлячись на те, що момент вибирається довільно, він фіксується і стає постійною величиною – параметром. В зв'язку з цим вводиться нове позначення змінного часу τ , який змінюється в межах $0 < \tau < t$.

Подамо прикладену напругу u в вигляді східчастого діяння (рис. 9.3), коли через однакові проміжки часу $\Delta\tau = \frac{t}{n}$ додаються сходинки напруги Δu_k (n відповідає числу сходинок, за допомогою яких подається вихідне діяння).

Діяння сходинок на коло описуємо з допомогою одиничних функцій. На проміжку часу $0 < t < \Delta\tau$ реакція кола від дії напруги $u(0)l(t)$, тобто від нульової сходинок, яка наближено заміняє напругу на цьому проміжку,

$$x(t) \approx u(0)h(t);$$

на проміжку $\Delta\tau < t < 2\Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_1 l(t - \Delta\tau)$, тобто від першої сходинок

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau);$$

на проміжку $2\Delta\tau < t < 3\Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_2 l(t - 2\Delta\tau)$, тобто від другої сходинок

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau);$$

на проміжку часу $n \Delta\tau < t < (n+1) \Delta\tau$ додається реакція від напруги $\Delta u_n l(t - n\Delta\tau)$, тобто від дії n -ої сходинок

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \Delta u_1 h(t - \Delta\tau) + \Delta u_2 h(t - 2\Delta\tau) + \dots + \Delta u_k h(t - k\Delta\tau) + \dots + \Delta u_n h(t - n\Delta\tau)$$

або

$$x(t) \approx u(0)h(t) + \sum_{k=1}^n \Delta u_k h(t - k\Delta\tau). \quad (9.4)$$

Вираз (9.4) дає наближено значення реакції кола $x(t)$, оскільки справжня крива $x(t)$ замінена східчастими діяннями.

Для одержання точного значення реакції кола спрямовуємо $\Delta\tau$ до нескінченно малої величини $d\tau$.

Тоді

$$\Delta u_k = \frac{\Delta u_k}{\Delta\tau} \Delta\tau \rightarrow u'(\tau)d\tau, \\ k\Delta\tau \rightarrow \tau.$$

Сума в (9.4) перетворюється на інтеграл з межами інтегрування від нуля до t , тобто

$$x(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t - \tau) d\tau. \quad (9.5)$$

Вираз (9.5) називають інтегралом накладання або інтегралом Дюамеля.

Приклад. Визначити закон зміни напруги на ємності в колі (рис. 9.4) при дії експоненційної напруги

$$u(t) = Ue^{-\beta t}.$$

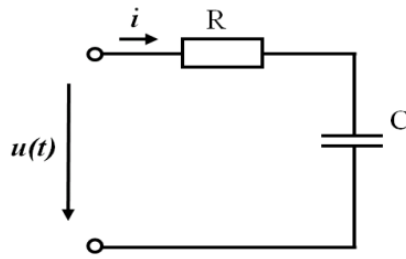


Рисунок 9.4

Перехідна характеристика цього кола для напруги на ємності

$$h(t) = 1 - e^{-\alpha t}; \quad \alpha = \frac{1}{RC}.$$

Визначимо всі величини, які входять в інтеграл Дюамеля (9.5).

$$u(0) = U; \quad u'(\tau) = (Ue^{-\beta\tau})' = -\beta Ue^{-\beta\tau};$$

$$h(1-\tau) = 1 - e^{-\alpha(t-\tau)}.$$

Відмітимо, що змінною інтегрування в (9.5) є змінна τ , тому t при знаходженні інтеграла розглядається як стала величина. Підставимо одержані величини в (9.5)

$$\begin{aligned} u_c(t) &= U(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t (-\beta)Ue^{-\beta\tau}(1 - e^{-\alpha(t-\tau)})d\tau = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\int_0^t e^{-\beta\tau}d\tau - \int_0^t e^{-\beta\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\left(\frac{1}{-\beta} e^{-\beta\tau} \right)_0^t - e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau}d\tau \right) = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) - \beta U \left(\frac{e^{-\beta t}}{-\beta} + \frac{1}{\beta} \right) + \beta U e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{\alpha - \beta} e^{(\alpha-\beta)t} \right)_0^t = \\ &= U(1 - e^{-\alpha t}) + Ue^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} (e^{(\alpha-\beta)t} - 1) = \\ &= U - Ue^{-\alpha t} + Ue^{-\beta t} - U + \frac{\beta U e^{-\beta t}}{\alpha - \beta} - \frac{\beta U e^{-\alpha t}}{\alpha - \beta} = \\ &= Ue^{-\beta t} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) - Ue^{-\alpha t} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) = \frac{\alpha U}{\alpha - \beta} (Ue^{-\beta t} - Ue^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

Якщо прикладена напруга не може бути описана одним аналітичним виразом (рис. 9.5)

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & t < t_1, \\ u_2(t), & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2, \end{cases}$$

то реакцію кола слід визначити для кожного інтервалу часу, де діє відповідна напруга.

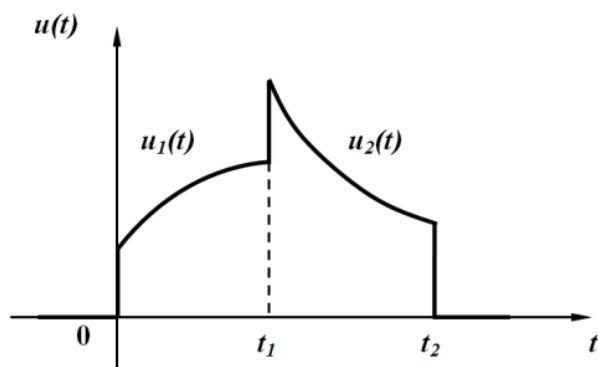


Рисунок 9.5

Для $0 < t < t_1$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

При визначенні реакції кола на інтервалі $t_1 < t < t_2$ враховуємо такі обставини:

- продовжує діяти реакція кола на напругу $u_1(t)$, яка існує до моменту часу t_1 , тому верхня межа цього інтеграла буде t_1 ;
- при визначенні реакції від напруги $u_2(t)$ слід мати на увазі, що ця напруга діє на коло з моменту часу t_1 , тому нижня межа даного інтервалу t_1 ;
- в момент t_1 вхідна напруга стрибком змінюється від $u_1(t_1)$ до $u_2(t_1)$, тому цей стрибок враховується при визначенні реакції як дія постійної напруги $(u_2(t_1) - u_1(t_1))$ в момент t_1 .

Таким чином для $t_1 < t < t_2$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^t u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Для часу $t > t_2$ враховується стрибок напруги $(0 - u_2(t_2))$ в момент t_2 і перестає діяти в цей же момент напруга $u_2(t)$.

Для $t > t_2$

$$x(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (u_2(t_1) - u_1(t_1))h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau + (0 - u_2(t_2))h(t-t_2).$$

9.3 Розрахунок перехідних процесів при довільних діяннях з використанням імпульсної функції

Знайдемо вираз, з допомогою міркувань, аналогічних проведеним в п.9.2 для знаходження реакції кола від дії напруги довільної форми з використанням імпульсної характеристики. В цьому випадку задане діяння розбиваємо на n прямокутних імпульсів (рис. 9.6) шириною $\Delta\tau$ і висотою u_k . Площа будь-якого імпульсу $u_k \times \Delta\tau$.

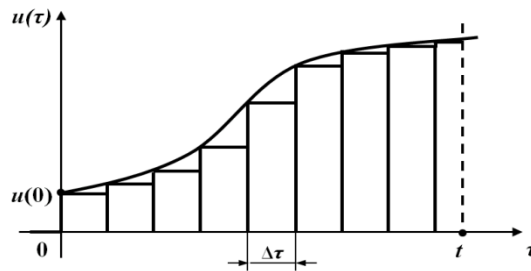


Рисунок 9.6

Реакція кола від дії окремого k -го імпульсу визначається як добуток площі імпульсу на імпульсну характеристику, яка зміщена на $k\Delta\tau$, тобто

$$\Delta x_k = u_k \Delta\tau \cdot g(t - k\Delta\tau) . \quad (9.6)$$

Реакція кола від заданого діяння в момент часу t наближено подається як сума реакцій від дії n імпульсів.

$$x(t) \cong \sum_{k=1}^n u_k \Delta\tau \cdot g(t - k\Delta\tau) . \quad (9.7)$$

При $\Delta\tau \rightarrow d\tau$ сума перетворюється на інтеграл, $k\Delta\tau \rightarrow \tau$, дискретні значення u_k стають неперервними миттєвими значеннями $u(\tau)$, тому

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) g(t - \tau) d\tau . \quad (9.8)$$

Приклад. Визначимо напругу на ємності через імпульсну характеристику для кола (див. рис. 9.4) при входній напрузі $u(t) = Ue^{-\beta t}$.

Знайдемо імпульсну характеристику кола для напруги на ємності.

Напруга на ємності в операторній формі

$$U_c(s) = \frac{U(s) \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{U(s)}{RCs + 1}$$

Передатна функція кола і, отже, зображення імпульсної характеристики

$$K(s) = G(s) = \frac{1}{RCs + 1}.$$

Оригінал цього зображення

$$g(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Якщо позначити $\alpha = \frac{1}{RC}$, то $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$.

Підставляємо всі дані в (9.8), одержуємо

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \int_0^t U e^{-\beta \tau} \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau = U \alpha e^{-\alpha t} \int_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau} d\tau = U \alpha e^{-\alpha t} \left(\frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta} \right) \Big|_0^t = \\ &= U \alpha e^{-\alpha t} \frac{1}{\alpha-\beta} (e^{(\alpha-\beta)t} - 1) = \frac{U \alpha}{\alpha-\beta} (e^{-\beta \cdot t} - e^{-\alpha \cdot t}) \end{aligned}$$

При розв'язанні задачі (див. рис. 9.4) з використанням інтеграла Дюамеля, записаного через імпульсну характеристику (9.8) стрибки напруги в моменти t_1 і t_2 враховуються самими функціями $u_1(t)$ і $u_2(t)$ безпосередньо при інтегруванні, тобто.

Для $0 < t < t_1$

$$x(t) = \int_0^t u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Для $t_1 < t < t_2$

$$x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Для $t > t_2$

$$x(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} u_2(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Контрольні питання

1. Як записується інтеграл Дюамеля з використанням перехідної характеристики?
2. Як записується інтеграл Дюамеля з використанням вагової характеристики?
3. Як розрахувати перехідний процес за допомогою інтеграла Дюамеля, якщо прикладена напруга не може бути описана одним аналітичним виразом?

ЛЕКЦІЯ № 10 СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

10.1 Розрахунок перехідних процесів методом періодизації неперіодичних діянь

В попередній лекції розглянуто використання перехідних та імпульсних характеристик для розрахунку перехідних процесів. Суть такого підходу полягає в тому, що довільне діяння спочатку подається в вигляді суми стандартних діянь – східчастих або імпульсних. Знаходиться реакція кола на кожне діяння та, згідно з принципом накладання знаходиться наближене значення реакції *як сума знайдених реакцій від кожного діяння. Точний розв’язок визначається граничним переходом при спрямуванні інтервалу між окремими діяннями до нескінченно малої величини, при цьому сума переходить в інтеграл.

Подібний засіб можна використовувати, якщо взяти за стандартне діяння синусоїдну функцію, тобто зовнішнє діяння подати у вигляді суми синусоїдних діянь. Наближене значення реакції кола можна знаходити як суму реакцій від кожного синусоїдного діяння, а після для знаходження точного розв’язку провести граничний перехід.

Складність полягає в тому, що якщо діяння неперіодичне, то його не можна подати рядом Фур’є, проте якщо діяння є функцією $f_1(t)$, яка діє тільки на деякому проміжку часу (рис. 10.1), то її можна продовжити як періодичну.

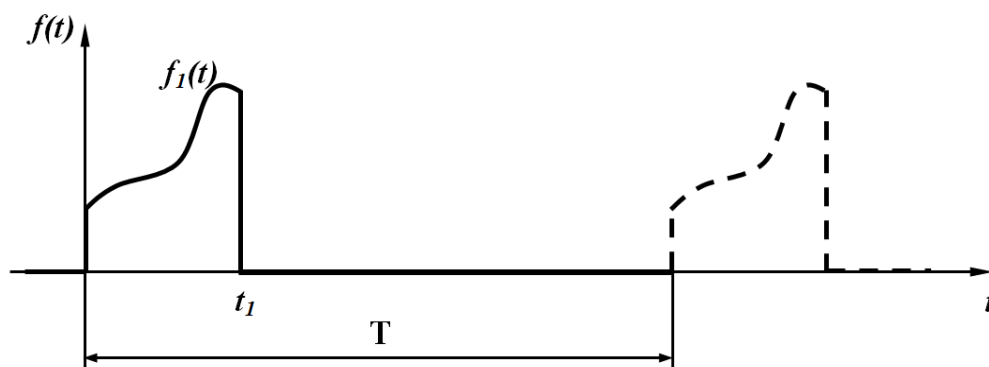


Рисунок 10.1

При цьому необхідно врахувати такі обставини. Після закінчення діяння в момент $t = t_1$ реакція кола має тільки вільну складову, яка з перебігом часу в лінійних колах прямує до нуля. Як відомо, практична довжина

перехідного процесу дорівнює $(4\div 5)\tau_{\max}$, тобто вважається, що до цього часу всі вільні складові перетворюються на нуль. Таким чином, якщо прийняти $T > (t_1 + (4\div 5)\tau_{\max})$, то до початку дії наступного імпульсу перехідний процес від дії першого імпульсу закінчується і не впливає на реакцію кола від другого імпульсу.

Отже, реакція кола теж буде періодичною, при цьому закон зміни реакції кола за перший період буде близьким до справжнього перехідного процесу. Такий процес «періодизації» зовнішнього діяння вносить деяку похибку до розрахунку передусім через те, що при практичному розрахунку враховується кінцеве число гармонік i , крім того, за час T перехідний процес все-таки не закінчується. Однак такий підхід дає задовільні результати.

10.2 Спектри періодичних і неперіодичних функцій

Як відомо, будь-яка періодична функція, яка задовольняє умови Діріхле, може бути подана в вигляді нескінченного ряду синусоїдних і косинусоїдних функцій

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos k\omega_1 t + \sum_{k=1}^n B_k \sin k\omega_1 t, \quad (10.1)$$

де коефіцієнти ряду Фур'є визначаються за виразами

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) dt; \\ A_k &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt; \\ B_k &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

В (10.1) постійна складова записана $\frac{A_0}{2}$ для того, щоб у виразах (10.2) перед інтегралами був один і той самий множник $\frac{2}{T_1}$, а частота першої гармоніки позначена ω_1 .

Запишемо ряд (10.1) в комплексній формі. Для цього врахуємо, що

$$\begin{aligned}\sin k\omega_1 t &= \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j}, \\ \cos k\omega_1 t &= \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2}.\end{aligned}\tag{10.3}$$

і перепишемо (10.1) у вигляді

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(B_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} + A_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} \right) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(e^{jk\omega_1 t} \frac{A_k - jB_k}{2} + e^{-jk\omega_1 t} \frac{A_k + jB_k}{2} \right) = \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k + jB_k}{2} e^{-jk\omega_1 t}.\end{aligned}\tag{10.4}$$

В другій складовій (10.4) замінимо k на $(-k)$. В цьому випадку

$$\begin{aligned}A_{-k} &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(-k\omega_1 t) dt = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt = A_k; \\ B_{-k} &= \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(-k\omega_1 t) dt = -\frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt = -B_k.\end{aligned}$$

При заміні k на $(-k)$ в другій сумі (10.4) межами суми будуть (-1) і $(-\infty)$, тому (10.4) записується у вигляді

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_1 t}.$$

В останньому ряді під знаком суми знаходяться одні і ті ж вирази, тому дві останні складові можна записати у вигляді однієї суми з межами знаходження суми від $(-\infty)$ до $(+\infty)$ без одного члена при $k=0$. Визначимо значення A_k і B_k при $k=0$. Із (10.2) випливає, що при $k=0$ $A_k = A_0$, $B_k = 0$, тому $\left. \frac{A_k - jB_k}{2} \right|_{k=0} = \frac{A_0}{2}$. Отже, якщо першу складову підставити під знак суми, то

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_1 t}.\tag{10.5}$$

Позначимо $\frac{A_k - jB_k}{2} = \underline{C}_k = C_k e^{j\varphi_k}$ і назовемо цю величину комплексною амплітудою ряду Фур'є. Із (10.1) видно, що

$$\underline{C}_k = \frac{A_k - jB_k}{2} = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos k\omega_1 t dt - \frac{j}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin k\omega_1 t dt$$

або

$$\underline{C}_k = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt. \quad (10.6)$$

Отже,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{C}_k e^{jk\omega_1 t}. \quad (10.7)$$

Закон розподілу амплітуд гармонічних складових C_k , залежно від частоти, називають спектром амплітуд або амплітудно-частотним спектром. Закон розподілу початкових фаз φ_k комплексних амплітуд називають спектром фаз або фазово-частотним спектром функції $f(t)$.

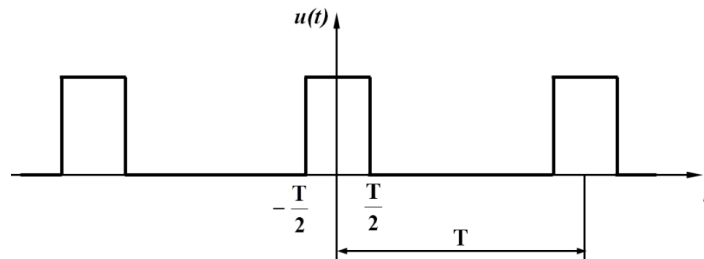


Рисунок 10.2

Для періодичної функції $f(t)$, яка зображена на рис. 10.2, амплітудно-частотний спектр зображений на рис. 10.3, а; а фазово-частотний – на рис. 10.3, б при $T_1 = 4\tau$.

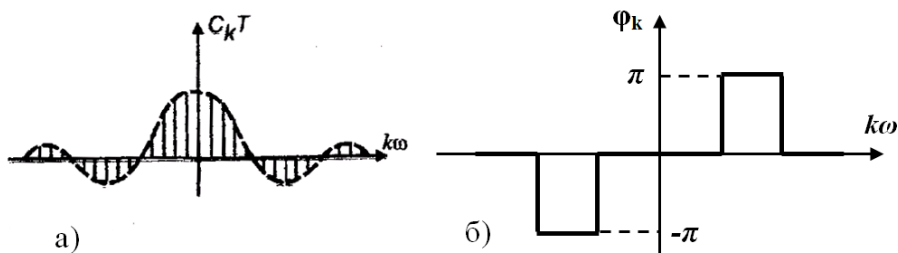


Рисунок 10.3

Як видно з рисунків, спектри періодичних функцій являють собою ряд окремих ліній, тому такі спектри називають лінійними або дискретними.

Амплітудний і фазовий спектри повністю визначають періодичну функцію.

Виконаємо перехід до неперіодичної функції. Для цієї мети будемо збільшувати її період. Оскільки $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$, то при збільшенні T_1 частота ω_1 зменшується, зменшується й інтервал між сусідніми частотами, отже, лінійний спектр стає все більш стає густим (рис. 10.4).

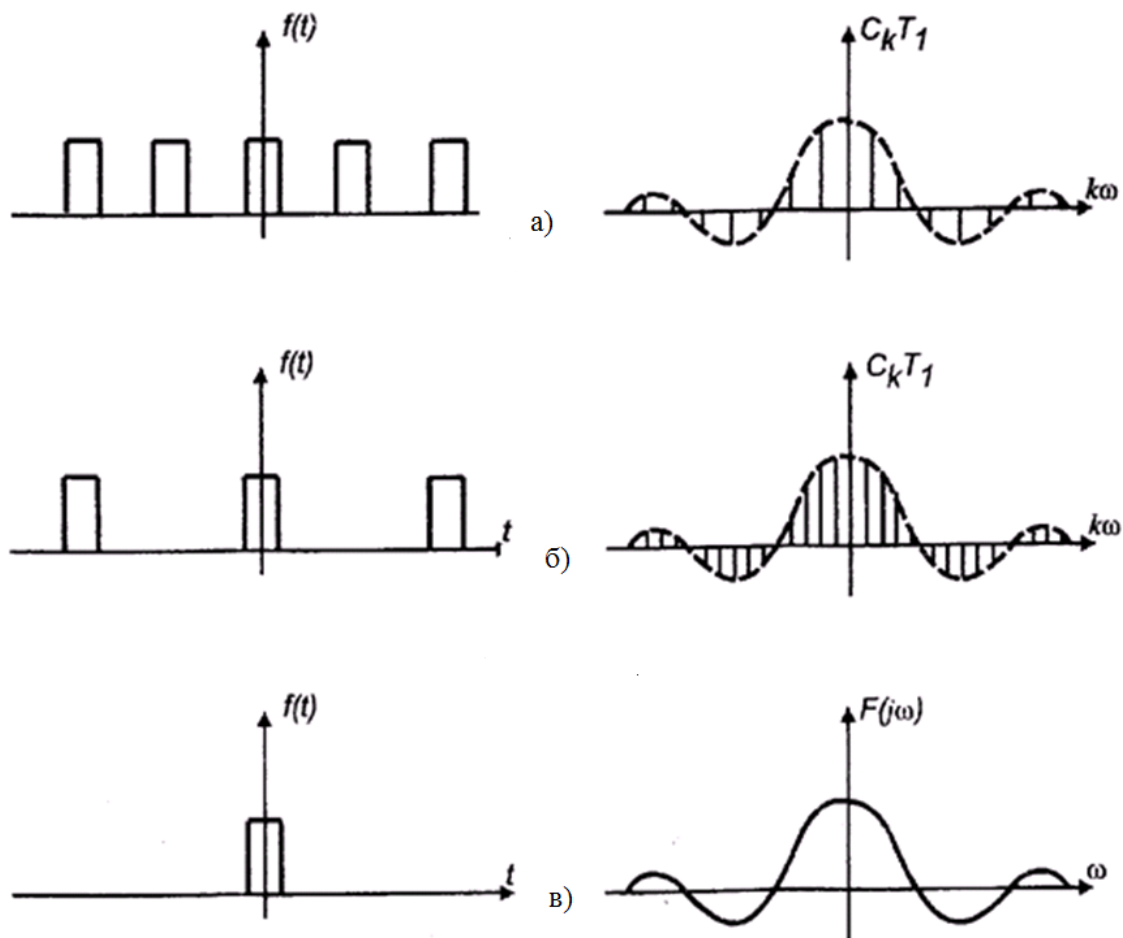


Рисунок 10.4

Оскільки, згідно з (10.7), амплітуда C_k також зменшується (T_1 в знаменнику), на рис. 10.4 показані величини $C_k T_1$, які залишаються незмінними при збільшенні T_1 .

