

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. С. Моргун, І. М. Меть

**ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ
МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ
ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ ТА РОЗВИТКУ
ЗОН ГРАНИЧНОГО СТАНУ ҐРУНТУ**

Монографія

Вінниця
ВНТУ
2021

УДК.519.635:624.044:624.15

M79

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № від 28.10. 2020 р.)

Рецензенти:

О. А. Савицький, доктор технічних наук, старший науковий співробітник

В. А. Огородніков, доктор технічних наук, професор

Моргун, А. С.

M79 Числове моделювання методом граничних елементів процесу деформування та розвитку зон граничного стану ґрунту : монографія [Електронний ресурс] / А. С. Моргун, І. М. Меть. – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 112 с.

ISBN 978-966-641-827-5

Проектування споруд неможливе без залучення сучасних методів математичного аналізу. В механіці ґрунтів широко застосовують моделі суцільних середовищ та теорію пластичної течії. Пластичні деформації в ґрунтах проявляються у вигляді значної зміни форми, а при наявності великих зон розвитку пластичних деформацій (граничного стану) розв'язання задачі в пружній постановці не відповідає дійсності. В роботі розглянуто питання деформування ґрунтів з залученням числового МГЕ. Цей досвід корисний для інженерів, студентів та аспірантів будівельних спеціальностей, що працюють в області механіки ґрунтів та її практичних прикладань.

УДК 519.642:624.044:624.15

ISBN 978-966-641-827-5

© А. Моргун, І. Меть, 2021

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
Розділ 1 ОСНОВНІ КОНЦЕПЦІЇ І ЗАКОНИ МЕХАНІКИ КОНТИНІУМУ	6
1.1 Передумови класичної теорії пружності.....	6
1.2 Залежність між напруженнями та деформаціями ($\sigma - \varepsilon$) пружного тіла.....	8
1.3 Потенціальна енергія пружного тіла	8
1.4 Принцип можливих переміщень. Принцип мінімуму для переміщень (принцип Лагранжа). Принцип Кастільяно.....	9
1.5 Основні концепції і закони механіки континууму	10
Розділ 2 ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОСТІ.....	13
2.1 Основні задачі теорії пластичної течії.....	13
2.2 Ідеалізовані діаграми пластичної поведінки матеріалів	15
2.3 Критерій пластичності Треска, Мізеса, Мізеса–Шлейхера–Боткіна	17
2.4 Простір напружень. Π – площина	22
2.5 Теорія пластичного потенціалу. Метод «пружних» рішень Льюїшина	23
Розділ 3 МАТЕМАТИЧНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕХАНІКИ ДИСПЕРСНИХ ҐРУНТІВ	25
3.1 Види ґрунтових основ. Фізичні та міцнісні характеристики ґрунтів	25
3.2 Несуча спроможність ґрунтів. Граничні тиски та деформації.....	28
3.3 Залежність об'ємної деформації в ґрунтах від деформації формозміни. Експеримент Рейнольдса. Дилатансія гранульованих дисперсних ґрунтів.....	33
3.4 Закономірності формозміни дисперсних ґрунтів та зміни об'єму в сипучих ґрунтах при зсуві.....	36
3.5 Дилатансійна модель ґрунтового середовища	39
3.6 Дилатансійні властивості ґрунту.....	47
3.7 Принцип максимуму Мізеса і постулат Друккера.....	51
Розділ 4. МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТА ЙОГО ПРИКЛАДАННЯ ДО МЕХАНІКИ ДИСПЕРСНИХ ҐРУНТІВ	54
4.1 Задачі теорії потенціалів	54
4.2 Елементи класичної теорії потенціалу	56
4.3 Метод зважених нев'язок.....	58
4.4 Фундаментальне розв'язання і пряме формулювання МҒЕ.....	61
4.5 Матричне та дискретне формулювання інтегрального рівняння МҒЕ.....	63
4.6 Етапи розв'язання нелінійної задачі механіки ґрунтів	68
Розділ 5 ПРИКЛАДАННЯ МҒЕ ДО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ФУНДАМЕНТОБУДУВАННЯ.....	75
5.1 Пластична течія ґрунтів в основах буронабивних паль за МҒЕ.....	75
5.2 Прогноз деформування буронабивних паль з розширенням з ґрунтовою основою за МҒЕ	85
5.3 Поведінка дисперсного ґрунту в основах бурових опор-колон за МҒЕ.....	92
5.4 Кінематика дискретного ґрунтового середовища за МҒЕ.....	101
ЛІТЕРАТУРА.....	108

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

- Г – границя досліджуваного елемента
- ДБНіП – державні будівельні норми і правила
- МСЕ – метод скінченних елементів
- МГЕ – метод граничних елементів
- НДС – напружено-деформований стан
- P_{ij}^* , u_{ij}^* – напруження та переміщення в фундаментальних розв'язках
- Р. Міндліна
- СЕ – скінченний елемент
- ГЕ – граничний елемент
- ξ – точка прикладення сили $P = 1$ в півплощині
- x – точка нагляду
- САПР – системи автоматизованого проектування
- БНП – буронабивні палі

ВСТУП

Актуальною проблемою будівельної науки є напрацювання і впровадження більш досконалих і економічних методів розрахунку та проектування будівельних конструкцій, направлених на виявлення і реалізацію їх резервів. Це сприятиме нарощування виробничого потенціалу країни на новій технічній основі. Значне місце серед будівельних матеріалів займають ґрунтові основи фундаментів, розрахунок яких зазвичай виконується в лінійній постановці, що пояснюється складністю структури розрахункових рівнянь. Урахування нелінійного деформування ґрунтових основ підніматиме адекватність проектних розрахунків та сприятиме суттєвій економії матеріалів.

Будівництво – одна із провідних галузей народного господарства в історичному аспекті його розвитку. Успішне спорудження будівель житлового і промислового призначення потребує більш глибокого проникнення в таємниці неживої природи, знайомства з основами механіки.

Вітчизняна геотехніка знаходиться на шляху інтенсивного розвитку. Широко застосовуються методи нелінійного аналізу, числові методи, засновані на пружно-пластичних моделях. Надійність та економічність споруд забезпечується вірним використанням закономірностей механіки ґрунтів, які базуються на розв'язанні низки задач теорії пружності, пластичності. Синтез методів різних гілок механіки – прогресивний метод науки. Великий вклад в теоретичні та експериментальні дослідження роботи фундаментних конструкцій та ґрунтових основ внесли: А. О. Бартоломій, Б. В. Бахолдін, І. П. Бойко, С. С. В'ялов, Н. М. Герсіванов, М. Н. Гольдштейн, В. Н. Голубков, В. М. Уліцкий, Н. З. Готман, Б. І. Далматов, М. Л. Зоценко, Ю. Л. Винников, С. Н. Клепиков, Н. М. Ніколаєвський, О. М. Сахаров, Г. І. Чорний, М. Е. Харр та ін. Одним із найбільш важливих умов прогресу в області розв'язання інженерних (і будівельних) задач є впровадження в практику прикладних досліджень розділів сучасної механіки та математики. До цих розділів передусім відносяться наближені числові методи розв'язання інтегральних та диференціальних рівнянь, основою для компоновки яких слугують відповідні фізичні закони (закон збереження маси, імпульсу, енергії). Постійне розширення області прикладання цих рівнянь, поява ЕОМ, стимулювали неухильне напрацювання їх теорій, наближених методів розв'язку. Використанню ЕОМ передуює велика робота з математичного описання задачі, пошуку вдалої математичної моделі, що відображує реальне явище і доступної до отримання числових результатів.

В роботі для розв'язання нелінійних задач геомеханіки використовується метод граничних елементів. В основі числового розв'язання МГЕ лежить заміна розрахункового інтегрального співвідношення квадратурними формулами (кінцевими сумами). Ефективними при числовій реалізації МГЕ є ітераційні збіжні методи – дійовий інструмент для теоретичних досліджень та практичних розрахунків.

РОЗДІЛ 1 ОСНОВНІ КОНЦЕПЦІЇ І ЗАКОНИ МЕХАНІКИ КОНТИНІУМУ

1.1 Передумови класичної теорії пружності

1. В теорії пружності досліджуються ідеально пружні тіла, що є сукупністю матеріальних точок, які знаходяться в рівновазі під впливом системи зовнішніх сил. Після зняття зовнішніх навантажень, що прикладені до тіла і викликають його деформацію, воно повністю відновлює свою форму і розміри.

Це виключає наявність в тілі залишкових деформацій та знімає питання впливу історії навантаження. Приймається, що ідеально пружне тіло при поверненні в початковий стан здійснює роботу, рівну тій, яку було витрачено на його деформацію, тобто виконується *перший закон термодинаміки про збереження енергії в ізольованій системі*.

2. Приймається лінійна залежність між $\sigma - \varepsilon$ (*закон Гука*).

3. Ідеально пружне тіло вважають *суцільним*. Вводячи цю гіпотезу, не беруть до уваги дискретну атомістичну структуру тіла, що безумовно є значним наближенням з метою зробити дослідження *можливим*. Коли б за допомогою математики можна було б інтерпретувати структуру матеріалу, це було б дуже складно для практичного використання. *Перевагою* цього допущення є можливість розглядати *переміщення і деформації як неперервні функції координат*.

4. Вважається, що матеріал пружного тіла *однорідний* з однаковими пружними властивостями і в усіх точках тіло деформується однаково.

5. Вводиться припущення про *ізотропність тіла* (пружні властивості однакові в усіх напрямках), тобто, зв'язок $\sigma - \varepsilon$ не залежить від напрямку. В анізотропному тілі пружні властивості різні в різних напрямках.

6. Приймається, що переміщення тіла малі порівняно з його лінійними розмірами.

7. Приймається припущення про *натуральний ненапружений стан* тіла. Припускають, що початкові напруження, величина і характер яких залежать від історії виникнення тіла і які існують в ньому до прикладання зовнішніх сил, рівні нулю.

Фактично напруження, знайдені за допомогою теорії пружності, не є реальними, а є додатковими до початкових напружень. Неврачу-

вання початкових напружень частково компенсується тим, що визначаючи основні характеристики матеріалів за зразками, в них теж ігнорують наявність початкових напружень.

В механіці суцільних середовищ розглядається поведінка середовища як *порушення початкового* стану рівноваги між взаємодіючими елементами середовища і як *перехід їх до нового стану рівноваги* в результаті зміни сил, що діють між елементами. Тобто, умови рівноваги задовольняються для нескінченно малого елемента. При цьому не проходить порушення суцільності. Енергетичний (термодинамічний) метод вивчення явищ природи розглядає *зміни в системі як виділення чи поглинання енергії*, перетворення одних видів енергії в інші. Енергія – найбільш загальна кількісна характеристика руху.

Кількісна міра всіх форм руху, що проявляється при взаємодії внутрішніх елементів системи, які утворюють структуру даного рівня, – внутрішня енергія системи.

Під масою в механіці суцільного середовища розуміють фізичну величину, яка кількісно характеризує інертність тіла. Інертність полягає в тому, що для зміни швидкості руху тіла даною силою потрібно деякий час. Чим триваліший цей час, тим інертніше тіло.

Поведінку тіл на землі описує реологія. Вираз деформація – загальний термін, який включає:

- пружну деформацію в пружному тілі;
- пластичну залишкову деформацію в пластичному тілі;
- в рідині – течію.

Пружне тіло, пластичне тіло, рідина мають різні реологічні властивості [38]. *Під дією всебічного, рівномірного чи ізотропного тиску всі матеріали ведуть себе однаково – як ідеально пружні тіла (в них збільшується щільність ρ) і вони відновлюють свою початкову форму після зняття з них ізотропного тиску.* Це перша аксіома реології.

Які ж сили викликають тоді різкі реологічні відмінності? Це їх поведінка при простому зсуві.