Коли T_1 прямує до нескінченності, різниця між сусідніми частотами $\Delta\omega = (k+1)\omega_1 - k\omega_1$ стає безмежно малою величиною $d\omega$ частот ω , а комплексна амплітуда стає безмежно малою величиною.

$$dC(j\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (10.8)$$

Спектр неперіодичної функції ($T_1 \rightarrow \infty$) стає неперервним або суцільним (див. рис. 10.4, в), а функцію

$$F(j\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (10.9)$$

називають спектральною характеристикою або спектром функції.

Враховуючи (10.8) і (10.9), а також ту обставину, що при граничному переході, коли ($T_1 \rightarrow \infty$) сума в (10.7) переходить на інтеграл, можна записати

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(j\omega)e^{j\omega t},$$

або

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.10)$$

Інтегральні перетворення (10.9) і (10.10) називають, відповідно, прямим (10.9) і оберненим (10.10) перетворюваннями Фур'є.

Таким чином, неперіодична функція подається безмежно великим числом гармонічних складових безмежно малої амплітуди $dC(j\omega)$, частоти яких відрізняються одна від одної на безмежно малу величину $d\omega$.

Вираз (10.9) дозволяє знайти спектральну характеристику функції $f(t)$, а вираз (10.10) дає можливість знайти функцію часу $f(t)$ за її відомою спектральною характеристикою.

Якщо функція $f(t)=0$ при $t < 0$, що, зазвичай, має місце при розгляді періодичних процесів, то (10.9) можна записати в вигляді

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} d\omega t. \quad (10.11)$$

Таке перетворення називають одностороннім.

Легко виявити зв'язок одностороннього перетворення Фур'є з перетвореннями Лапласа, якщо формально замінити s на $j\omega$. Така заміна дещо звужує коло функцій, які можна піддати перетворенню Фур'є, оскільки необхідною умовою такого перетворення, крім умов Діріхле, є абсолютна інтегровність функції $f(t)$, тобто

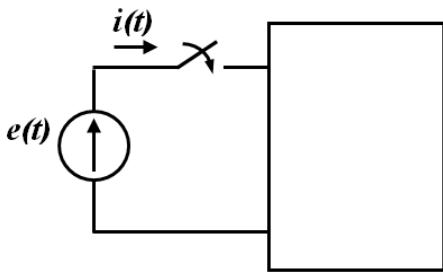
$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt \leq M, \quad (10.12)$$

де M – число з кінцевим значенням.

Подання неперіодичних функцій у вигляді сукупності гармонічних коливань дозволяє розраховувати перехідні процеси в лінійних електричних колах, використовуючи методи розрахунку усталених синусоїдних процесів.

10.3 Використання перетворення Фур'є до розрахунку перехідних процесів

Припустимо, що деяке лінійне коло (рис. 10.5), яке має комплексний вхідний опір $Z(j\omega)$, вмикається в момент $t = 0$ при нульових початкових умовах до джерела напруги $e(t)$.



Визначивши спектральну характеристику вхідного діяння за (10.10) і позначивши її через $E(j\omega)$, можна знайти спектральну характеристику вхідного струму

$$I(j\omega) = \frac{E(j\omega)}{Z(j\omega)} = E(j\omega)Y(j\omega), \quad (10.13)$$

Рисунок 10.5

де $Y(j\omega)$ – комплексна провідність двополюсника.

Використовуючи обернене перетворення Фур'є, можна знайти оригінал струму

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(j\omega) Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Знаходження останнього інтеграла не завжди просте, тому вираз (10.10) часто подають в іншій формі.

Запишемо спектральну характеристику (10.9) у вигляді

$$F(j\omega) = F_1(\omega) - jF_2(\omega), \quad (10.14)$$

де

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Як вказувалося раніше, для всіх практично існуючих в теорії кіл сигналів, $f(t)=0$ при $t < 0$, тому

$$F_1(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (10.15)$$

$$F_2(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Останні вирази показують, що функція $F_1(\omega)$ парна, бо $F_1(\omega) = F_1(-\omega)$, а функція $F_2(\omega)$ непарна, оскільки $F_2(\omega) = -F_2(-\omega)$. Враховуючи (10.15), запишемо (10.10) у вигляді

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) - jF_2(\omega)) (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t) d\omega + j \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) \sin \omega t - F_2(\omega) \cos \omega t) d\omega \right). \end{aligned}$$

Другий інтеграл в останньому виразі має дорівнювати нулю, оскільки функція $f(t)$ не має уявної складової, тому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (10.16)$$

Вираз під інтегралом в (10.16) відносно змінної ω є парною функцією, оскільки добуток двох парних функцій $F_1(\omega) \cos \omega t$ є парною функцією, а добуток двох непарних функцій $F_2(\omega) \sin \omega t$ є теж парною функцією.

Внаслідок цього в інтегралі (10.16) можна прийняти межі інтегрування від 0 до ∞ , а результат подвоїти, тобто

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_1(\omega) \cos \omega t + F_2(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (10.17)$$

Було прийнято, що $f(t)=0$ при $t < 0$, тому

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_1(\omega) \cos(-\omega t) + F_2(\omega) \sin(-\omega t)) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (F_1(\omega) \cos \omega t - F_2(\omega) \sin \omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\omega) \sin \omega t d\omega = 0. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Звідси

$$\int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega = \int_0^{\infty} F_2(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (10.19)$$

і

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_1(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (10.20)$$

Таким чином, функцію часу можна визначити, якщо відома тільки дійсна частина спектральної характеристики.

Вираз (10.20) також не завжди можна визначити аналітично, але приведення задачі до визначення інтеграла (10.20) робить зручним розрахунок наближеними методами. Особливо це зручно, коли характеристика $F(\omega)$ задана в табличній формі або графічно.

В такому випадку ні один із методів, крім частотного, не дає задовільних результатів.

Контрольні питання

1. В чому суть методу періодизації неперіодичних вхідних сигналів?
2. Яким має бути умовний період неперіодичного вхідного сигналу для застосування методу періодизації неперіодичних вхідних сигналів?
3. Яким критеріям мають відповідати функції, щоб їх можна було розкласти у ряд Фур'є?
4. Що таке умови Діріхле?
5. Що таке амплітудний і фазний спектри функції? Як вони отримуються?
6. Як можна застосувати перетворення Фур'є до розрахунку перехідних процесів?

ЛЕКЦІЯ № 11

ПОНЯТТЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ

11.1 Основні поняття та означення

Електричні кола, які вивчають в курсі теорії електричних та електронних кіл, поділяють на лінійні та нелінійні.

Лінійні електричні кола складаються тільки з лінійних елементів, для яких відповідні параметри їх опорів R , індуктивностей L і ємностей C мають певні й сталі значення, а між електричними та магнітними величинами на цих елементах існують лінійні пропорційні зв'язки

$$\begin{cases} u = R \cdot i; \\ \psi = L \cdot i; \\ q = C \cdot u. \end{cases} \quad (11.1)$$

Нелінійними колами називаються електричні кола, до складу яких входить хоча б один нелінійний елемент. Параметри нелінійних елементів не є сталими величинами, а залежать, явно чи опосередковано, або від струму, що через ці елементи проходить, або від прикладених до них напруг, або від зовнішніх умов роботи. Тому залежності між електричними та магнітними величинами для нелінійних елементів є більш складними і в загальному випадку їх можна подати у вигляді функціональних зв'язків

$$\begin{cases} u = f_1(i); \\ \psi = f_2(i); \\ q = f_3(u), \end{cases} \quad (11.2)$$

які називаються характеристиками нелінійних елементів. Такі характеристики зазвичай визначають експериментально й подають графічно, у табличний спосіб або аналітичними виразами.

Електричні властивості нелінійного резистивного елемента задає вольт-амперна характеристика $u = f(i)$.

Характеристику нелінійного індуктивного елемента називають вебер-амперною характеристикою, оскільки та встановлює зв'язок між потокозчепленням котушки індуктивності та її електричним струмом $\psi = f(i)$.

Нелінійна ємність характеризується кулон-вольтною характеристикою, яка задає зв'язок між накопиченим на електродах електричним зарядом і прикладеною напругою $q = f(u)$.

Загальні позначення нелінійних елементів (опорів, ємностей, індуктивностей) в електричних схемах показано на рис. 11.1. Окремі з нелінійних елементів мають власні умовні графічні позначення, які обумовлені існуючою нормативною документацією.



Рисунок 11.1

Нелінійні елементи електричного кола за виглядом їх характеристики поділяють на такі, що мають:

- симетричну відносно початку координат характеристику (рис. 11.2, в, г), для якої виконується рівність $y(x) = -y(-x)$, або несиметричну (рис. 11.2, а, б), якщо така рівність не виконується;

- монотонну, коли похідна $\frac{dy}{dx}$ завжди додатна і не змінює свого знака будь-де в межах всієї характеристики (рис. 11.2, б, в, г), та немонотонну (рис. 11.2, д), якщо ця похідна на окремих ділянках характеристики набуває від'ємного знака;

- однозначну, коли кожному значенню змінної x відповідає одне і тільки одне значення y (рис. 11.2, в), і неоднозначну, якщо одному значенню змінної x можуть відповідати декілька значень змінної y (рис. 11.2, е).

Окрім наведеної класифікації нелінійні елементи можуть бути керованими та некерованими.

Керованими нелінійними елементами є такі елементи електричного кола, характеристики яких залежать від деякої фізичної величини, яку називають керівною. Керівними можуть бути напруга, струм, температура, тиск, освітленість тощо.

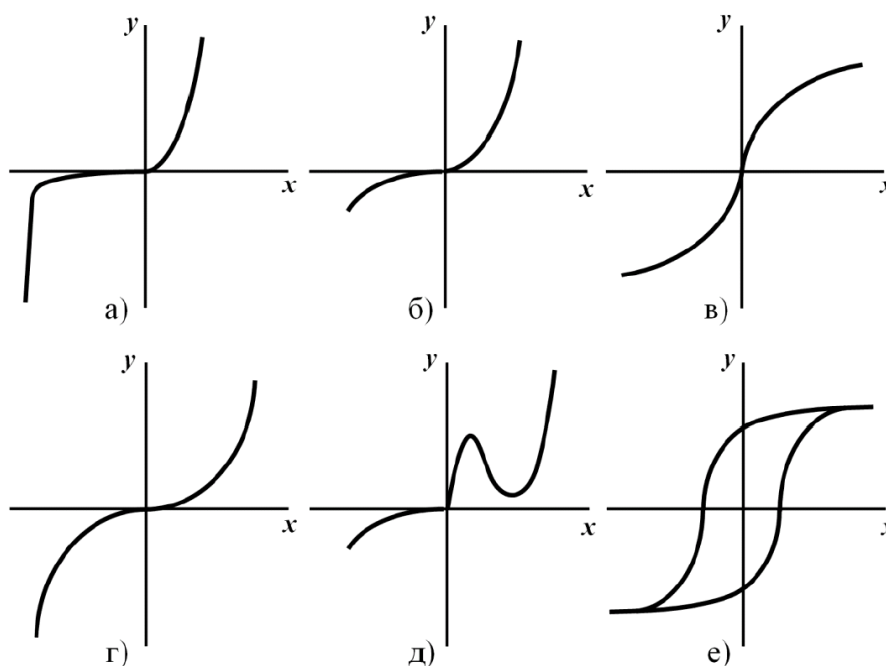


Рисунок 11.2

Кожен з керованих нелінійних елементів має сімейство характеристик, що визначені за деяких різних заданих сталих значень керівної величини. На рис. 11.3 наведено приклад такого сімейства характеристик $y = f(x, k)$, де k – керівна фізична величина.

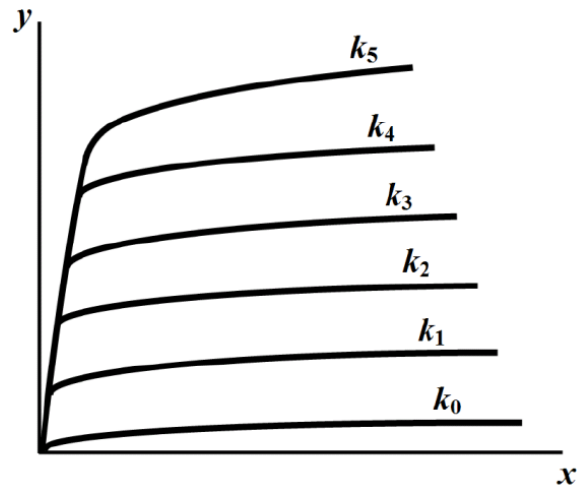


Рисунок 11.3

Для кожної точки нелінійної характеристики вводять поняття статичного та динамічного (диференціального) параметрів.

Так, статичним опором нелінійного резистивного елемента в точці a (рис. 11.4, а) називають відношення визначених в даній точці постійної напруги U_a нелінійного елемента і його постійного струму I_a .

$$R_a = \frac{U_a}{I_a}. \quad (11.3)$$

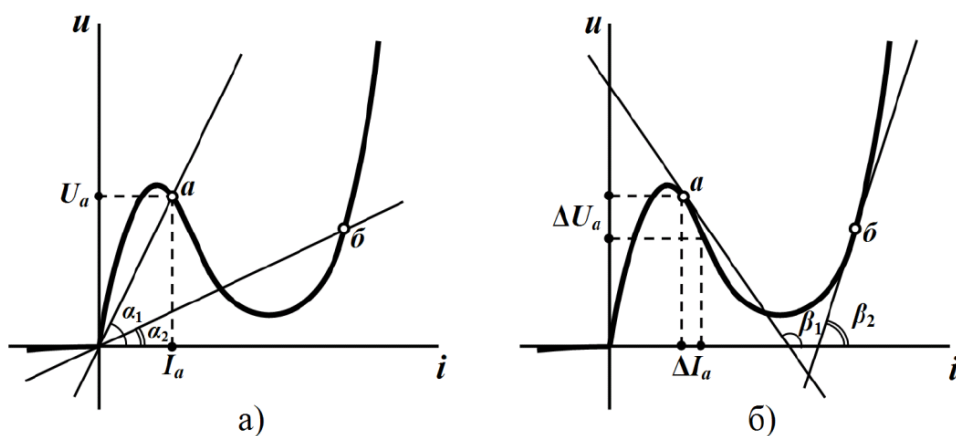


Рисунок 11.4

Відповідно для статичної індуктивності та статичної ємності співвідношення носять аналогічний характер.

$$\begin{cases} L_{cm} = \frac{\psi_0}{I_0}; \\ C_{cm} = \frac{q_0}{U_0}. \end{cases} \quad (11.4)$$

Статичні параметри пропорційні тангенсу кута між віссю абсцис і прямою, проведеною через початок координат та задану поточну точку. Наприклад, для точки a цим кутом буде кут α_1 , а для точки b – кут α_2 (див. рис. 11.4, а).

Для опору віссю ординат має слугувати вісь напруг, для індуктивності – вісь потокозчеплень, а для ємності – вісь зарядів.

Статичні параметри залежать від положення точки, яка характеризує поточний стан елемента, і є завжди додатною.

Динамічним (диференціальним) опором нелінійного резистивного елемента називають відношення малого приросту напруги в точці a до відповідного приросту струму в цій же точці за умови, що останній прямує до нуля, тобто

$$R_o = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{dU}{dI}. \quad (11.5)$$

Аналогічно

$$\begin{cases} L_o = \frac{d\psi}{dI}; \\ C_o = \frac{dq}{dU}. \end{cases} \quad (11.6)$$

Динамічні параметри пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної в заданій точці до осі абсцис. Так, на рис. 11.4, б для точки a таким кутом є кут β_1 , для точки b – кут β_2 .

Динамічні параметри можуть набувати як додатного знака (наприклад, точка b на рис. 11.4, б), так і від'ємного – на ділянках спаду характеристики (точка a на тому ж рисунку).

Електромагнітні процеси в нелінійних електричних колах, порівняно з лінійними, є більш складними й різноманітними.

Назвемо деякі явища, які притаманні виключно нелінійним колам, спостерігати їх в лінійних колах неможливо в принципі:

- під час дії на коло синусоїдного сигналу реакція кола може бути не-синусоїдною функцією від часу, що дозволяє здійснювати перетворення частоти або випрямлення змінної напруги;

- за зміни рівня вхідної напруги або величини навантаження в широкому діапазоні величина напруги або струму в навантаженні можуть залишатися практично незмінними. В цьому випадку здійснюється стабілізація вихідної напруги або струму;

- за дії на вході кола джерела постійної напруги на виході кола з'являється періодична напруга різної форми, тобто можливе виникнення автоколивань;

- за наявності різних початкових умов для того самого кола можуть існувати різні усталені режими;

- під час плавної зміни величини вхідної напруги або струму можлива стрибкоподібна зміна величини вихідної напруги або струму.

Наведений перелік можливостей нелінійних кіл далеко не повний, але і він дає змогу зрозуміти чому нелінійні кола знайшли широке застосування в електротехніці, радіоелектроніці, автоматиці та обчислювальній техніці.

Разом з тим, нелінійність характеристик елементів приводить до того, що електромагнітні процеси в нелінійних колах описуються нелійними алгебраїчними або диференціальними рівняннями. Ще однією надзвичайно важливою властивістю нелінійних електричних кіл є неможливість застосування щодо них принципу накладання.

Тому аналіз процесів в нелінійних колах зазвичай проводять наближеними методами, оскільки на сьогодні не існує яких-небудь загальних прийомів аналітичного розв'язування нелінійних алгебраїчних та диференціальних рівнянь.

11.2 Аналітичне подання характеристик нелінійних елементів

Як було сказано, характеристики нелінійних елементів зазвичай подають у вигляді таблиць або графіків, які були отримані експериментально. Для аналітичних методів розрахунку нелінійні характеристики мають бути подані аналітичними виразами. Однак практично таке подання може бути тільки наближеним і тільки для окремої ділянки характеристики.

Звичайно, що точність наближення буде зростати, якщо тільки ускладнювати аналітичний вираз характеристики. Однак це, в свою чергу, призводить до ускладнень під час розв'язування математичних рівнянь, що описують процеси в нелінійних електричних колах. Тому на практиці під час аналізу нелінійного кола необхідно вибирати, з одного боку, між складністю подання аналітичної функції нелінійної характеристики, а з іншого – точністю її наближення.

Оцінюючи точність наближення, потрібно мати на увазі, що певні похибки з'являються вже на етапі експериментального визначення характеристики через нестабільність параметрів та характеристик елементів електричного кола під час його роботи. Таким чином, у всіх випадках бажано,

щоб апроксимація (аналітичний опис) нелінійної характеристики, була, по можливості, більш точною та охоплювала всі її своєрідні якості.

В той же час, необхідно, щоб апроксимувальний вираз не був складним.

Виконання цих суперечливих вимог суттєво залежить від виду апроксимувальних функцій. Останніми можуть бути такі функції, як степеневі поліноми, експоненціальні поліноми, гіперболічні функції тощо. На вибір тієї чи іншої функції суттєво впливає вигляд конкретної характеристики нелінійного елемента.

Розглянемо деякі методи апроксимації нелінійної характеристики різними функціями.

Метод інтерполяції

Суть методу інтерполяції полягає в такому.

Нехай задано нелінійну характеристику (рис. 11.5), яку необхідно апроксимувати степеневим поліномом

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \quad (11.7)$$

тобто визначити невідомі коефіцієнти $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Ці коефіцієнти розраховують з умови збігу значень апроксимувального полінома (11.7) та значень, які отримані за характеристикою в заданих чи наперед вибраних точках (рис. 11.5). Число вибраних точок характеристики має дорівнювати числу невідомих коефіцієнтів.

Якщо $n = 3$, то вибирають три точки 1, 2, 3, для яких з характеристики визначають значення $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$.

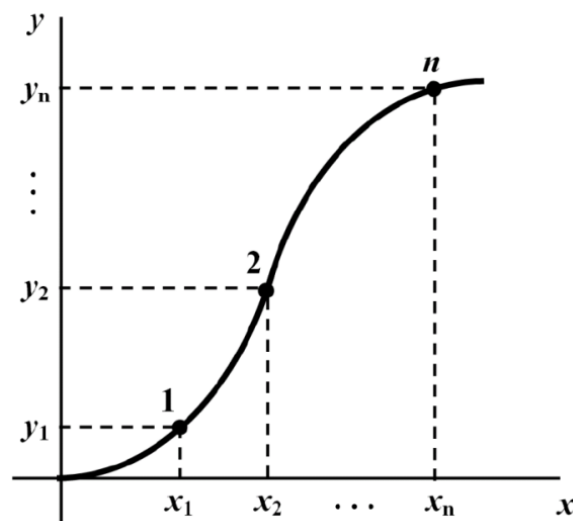


Рисунок 11.5

Підставивши значення x_i, y_i в (11.7), одержують систему лінійних рівнянь для знаходження a_1, a_2, a_3 .

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1; \\ a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2; \\ a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3. \end{cases} \quad (11.8)$$

Недолік цього методу полягає в тому, що в проміжних точках похибка не контролюється й у деяких випадках може бути доволі великою, однак у вибраних точках апроксимувальний поліном (11.7) та характеристика дають значення, які збігаються абсолютно.