Деформацію, яка не супроводжується зміною об'єму називають *формозміною*. При простому зсуві матеріали поведуться по різному.

Таким чином, теорія пружності базується на наведених вище передумовах. Їх переводять на мову математичної фізики, а потім до отриманих систем рівнянь прикладають математичний апарат.

1.2 Залежність між напруженнями та деформаціями ($\sigma - \varepsilon$) пружного тіла

Зовнішні сили, що діють на тіло, яке розглядається, поділяються на поверхневі та об'ємні.

Поверхневі сили – наслідок контакту тіла з зовнішнім середовищем: тиски газів чи рідини, вплив контактуючих сил. Ці сили можуть розподілятися по поверхні тіла неперервно, чи за деяким законом (розподілене навантаження, зосереджені сили).

Об'ємні сили – результат впливу на тіло, що розглядається, просторового векторного поля (гравітація, інерційні поля, поле відцентрової сили, температурне поле, магнітне поле). Об'ємні сили прикладаються до маси тіла і неперервно розподілені по його об'єму.

Основним законом теорії пружності є закон Р. Гука, 1678 р. (із експериментальних досліджень): *«Яке подовження, така і сила»*:

$$\sigma = E * \varepsilon \text{ (одновимірна задача),}$$

де E – модуль поздовжньої пружності, модуль Юнга.

Перші спроби теоретичних обґрунтувань закону Гука були зроблені лише в XIX сторіччі. В 1821 р. Л. Нав'є вивів рівняння, які пов'язують сили і деформації, виходячи з гіпотези про молекулярні сили взаємодії. Дж. Грін отримав рівняння теорії пружності, прийнявши за основу потенціальну енергію пружного тіла.

1.3 Потенціальна енергія пружного тіла

Під впливом зовнішніх сил пружне тіло деформується і в усьому об'ємі виникають переміщення його точок. Такі ж переміщення властиві і точкам прикладання зовнішніх сил. Тому сили здійснюють деяку роботу. Ця робота витрачається на накопичення внутрішньої потенціальної енергії, отриманої за рахунок роботи внутрішніх напружень. Крім того, робота зовнішніх сил переходить в теплову енергію, що виділяється у вигляді вільної теплоти, і в електромагнітну енергію.

В межах пружності частка теплової та електромагнітної енергій порівняно з пружною зовсім мала і нею повсюдно нехтують.

Таким чином вважаємо, що накопичена потенціальна енергія повністю переходить в потенціальну енергію пружного тіла. Накопичена потенціальна енергія має властивість зворотності. Це означає, що при знятті зовнішнього навантаження потенціальна енергія перетворюється в роботу, яку на цей час здійснюють внутрішні сили.

Внутрішню потенціальну енергію зазвичай називають *роботою деформацій*.

В теорії пружності вважають, що навантаження прикладається до ненапруженого тіла поступово, від нуля до свого найбільшого значення. При цьому прискорення частинок тіла невеликі і їх кінетичною енергією можна знехтувати.

В цьому випадку можна вважати, що на будь-якому етапі навантаження *зовнішнє навантаження* знаходиться в *рівновазі з внутрішніми пружними силами*.

1.4 Принцип можливих переміщень. Принцип мінімуму для переміщень (принцип Лагранжа). Принцип Кастільяно

Пружне тіло, що розглядається в теорії пружності, складається із матеріальних точок, які є в рівновазі під впливом системи зовнішніх сил. По відношенню до матеріальної точки, що знаходиться в рівновазі, початок можливих переміщень полягає в тому, що повна сума робіт зовнішніх сил, які діють на неї, на довільному можливому переміщенні рівна нулю. Точно так і повна робота всіх сил, прикладених до тіла, обертається в нуль.

Робота зовнішніх сил на можливих переміщеннях $\delta_u, \delta_v, \delta_w$ рівна варіації (зміні) потенціальної енергії системи δU [34]:

$$\delta U = \delta V : \quad (1.1)$$

чи, що те ж саме

$$\delta(V - U) = \delta E = 0 . \quad (1.2)$$

Вираз у круглих дужках є повною потенціальною енергією пружної системи E .

Звідси можна зробити висновок, що переміщення, які дійсно мають місце від впливу зовнішніх сил, обертають в нуль приріст повної потенціальної енергії системи на будь-яких можливих переміщеннях від положення рівноваги. Це еквівалентно умові рівноваги пружного тіла.

Рівність нулю *першої* варіації від E говорить про те, що потенціальна енергія має *екстремальне* значення. Якщо взяти *другу варіацію* від E , то можна показати, що вона додатна, і тоді, як наслідок, в стані рівноваги потенціальна енергія має *мінімальне* значення:

$$E = \min. \quad (1.3)$$

Тоді принцип мінімуму для переміщень, чи принцип Лагранжа – із всіх можливих систем переміщень пружного тіла *переміщення, які дійсно мають місце, надають потенціальній енергії мінімальне значення.*

Принцип Лагранжа впливає безпосередньо з початку можливих переміщень. Принцип Лагранжа дійсний при постійній температурі [34]. Принцип Лагранжа є ознакою рівноваги пружного тіла, що знаходиться під впливом системи зовнішніх сил при зміні переміщень.

Кастільяно розглянув напруження, що відповідають положенню рівноваги тіла.

Із усіх статично можливих систем напружень лише та система має місце, при якій енергія внутрішніх і поверхневих сил має мінімум. Це і є варіаційний принцип Кастільяно, що виражає в енергетичній формі умову сумісності деформацій.

Згідно з висловом Леонарда Ейлера: «В світі не проходить нічого, в чому не проглядав би зміст якогось максимуму чи мінімуму».

1.5 Основні концепції і закони механіки континууму

Фізичні закони механіки суцільних середовищ виражаються тензорними рівняннями. Хоча молекулярна природа побудови матерії точно встановлена, в багатьох дослідженнях поведінки матеріалу важлива поведінка не окремих молекул, а лише *матеріалу як цілого*. В цих випадках при поясненні макроскопічних процесів не враховується молекулярна структура тіла, а вважають, що вона неперервно розподілена по всьому об'єму і повністю заповнює цей об'єм.