Метод найменших квадратів

Розглянемо метод найменших квадратів на прикладі апроксимації характеристики степеневим поліномом

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3. \quad (11.9)$$

В цьому випадку кількість точок на характеристиці можна вибрати більше, аніж степінь полінома. Нехай їх буде m , тобто $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$.

Цей метод не вимагає абсолютного збігу значень апроксимувальної функції зі значеннями ординат характеристики нелінійного елемента у вибраних точках, тому для кожної точки аргумента x буде існувати деяка похибка між значеннями функції y , що були отримані за виразом (11.9), та значеннями y_i , взятими безпосередньо з нелінійної характеристики. Ця похибка для довільного i -го аргумента дорівнює

$$\varepsilon_i = y_i - (a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3). \quad (11.10)$$

Піднесемо похибку ε_i до квадрата, додамо всі квадрати похибки

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2, \quad (11.11)$$

та накладемо умову мінімуму для цієї суми квадратів похибки, що дозволить визначити коефіцієнти a_1, a_2 і a_3 . З цією метою прирівняємо до нуля часткові похідні від ε^2 за коефіцієнтами a_1, a_2 і a_3 .

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_3} = 0. \quad (11.12)$$

Для полінома третього степеня детально розписані рівняння (11.12) мають вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_1} &= \frac{\partial \left[\sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3)]^2 \right]}{\partial a_1} = \\
&= 2 \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3)] \cdot x_i; \\
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_2} &= 2 \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3)] \cdot x_i^2; \\
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a_3} &= 2 \sum_{i=1}^m [y_i - (a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3)] \cdot x_i^3.
\end{aligned} \tag{11.13}$$

Після деяких перетворень одержимо

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^4 = \sum_{i=1}^m x_i y_i; \\ a_1 \sum_{i=1}^m x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^4 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^5 = \sum_{i=1}^m x_i^2 y_i; \\ a_1 \sum_{i=1}^m x_i^4 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^5 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^6 = \sum_{i=1}^m x_i^3 y_i \end{cases} \tag{11.14}$$

Система (11.14) дає можливість знайти невідомі коефіцієнти полінома.

Метод кусково-лінійної апроксимації

За методом кусково-лінійної апроксимації нелінійну характеристику на окремих ділянках замінюють прямолінійними відрізками. Означену заміну можна реалізувати за допомогою графічних побудов, як це, наприклад, показано на рис 11.6. Точність апроксимації залежатиме від кількості лінійних ділянок на заданому проміжку. Така кусково-лінійна заміна характеристики повністю визначається координатами (x_k, y_k) точок перелому, які задають межі між суміжними проміжками. Початкова (x_0, y_0) та кінцева (x_n, y_n) точки позначають робочу ділянку характеристики і не є точками перелому.

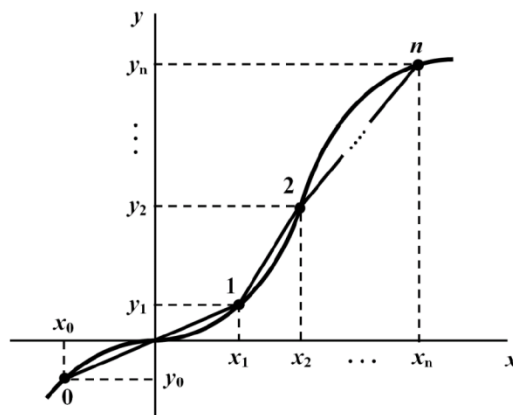


Рисунок 11.6

Рівняння відрізка прямої k -ої лінійної ділянки між двома сусідніми точками перелому (x_k, y_k) та (x_{k+1}, y_{k+1}) можна записати як

$$\frac{y - y_k}{y_{k+1} - y_k} = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Після перетворення

$$y = \frac{y - y_k}{x_{k+1} - x_k} x + \frac{y_k x_{k+1} - y_{k+1} x_k}{x_{k+1} - x_k} = a_k x + b_k. \quad (11.15)$$

де a_k – кутовий коефіцієнт прямої; b_k – ордината точки перетину прямої з віссю y .

Перевага кусково-лінійної апроксимації полягає в тому, що на кожному проміжку нелінійний елемент розглядається як лінійний і для аналізу такого кола на цих проміжках можна використовувати апарат теорії лінійних електричних кіл.

Контрольні питання

1. Які елементи електричного кола називаються нелінійними?
2. Що називається керованим нелінійним елементом? Наведіть приклад.
3. Що таке статичний опір нелінійного резистивного елемента? Як він визначається?
4. Що таке динамічний опір нелінійного резистивного елемента? Як він визначається?
5. Чи може статичний опір нелінійного елемента набувати від'ємних значень? А динамічний?
6. Які Ви знаєте методи аналітичної апроксимації характеристик нелінійних елементів?
7. У чому полягає суть методу інтерполяції?
8. У чому полягає суть методу найменших квадратів?
9. У чому полягає суть методу кучково-лінійної апроксимації?

ЛЕКЦІЯ № 12

ГРАФІЧНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НЕЛІНІЙНИХ КІЛ

Під час розрахунку графічними методами характеристики нелінійних і лінійних елементів електричного кола подаються графічно, а розв'язок задачі шукається за допомогою відповідних графічних побудов.

Надалі будемо вважати, що характеристики нелінійних елементів є відомими.

12.1 Найпростіші схеми з'єднання нелінійних опорів

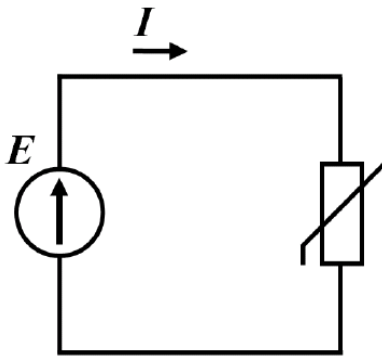


Рисунок 12.1

Розглянемо спочатку випадок, коли електричне коло складається з джерела постійної напруги та тільки одного нелінійного елемента (рис. 12.1).

Назовемо таке коло початковим.

Вольт-амперну характеристику нелінійного резистивного елемента показано на рис. 12.2.

Оскільки електрична напруга джерела $U = E$ безпосередньо прикладена до нелінійного елемента, то за допомогою його вольт-амперної характеристики відразу ж можна визначити струм I , що проходить через цей елемент (рис. 12.2).

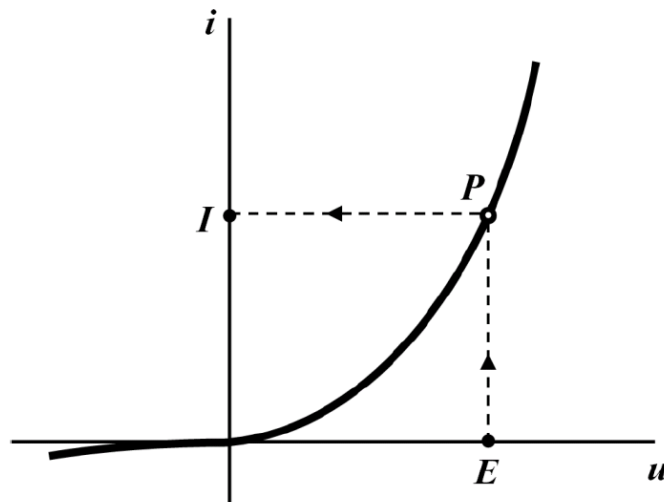


Рисунок 12.2

Точку P на вольт-амперній характеристиці нелінійного резистивного елемента (рис. 12.2) називають робочою точкою. Вона визначає струм і напругу на нелінійному елементі в заданому робочому режимі.

Нехай тепер електричне коло має два нелінійних елементи: 1 і 2, з'єднаних між собою послідовно (рис. 12.3).

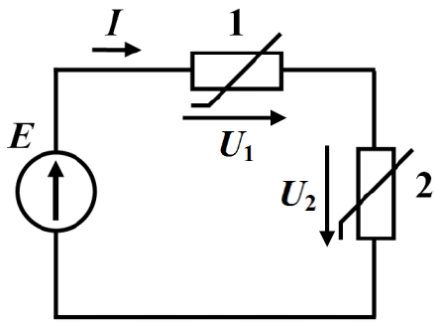


Рисунок 12.3

Вольт-амперні характеристики обох нелінійних опорів показано на рис. 12.4.

Здану схему можна привести до початкової, якщо ці два послідовно з'єднані опори замінити одним також з нелінійною вольт-амперною характеристикою, яку одержують методом додавання характеристик першого й другого опорів.

Оскільки опори з'єднані послідовно і через них проходить той самий електричний струм, то для знаходження підсумкової вольт-амперної характеристики еквівалентного опору необхідно задатися послідовністю точок, які відповідають різним можливим значенням струму i_1, i_2, i_3, \dots та i_k , після чого окремо для кожного з цих струмів знайти значення напруг на обох нелінійних елементах і скласти їх між собою, як того вимагає другий закон Кірхгофа.

У такий спосіб визначають абсциси точок характеристики еквівалентного опору для відповідних значень ординат (рис. 12.4).

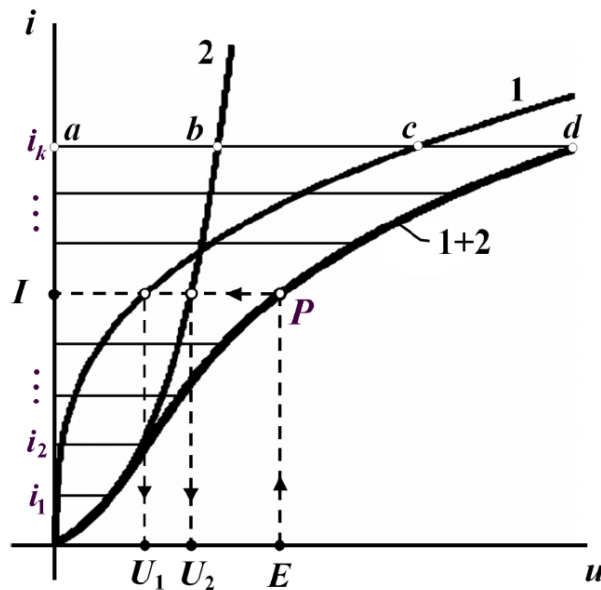


Рисунок 12.4

Наприклад, для струму i_k точку d отримано додаванням двох відрізків: ab , який відповідає нарузі на другому опорі, та ac , що в заданій системі координат є напругою на першому опорі.

Тоді шуканий електричний струм I знаходять безпосередньо за підсумковою вольт-амперною характеристикою (умовно її позначено 1+2 на рис. 12.4) еквівалентного опору за напруги $U = E$ (точка P). Напруги U_1 і

U_2 на кожному з двох опорів визначають абсцисами точок перетину їх власних вольт-амперних характеристик з горизонтальною прямою, що проходить через робочу точку P (див. рис. 12.4).

Вищенаведений метод є графічною інтерпретацією розв'язання нелінійного математичного рівняння, складеного за другим законом Кірхгофа,

$$u_1 + u_2 = E,$$

де $u_1 = f_1(i)$ та $u_2 = f_2(i)$ є вольт-амперними характеристиками нелінійних резистивних елементів.

Коли до складу електричного кола входить декілька послідовно з'єднаних опорів, серед яких можуть бути і лінійні, то точки загальної характеристики знаходять додаванням напруг на всіх елементах за однакових значень струму.

Якщо опори з'єднані паралельно (рис. 12.5), то загальна характеристика кола визначається шляхом додавання характеристик паралельно з'єднаних опорів за довільно заданих однакових значень напруг u_1, u_2, u_3, \dots та u_k (рис. 12.6).

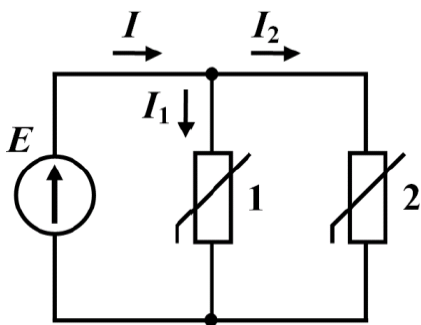


Рисунок 12.5

Це пояснюється дією двох чинників, першим з яких є перший закон Кірхгофа, внаслідок чого підсумковий (вхідний) струм має дорівнювати сумі струмів, що проходять паралельними вітками, а другим чинником є те, що до паралельних віток прикладена та сама електрична напруга.

Потім за заданим значенням, наприклад, вхідного струму I на загальній характеристиці кола знаходять прикладену до опорів напругу $U = E$, а струми через опори 1 та 2 визначають за відповідними характеристиками нелінійних опорів (рис. 12.6).

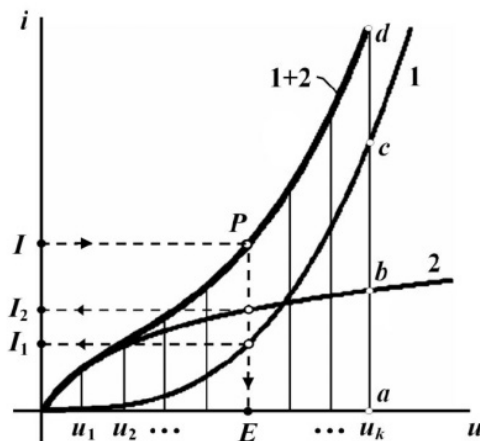


Рисунок 12.6

За змішаного з'єднання опорів (рис. 12.7) загальну характеристику електричного кола отримують шляхом його поступового спрощення і побудови для окремих ділянок за вищеписаними методиками допоміжних підсумкових вольт-амперних характеристик. Кінцевою метою таких еквівалентних перетворень є початкове коло (див. рис. 12.1) і загальна характеристика його еквівалентного нелінійного опору.

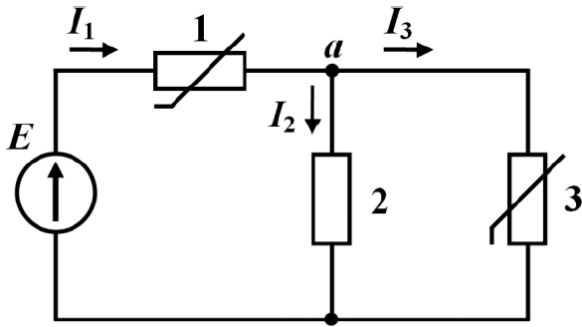


Рисунок 12.7

Отже, наприклад, для кола, наведеного на рис. 12.7, спочатку необхідно визначити характеристику еквівалентного опору, яким заміщають ділянку кола між вузлами a і b . Оскільки опори 2 та 3 з'єднані паралельно, то ця характеристика знаходиться шляхом додавання ординат характеристик 2 і 3 за умови довільно заданих однакових абсцис

u_1, u_2, u_3, \dots та u_k . На рис. 12.8 умовно криву отриманої у такий спосіб характеристики позначено як $2 + 3$.

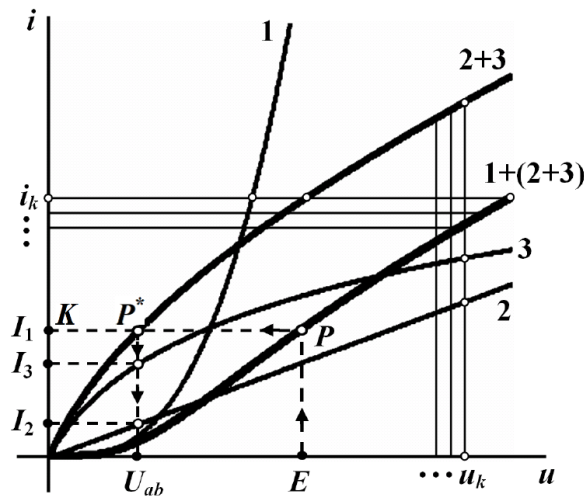


Рисунок 12.8

Загальна ж характеристика всього кола знаходиться додаванням абсцис характеристик 1 і $(2 + 3)$ за довільно заданих однакових значень ординат i_1, i_2, i_3, \dots та i_k , оскільки з'єднання є послідовним. Одержану характеристику наведено на рис. 12.8, її умовно позначено як криву $1 + (2 + 3)$.

Тоді, як видно з рисунка, безпосередньо на загальній характеристиці за заданої вхідної напруги $U = E$ визначають вхідний струм I_1 та положення робочої точки P цієї характеристики. Перетин прямої PK з характеристикою $2 + 3$ (точка P^*) дає напругу U_{ab} , за якої за допомогою характеристик 2 і 3 одержують відповідно електричні струми I_2 й I_3 .

12.2 Метод еквівалентного генератора

Якщо в складному електричному колі є тільки один нелінійний елемент (рис. 12.9, а), то всю лінійну ділянку цього кола зручно подати еквівалентним генератором з е.р.с. $E_{екв}$ і внутрішнім опором $r_{екв}$ (рис. 12.9, б).

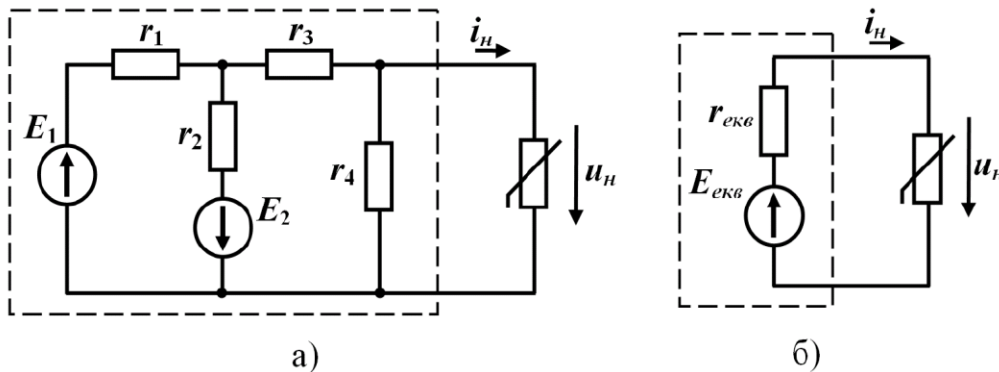


Рисунок 12.9

За такої еквівалентної заміни схема набуває простого вигляду і може бути легко розрахована у графічний спосіб.

Для знаходження струму i_n в отриманому еквівалентному колі (рис. 12.9, б) використаємо дещо інший графічний метод, ніж той, який був наведений вище.

Для цього розв'яжемо у графічний спосіб нелінійну систему з двох рівнянь, перше з яких складене за другим законом Кірхгофа, а друге являє собою вольт-амперну характеристику нелінійного резистивного елемента (рис. 12.10),

$$\begin{cases} r_{екв} i_n + u_n = E_{екв}; \\ i_n = f(u_n). \end{cases} \quad (12.1)$$

Перепишемо перше рівняння (12.1) відносно струму i_n .

$$i_n = \frac{E_{екв}}{r_{екв}} - \frac{u_n}{r_{екв}}, \quad (12.2)$$

і побудуємо графік цієї функції в системі координат вольт-амперної характеристики нелінійного опору

$$i_n = f(u_n).$$

Рівняння (12.2) є рівнянням прямої лінії, тому для її побудови в системі координат потрібно знати положення лише двох точок. Координати цих точок визначаємо з тих умов, що за струму $i_n = 0$ напруга $u_n = E_{екв}$, як це випливає з (12.2), а за напруги $u_n = 0$ струм $i_n = \frac{E_{екв}}{r_{екв}}$.

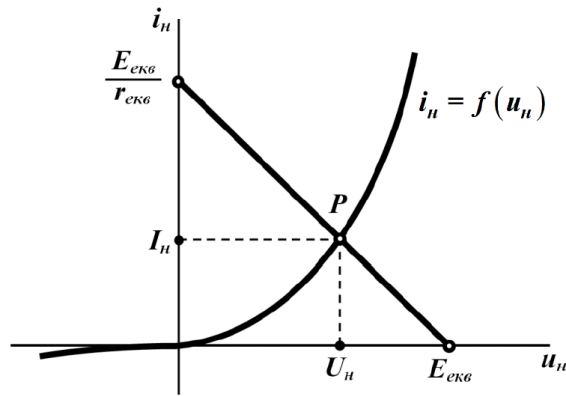


Рисунок 12.10

Точка перетину двох графіків (точка P на рис. 12.10), кожний з яких задано окремим рівнянням нелінійної системи (12.1), дає її графічний розв'язок. Тому координати I_n і U_n робочої точки P є шуканими значеннями струму i_n та напруги u_n на нелінійному опорі в заданому та еквівалентному електричних колах (рис. 12.9).

12.3 Метод двох вузлів

Метод двох вузлів застосовують для графічного розрахунку електричного кола, яке нараховує тільки два вузли, наприклад, як це показано на рис. 12.11. За такої умови кількість віток в електричному колі може бути необмеженою, як необмеженою може бути і кількість елементів (джерел електричної енергії, лінійних та нелінійних опорів тощо), що входять до його складу.

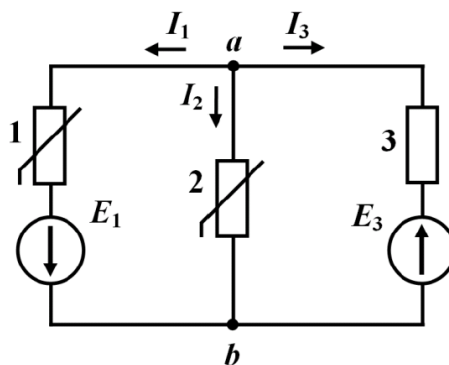


Рисунок 12.11

Нехай характеристики нелінійних опорів задано у вигляді графіків (рис 12.12), що показують функціональні залежності струмів від напруг на цих елементах $i_k = f_k(u_k)$.

Для розв'язання задачі методом двох вузлів потрібно задатися у вітках додатними напрямками струмів і побудувати в єдиній системі координат залежності цих струмів від спільної напруги, якою є напруга між вузлами a і b , тобто $i_k = f_k(u_{ab})$.