Така концепція *суцільності* є основним постулатом механіки суцільного середовища (континууму).

Одне із центральних місць при побудові механіки суцільного середовища займають рівняння балансу мас, балансу кількості руху і моменту кількості руху. Класифікація наукових фактів така:

1. $m - Const$;
2. $mv - Const$;
3. кінетична енергія $mV^2/2 - Const$.

Людству потрібно було 17 століть, щоб прийти до поняття руху ($F=a*m$). Твердження «маса ніколи не змінюється» – наше робоче правило. Теорія відносності заставила нас збавити тон – «майже ніко-

ли». Зміна маси m помітна при дуже великих швидкостях v , або коли проходить дуже велика зміна енергії. При швидкостях від швидкості раулика до швидкості ракети $m = Const$ (це діапазони малих швидкостей). Згідно з теорією відносності Ейнштейна при $v = 100.000.000$ км/год маса m збільшується на 1 %.

1. Закон збереження маси стверджує, що маса виділеної частинки середовища залишається постійною

$$m = \int_V \rho(x,t) dV = Const, \quad (1.4)$$

де $\rho(x,t)$ – щільність, тому похідна від (1.4) = 0.

2. Теорема про зміну кількості руху. Рівняння руху. Рівняння рівноваги.

Для рівноваги довільного об'єму V суцільного середовища під дією системи поверхневих і масових сил (гравітаційних, інерційних) потрібно, щоб результуючі сили і момент, що діє на цей об'єм, були рівні нулю.

$$\sigma_{ij,j} + \rho \cdot b_i = \rho \cdot \dot{v}_i - \text{рівняння руху.} \quad (1.5)$$

Для умови рівноваги, коли відсутнє прискорення ($v_i = a = 0$) отримуємо *рівняння рівноваги*, яке широко використовується в механіці твердого тіла,

$$\sigma_{ij,j} + \rho \cdot b_i = 0. \quad (1.6)$$

3. Теорема про зміну кількості руху формулює, що швидкість зміни моменту кількості руху довільно вибраної частини континууму відносно будь-якої точки рівний головному моменту (відносно тієї ж точки) масових і поверхневих сил, що діють на цю область середовища.

При силових впливах тіло змінює свою початкову конфігурацію. Якщо через x_i позначити початкові координати точки P тіла, а через $x_i + u_i$ – положення цієї ж точки після деформування тіла, то u_i називають компонентами переміщень, які залежать від координат x_i .

Деформація – графічне подання форми конфлікту між навантаженням та конструкцією. Опір матеріалів, теорія пружності, будівельна механіка, геомеханіка – боєві об'єднання інженера-будівельника.

Термін “деформація” відноситься до зміни форми континууму від деякої початкової (недеформованої) конфігурації, до наступної (деформованої) конфігурації. При вивченні деформацій враховується лише

початкова і кінцева конфігурації, проміжним станам уваги не приділяється. В класичній лінійній теорії пружності передбачається, що самі зміщення і їхні градієнти малі.

Частинне диференціювання вектора переміщень по координаті x приводить до градієнта переміщення. Коли в тензорі деформацій Коші знехтувати похідними другого порядку, то тензор нескінченно малих деформацій Коші матиме вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.7)$$

Особливість поведінки конкретного матеріалу в залежності від умов його деформування проявляється насамперед у визначальних співвідношеннях для цього матеріалу.

Визначальні співвідношення – це обмеження, що накладаються на сили чи рух, чи одночасно на те і друге разом.

Під визначальними співвідношеннями (фізичними співвідношеннями чи рівняннями стану) розуміють співвідношення, що дозволяють обрахувати напруження як функції (чи функціонали) кінематичних змінних (як функції поля переміщень чи швидкості переміщень).

Для лінійного пружного тіла визначальними рівняннями, що пов'язують $\sigma - \varepsilon$, є закон Гука. Для ізотропного пружного матеріалу, в якому постійна температура, закон Гука, що пов'язує напруження і деформації записується у вигляді:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (1.8)$$

де ν – коефіцієнт Пуассона, $G = \frac{E}{[2(1+\nu)]}$ – модуль пружності при зсуві.

В результаті того, що в лінійній теорії пружності рівняння і граничні умови лінійні, можна використовувати принцип суперпозицій для отримання нових розв'язків із раніше знайдених.

Однозначність розв'язку статичної задачі теорії пружності може бути встановлена за допомогою принципу суперпозицій і закону збереження енергії.

РОЗДІЛ 2 ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОСТІ

2.1 Основні задачі теорії пластичної течії

Бурхливий прогрес механіки деформованих середовищ в ХХ столітті різко відрізняється від спокійного його розвитку в попередній період. Напрацьована Коші, Пуассоном, Лагранжем, Нав'є, Ламе, Сен-Венаном та іншими теорія пружності довго розглядалась як розділ математичної фізики, а не як інструмент для практичних розрахунків. Необхідність мінімізації ваги конструкцій потребувала уточнення розрахункових методів. З'явилась теорія пластичності і повзучості А. Надаї, яка дала можливість виконувати пластичні розрахунки в геомеханіці.

Пружні деформації мають властивість повного відновлення недеформованого стану після зняття прикладених навантажень. Крім того, пружні деформації залежать лише від величини напружень і не залежать від історії деформування чи навантаження.

Довільна деформація, що виникає як відповідна реакція матеріалу на прикладені навантаження і не підкоряється визначальним законам класичної теорії пружності, може розглядатись як непружна деформація. 95 % деформацій ґрунтового дисперсного середовища є непружними, залишковими. Незворотні зміщення, які отримує матеріал в результаті ковзання чи дислокації на атомному рівні і, як наслідок, ведуть до залишкових змін розмірів, називають пластичними деформаціями. Такі деформації мають місце лише при інтенсивності напружень вище деякого порогу, відомого як межа пружності чи межа текучості (σ_y).

Основна проблема теорії пластичності – математичне формулювання співвідношень між $\sigma - \varepsilon$, що відповідають феноменологічному опису пластичних деформацій, та встановлення правил визначення кількісних критеріїв для фіксації початку приходу пластичності. Кількісна характеристика пружності твердих тіл – модуль пружності E . Характеристика пластичних деформацій ε^p не має показника, аналогічного модулю пружності.

Термін пластична течія широко використовується в теорії пластичності для позначення процесу пластичного деформування. Та на відміну від течії рідини, при якій передбачається рух частинок середовища, поняття пластичної течії відноситься до неперервної зміни сумарних деформацій, а швидкість є швидкістю деформації. Так тверде

тіло в стані пластичності може мати дотичні напруження, залишаючись в спокої.

Багато основних понять теорії пластичності можна вивести безпосередньо, розглядаючи діаграми залежностей $\sigma - \varepsilon$ при експериментальних дослідженнях гіпотетичних матеріалів на просте одновісне розтягнення (чи стискання). σ – умовне напруження (сила, поділена на початкову площу перерізу), в якості ε можна взяти чи звичайну (технічну) відносну деформацію (деформацію Коші) (рис. 2.1)

$$\varepsilon = (L - L_0) / L_0, \quad (2.1)$$

де L – текуча довжина зразка; L_0 – його початкова довжина, чи натуральну (логарифмічну) відносну деформацію

$$\varepsilon = \ln(L / L_0) = \ln(1 + e) = e - e^2 / 2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.2)$$

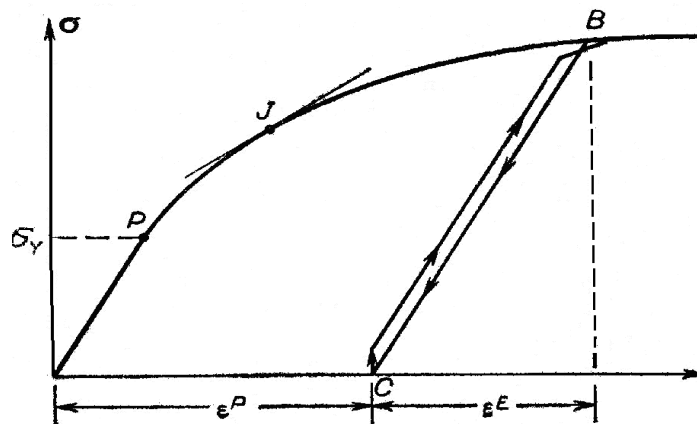


Рисунок 2.1 – Діаграма розтягнення: ε – деформація Коші

На графіку $\sigma - \varepsilon$ точка P – межа пропорційності; точка B – початок процесу розвантаження; $\varepsilon^P, \varepsilon^E$ – залишкові та пружні деформації; точка C – повторне навантаження; простір BC – втрата енергії в циклі розвантаження–навантаження (петля гістерезису).

При малих деформаціях ці дві їх міри майже рівні. На таких діаграмах $\sigma - \varepsilon$ можна визначити межу текучості (кінець лінійної ділянки $\sigma - \varepsilon$), яка ділить графік $\sigma - \varepsilon$ на пружну область і пластичну. В пружній області при розвантаженні точка, що зображує НДС, рухається вниз по тому самому шляху. Таким чином, в пружній області існує взаємно однозначна відповідність між $\sigma - \varepsilon$. В пластичній області картина інша. При розвантаженні від деякого стану (т. B), точка, що зображує стан, рухається по шляху BC , практично паралельному лінійній пружній частині кривої. В т. C , де напруження майже нульове,

отримуємо залишкову пластичну деформацію ε^p , ε^E – відновлена пружна деформація т. В. При повторному навантаженні з т. С в т. В рух проходить по шляху, дуже близькому до ВС, та не попадає в т. В. Через втрату енергії в циклі розвантаження–навантаження утворюється невелика петля гістерезису. Після повернення до т. В потрібно збільшувати навантаження, щоб викликати подальшу деформацію. Це явище пов'язане з властивістю зміцнення матеріалу. Таким чином, в пластичній області напруження залежить від всієї історії навантаження чи деформування середовища.

2.2 Ідеалізовані діаграми пластичної поведінки матеріалів

Багато із тривимірних пластичних теорій можна розглядати як деяке узагальнення ідеалізованих одновимірних діаграм $\sigma - \varepsilon$. Деякі з них подані на рис. 2.2, де по осі абсцис – деформації, по осі ординат – напруження; F – межа руйнування; R – залишкова величина.

На рис. 2.2а пружна область і явище зміцнення повністю відсутні. На рис. 2.2б є пружна зона, а зміцнення немає. При відсутності зміцнення деформація називається абсолютно пластичною. Моделі на рис. 2.2а і 2.2в є найбільш корисними при вивченні обмежених пластичних деформацій, коли великі деформації заборонені. На рис. 2.2в зміцнення лінійне, а ε^E – відсутні. Моделі на рис. 2.2в і 2.2г використовуються при вивченні необмеженої зовнішніми умовами пластичної течії. В механіці ґрунтів найчастіше використовуються моделі, що на рис. 2.2б і 2.2в.

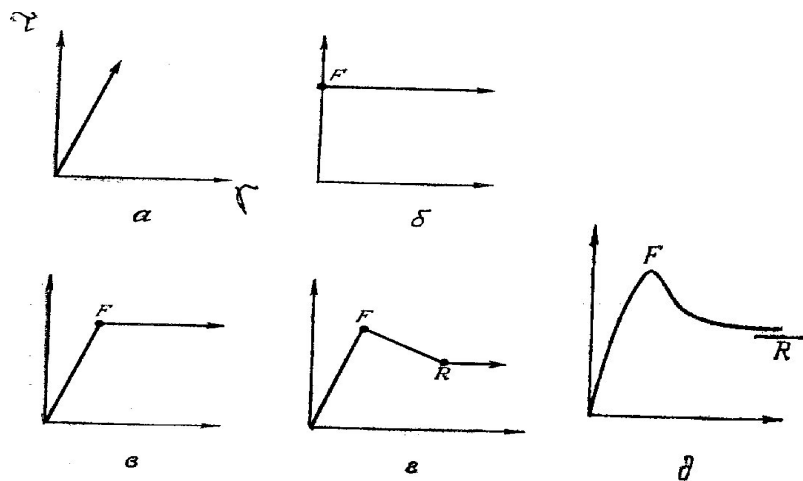


Рисунок 2.2 – Співвідношення між напруженнями і деформаціями для ідеальних і реальних ґрунтів: а – пружна модель; б – жорстко пластична модель; в – пружно-пластична модель; г – пружно-пластична модель з розміцненням; д – реальний ґрунт