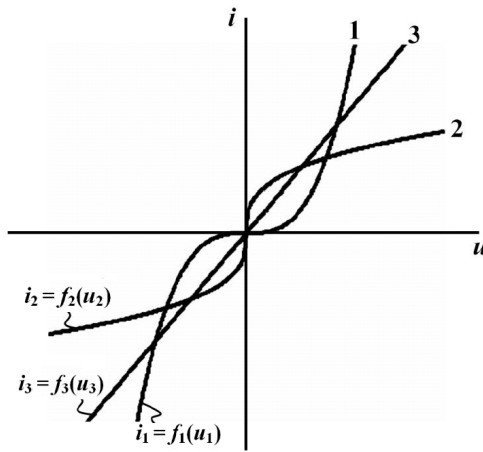


Рисунок 12.12

Так, за обраного напрямку струму I_1 для першої вітки маємо

$$u_{ab} = u_1 - E_1. \quad (12.3)$$

Вираз (12.3) показує, що будь-якому значенню напруги u_1 на першому нелінійному опорі відповідає значення напруги u_{ab} , яке зменшене на E_1 , тому кожна точка вольт-амперної характеристики опору під час переходу до напруги u_{ab} зміщується по осі абсцис вліво на величину E_1 (рис. 12.13).

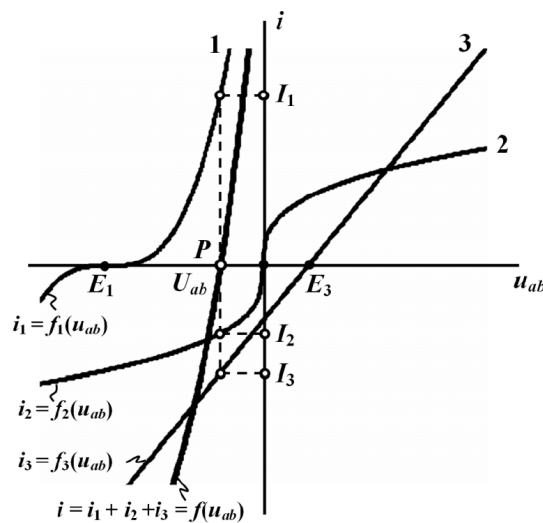


Рисунок 12.13

Для третьої вітки

$$u_{ab} = u_3 + E_3, \quad (12.4)$$

тому всі точки її характеристики $i_3 = f_3(u_3)$ будуть зміщені вправо на величину E_3 відносно графіка $i_3 = f(u_3)$.

Графік вольт-амперної характеристики другої вітки $i_2 = f_2(u_2)$ збігається з графіком $i_2 = f(u_2)$, оскільки $u_{ab} = u_2$ (рис. 12.13).

Таким чином, для методу двох вузлів можна сформулювати загальне правило побудови характеристик віток за вольт-амперними характеристиками опорів.

Якщо дія е.р.с. E_k у вітці збігається за напрямом зі струмом цієї вітки, то характеристика самої вітки має бути зміщеною відносно вольт-амперної характеристики k -го опора на величину E_k в напрямку від'ємних значень. Коли ж дія е.р.с. E_k спрямована назустріч струму I_k , характеристика вітки зміщується в сторону додатних значень на ту ж величину E_k .

Для визначення струмів побудуємо в цій же системі координат ще одну криву – графік функції

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = f(u_{ab}), \quad (12.5)$$

(див. рис. 12.13), який отримаємо у графічний спосіб шляхом складання значень ординат (струмів) перших трьох графіків за довільно заданих значень абсцис (напруг).

Оскільки для вузла a (див. рис. 12.11) має виконуватися перший закон Кірхгофа, то вочевидь, що точка перетину кривої (12.5) з віссю абсцис (точка P на рис. 12.13) і буде графічним розв'язком нелінійного рівняння

$$f(u_{ab}) = i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Як видно з рис. 12.13, за розташуванням точки P безпосередньо можна визначити напругу U_{ab} , а вже за цією напругою, скориставшись вольт-амперними характеристиками самих віток, – і електричні струми I_1, I_2, I_3 .

Як бачимо, в нашому випадку напруга U_{ab} буде від'ємною. Сказане стосується і електричних струмів I_2 та I_3 .

Однією з основних операцій наведеного методу двох вузлів була побудова підсумкових характеристик віток, до складу яких входять джерела е.р.с.

Контрольні питання

1. Як побудувати еквівалентну ВАХ для послідовного з'єднання?
2. Як побудувати еквівалентну ВАХ для паралельного з'єднання?
3. Чи можна у нелінійних колах виконувати еквівалентні аналітичні перетворення елементів кола, якщо при цьому нелінійні елементи не зачіпаються?
4. Чи можна до частини схеми, що замінюється еквівалентним генератором, вносити нелінійні елементи?
5. Для кола якої структури можна застосувати метод двох вузлів?
6. Чи можна застосовувати графічні методи розрахунку для кола, що містить нелінійний елемент з від'ємним динамічним опором?

ЛЕКЦІЯ № 13 ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ ТА АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ НЕЛІНІЙНИХ КІЛ

13.1 Графоаналітичний метод: метод лінеаризації

До графоаналітичних методів відносять комбіновані методи розрахунку нелінійних електричних кіл, в яких розв'язок задачі шукається переважно аналітично, але в поєднанні з відповідними графічними побудовами.

Розглянемо електричне коло з одним нелінійним резистивним елементом (рис. 13.1), характеристика якого зображена на рис. 13.2.

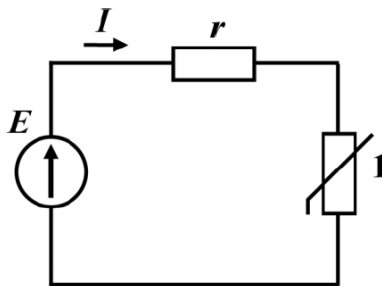


Рисунок 13.1

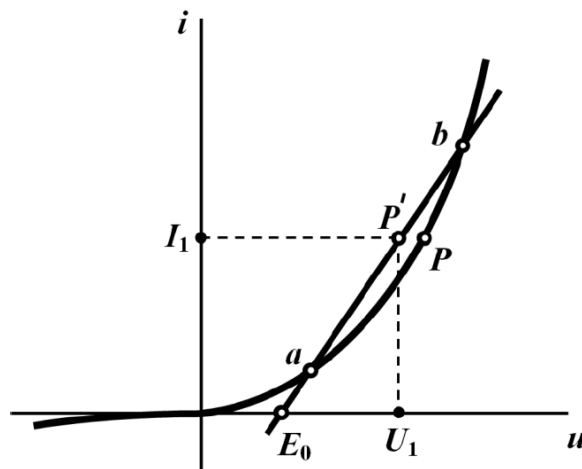


Рисунок 13.2

Припустимо, що робоча точка P знаходиться на ділянці ab вольт-амперної характеристики. Замінімо цю криволінійну ділянку прямою лінією, яка, як видно з рис. 13.2, проходить через точки a та b і перетинає вісь абсцис в деякій точці E_0 .

Практично така заміна означає, що нелінійний опір заміщується віткою, до складу якої входять два елементи: лінійний опір r_0 і е.р.с. E_0 . Остання має бути направлена назустріч струму I , оскільки характеристика цієї вітки зміщена вправо відносно точки початку координат.

Таким чином, отримано лінійне електричне коло, схема якого наведена на рис. 13.3.

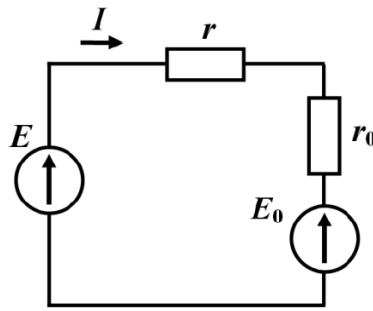


Рисунок 13.3

Величина е.р.с. E_0 визначається у графічний спосіб безпосередньо з рисунка вольт-амперної характеристики (рис. 13.3), а опір r_0 можна розрахувати за виразом

$$r_0 = \frac{U_1 - E_0}{I_1}, \quad (13.1)$$

при цьому точка P' вибирається довільно.

Для такого лінеаризованого кола легко визначити струм за законом Ома

$$I = \frac{E - E_0}{r + r_0}, \quad (13.2)$$

що є основною перевагою даного методу, який називають методом лінеаризації.

Після визначення струму I потрібно перевірити чи знаходиться знайдений струм в межах ділянки ab характеристики. Якщо так, то розрахунок закінчено, в протилежному ж випадку необхідно вибрати нову ділянку лінеаризації кривої і повторити розрахунок.

До недоліків цього методу відносять деяку неточність результатів розрахунку. Це пояснюється заміщенням реальної нелінійної ділянки вольт-амперної характеристики прямолінійною наближеною, що призводить до зміщення робочої точки з P в P' (див. рис. 13.2).

Для розрахунку електричного кола з кількома нелінійними елементами підхід подібний: кожен із нелінійних елементів замінюється віткою, що має складатися з лінійного опору r_k та е.р.с. E_k . Отриману лінійну схему заміщення аналізують аналітично відомими з теорії лінійних кіл методами, а всі знайдені значення струмів перевіряються на відповідність їх лінеаризованим ділянкам характеристик.

13.2 Аналітичний метод

При використанні аналітичного методу вольт-амперні характеристики подають аналітично у вигляді функціональних залежностей.

Нехай, наприклад, характеристику нелінійного опору електричного кола, наведеного на рис. 13.2, задано співвідношенням

$$i = a_1 u_n + a_2 u_n^2 + a_3 u_n^3. \quad (13.3)$$

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа

$$ri + u_n = E. \quad (13.4)$$

З врахуванням (13.3) отримаємо

$$a_1 r u_n + a_2 r u_n^2 + a_3 r u_n^3 + u_n = E. \quad (13.5)$$

Розв'язуючи це нелінійне алгебраїчне рівняння, знаходимо напругу u_n на нелінійному опорі, а скориставшись формулою (13.3) – шуканий струм i .

Розв'язок задачі і в цьому випадку одержуємо наближено, оскільки нелінійне алгебраїчне рівняння майже завжди розв'язується числовими методами.

Одним із простих та ефективних числових методів наближеного розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь є метод Ньютона - Рафсона.

Нехай маємо нелінійне алгебраїчне рівняння

$$f(x) = 0. \quad (13.6)$$

Припустимо, що значення x_0 – нульове наближення розв'язку рівняння (13.6).

Позначимо наступний наближений розв'язок

$$x_1 = x_0 + h, \quad (13.7)$$

де h – поправка до нульового наближення.

Підставимо (13.7) в (13.6) та розкладемо функцію у ряд Тейлора, обмежившись двома першими членами розкладу

$$f(x_1) = f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) \approx 0. \quad (13.8)$$

Звідси

$$h = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

де $f'(x_0)$ – значення похідної функції $f(x)$ при $x = x_0$.

Відповідно до (13.8)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (13.9)$$

Продовжимо знаходити наступні наближення і для $k+1$ -го наближення отримаємо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (13.10)$$

Ітераційний процес припиняють тоді, коли із заздалегідь заданою точністю буде виконуватися умова

$$x_{k+1} \approx x_k.$$

Контрольні питання

1. Як вибираються межі діапазону лінійної апроксимації при застосуванні графоаналітичного методу?

2. Яким чином у графоаналітичному методі знаходиться значення лінійного опору, що вводиться у коло замість нелінійного елемента?

3. Яким чином у графоаналітичному методі знаходиться значення е.р.с., що вводиться у коло замість нелінійного елемента?

4. Що необхідно зробити, якщо у графоаналітичному методі після завершення розрахунку виявилось, що значення струму нелінійного елемента знаходиться поза межами вибраного діапазону лінеаризації?

5. У чому полягає аналітичний метод розрахунку нелінійних електричних кіл?

6. Які Ви знаєте методи аналітичної апроксимації характеристик нелінійних елементів?

7. У яких випадках для розрахунку нелінійних електричних кіл аналітичним методом потрібно використовувати числові методи розрахунку лінійних рівнянь?

8. Чому при використанні числових методів розрахунку лінійних рівнянь неможливо отримати точний розв'язок?

ЛЕКЦІЯ № 14

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ НАПІВПРОВІДНИКОВОЇ ТЕХНІКИ

14.1 Поняття напівпровідника та його фізичних властивостей

З курсу фізики відомо, що всі речовини утворені атомами, які складаються з додатно заряджених ядер і від'ємно заряджених електронів, які обертаються навколо них. Ядра складаються з електрично нейтральних нейтронів і додатно заряджених протонів. Кількість протонів в ядрі визначає його заряд. Електрони, що обертаються навколо ядра у нормальному стані, утворюють електронну оболонку атома, в результаті чого атом є електронейтральним. Узагальнена модель атома (модель Резерфорда-Бора) наведена на рис. 14.1.

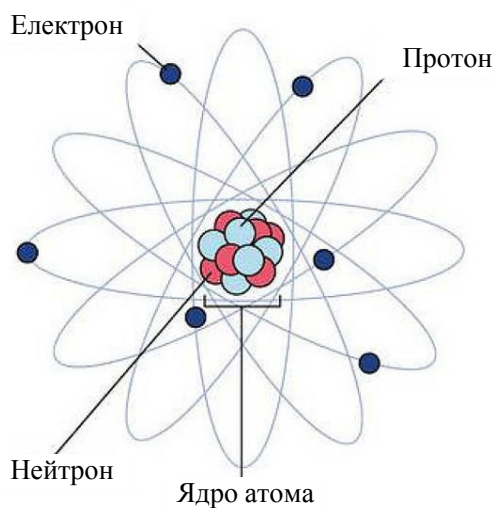


Рисунок 14.1

Електрони обертаються навколо ядер по орбітах і згруповані у відповідні шари, що мають строго визначену енергію. Електрони найбільш віддаленої орбіти мають найбільшу енергію і називаються валентними. Під впливом енергії тепла, світла, радіації чи інших зовнішніх факторів валентні електрони можуть одержати енергію і перейти на більш віддалену від ядра орбіту, тобто стати збудженими. В разі одержання електроном енергії, що перевищує роботу виходу, він покидає поверхню речовини.

В кристалах виникає взаємодія між сусідніми атомами, що приводить до розщеплення енергетичних рівнів електронів і утворення енергетичних зон. Сукупність енергетичних рівнів найбільш віддалених валентних електронів утворює валентну зону. Дозволені, але не зайняті електронами енергетичні рівні, називаються зоною провідності або вільною зоною. Між валентною зоною і зоною провідності може знаходитись заборонена зона. Якщо в зону провідності потрапляють збуджені електрони валентної зони, то це буде забезпечувати провідність речовини. Зонна структура речовин

пояснює різницю між провідниками, напівпровідниками і діелектриками. На рис. 14.2 показані енергетичні зони для цих речовин. Характерною особливістю провідників є те, що у них валентна зона (ВЗ) і зона провідності (ЗП) перекриваються (рис. 14.2). Валентні електрони легко переходять у вільну зону (зону провідності), що і забезпечує їх хорошу провідність уже при температурі абсолютного нуля ($-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$). Діелектрики і напівпровідники відрізняються від провідників присутністю у них між ВЗ і ЗП ще забороненої зони (ЗЗ), у якій не можуть знаходитись електрони. З точки зору зонної теорії діелектрики і напівпровідники відрізняються поміж собою шириною ЗЗ ($W_{ЗЗ}$). До діелектриків (рис. 14,2, б) відносять матеріали, у яких $W_{ЗЗ} > 6\text{ eV}$ (електрон-вольт). Напівпровідникові матеріали, що знаходять технічне використання, мають $W_{ЗЗ} = (0,1\div 3)\text{ eV}$ (рис. 14.2, в). Кремній має $W_{ЗЗ(\text{Si})} = 1,12\text{ eV}$, а германій – $W_{ЗЗ(\text{Ge})} = 0,72\text{ eV}$.

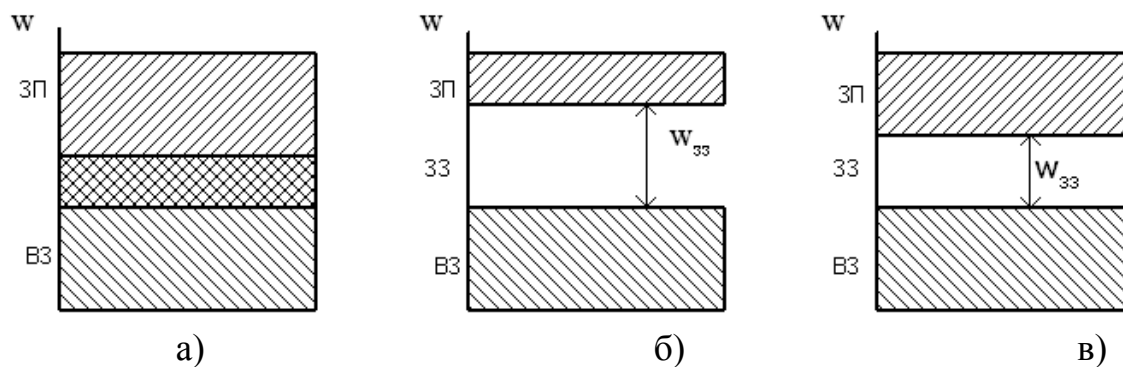


Рисунок 14.2

Для виготовлення напівпровідникових приладів використовуються як прості (германій, кремній, селен), так і складні (арсенід галію, фосфід галію) матеріали.

Розглянемо структуру напівпровідників на прикладі кремнію (Si), що є елементом IV групи таблиці Менделєєва. Кристалічні ґратки кремнію являють собою правильний тетраедр, у вузлах якого розміщені атоми на відстані $\approx 2,4 \cdot 10^{-10}$ см один від іншого. Зв'язок між атомами здійснюється за допомогою ковалентних (подвійних) зв'язків чотиривалентних електронів (рис. 14.3, а). При температурі абсолютного нуля напівпровідникові вільні електрони відсутні, і якщо помістити такий напівпровідник в електричне поле, то буде відсутній і електричний струм.

Внаслідок дії температури чи інших чинників енергія деяких валентних електронів зростає. Внаслідок цього вони розривають ковалентні зв'язки і стають вільними. Атом, якого залишив електрон, перетворюється в позитивно заряджений іон. Цей позитивний заряд умовно приписується розірваному ковалентному зв'язку, який називають діркою (зображена кружком, рис. 14.3, б).

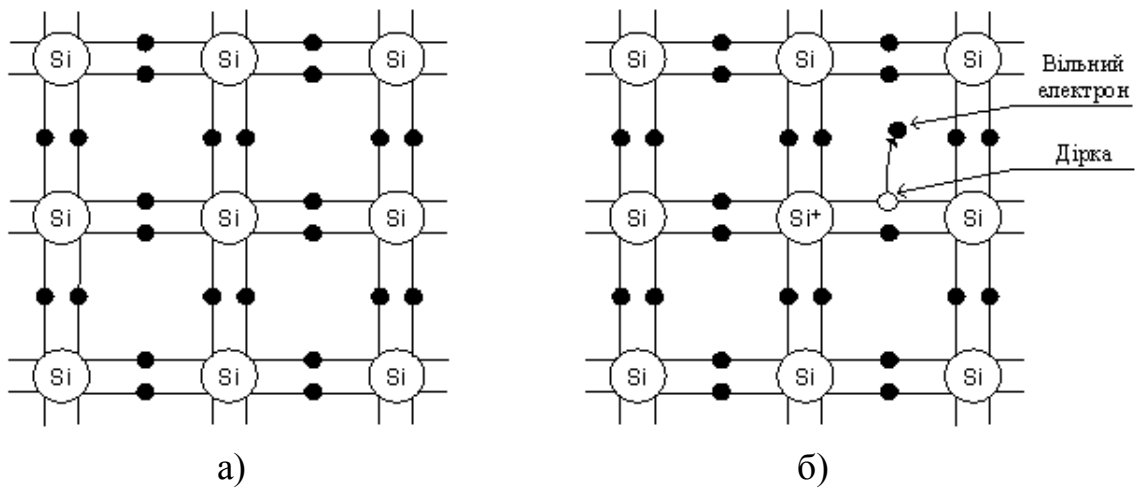


Рисунок 14.3

Якщо помістити такий напівпровідник в електричне поле, то виникне направлений рух електронів і дірок, тобто електричний струм. Таку провідність хімічно чистих напівпровідників називають власною. Вона забезпечується в однаковій мірі дірками та електронами.

14.2 Домішкові напівпровідники

Процес внесення домішок до вихідного напівпровідника називають легуванням. Як домішки використовують елементи III групи (In – індій, Ga – галій, B – бор) або V групи (Sb – сурма, As – миш'як, P – фосфор) таблиці Менделєєва. Елементи III групи називають акцепторними, а V – донорними домішками. Якщо деякі атоми кремнію замінити акцепторною домішкою (наприклад, тривалентним індієм), то з одним із атомів кремнію атом індію буде зв'язаний тільки за рахунок атому кремнію, тому що In має тільки три валентних електронів, а сусідів в кристалі у нього чотири (рис. 14.4, а). В цьому випадку енергетичні рівні валентних електронів індію будуть знаходитись у забороненій зоні кремнію поблизу його валентної зони (рис. 14.4, б). Енергетичні рівні індію не будуть перетворюватись в енергетичну зону через значну віддаленість їх між собою (один атом індію припадає на 106–107 атомів кремнію). Між енергетичним рівнем індію і валентною зоною кремнію має місце заборонена зона $w_a \approx 0,1$ eV. Енергетичні рівні індію при температурі абсолютного нуля будуть вільні від електронів. В разі підвищення температури енергія валентних електронів кремнію зростає. При її величині більшій w_a збуджені валентні електрони кремнію переходять на валентні рівні індію, а атоми кремнію перетворюються в позитивно заряджені іони, тобто у валентній зоні кремнію з'являються дірки. При більш високих температурах розриваються ковалентні зв'язки кремнію, що спричиняє появу додатково однакової кількості дірок у валентній зоні і електронів у зоні провідності кремнію.