Пластичні деформації. В пластичних тілах при малих напруженнях їх поведінка не буде суттєво відрізнятися від поведінки жорсткого ідеально пружного тіла. Вони теж будуть деформуватись пружно, але навіть при тих же напруженнях їх деформації будуть більші. Та дотичні напруження τ не можуть зростати до такої ж величини, як у випадку жорсткого тіла. Коли τ сягає деякої межі (**його називають межею текучості при зсуві**), то напруження будуть залишатись приблизно постійними $\tau = \tau_T$ при будь-якій величині зміщення. Коли напруження перевищують межу текучості, здійснюється перетворення структурованої дисперсної системи ґрунту.

Межа текучості металів змінюється від 3 кг/мм² (алюміній) і до 76 кг/мм² (нікель). Для сталі вона залишається в інтервалі від 23 до 45 кг/мм².

В'язка течія. Щоб деформувати в'язке тіло (наприклад воду) практично не потрібно будь-якого значного зусилля. Аналогічно рівності

$$(\tau = \mu \cdot \gamma), \quad (2.3)$$

для в'язкого тіла $\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}$. (2.4)

Рівність (2.4) – це закон пропорційності дотичних напружень τ градієнту швидкості $\dot{\gamma}$, який сформулював Ньютон; η – коефіцієнт в'язкості.

Ідеально пружних, пластичних, в'язких тіл реально в природі не існує. Вище описані властивості не є властивостями реальних матеріалів. Це властивості ідеалізованих схем, які вводяться для описання поведінки реальних тіл.

Реологічні рівняння

$$\tau = G \cdot \gamma; \tau = \tau_T; \tau = \eta \cdot \dot{\gamma} \quad (2.5)$$

визначають три ідеальних тіла, а саме:

- гукове тіло (пружне тіло),
- сен-венанове тіло (пластичне тіло),
- ньютонівську рідину (в'язку рідину).

Кожний реальний матеріал ми маємо уявляти як тіло, якому властиво всі реологічні властивості, але різною мірою. Кельвін із термодинамічних міркувань прийшов до висновку, що ніяких змін об'єму чи форми не може бути отримано ні в якому виді матерії без дисипації енергії.

2.3 Критерій пластичності Треска, Мізеса, Мізеса–Шлейхера–Боткіна

Вивчення основ теорії пластичності починається з формулювання критерію пластичності, який не має залежати від вибору координатної системи. При переході від одновісного НДС до складного НДС виникає проблема формулювання умов переходу до пластичного стану.

Коли розглянути дев'ятивимірний простір, кожний вимір якого відповідає одному компоненту тензора напружень T_σ , то, узагальнюючи поняття границі текучості в цьому просторі, можна ввести поняття поверхні текучості, яка має властивість, що при виході вектора напружень σ , який зображує напружений стан в даній точці на цю поверхню, матеріал переходить в пластичний стан.

Таким чином, $f(\sigma_{ij}) = 0$, для тривимірного простору:

$$f(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = 0. \quad (2.6)$$

Вид поверхні текучості інваріантний до вибору системи координат. Критерій пластичності є важливим узагальненням на тривимірний напружений стан поняття межі текучості для одновісного стискання (розтягнення). З математичної точки зору критерій пластичності – це співвідношення між компонентами напружень в точці, яке має виконуватись, коли в цій точці розпочинається пластична поведінка. Ця умова задається рівнянням

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (2.7)$$

де $f(\sigma_{ij})$ називають функцією текучості.

Експерименти показують, що для багатьох середовищ напруження всебічного стискання не викликають пластичних деформацій. Тому можна вважати, що в критерії пластичності фігурує функція інваріантів девіатора напружень

$$f(II_{\Sigma_D}, III_{\Sigma_D}) = 0. \quad (2.8)$$

Із численних критеріїв пластичності прийнятно простими математично і в той же час достатньо точними є критерії Треска і Мізеса.

Критерій Треска (*теорія постійності максимального дотичного напруження*) включає головні напруження максимальні і мінімальні, а проміжне головне напруження не відіграє ніякої ролі.

Граничною поверхнею Треска є шестикутна призма (рис. 2.3) з твірними, паралельними гідростатичній осі Δ . Передбачається, що в цьому випадку проходить деформація без зміни об'єму і критерій Треска залежить лише від девіатора і не залежить від гідростатичного тиску σ_m .

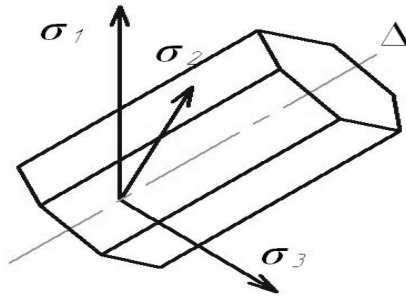


Рисунок 2.3 – Критерій текучості Треска – правильний шестикутник

Згідно з цим критерієм пластична поведінка (руйнування матеріалу) починається тоді, коли максимальне дотичне напруження τ_{\max} сягає заданої величини C_Y . Простішим є його запис в головних напруженнях. Так при $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$ критерій Треска матиме вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) = C_Y = const. \quad (2.9)$$

Критерій текучості Мізеса (рис. 2.4) (*теорія енергії викривлення форми чи теорія постійності девіатора напружень*). На відмінну від критерію Треска критерій Мізеса залежить також і від проміжного головного напруження σ_{II} .