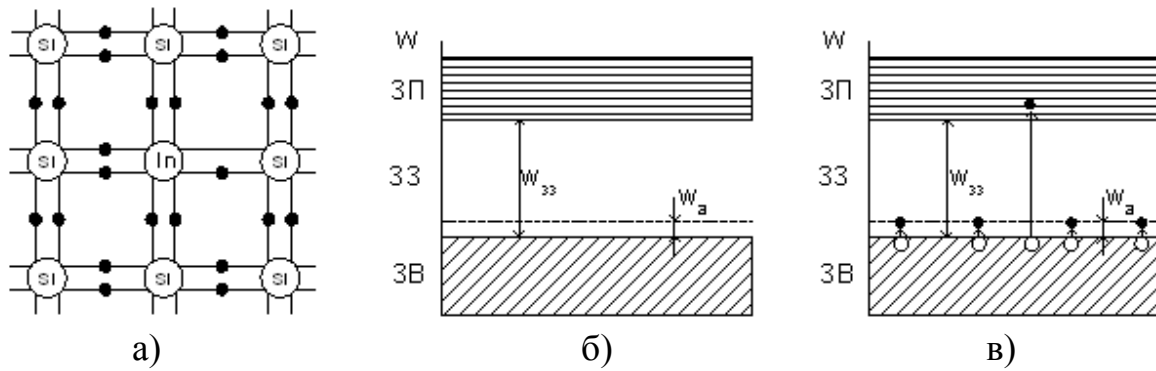


Рисунок 14.4

Таким чином, у напівпровідника з акцепторною домішкою (рис. 14.4, в) кількість дірок (рр) буде більшою ніж електронів (np), що забезпечує, в основному, його діркову провідність. Дірки при цьому називаються основними носіями а електрони – неосновними. Напівпровідник з дірковою провідністю називають напівпровідником р-типу. Якщо до кремнію ввести атоми п'ятивалентного елемента (наприклад, As – миш'яку), то чотири його валентних електронів будуть взаємодіяти з сусідніми атомами кремнію, а п'ятий – буде обертатися навколо атому миш'яку (рис. 14.5, а). Валентні електрони п'ятивалентної домішки утворюють у верхній частині забороненої зони кремнію енергетичний рівень, який утворює з зоною провідності кремнію заборонену зону $w_a \approx 0,1$ еВ (рис. 14.5, б).

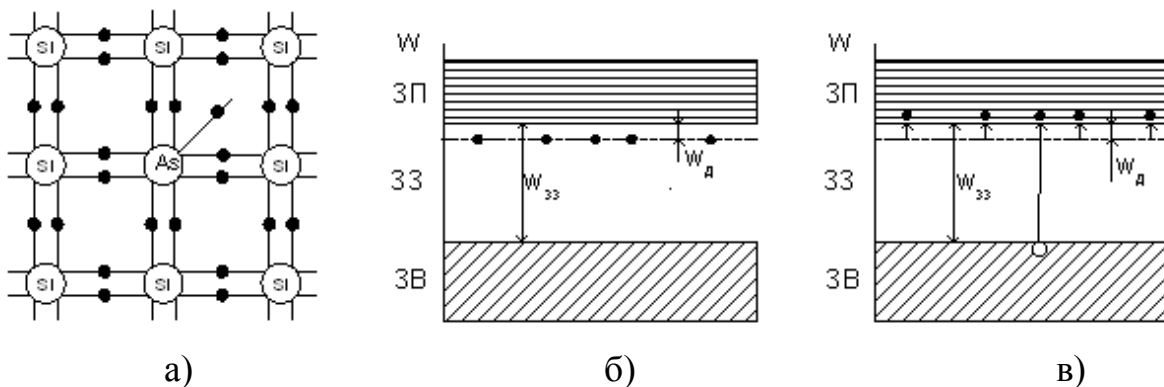


Рисунок 14.5

Такий зв'язок значно слабкіший ніж ковалентний, тому уже при невеликих температурах цей зв'язок розривається, і електрони донорної домішки (миш'яку) стають вільними, тобто переходять у зону провідності кремнію. При більш високих температурах валентні електрони кремнію, в разі збільшення їх енергії на величину $>W_{зз}$, переходять у зону провідності, тобто у валентній зоні кремнію з'являються дірки, а у зоні провідності – така ж кількість електронів (рис. 14.5 в). Таким чином, у напівпровідників з донорними домішками кількість вільних електронів (np) буде значно бі-

льшою, ніж кількість дірок (p_n) ($n_n \gg p_n$), що зумовлює їх в основному електронну провідність. Електрони через це називаються основними носіями зарядів, а дірки – неосновними. Домішкові напівпровідники з переважно електронною провідністю називаються напівпровідниками n-типу.

14.3 Явище p-n переходу та його властивості.

Якщо два напівпровідники з різними типами провідності привести до контакту, то на межі їх розділу буде мати місце різниця концентрації вільних носіїв зарядів одного знака (рис. 14.6), тобто $p_p \gg p_n$ і $n_n \gg n_p$.

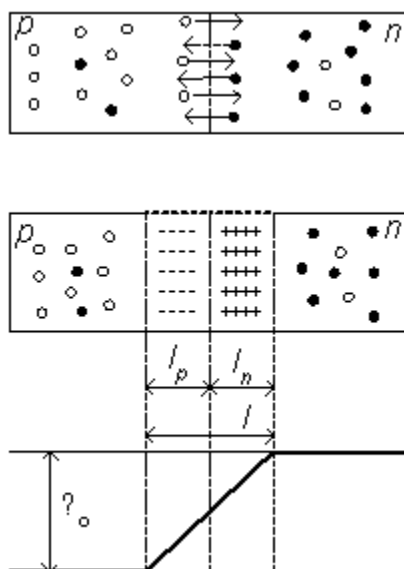


Рисунок 14.6

За рахунок дифузії електрони з n області, де їх концентрація вища, будуть переміщуватись в область p, де їх концентрація нижча, рекомбінуючи там з дірками. Дірки p області, навпаки, будуть переходити в область n, рекомбінуючи там з електронами. В результаті таких переміщень на межі поділу напівпровідників в n області залишаються позитивно заряджені іони (атоми p'ятивалентних домішок, що втратили електрон), а в області p – негативно заряджені іони акцепторних домішок, які придбали електрони. Треба мати на увазі, що іони є нерухомі. Таким чином, дифузія основних носіїв заряду приводить до створення примежового шару l (p-n-переходу), одна сторона якого заряджена негативно (p-область), а інша – позитивно (n-область). Різниця потенціалів, створена цими зарядами, називається контактною різницею потенціалів або потенціальним бар'єром UK (рис. 14.6). Цей бар'єр спричиняє гальмівну дію для основних і пришвидшувальну – для неосновних носіїв зарядів. Внутрішнє поле переходу забезпечує однаковість потоків носіїв зарядів в обох напрямках, тобто рівність нулю сумарного струму через p-n перехід в разі відсутності зовнішнього електрично-

го поля. Електрони, що приходять до р-n переходу з боку n-області, відштовхуються від'ємними іонами, а дірки р-області – позитивними іонами. Таким чином, р-n переходом будемо називати область на межі поділу двох напівпровідників з різними типами провідності, яка має відповідної ширини ділянку, збіднену рухомими носіями, потенціальний бар'єр і значний внутрішній опір. Якщо концентрація домішок в р- і n- областях різна, то р-n перехід буде більш глибоко проникати в ту область, концентрація домішок в якій менше, тобто $\ln \neq \ln$. Величина потенціального бар'єра U_K залежить від співвідношення концентрації носіїв зарядів одного знака по обидва боки переходу і визначається співвідношенням

$$U_K = \varphi_t \ln(p_p / p_n) = \varphi_t \ln(n_n / n_p), \quad (14.1)$$

де $\varphi_t = KT/q$ – тепловий потенціал,

K – стала Больцмана,

T – температура в градусах Кельвіна,

Q – заряд електрона.

У випадку, коли $T=2930$ К (кімнатна температура), $\varphi_t=0,026$ еВ. Потенціальний бар'єр U_K для кремнієвих напівпровідників має величину $U_K(\text{Si}) = 0,7 \div 0,8$ еВ, для германієвих $U_K(\text{Ge}) = 0,3 \div 0,4$ еВ, а їх ширина – частки одиниці мкм.

Контрольні питання

1. Що таке напівпровідники? Чим вони відрізняються від провідників та діелектриків?
2. Що таке валентна зона? Для яких типів речовин вона характерна?
3. Що таке заборонена зона? Для яких типів речовин вона характерна?
4. Що таке зона провідності? Для яких типів речовин вона характерна?
5. Що таке власна провідність напівпровідника?
6. Для чого у напівпровідники вводяться домішки? Як це впливає на їх фізичні властивості?
7. Який тип домішок називається акцепторним?
8. Який тип домішок називається донорним?
9. У чому різниця між напівпровідниками р-типу та n-типу?
10. Що називається р-n переходом?
11. Що таке потенціальний бар'єр? Чому він виникає та як визначається?

ЛЕКЦІЯ № 15 НАПІВПРОВІДНИКОВІ ДІОДИ

15.1 Вольт-амперна характеристика р-п переходу.

Розглянемо вплив на р-п перехід зовнішньої напруги. Якщо до р-п переходу підвести зовнішню напругу, полярність якої направлена назустріч контактній різниці потенціалів переходу (рис. 15.1, а), то дірки р-області, відштовхуючись від додатного потенціалу зовнішнього джерела, наближаються до р-п переходу.

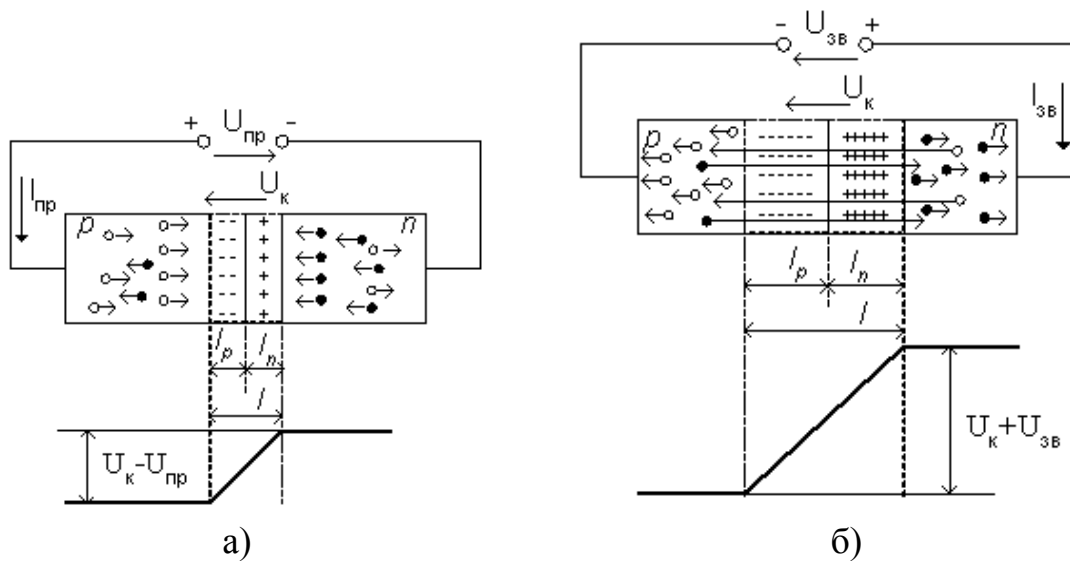


Рисунок 15.1

Це приводить до часткової рекомендації з негативними іонами акцепторної домішки і звуження р-п переходу з боку р-області. Аналогічно, електрони п-області, зміщуючись під впливом негативного полюсу зовнішньої напруги до р-п переходу, рекомбінують з додатними іонами донорної домішки звужують р-п перехід з боку п-області. Потенціальний бар'єр р-п переходу зменшується, що приводить збільшення дифузійних переміщень через нього основних носіїв зарядів. Через р-п перехід та у зовнішньому колі виникає струм, який називається прямим струмом $I_{пр}$ р-п переходу, а зовнішня напруга з розглянутою полярністю – прямою напругою $U_{пр}$. Якщо змінити полярність зовнішнього джерела напруги на протилежну (в цьому разі напругу будемо називати зворотною $U_{зв}$), то основні носії зарядів (дірки р-області і електрони п-області) будуть притягуватись до відповідних полюсів зовнішнього джерела напруги (рис. 15.1, б). Це приведе до розширення р-п переходу і збільшення його потенційного бар'єру на величину зовнішньої напруги. Неосновні носії зарядів (електрони р-області і дірки п-області) будуть відштовхуватись від полюсів зовнішнього джерела

напруги і зміщуватися до р-n переходу. Поле р-n переходу чинить на неосновні носії зарядів притягувану дію, а тому вони цим полем (дрейфовим способом) будуть переміщуватись через перехід і зумовлювати через р-n перехід і у зовнішньому колі струм, який називається зворотним струмом $I_{зв}$. Таким чином, зворотний струм є струмом неосновних носіїв, які, як відомо, в основному виникають під дією температури. Тому зворотний струм ще називають тепловим. Струм через р-n перехід визначається залежністю

$$I_{p-n} = I_0 \left(e^{\frac{\pm U_{зв}}{\Phi_t}} - 1 \right), \quad (15.1)$$

де I_0 – зворотний струм насичення,

«+» – відповідає прямій зовнішній напрузі, а «-» – зворотній,

Φ_t – тепловий потенціал.

На рис. 15.2 наведені вольт-амперні характеристики (ВАХ) р-n переходу, побудовані згідно з вищеподаним виразом для різних зовнішніх температур.

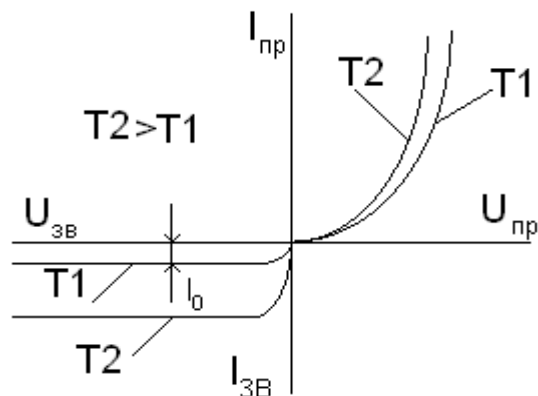


Рисунок 15.2

Як відомо, прямий струм р-n переходу утворюється основними носіями, а зворотний – неосновними. Через те, що концентрація основних носіїв заряду на декілька порядків перевищує концентрацію неосновних носіїв, прямий струм на декілька порядків більший, ніж зворотний. Цим зумовлюються вентильні властивості р-n переходу.

Пробій р-n переходу. Під пробоем р-n переходу розуміють явище різкого збільшення струму через перехід. Залежно від причин, які спричиняють зростання струму через р-n перехід, розрізняють тепловий і електричний пробій. Електричний пробій буває лавинним і тунельним.

Тепловий пробій зумовлюється збільшенням числа носіїв заряду в р-n переході за рахунок їх термогенерації, якщо відведення тепла від переходу в навколишній простір в одиницю часу буде меншим, ніж його збільшення

під дією струму (рис. 15.3, гілка 1). Це приводить до надмірного розігріву р-n переходу та його розплавлення. Цей пробій є незворотним.

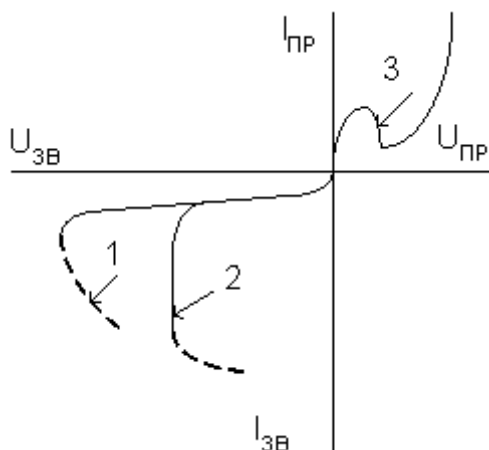


Рисунок 15.3

Лавинний пробій. Цей пробій зумовлений лавинним розмноженням носіїв заряду у разі ударної іонізації атомів швидкими носіями. Сутність його у тому, що неосновні носії заряду у р-n переході під дією зворотної напруги прискорюються полем і при русі в ньому зіштовхуються з атомами кристалічних ґраток. При відповідній напруженості електричного поля носії заряду набувають енергії, достатньої для вибивання валентних електронів, тобто для появи додаткових пар носіїв заряду – електронів і дірок. Ці заряди, в свою чергу, прискорюються і в разі зіткнення з атомами також утворюють додаткові носії заряду. Цей процес носить лавинний характер і може відбуватись у відносно широких р-n переходах. Збільшення струму переходу (збільшення рухомих носіїв заряду в р-n переході) приводить до зменшення його опору, внаслідок чого напруга на р-n переході залишається практично незмінною (гілка 2 на рис. 15.3). Цей процес буде зворотним, якщо зростання струму не спричинить накопиченню тепла в р-n переході. В разі порушення рівноваги між накопиченням тепла в р-n переході і його віддачею в навколишній простір настає тепловий пробій (пунктирна частина гілки 2).

Тунельний пробій. В основі тунельного пробою лежить явище безпосереднього відриву валентних електронів від атомів кристалічних ґраток під впливом великого електричного поля. Утворені таким чином додаткові дірки і електрони збільшують струм через р-n перехід. Тунельний пробій відбувається у вузьких р-n переходах, в яких при порівняно невеликій напрузі має місце висока напруженість електричного поля (рис. 15.3, гілка 3). В кремнієвих напівпровідниках тунельний пробій настає при напруженості $U_K \geq 4 \cdot 10^5$ В/см, а у германієвих – при $U_K \geq 2 \cdot 10^5$ В/см. Тунельний пробій є зворотним.

Ємності р-n переходу. Зазвичай виділяють дві ємності: дифузійну і бар'єрну. Дифузійна ємність – це ємність прямо зміщеного р-n переходу

$$C_D = \frac{dQ_3}{dU} = \frac{I \cdot \tau}{\varphi_t}, \quad (15.2)$$

де φ_t – час життя неосновних носіїв заряду.

Зворотно зміщений р-п перехід характеризується бар'єрною ємністю

$$C_B = \frac{\xi_o \cdot \xi_{HP} \cdot Si}{L} \sqrt{\frac{U_K}{U_{ЗВ}}}, \quad (15.3)$$

де ξ_o і ξ_{HP} – відповідно, діелектрична проникність вакууму і напівпровідника,

Si – площа р-п переходу,

L – ширина р-п переходу,

U_K – висота потенційного бар'єра,

$U_{ЗВ}$ – величина зворотної напруги.

15.2 Напівпровідникові діоди загальног призначення

Напівпровідниковим діодом називають напівпровідниковий прилад з одним р-п переходом і двома виводами.

За функціональним призначенням, принципом створення р-п переходу і використання тих чи інших його властивостей діоди діляться на випрямні, імпульсні, високочастотні, стабілітрони, тунельні, варікапи, фотодіоди, світлодіоди та інші. Умовні позначення діодів на схемах наведені на рис. 15.4. Більшість діодів виконують на основі несиметричних **p-n** переходів. Вивід від **p**-області називають анодом, а від **n**-області – катодом. Розглянемо особливості будови, характеристики і параметри найбільш вживаних діодів.

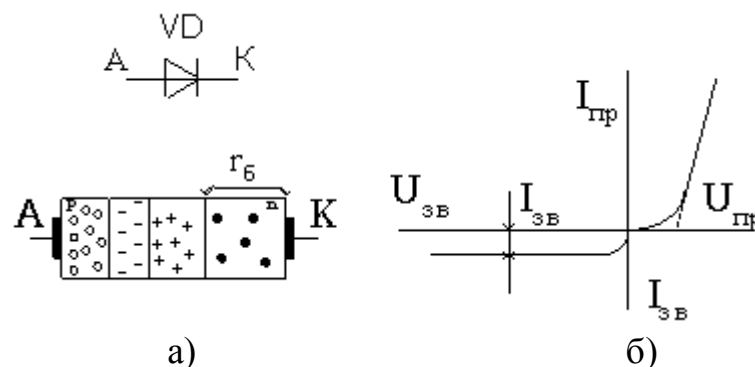


Рисунок 15.4

Випрямні діоди призначені для випрямлення змінного струму низької частоти. Електронно-дірковий перехід має площинну конструкцію, щоб пропускати великі струми і виконується на високоомному матеріалі (для

одержання великих зворотних напруг). Вони виконуються на основі несиметричних р-п переходів. Область з малою концентрацією домішок, яка називається базою, має опір $r_6 = 1 \div 30$ Ом, яка з'єднана послідовно з р-п переходом (рис. 15.4, а). Збільшення прямої напруги знижує висоту потенціального бар'єра і він перестає впливати на величину прямого струму. Прямий струм через діод буде визначатися лише величиною r_6 і лінійно залежати від прямої напруги $U_{пр}$, рис. 15.4, б. Цей відрізок ВАХ називається омичним і є робочим.

Основними параметрами випрямних діодів є:

- $I_{пр\ ср}$ – максимальне значення прямого струму через діод;
- $I_{зв}$ – зворотний струм через діод при максимальній температурі;
- $U_{пр}$ – середнє значення спаду напруги на діоді при $I_{пр\ ср}$;
- $U_{зв\ max}$ – максимально допустима зворотна напруга.

15.3 Напівпрові діоди спеціального призначення

Стабілітрони

Стабілітрон – це напівпровідниковий діод, робота якого базується на використанні явища електричного пробоя р-п переходу. У низьковольтних стабілітронів (з малим опором бази) найбільш можливий тунельний пробій, а у стабілітронів з високоомною базою пробій має лавинний характер. На рис. 15.5 наведено умовне зображення стабілітрона та його вольт-амперна характеристика. Основні параметри стабілітронів: $U_{ст\ ном}$ – номінальна напруга стабілізації, $I_{ст\ min}$ – мінімальний струм стабілітрона, $I_{ст\ ном}$ – номінальний струм стабілітрона, $I_{ст\ max}$ – максимальний струм стабілітрона.