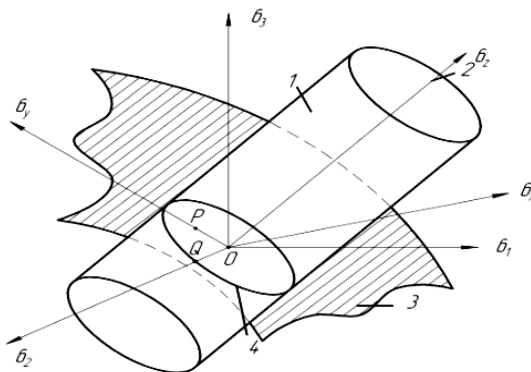


Рисунок 2.4 – Циліндрична поверхня текучості Мізеса:

- 1 – поверхня текучості; 2 – гідростатична вісь $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$;
- 3 – девіаторна площина $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 0$; 4 – траєкторія руйнування

Пластична поведінка матеріалу згідно з цим критерієм розпочинається тоді, коли другий інваріант девіатора напружень сягає деякого критичного значення: $-II_{\Sigma D} = C_Y$,

– через головні напруження

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6C_Y,$$

– через межу текучості при чистому зсуві k

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 6k^2. \quad (2.10)$$

Критерій залежить лише від девіатора, і не залежить від гідростатичного тиску

$$\tau_{окт}^{max} = \frac{\sqrt{2}}{3} k = const. \quad (2.11)$$

тобто, за Мізесом руйнування настає, коли *октаедричне дотичне напруження сягає критичного постійного значення*, чи стає постійною інтенсивність девіатора напружень:

$$k \approx (1/2 + 1/\sqrt{3}) \tau_{max}, \quad k^2 = J_2(D_\sigma). \quad (2.12)$$

Цей критерій використовують до розв'язання задач пластичності, коли при одновісному напруженому стані матеріал підкоряється діаграмі Прантля за наявності пружної та пластичної зон без зміцнення.

Модифікований критерій текучості Мізеса–Шлейхера–Боткіна (*октаедрична теорія міцності*) найбільшою мірою відповідає деформативності геоматеріалів [2].

В більшості випадків деформації ґрунту супроводжуються зміною об'єму. Тому викладки теорії пластичності, які базуються в основному на експериментальних дослідженнях сталей і металів у випадку прикладання до ґрунтів мають бути скореговані. Класична механіка деформування твердих тіл займалась матеріалами, щільність яких в процесі деформування змінювалась дуже мало, або зовсім не змінювалась. Тому матеріали, яким властива суттєва незворотна об'ємна стискуваність, досліджені порівняно слабо. Нестискуваність матеріалів є суттєвим кінематичним обмеженням, а наявність ущільнення вносить корективи в розрахунок процесів деформування та приводить до перебудови поля швидкостей та зміщень.

Найбільш сприятливим в механіці ґрунтів є використання модифікованого критерію пластичності Мізеса–Шлейхера–Боткіна, який враховує просторовий напружений стан. Поверхня текучості цього критерію дає співвідношення між інваріантами напруженого стану σ_m (середній гідростатичний тиск) та T (інтенсивність дотичних напружень) на октаедричній площині та разом з рівняннями рівноваги забезпечує відповідність кількості рівнянь кількості невідомих. З математичної точки зору – це співвідношення між σ_m та T в граничному стані.

А. І. Боткін сформулював умову міцності, яка є узагальненням умови міцності, запропонованої Мізесом і Шлейхером і яка лінійно пов'язує дотичні і нормальні напруження на октаедричній площині в граничному стані, тобто, площадка граничної рівноваги (текучості) збігається з октаедричною (площадкою мобілізації дотичних напружень). Умова Мізеса–Шлейхера–Боткіна на відміну від умови Кулона–Мора враховує всі три головні напруження, тобто, деформації зсуву тут залежать і від σ_{II} . Октаедричній площадці властива низка особливостей, які спрощують розгляд напружень на цих площадках при аналізі умов руйнування. Модифікована [2] умова Мізеса–Шлейхера–Боткіна передбачає *прихід граничного стану (зсуву)* на девіаторній площадці, рівнонахилений до головних осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Зсувний механізм руйнування ґрунту добре підтверджується експериментом. Поверхня розриву подається у вигляді поєднання конічної та циліндричної частин, рис. 2.5. Модифікована [2] поверхня текучості Мізеса–Шлейхера–Боткіна (2.14) вказує на те, що при пластичному стані ґрунту дотичне октаедричне напруження є функцією від нормального октаедричного напруження:

$$\tau_{окт} = f(\sigma_{окт}); \quad f(\sigma_{окт}, \tau_{окт}) = 0. \quad (2.13)$$

У девіаторному та меридіальному перерізах, рис. 2.5:

$$\begin{cases} f = T + \sigma_{окт} \operatorname{tg}\psi - \tau_s = 0, & \sigma_{окт} \leq p_0, \\ f = T + p_0 \operatorname{tg}\psi - \tau_s = 0, & \sigma_{окт} > p_0, \end{cases} \quad (2.14)$$

де T – інтенсивність дотичних напружень; $\sigma_{окт}$ – гідростатичний тиск; ψ – граничний кут тертя на октаедричній площині; τ_s – параметр на октаедричній площині, аналогічний зчепленню; p_0 – величина гідростатичного тиску на девіаторній площині, коли ґрунт працює як суцільне середовище (межа пластичної стисливості [2]).