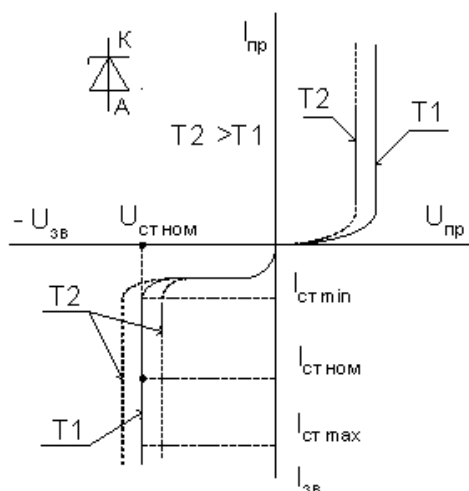


Рисунок 15.5

Фотодіоди

Фотодіоди – це фотоелектричні прилади з одним р-п, параметри яких змінюються під дією квантів променевої енергії. Робота фотодіодів базується на явищі внутрішнього фотоелектричного ефекту, сутність якого полягає в іонізації атомів кристалічних ґраток напівпровідника чи домішок у ньому квантами променевої енергії. В разі іонізації атомів вихідного напівпровідника генеруються електронно-діркові пари, які підвищують провідність напівпровідника. Фотоелектричний ефект виникає у разі перевищення енергією квантів світла ширини забороненої зони. Фотодіод може працювати як із зовнішнім джерелом живлення (фотодіодний режим, або режим фотоперетворювача, рис. 15.6, а), так і без нього (режим фотогенератора, рис. 15.6, б).

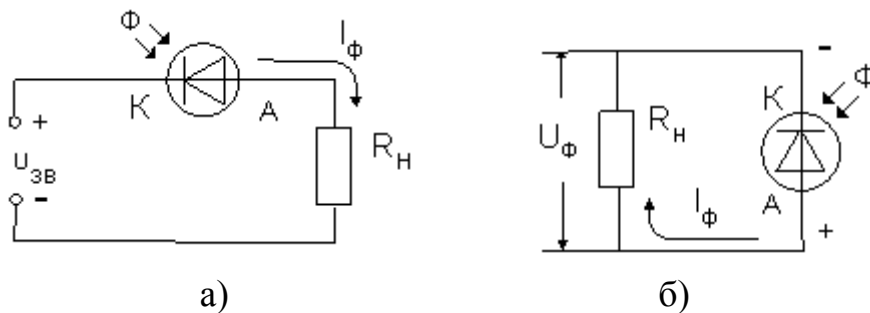


Рисунок 15.6

Світлодіоди

Світлодіоди – це напівпровідникові прилади, які за рахунок процесів, що відбуваються в р-п переході при протіканні через нього прямого струму, генерують оптичне випромінювання. Випромінювання відбувається через рекомбінацію носіїв заряду у високоомній області (базі). Неосновні носії заряду, які інжектуються з емітера, рекомбінують у базі з основними носіями заряду (переходять із зони провідності у валентну зону). При цьому випромінюється вивільнена енергія у вигляді квантів світла. Довжина хвилі λ випромінюваного світла однозначно визначається енергією кванта, яка приблизно дорівнює ширині забороненої зони напів-провідника. Колір випромінюваного світла залежить від довжини хвилі λ , яка залежить

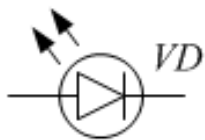


Рисунок 15.6

від матеріалу напівпровідника. Світлодіоди з арсеніду галію ($\lambda=0,9\div 1,4$ мкм) випромінюють інфрачервоне світло, з фосфіду галію ($\lambda=0,7$ мкм) – червоне, з карбіду кремнію ($\lambda=0,53$ мкм) – жовто-зелене. Умовне зображення світлодіодів наведено на рис. 15.6. Світлодіоди широко використовуються як індикаторні прилади та швидкодійні джерела світла (їх перемикання відбувається за $10^{-7}\div 10^{-9}$ с).

Варикапи

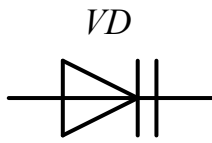


Рисунок 15.7

Варикапом називають напівпровідниковий діод, призначений для використання як керована електричною напругою ємність. Умовне позначення варикапа на схемі наведено на рис. 15.7. Варикап працює при оберненій напрузі, прикладеній до р-п переходу. Його ємність може змінюватися в широких межах, а її значення визначають із виразу

$$C_{\epsilon}(U) = C_{\epsilon}(0) \left(\frac{U_{\kappa}}{U_{\kappa} - U} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (15.4)$$

де $C_{\epsilon}(0)$ – ємність при нульовій напрузі на діоді;

U_{κ} – контактна різниця потенціалів;

U – прикладена обернена напруга;

$n = 2$ для різких переходів та $n = 3$ – для плавних.

Основні параметри варикапів.

- Загальна ємність C_{ϵ} – ємність, виміряна між виводами варикапа при заданій оберненій напрузі (десятки–сотні пФ).
- Коефіцієнт перекриття за ємністю – відношення ємностей варикапа при двох заданих значеннях обернених напруг: $K = C_{\epsilon.макс} / C_{\epsilon.мін}$ (декілька одиниць–декілька десятків).
- Опір втрат $R_{втр}$ – сумарний активний опір, який охоплює опори кристалу, контактних з'єднань та виводів варикапа.
- Добротність Q_{ϵ} – відношення реактивного опору варикапа на заданій частоті змінного сигналу (ω) до опору втрат ($R_{втр}$) при заданому значенні ємності або оберненої напруги: $Q_{\epsilon} = X_C / R_{втр}$ (десятки–сотні).
- Температурний коефіцієнт ємності $\alpha_T = \Delta C / (C \cdot T)$ – від $2 \cdot 10^{-4}$ до $6 \cdot 10^{-4}$ 1/К.

Контрольні питання

1. Як розраховується дифузійна ємність р-п переходу?
2. Як розраховується бар'єрна ємність р-п переходу?
3. Як виглядає ВАХ напівпровідникового випрямного діода?
4. В чому полягає особливість ВАХ стабілітрона?
5. Що таке світлодіод? У чому його відмінність від випрямного діода?
6. Що таке фотодіод? У чому його відмінність від випрямного діода?
7. Що таке варикап? У чому його відмінність від випрямного діода?
8. Як залежить ємність р-п переходу варикапа від прикладеної напруги?

ЛЕКЦІЯ № 16 БІПОЛЯРНІ ТРАНЗИСТОРИ

16.1 Статичний режим роботи біполярного транзистора

Біполярний транзистор – це тришарова структура n-p-n або p-n-p типу, яка має два p-n переходи і виводи від кожного шару. За послідовністю чергування типу шарів біполярні транзистори поділяються на p-p-p транзистори (рис. 16.1, а) та n-p-n транзистори (рис. 16.1, б). На цьому ж рисунку наведено умовні графічні зображення транзисторів на принципових електричних схемах та їх символічне позначення (VT). Шар, що є джерелом носіїв заряду (електронів або дірок), називається емітером (Е), шар, який збирає заряди, називається колектором (К), а центральний шар – базою (Б). Назву біполярний транзистор має тому, що струм у ньому створюється двома типами носіїв заряду: дірками і електронами.

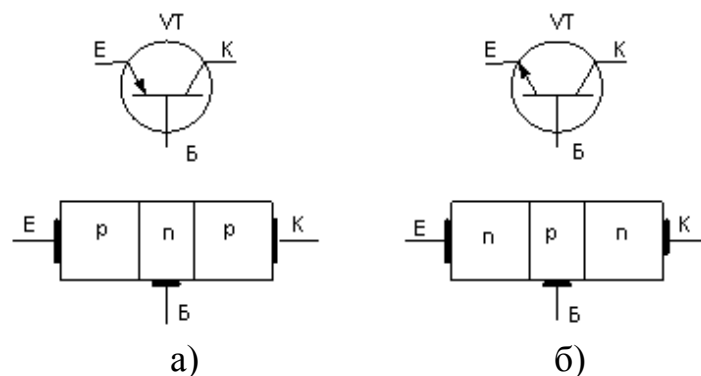


Рисунок 16.1

У будові емітера, бази і колектора є свої особливості. Виготовляючи транзистор, концентрацію основних носіїв в емітері (введенням домішки) роблять більшою ніж у колекторі, а концентрація основних носіїв у базі набагато менша, ніж в колекторі, а тим більш, ніж в емітері. Електронно-дірковий перехід між емітером і базою називається емітерним, а між базою і колектором – колекторним. На умовному зображенні транзисторів емітер позначається стрілкою, яка завжди направлена від p області до n області. Шари напівпровідників утворюють два p-n переходи емітерний (Π_e) і колекторний (Π_k). Полярність зовнішніх джерел вибирають такими, щоб емітерний перехід був зміщений у прямому напрямку, а колекторний – у зворотному. Це приводить до зменшення потенціального бар'єра емітерного переходу і збільшення потенціального бар'єра колекторного переходу. В результаті зменшення бар'єра емітерного переходу відбувається дифузія дірок з емітера в базу і електронів із бази в емітер. Електронною складовою дифузійного струму через емітерний перехід можна знехтувати, тому що

$p_p \gg n_p$. Таким чином, струм емітера I_e утворюється за рахунок дифузійного переміщення дірок через емітерний перехід. Під дією сил дифузії дірки рухаються через базу в напрямку колектора, частково рекомбінують з електронами бази, утворюючи базовий струм I_b . Оскільки база є тонкою і має малу концентрацію домішок, то основна частина дірок, інжектованих емітером, досягає колекторного переходу. Поле колекторного переходу, зміщеного у зворотному напрямку, дірки переміщуються у колекторний шар, створюючи колекторний струм I_k , тобто емітерний струм дорівнює сумі колекторного і базового струмів і їх зв'язок підпорядкований першому закону Кірхгофа

$$I_e = I_k + I_b. \quad (16.1)$$

Відношення колекторного струму I_k транзистора до емітерного струму I_e називається коефіцієнтом передачі струму емітера

$$a = \frac{I_k}{I_e}. \quad (16.2)$$

Коефіцієнт a менший одиниці і знаходиться в межах 0,9 ... 0,999.

Використовуючи наведені вирази можна визначити зв'язки між колекторним і базовим, а також емітерним і базовим струмами:

$$I_k = \frac{a}{(1-a)} I_b = \beta \cdot I_b, \quad (16.3)$$

$$I_e = \frac{1}{1-a} I_b = (1 + \beta) \cdot I_b. \quad (16.4)$$

де $\beta = a/(1-a)$ – коефіцієнт підсилення транзистора за струмом.

Коефіцієнт підсилення струму бази транзисторів знаходиться у межах 50...200.

Присутність у базовій та колекторній областях власних неосновних носіїв заряду, для яких зворотно зміщений перехід є прискорувальним, приводить до появи додаткової некерованої складової струму колектора I_{k0} . Оскільки основною причиною появи неосновних носіїв заряду є температура, то цей струм ще називають тепловим. У базовому колі тепловий струм направлений назустріч базовому струму, що зменшує його величину. Таким чином, загальний струм колектора складається з керованої (βI_b) і некерованої (теплової I_{k0}) складових $I_k = \beta I_b + I_{k0}$. Базовий струм з урахуванням теплової складової буде дорівнювати

$$I_b = \frac{I_e}{1 + \beta} - I_{k0} = \frac{I_k}{\beta} - I_{k0}. \quad (16.5)$$

У транзисторах n-p-n типу назви і функції усіх трьох шарів аналогічні розглянутого p-n-p транзистора, змінюється тільки тип носіїв заряду і полярність зовнішніх джерел живлення.

Схеми вмикання транзисторів. Залежно від того, який електрод транзистора є спільним для вхідного і вихідного кіл, транзистори у схемах можуть вмикатись трьома способами: за схемою зі спільною базою (СБ), за схемою зі спільним емітером (СЕ) та за схемою зі спільним колектором (СК), рис. 16.2. В подальшому будемо розглядати основну схему вмикання транзистора, схему зі спільним емітером.

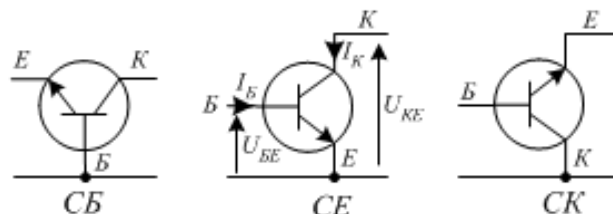


Рисунок 16.2

Статичні характеристики транзистора. Транзистор, ввімкнений за будь-якою схемою (СК, СБ, СЕ), характеризується такими фізичними величинами: вхідна і вихідна напруги та вхідний і вихідний струми. Взаємозв'язок між цими величинами визначає сімейство вхідних і вихідних статичних вольт-амперних характеристик транзистора. Для схеми увімкнення зі спільним емітером вхідна характеристика транзистора – це залежність струму бази I_B від напруги база-емітер U_{BE} , за умови що напруга між колектором і емітером незмінна ($U_{KE} = \text{const}$), тобто

$$I_B = \frac{f(U_{BE})}{U_{KE}} = \text{const}. \quad (16.6)$$

Сімейства вихідних характеристик транзистора – це залежність струму колектора I_K від напруги колектор-емітер U_{KE} , за умови що струм бази незмінний ($I_B = \text{const}$)

$$I_K = \frac{\varphi(U_{KE})}{I_B} = \text{const}. \quad (16.7)$$

Сімейства вхідних статичних характеристик наведені на рис. 16.3, а. В разі $U_{KE} = 0$ вхідна характеристика відповідає прямій гілці вольт-амперної характеристики двох паралельно з'єднаних p-n переходів (емітерного і колекторного). За $U_{KE} \neq 0$ струм бази зменшується (характеристика зміщується вниз), що пояснюється зменшенням кількості рекомбінацій основних носіїв заряду в області бази.

Вихідні характеристики транзистора у схемі зі C_E (рис. 16.3, б) починаються з початку координат. В разі $U_{KE} = 0$ на колекторному переході є напруга U_{BE} , яка зміщує його в прямому напрямку. З області колектора інжектуються основні заряди у базу, що компенсує потік основних носіїв заряду з емітера в колектор, тобто взаємно врівноважується потік носіїв через колекторний перехід і $I_K = 0$. При підвищенні напруги U_{KE} пряма напруга на колекторному переході спочатку знижується, зменшується інжекція основних носіїв заряду через колекторний перехід і відповідно збільшується колекторний струм. При збільшенні U_{KE} до величини $0,5 \div 1,5$ В, колекторний перехід зміщується у зворотному напрямку і подальше збільшення колекторного струму відбувається в за рахунок модуляції бази зворотно зміщеним колекторним переходом. В разі збільшення базового струму характеристики будуть зміщуватись в бік збільшення колекторного струму, тому що

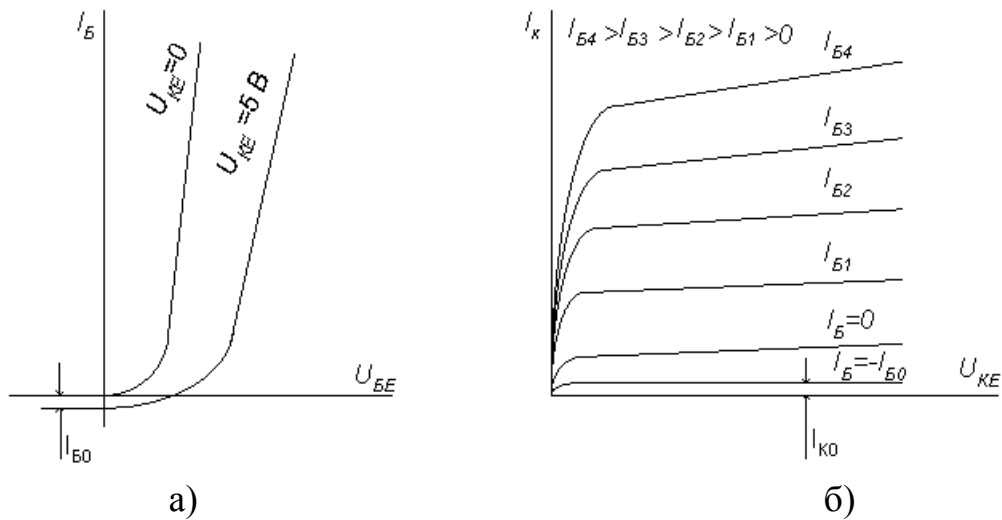
$$I_K = \beta I_B + I_{K0}.$$


Рисунок 16.3

16.2 Динамічний режим роботи біполярного транзистора

У динамічному режимі роботи транзистора одночасно змінюються вхідна і вихідна напруги та його вхідний і вихідний струми. Так, для схеми з

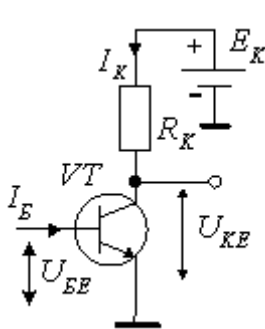


Рисунок 16.4

C_E вхідний (базовий) струм залежить від вхідної і вихідної напруг одночасно, тобто динамічна вхідна характеристика описується рівнянням $I_B = f(U_{BE}) | U_{KE} = var$. Аналогічно, вихідна динамічна характеристика описується рівнянням $I_K = \varphi(U_{KE}) / I_B = var$. Динамічний режим має місце при вмиканні в колекторне коло резистора R_K (рис. 16.4). Відповідно до другого закону Кірхгофа, маємо $E_K = U_{KE} + I_K R_K$. Пряма лінія, що описується цим рівнянням, називається навантажувальною

прямою або вихідною динамічною характеристикою. На сімействі вихідних статичних характеристик транзистора навантажувальна пряма буде за двома точками (рис. 16.5): $U_{KE} = E_K$ (якщо $I_K = 0$) і $I_K = E_K/R_K$ (якщо $U_{KE} = 0$). Навантажувальна лінія і сімейство статичних характеристик транзистора визначають залежність колекторного струму від струму бази і напруги на колекторі за постійної величини е.р.с. джерела живлення та незмінного опору R_K . Режим роботи транзистора визначається точкою перетину навантажувальної лінії і статичних характеристик з відповідним базовим струмом. Ця точка перетину називається робочою точкою. Залежно від її положення розрізняють три характерні області на динамічній характеристиці або три режими роботи транзистора.

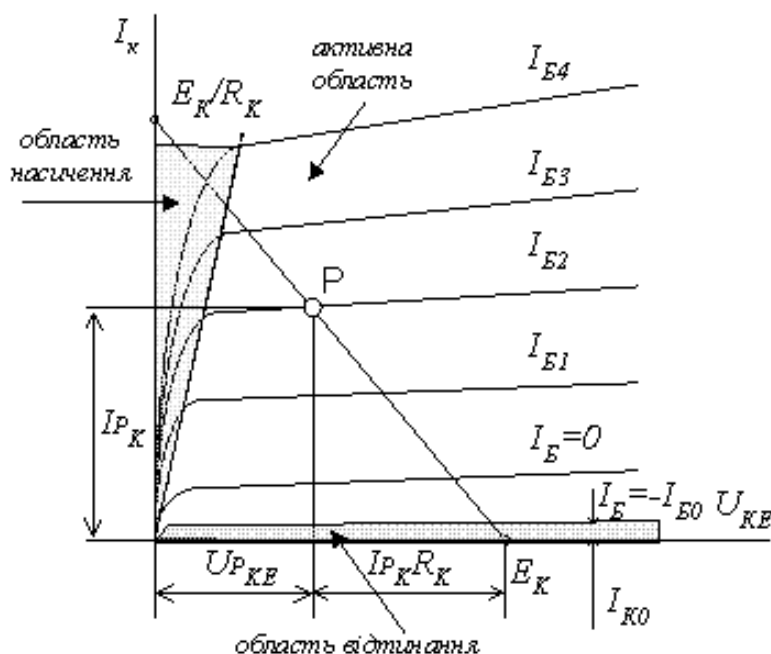


Рисунок 16.5

Активний режим (робоча точка знаходиться в активній області), у якому емітерний р-п перехід транзистора зміщений у прямому напрямі, а колекторний р-п перехід у зворотному. В такому режимі транзистор працює у схемах підсилювачів електричних сигналів.

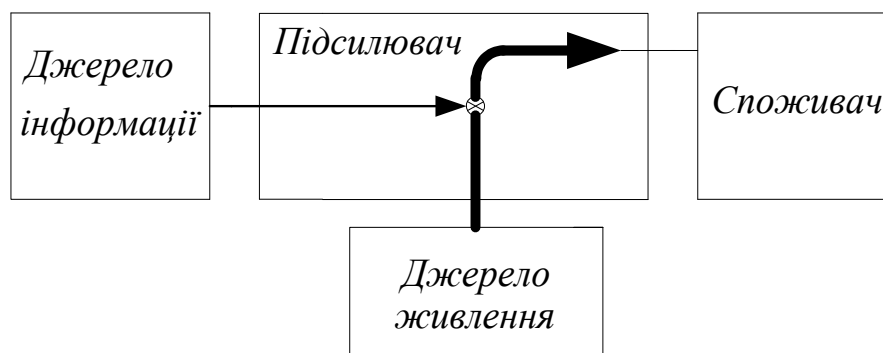
Режим насичення (робоча точка знаходиться в області насичення), у якому обидва р-п переходи транзистора зміщені у прямому напрямі.

Режим відтинання (робоча точка знаходиться в області відтинання), у якому обидва р-п переходи зміщені у зворотному напрямі

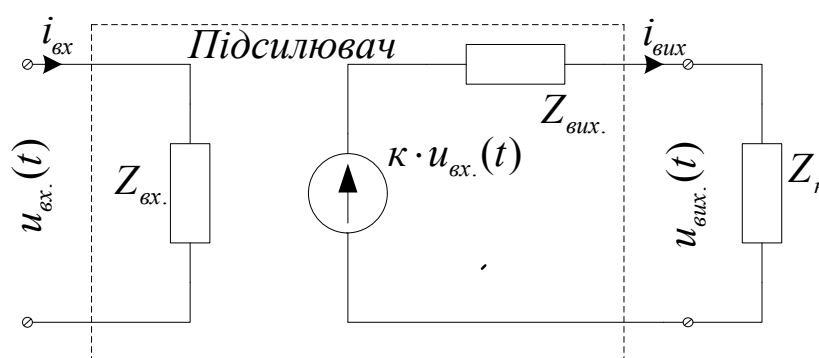
У режимах насичення і відтинання транзистор не має підсилення. Ці режими використовуються при роботі транзисторів в імпульсних схемах.

Підсилювачі електричних сигналів. Підсилювачем називається електронний пристрій, призначений для підсилення інформативного параметра сигналу. Структура підсилювача наведена на рис. 16.6, а.

З точки зору теорії електричних кіл підсилювач – це активний чотириполіусник, що має два вхідних і два вихідних затискачі (поліуси) і характеризується вхідним $Z_{вх}$ і вихідним $Z_{вих}$ опорами (імпедансами). До вхідних затискачів приєднується джерело вхідного сигналу, а до вихідних – навантаження з опором Z_n , рис. 16.6, б.



а)



б)

Рисунок 16.6

Процес підсилення вхідного сигналу здійснюється шляхом зміни опору транзистора, ввімкненого в коло джерела живлення і, таким чином, керування потоком енергії від джерела живлення до споживача під дією інформативного сигналу. Підсилювальна властивість такого чотириполіусника врахована керованим ідеальним джерелом напруги $u_{вих}(t) = k \cdot u_{вх}(t)$.

Властивості підсилювача визначає сукупність його основних технічних показників: коефіцієнти підсилення (за напругою, струмом, потужністю), вхідний і вихідний опори, вихідна потужність, коефіцієнт корисної дії, чутливість, діапазон підсилювальних частот, а також показники, що характеризують нелінійні, частотні та фазові спотворення підсилювального сигналу.

Контрольні питання

1. Скільки р-n переходів та шарів містить біполярний транзистор?
2. Назвіть два типи біполярних транзисторів. Чим вони відрізняються?
3. Як називаються шари напівпровідника, з яких складається біполярний транзистор?
4. Назвіть стандартні схеми підключення біполярного транзистора? Яка з них є найбільш вживаною?
5. Як розраховується коефіцієнт передачі струму емітера?
6. Як розраховується коефіцієнт підсилення транзистора за струмом?
7. Перерахуйте можливі режими роботи біполярного транзистора? Де при цьому знаходиться робоча точка?

ЛЕКЦІЯ № 17

ПОЛЬОВІ ТРАНЗИСТОРИ

17.1 Основні поняття

Польовий транзистор – напівпровідниковий прилад, в якому струм змінюється в результаті дії перпендикулярного напрямку струму електричного поля, що створюється вхідним сигналом.

Протікання в польовому транзисторі робочого струму обумовлене носіями заряду тільки одного знака (електронами або дірками), тому такі прилади називаються уніполярними (на відміну від біполярних). Струмопровідний канал сполучає дві сильно леговані області. Область, з якої носії заряду йдуть в канал, називається виток, а область, в яку вони приходять, – сток. Електричне поле, що змінює провідність каналу, створюється шляхом подання керівної напруги на електрод, що називається затвором.

За фізичною структурою та механізмом роботи польові транзистори умовно ділять на 2 групи: польові транзистори з затвором у виді р-n переходу та польові транзистори з затвором, який ізольований від робочого напівпровідникового об'єму діелектриком.

Принцип робіт польових транзисторів полягає у зміні провідності каналу шляхом подачі подання керівної напруги на електрод, що називається затвором. Відомо, що струм лінійно залежить від напруги. Коефіцієнтом пропорційності є його провідність, яка дорівнює

$$G = \gamma \frac{S}{l} \quad (R = \rho \frac{l}{S}), \quad (17.1)$$

де γ – питома електрична провідність,

S – площа поперечного перерізу каналу провідності,

l – довжина каналу

З формули (17.1) видно, що керувати струмом можна, змінюючи площу поперечного перерізу каналу провідності, або змінюючи концентрацію основних носіїв заряду n , від якої залежить питома електрична провідність матеріалу.

Тому розрізняють два типи польових транзисторів:

- з керівним р-n переходом;
- з ізольованим затвором

17.2 Польові транзистори з керівним р-n переходом

В польових транзисторах з керівним переходом (ПТКП) для зміни провідності каналу використовується ефект зміни ширини області просторово-

го заряду (ОПЗ) зворотно зміщеного переходу при зміні прикладеної до нього напруги на затворі.

Розглянемо принцип дії на прикладі транзистора з каналом провідності n-типу. На рис. 17.1 показано конструкцію n-канального транзистора, в якому для керування використовується р-n перехід, що зміщений у зворотному напрямку.

Транзистор вмикається таким чином, щоб р-n перехід затвора знаходився під зворотним зміщенням, а полярність напруги витік – стік вибирається такою, щоб основні носії заряду під дією електричного поля в каналі зміщувались до стоку. Для n-канального транзистора, який показаний на рис. 17.1, на стік відносно витіку має подаватись додатний потенціал, до якого під дією поля будуть дрейфувати електрони. На затвор відносно стоку необхідно подавати від'ємний потенціал, щоб затворний перехід знаходився під зворотним зміщенням.

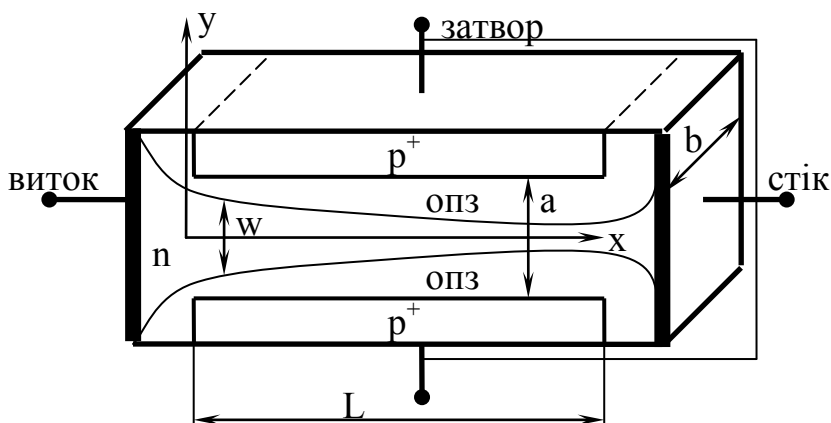


Рисунок 17.1

Оскільки ОПЗ має великий опір, то при збільшенні ширини ОПЗ переріз каналу зменшується, і його опір зростає. Найнижчий опір каналу і, відповідно, найбільший струм через нього будуть при нульовій напрузі на затворі ($U_3 = 0$), потім, зі збільшенням ширини ОПЗ при зростанні U_3 і, відповідно, зменшенням перерізу каналу, струм буде падати та при деякій напрузі відсічки U_{30} канал повністю перекриється, і струм через нього перестане протікати.

На рис. 17.2 наведено еквівалентну схему польового транзистора. Основним елементом цієї схеми, який характеризує підсилювальні властивості приладу, є залежний генератор струму SU_3 . Генератор SU_3 моделює процес подання потужності від зовнішнього джерела живлення в навантаження. Частотні та імпульсні характеристики транзистора визначаються ємностями електродів: затвор-витік $C_{зв}$, затвор-стік $C_{зс}$, стік-витік $C_{св}$. Єм-

ності $C_{зв}$ та $C_{зс}$ залежать від площі затвору та степеня легування каналу, ємність $C_{св}$ – найменша серед усіх розглянутих.

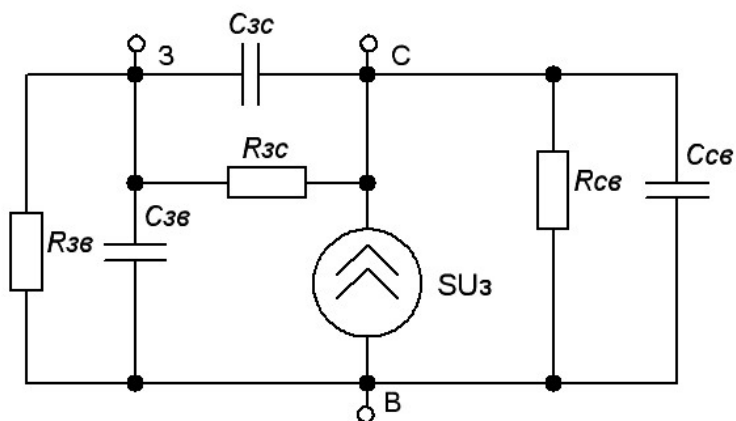


Рисунок 17.2

Опори втрат $R_{зс}$, $R_{зв}$, $R_{св}$ досить великі і враховуються, як правило, при розрахунках електрометричних підсилювальних каскадів постійного струму. При розрахунку імпульсних каскадів і підсилювальних каскадів змінного струму їх, як правило, не враховують, оскільки провідність ємностей переважно завжди більша за шунтувальні їх провідності втрат електродів.

17.3 Польові транзистори з ізолюваним затвором

В основі роботи польових транзисторів з ізолюваним затвором лежать властивості МДН-структури (метал-діелектрик-метал) (рис. 17.3).



Рисунок 17.3

Насправді ця структура є плоским конденсатором, однією з обкладкою якого служить метал (затвор), другою – напівпровідник. Особливість такого МДН-конденсатора порівняно з класичним МДМ (метал-діелектрик-метал) конденсатором полягає в тому, що в об'ємі напівпровідника заряд може бути пов'язаний з носіями різної фізичної природи та різ-

ної полярності: вільними електронами та дірками, зарядженими додатно іонізованими донорами, зарядженими від'ємно іонізованими акцепторами, а також зарядженими дефектами ґратки. В МДН-структурі, на відміну від р-n переходу, існує гетеромежа, яка розділяє два середовища з різною структурою, це, наприклад, межа, що розділяє напівпровідник та його окисел або інший діелектрик чи напівпровідник та повітря (вакуум). На вільній межі напівпровідника існує велика кількість обірваних зв'язків, які намагаються захопити заряд із об'єму напівпровідника, а також зв'язків, що вступили в реакцію з сусіднім середовищем та ним пасивовані. Крім того на поверхні можуть знаходитись сторонні домішкові атоми та іони. Таким чином, на вільній поверхні і гетеропереході метал-діелектрик уже в початковому стані може знаходитись деякий заряд, який індукціює рівний йому за величиною та протилежний за знаком заряд в об'ємі напівпровідника. На рис. 17.4 показана схема поверхні, яка частково пасивована радикалами ОН та атомами О, а також відповідні поверхневим дефектам поверхневі енергетичні стани, які дають додаткові рівні в забороненій зоні та які локалізовані поблизу поверхні.

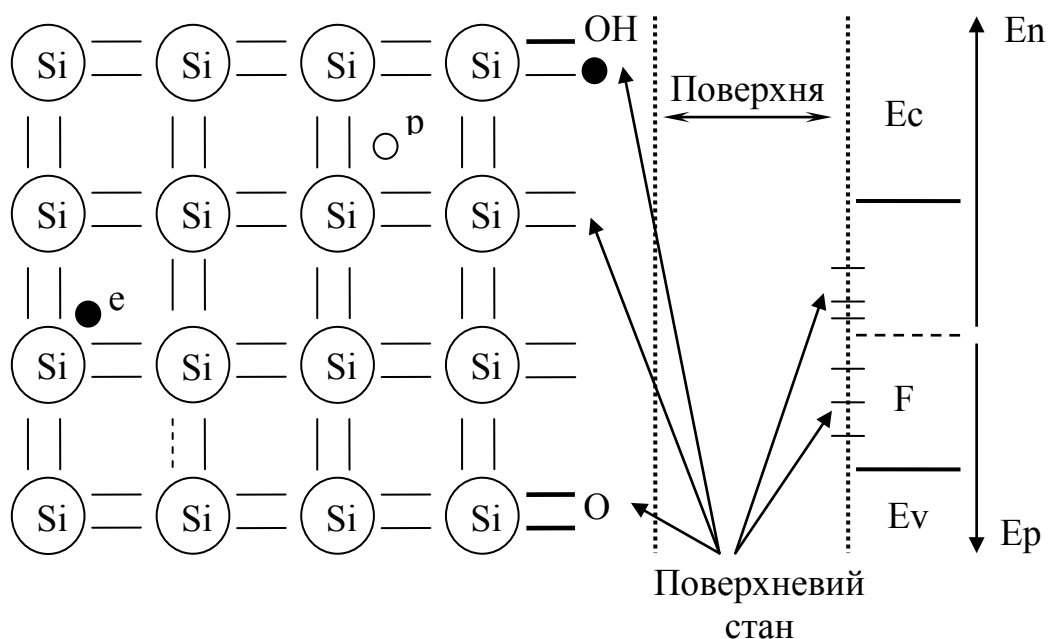


Рисунок 17.4

Якщо зарядити одну з обкладинок (затвор) МДН-конденсатора, то на другій, напівпровідниковій, обкладці має з'явитись заряд, рівний за величиною та протилежний за знаком і який буде зв'язаний з поверхневими станами іонізованими атомами домішки та вільними носіями заряду. Якщо

індукційований зовнішнім полем заряд на напівпровідниковій обкладці перевищуватиме зміну заряду на поверхневих станах, то в приповерхневій області напівпровідника відбувається зміна концентрації вільних носіїв заряду. Це супроводжується зміною поверхневої провідності та, відповідно, струму, що протікає вздовж поверхні, у тому випадку, якщо існує поле, що напрямлене вздовж поверхні, як це показано на рис. 17.5.

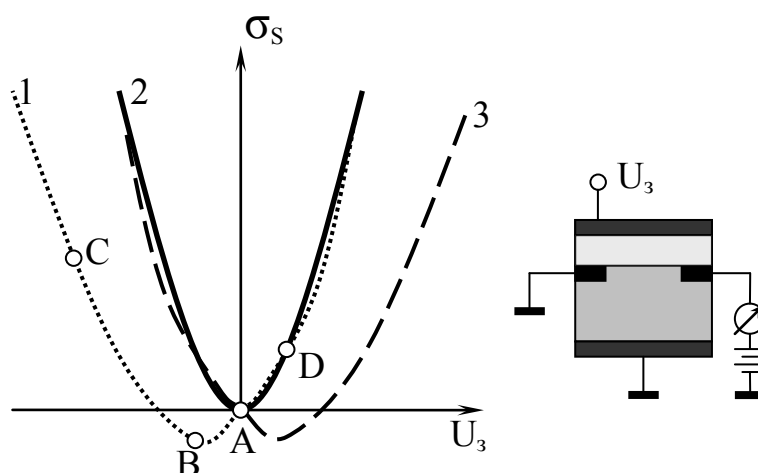


Рисунок 17.5

В тій приповерхневій напівпровідниковій області, де існує електричне поле, є збіднена носіями область просторового заряду, яка за властивостями аналогічна області ОПЗ р-n переходу і працює як діелектрик. При зміні потенціалу на металевій обкладці (затворі) МДН-конденсатора буде змінюватись і заряд ОПЗ та, відповідно, ширина збідненої області. При цьому буде змінюватись ємність МДН-структури. Залежності ємності МДН-структур від прикладеної до них напруги наведені на рис. 17.6. Ємність МДН-структури можна розглядати як таку, що складається з двох послідовно ввімкнених ємностей: ємності діелектрика – C_d та ємності шару просторового заряду в напівпровіднику C_{np}

$$C = \frac{C_d C_{np}}{C_d + C_{np}} \quad (17.2)$$

Якщо $C_d \gg C_{np}$, то можна з хорошим наближенням вважати, що ємність структури визначається ємністю ОПЗ, тобто $C = C_{np}$.

Якщо $C_{np} \gg C_d$, то наближено можна вважати, що $C = C_d$, тому максимальне значення ємності на рисунку 17.6 обмежене лінією $C = C_d$.

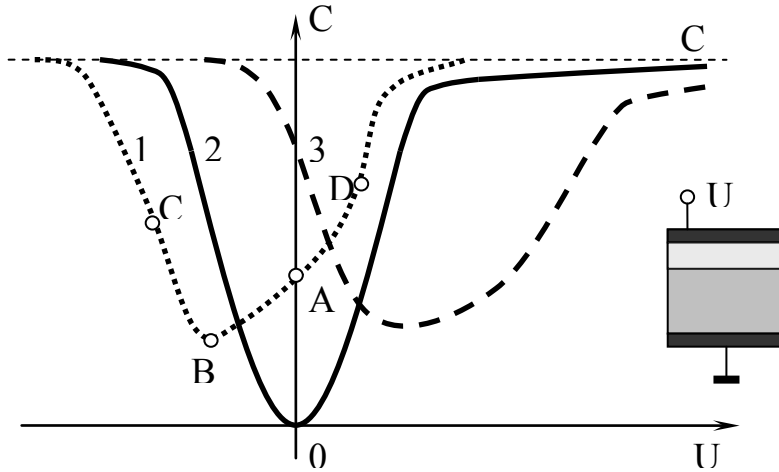


Рисунок 17.6

Необхідно звернути увагу на те, що всі криві рис. 17.5 та рис. 17.6 мають точки мінімуму. Ці точки відповідають випадковій мінімальній поверхневій провідності, яка існує тоді, коли на поверхні концентрації електронів і дірок близькі до власної та рівні за значенням. Тоді збільшення потенціалу затвора відносно значення, відповідного точці мінімуму, має збагачувати поверхню електронами, а зменшення потенціалу відносно потенціалу точки мінімуму – збагачувати поверхню дірками. При цьому, відповідно, з різних сторін від точки мінімуму має існувати різний тип провідності в приповерхневій області.

На рис. 17.7 зображені енергетичні діаграми МДН-структури при різних значеннях потенціалу U_z . За приклад вибрано матеріал n-типу. Точка А відповідає випадковому нульового потенціалу на затворі. Оскільки матеріал n-типу, рівень Фермі знаходиться в верхній половині забороненої зони, і для концентрації електронів у глибині матеріалу можна записати (через власну концентрацію n_i)

$$n = N_c e^{-\frac{E_c - F}{kT}} = N_c e^{-\frac{E_c - F - E_i + E_i}{kT}} = n_i e^{-\frac{E_i - F}{kT}} = n_i e^{\frac{\phi_0}{U_T}}, \quad (17.3)$$

де $\phi_0 = 1/q(E_i - F)$.

При отриманні виразу (17.3) було зроблено припущення, що у власному напівпровіднику рівень Фермі знаходиться при E_{i0} (приблизно посередині забороненої зони). На рис. 17.6 для точки А поблизу поверхні відбувається викривлення зон (і, відповідно, E_i), що свідчить про наявність поверхневого потенціалу $\phi_s = 1/q(E_{is} - F)$ заряду, який захоплений поверхневими станами (N_s). Для поверхневої концентрації електронів n_s та дірок p_s , аналогічно як в (17.3), можна записати

$$n_s = n_i e^{\frac{\phi_s}{U_T}}, \quad p_s = n_i e^{-\frac{\phi_s}{U_T}} \quad (17.4)$$

Як видно з рис. 17.6 для т. А $\varphi_s < \varphi_o$ а, отже, і поблизу поверхні концентрація електронів є нижчою, ніж в об'ємі, тобто існує деяке початкове збіднення поверхні основними носіями заряду.

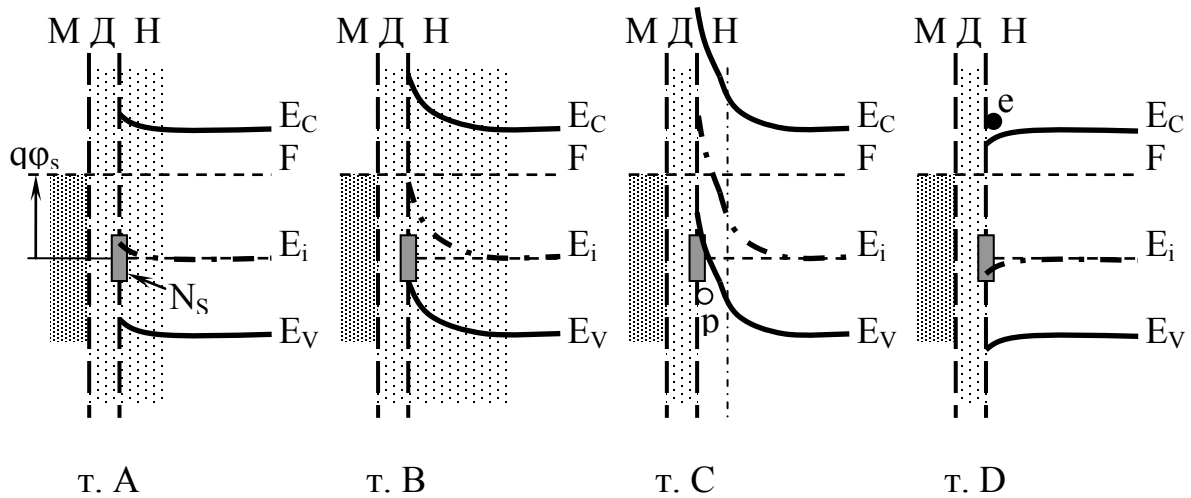


Рисунок 17.7

Якщо подати на затвор від'ємний потенціал, то буде відбуватись подальше збіднення поверхні електронами, і при деякій напрузі на структурі (т. В на рис. 11.7) φ_s стане дорівнювати 0. При цьому, відповідно до (17.4), поверхневі концентрації рівні: $n_s = p_s = n_i$. При подальшому збільшенні від'ємного заряду на затворі відбуватиметься подальше викривлення зон і φ_s змінить знак, при цьому $p_s > n_s > n_i$ та $n_s < n_i$, тобто, на поверхні відбувається зміна типу провідності – інверсія знака носіїв на поверхні відносно об'єму (т. С на рис. 17.7). І чим більшим буде від'ємний заряд на затворі, тим більшою буде діркова провідність на поверхні. Напругу на затворі, що викликає інверсію провідності, прийнято називати пороговою (U_n), якщо $|\varphi_s| = 2(E_c - F)$.

Якщо подати на затвор додатну напругу, то величина φ_s зростає і, відповідно, концентрація електронів збільшується. Дійсно, електричне поле поблизу поверхні буде притягувати електрони та відштовхувати дірки (їх концентрація зменшується). Коли поверхня збагачується основними вільними електронами чи дірками (у випадку інверсії), ширина ОПЗ наближається до нуля, і ємність структури визначається тільки товщиною діелектрика. В цьому випадку збагачена вільними носіями поверхня напівпровідника поводить як поверхня металу.

Отже, в основі роботи МДН-транзистора лежить розглянутий ефект керування поверхневою провідністю та поверхневим струмом за допомогою затвора. Для того, щоб забезпечити проходження керівного струму під затвором, створюють дві електродні області: витік та стік. На рис. 17.8 наведено конструкцію МДП-транзистора з індукованим n каналом.

Напівпровідникові області витоку та стоку створюють із сильно легованого матеріалу й такого, що має хорошу провідність і відрізняється за типом провідності від матеріалу базового кристала. Таким чином, при відсутності різниці потенціалів на затворі між витоком та стоком виявляються два зустрічно ввімкнених діоди і, відповідно, струм в цьому колі буде дорівнювати зворотному струмові одного з діодів, тобто досить малий, і транзистор буде знаходитись у закритому стані. Для того, щоб транзистор відкрився, на затвор потрібно подати такий потенціал відносно потенціалу підзатворної ділянки, щоб на поверхні відбулася інверсія провідності. При цьому під затвором індукується область n-типу, яка утворює канал, що з'єднує n-області витоку та стоку, зустрічно ввімкнені p-n переходи зникають, а в стоковому колі починає протікати струм. Різниця потенціалів затвора, при якій відбувається інверсія провідності підзатворної області та починає протікати струм, називають пороговою ($U_{п}$). Стоковий струм тим вищий, чим більшим є індукований в каналі заряд і, відповідно, більшою є провідність індукованого каналу.

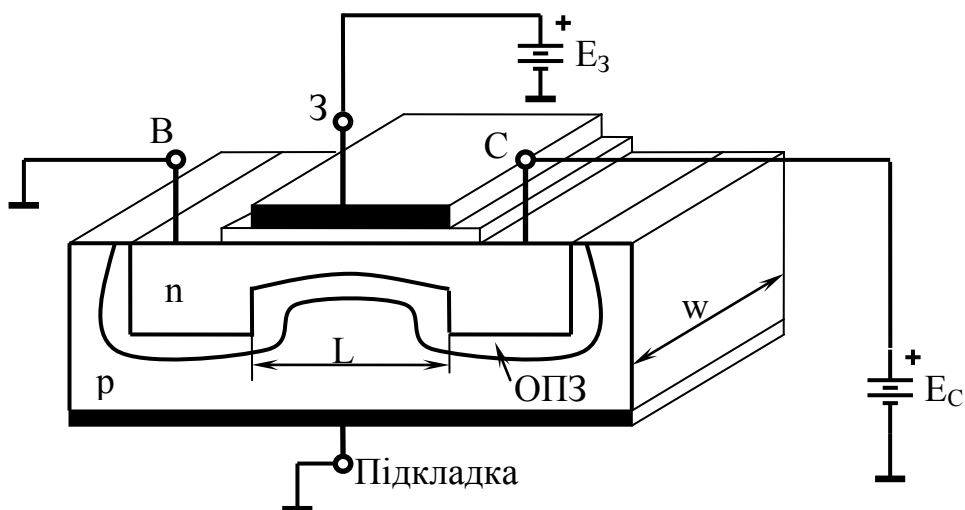


Рисунок 17.8

Полярність напруг, які прикладаються до електродів МДН з індукованими n та p каналами при їх роботі в підсилювальному режимі, протилежна. Для n-канального транзистора на затвор подається плюс відносно витоку, на p-канальний транзистор – мінус. За стік приймається той електрод транзистора, до якого дрейфують основні носії, тобто в p-канальному транзисторі стік має бути від'ємним відносно витоку, а в n-канальному – додатним (рис. 17.8).

На рис. 17.9 наведено еквівалентну схему польового транзистора з ізоляцією затвора, яка враховує можливість керування за підкладкою.

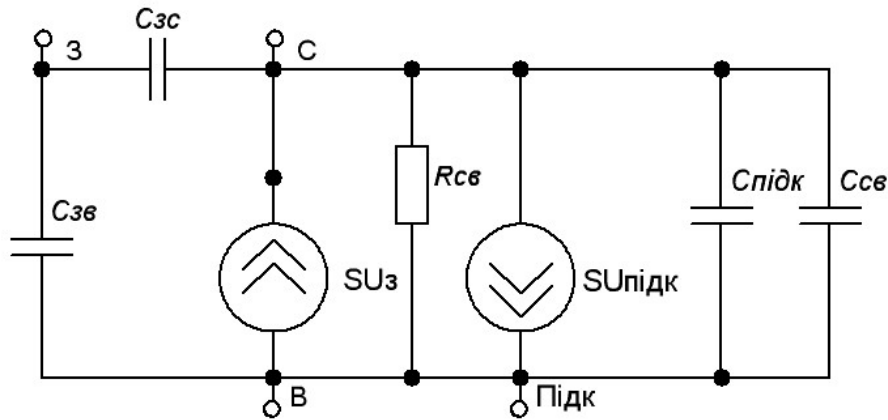


Рисунок 17.9

Генератор SU_3 моделює процес подання потужності від зовнішнього джерела живлення в навантаження. Частотні та імпульсні характеристики транзистора визначаються ємностями електродів: затвор-витік $C_{зв}$, затвор-стік $C_{зс}$, стік-витік $C_{св}$. Генератор $SU_{підк}$ моделює можливість керування за підкладкою.

Контрольні питання

1. Який прилад називається польовим транзистором?
2. Які існують типи польових транзисторів?
3. Як називаються шари напівпровідника, з яких складається польовий транзистор?
4. Що таке МДН-структура? Які мають переваги польові транзистори з ізольованим затвором?
5. Від чого залежить ємність МДН-структури?
6. Які особливості енергетичної діаграми МДН-структури польових транзисторів Ви можете виділити?
7. Наведіть електричну схему заміщення польового транзистора з керівним р-п переходом.
8. Наведіть електричну схему заміщення польового транзистора з ізольованим затвором.

ЛЕКЦІЯ № 18 ТИРИСТОРИ

18.1 Особливості будови та роботи деністорів та триністорів

Тиристором називається чотиришаровий напівпровідниковий прилад, що складається з областей р- і n-типів провідності, що послідовно чергуються. Перший вид тиристорів – це діністори.

Деністори – це діодні тиристори, або некеровані діоди перемикачів. Умовне позначення діністора на схемі наведено на рис 18.1, а.

Триністори – це керовані діоди перемикачів. Умовне позначення триністора на схемі наведено на рис 18.1, б).

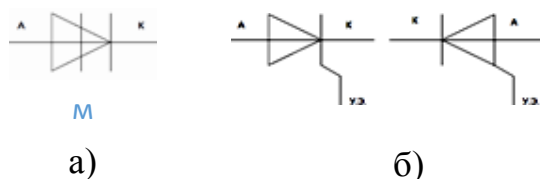


Рисунок 18.1

Зовнішня р-область і електрод від неї називаються анодом. Зовнішня n-область і електрод від неї називаються катодом. Внутрішні р- і n-області називаються базами діністора. Крайні р-n переходи називаються емітерними, а середній р-n перехід називається колектором. Подамо на анод «-», а на катод «+». При цьому емітерні переходи будуть закриті, колектор – відкритий. Основні носії зарядів з анода і катода не зможуть перейти в базу, тому через деністор протікатиме тільки маленький зворотний струм, викликаний неосновними носіями заряду. Деністори застосовуються у вигляді безконтактних пристроїв перемикачів, які керуються напругою. Структурна схема та ВАХ деністора наведені на рис. 18.2

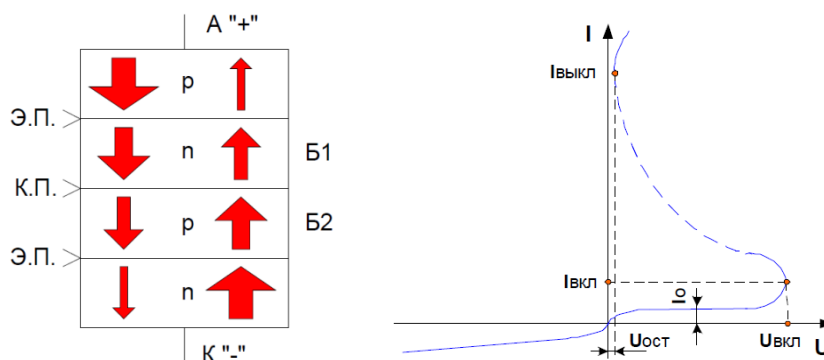


Рисунок 18.2

Якщо на анод подати «+», а на катод «-», емітерні переходи відкриваються, а колектор закривається. Основні носії зарядів переходять з анода в базу 1, а з катода – в базу 2, де вони стають неосновними, і в базах відбувається ін-

тенсивна рекомбінація зарядів, в результаті якої кількість вільних носіїв зарядів зменшується. Ці носії заряду підходять до переходу колектора, поле якого для них буде прискорювальним, потім проходять базу і переходять через відкритий емітерний перехід, оскільки в базах вони знову стають основними.

Пройшовши емітерні переходи, електрони переходять в анод, а дірки – в катод, де вони повторно стають неосновними і повторно відбувається інтенсивна рекомбінація. В результаті кількість зарядів, що пройшли через діністор, буде дуже мало, і прямий струм також буде дуже малий. При збільшенні напруги прямий струм трохи зростає, оскільки збільшується швидкість руху носіїв, а інтенсивність рекомбінації зменшується. При збільшенні напруги до певної величини відбувається електричний пробій переходу колектора. Опір діністора різко зменшується, струм через нього сильно збільшується, і падіння напруги на ньому значно зменшується. Вважається, що діністор перейшов з вимкненого положення стану у ввімкнутий.

Триністори

Триністори можна вмикати при напругах, менших напруги ввімкнення діністора. Для цього достатньо на одну з баз подати додаткову напругу так, щоб створюване нею поле збігалось за напрямом з полем анода на переході колектора. Можна подати струм керування на другу базу, але для цього на керівний електрод потрібно подавати напругу її від'ємної щодо анода полярності, і тому розрізняють триністори з керуванням за катодом і з керуванням за анодом. Структурна схема та ВАХ триністора наведені на рис. 18.3

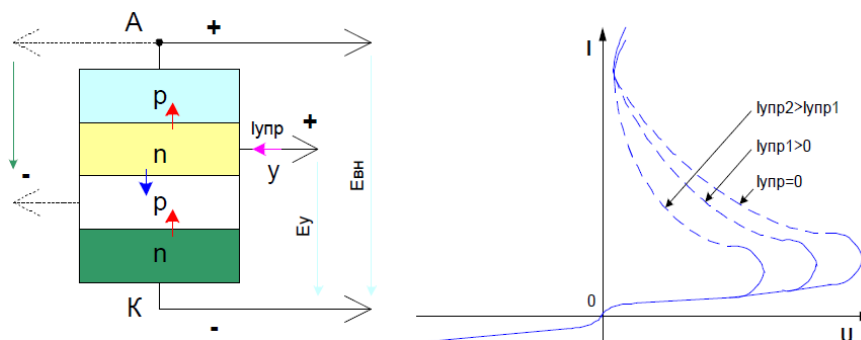


Рисунок 18.3

Основні параметри тиристорів.

Напруга ввімкнення ($U_{ввім}$) – ця напруга, при якій струм через деністор починає сильно зростати.

Струм ввімкнення ($I_{ввім}$) – це струм, відповідний напрузі ввімкнення.

Струм виключення вимкнення ($I_{викл\ вимк}$) – це мінімальний струм через тиристор, при якому він залишається ще у ввімкненому стані.

Залишкова напруга ($U_{зал}$) – ця мінімальна напруга на тиристорі у і ввімкненому стані.

Струм витоку (I_g) – це струм через тиристор у вимкненому стані при заданій напрузі на аноді.

Максимально допустима зворотна напруга ($U_{зв.мах}$).

Максимально допустима пряма напруга ($U_{пр.мах}$).

Час вмикання ($t_{вмик}$) – це час, за який напруга на тиристорі зменшиться до 0,1 напруги вмикання.

Час вимкнення ($t_{вимк}$) – це час, за який тиристор переходить з ввімкненого стану у вимкнене.

18.2 Особливості будови та роботи симісторів

Симістор (симетричний тріодний тиристор) або тріак – це напівпровідниковий прилад, що є різновидом тиристора. Умовне позначення симістора на схемі наведено на рис 18.4.

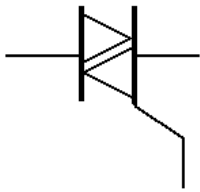


Рисунок 18.4

На відміну від деністора та триністора, що мають катод і анод, основні (силові) виводи симістора не називають катодом чи анодом, оскільки в силу симетричної структури симістора вони є і тим, і іншим одночасно. Однак за способом ввімкнення відносно керівного електрода основні виводи симістора розрізняються, причому має місце їх аналогія з катодом і анодом триністора.

Для керування живленням навантаження основні електроди симістора підключають під'єднують у ланцюг послідовно з навантаженням. У закритому стані провідність симістора відсутня, живлення навантаження вимкнене. При подачі на керівний електрод відпираючого сигналу, що відпирає, між основними електродами симістора виникає провідність, живлення навантаження виявляється ввімкненим. Характерно, що симістор у відкритому стані проводить струм в обох напрямках. Іншою особливістю симістора, як і інших тиристорів, є те, що для його утримання у відкритому стані немає необхідності постійно подавати сигнал на керівний електрод (на відміну від транзистора). Симістор залишається відкритим, поки струм, що протікає через основні виводи, перевищує деяку величину, названу струмом утримання. Звідси випливає, що вимкнення навантаження відбувається поблизу моментів часу, коли струм через основні електроди симістора змінює полярність і переходить через нуль (для навантаження, яке має лише активну складову, ці моменти збігаються в часі зі зміною полярності напруги в електромережі)

Симістор має п'ятишарову структуру напівпровідника. Спрощено симістор можна подати у вигляді еквівалентної схеми з двох тріодних триністорів, включених під'єднаних зустрічно-паралельно. Однак варто зауважити, що керування симістором відрізняється від керування двома зустрічно-паралельними тиристорами.

Для відмикання симістора на його керівний електрод подається напруга щодо умовного катода. Полярність керівної напруги, як правило, має

збігатися з полярністю напруги на умовному аноді. Тому часто використовується такий метод керування симістором, при якому сигнал на керівний електрод подається з умовного анода через струмообмежувальні резистор і вимикач. Керувати симістором зручно, забезпечуючи вибір певної сили струму керівного електрода, достатньої для відпирання симістора. Деякі типи симісторів можуть відпиратися сигналом будь-якої полярності, хоча при цьому може знадобитися більший керівний струм. Структурна схема та ВАХ симістора наведені на рис. 18.5

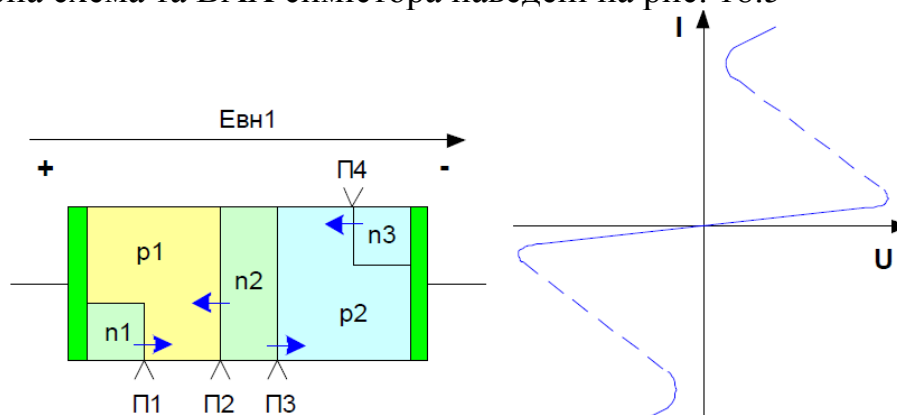


Рисунок 18.5

Розглянемо роботу симістора. Подамо додатну напругу на області p1, n1, а негативну – на області p2, n3.

Перехід П1 закритий, і вимикається з роботи область n1. Переходи П2 і П4 відкриті і виконують функцію емітерних переходів. Перехід П3 закритий і виконує функцію колекторного переходу.

Таким чином, структура симістора буде областями p1, n2, p2, n3, де p1 виконуватиме функції анода, а n3 – катода при прямому вмиканні. Подамо напругу плюсом на області p2, n3, а мінусом – на області p1, n1. Перехід П4 закриється і вимкне з роботи область n3. Переходи П1 і П3 відкриються і відіграватимуть роль емітерних переходів. Перехід П2 закриється і виконуватиме функцію переходу колектора.

Структура симістора матиме вигляд p2-n2, p1-n1, де область p2 буде анодом, а n1 – катодом. В результаті виходитиме структура в прямому вмиканні, але при зворотній напрузі.

Контрольні питання

1. Що таке тиристор? Для чого вони застосовуються?
2. Які бувають види тиристорів?
3. Які особливості будови та роботи має деністор?
4. Які особливості будови та роботи має триністор?
5. Назвіть основні параметри триністора.
6. Як здійснюється регулювання напруги ввімкнення триністора?
7. Які особливості будови та роботи має симістор?
8. Що спільного у будові між симістором і триністором?

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / [Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацев, В. В. Кухарчук та ін.]; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.
2. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підручник / [Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук та ін.]; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 527 с.
3. Основи теорії електронних кіл / [Ю. Я. Бабало, Б. А. Манзій, П. Г. Стахів та ін.]; під ред. проф. Ю. Я. Бабало – Львів : Львівська політехніка, 2008. – 356 с.

Рекомендована

1. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Комп'ютерні розрахунки та моделювання лінійних електричних кіл : навчальний посібник / Карпов Ю. О., Кацев С. Ш., Кухарчук В. В. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 213 с.
2. Кацев С. Ш. Комп'ютерне моделювання електричних кіл : лабораторний практикум / Кацев С. Ш., Мад'яров В. Г., Говор І. К. – Вінниця : ВНТУ, 2007. – 89 с.
3. Електротехніка з основами промислової електроніки; переклад з російської / В. Є. Катаєв – Київ : Будівельник, 1994 – 237 с.

СЛОВНИК ІНШОМОВНИХ ТЕРМІНІВ

активний опір	active resistance
активна потужність	active power
амплітудне значення	peak value
амплітудно-частотний спектр	peak-frequency spectrum
амплітудно-частотна характеристика	peak-frequency characteristic
векторна діаграма	vector diagramme
вільна складова	free component
вітка	branch
власний опір контуру	own resistance of a contour
власна провідність вузла	own conductivity of knot
вольт-амперна характеристика	voltamperes characteristic
вузол	knot
гармоніка	harmonic
джерело напруги	voltage source
джерело струму	current source
діюче значення змінного струму	operating value of an alternating current
диференціальний опір	differential resistance
другий закон Кірхгофа	second law of Kirhgof
електричне коло	electric circuit
електричний опір	electric resistance
ємність	capacity
ємнісний опір	capacitance
закони комутації	laws of switching

закон Ома	the Ohm law
залежні початкові умови	dependent entry conditions
обернене перетворення Лапласа	return transformation of Laplace
обернене перетворення Фур'є	return transformation of Fure
індуктивність	inductance
індуктивний опір	inductive resistance
інтеграл Дюамеля	integral of Djuamel
коефіцієнт нелінійних спотворень	factor of nonlinear distortions
коефіцієнт спотворення	factor of distortion
комутація	switching
контур	contour
кут зсуву фаз	angle of shift of phases
кутова (циклічна) частота	cyclic frequency
лінійний елемент	linear element
лінійне коло	linear circuit
метод вхідного опору	method of entrance resistance
миттєве значення струму	instant value of a current
незалежні початкові умови	independent entry conditions
нелінійний елемент	nonlinear element
нелінійне коло	nonlinear circuit
паралельне з'єднання опорів	parallel connection resistance
передатна характеристика	transfer characteristics
перехідний процес	transient

перехідна характеристика кола	transitive characteristic of circuit
період	period
періодичний змінний струм	periodic alternating current
перший закон Кірхгофа	first law of Kirhgof
повний комплексний опір	full complex resistance
повна комплексна потужність	full complex power
повна комплексна провідність	full complex conductivity
повний опір	full resistance
повна потужність	full power
послідовне з'єднання опорів	consecutive connection resistance
потужність спотворення	power of distortion
початкова фаза	initial phase
примусова складова	forced component
провідність	conductivity
пряме перетворення Фур'є	direct transformation of Fure
реактивний опір	reactive resistance
реактивна потужність	reactive power
резистор	resistor
резонанс напруг	resonance of voltage
резонанс струмів	resonance of current
синусоїдний струм	sinusoidal current
спектральна густина вхідного сигналу	spectral density of entrance signal
стала передавання	transfer constant

стала часу перехідного
процесу

constant of time
of transient

статичний опір

static resistance

функція Хевісайда

function of Hevisajd

хвильова діаграма

wave diagramme

частота

frequency

Навчальне видання

Граняк Валерій Федорович

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА ЕЛЕКТРОННИХ КІЛ

Частина 2

Конспект лекцій

Рукопис оформив *В. Граняк*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет виготовив *О. Ткачук*

Підписано до друку 12.10.2020 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 8,04.
Наклад 50 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2020-088.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.