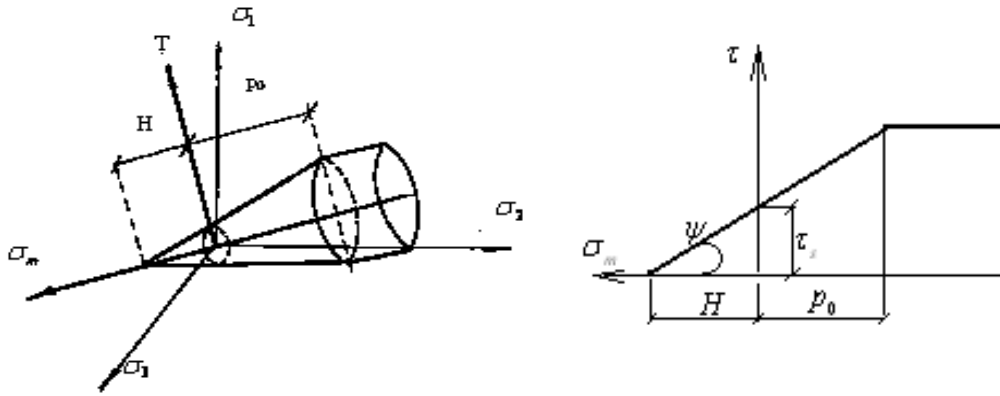


Рисунок 2.5 – Модифікований [2] критерій текучості Мізеса–Шлейхера–Боткіна та меридіональний переріз в площині гідростатичного тиску

Натягнутий на конус ковпачок (кришка) обмежує максимальні дотичні напруження. Кришка рухається, поки виникають пластичні деформації. Кришка може розширюватись і стискатись. Переміщуючи кришку можна обмежити кількість дилатансії, яку матеріал може розвивати.

З метою подальшого розвитку модифікованої моделі ґрунтового середовища проф. І. П. Бойка [2], яка базується на дилатансійній теорії В. М. Ніколаєвського та узагальненому критерію Мізеса–Шлейхера–Боткіна, запропоновано узагальнення критерію пластичності [2, 3] шляхом поєднання критеріїв Мізеса–Шлейхера–Боткіна та Мора–Кулона:

$$f = T - T_{zp} = 0, \quad (2.15)$$

де в умові пластичності (2.15) T – інтенсивність дотичних напружень;

$$T_{zp} = \min \begin{cases} -\sigma_m \operatorname{tg} \psi + \tau_s, & (\text{Кулона – Мора}), \\ -\sigma_m \operatorname{tg} \bar{\psi} + \bar{\tau}_s, & (\text{М – Ш – Б}), \\ -p_0 \operatorname{tg} \bar{\psi} + \bar{\tau}_s, & (\text{Мізеса}), \\ -\sigma_m \operatorname{tg} \psi^* + \tau_{s}^*, & (\text{Умова відриву}) \end{cases} \quad (2.16)$$

В модифікованій умові (2.15), (2.16) рівняння стану доповнюються умовою появи дограничної пластичності [2, 3] з урахуванням ефекту розвантаження.

Таким чином, в теорії граничної рівноваги замість умови нерозривності (суцільності) граничні умови задаються в напруженнях.

В нелінійній механіці важливу роль при визначенні НДС ґрунтів відіграють інваріанти тензора напружень T_σ та тензора деформацій T_ϵ .

I_3 – третій інваріант тензора напружень T_σ :

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3. \quad (2.17)$$

I_2 – другий інваріант тензора напружень T_σ .

$$I_2 = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot S_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{xz}^2, \quad (2.18)$$

де S_{ij} – девіатор тензора напружень T_σ ,

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \left(\frac{I_1}{3}\right) \delta_{ij}, \quad (2.19)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера. I_1 – перший інваріант тензора напружень T_σ .

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (2.20)$$

2.4 Простір напружень. Π – площина

Для математичної постановки задачі механіки суцільного середовища необхідні співвідношення, які визначають зв'язок між силовими і кінематичними параметрами в середовищі. В рамках теорії пружності ними є рівняння, що пов'язують кінцеві значення напружень і деформацій, основою для їх отримання слугують закони термодинаміки зворотних процесів.

Пластичне деформування середовища ґрунту є процесом незворотнім і тут можливості термодинаміки значно скромніші (Π -й закон термодинаміки вже не визначає, а лише обмежує зміну термодинамічних функцій, і вибір параметрів внутрішнього стану в рамках термодинаміки залишається не визначеним, в зв'язку з чим доводиться йти на ті чи інші додаткові передумови).

Така своєрідна неаналітичність приводить до появи в просторі внутрішніх параметрів деяких граничних поверхонь, обрис і зміна яких здійснює рішучий вплив на форму самого закону деформування. Процес зміни НДС в результаті зміни зовнішніх сил має назву процес навантаження. Поверхні, координатами яких є параметри НДС – параметри навантаження.

Траєкторію, яку окреслює кінець вектора напружень σ при навантаженні тіла називають ще *траєкторією навантаження* (В. Прагер, 1949), поверхнею границь пружності f . Якщо траєкторія якоїсь точки тіла виходить за межі траєкторії навантаження, з'являються нові пластичні деформації. Нова незворотна деформація не може виникнути самовільно, для її створення потрібно затратити енергію (Д. Друкер, 1951).

Це положення, яке деколи називають основною нерівністю пластичності (чи постулатом стійкості пружно-пластичного матеріалу) є вельми дієвим при пошуку зв'язку $\sigma - \varepsilon$:

$$\int_{\sigma} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0. \quad (2.21)$$

Тут використано звичайне визначення елементарної роботи внутрішніх сил і значком σ відмічено, що процес замкнений по напруженнях. Простір напружень визначається тим, що в якості міри відстаней вздовж осей координат беруться величини напружень. В просторі головних напружень (просторі Хей–Вестергарда) по осях координат відкладаються головні значення тензора напружень T_σ , рис. 2.6.

Кожна точка такого простору відповідає деякому НДС. Радіус – вектор OP довільної точки $P(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ можна розкласти на дві компоненти: OA – вздовж OZ , яка складає рівні кути з осями координат (гідростатична вісь) і OB в площині, перпендикулярній до OZ , проходить через початок координат і має назву Π -площина. Компонента OA , для неї $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$, це гідростатичний тиск, а компонента в Π -площині – девіаторна частина напружень.

В просторі напружень умови $f(\sigma_{ij} = 0)$, $f(II_{\Sigma D}, III_{\Sigma D} = 0)$ це деяка поверхня, яку називають поверхнею текучості.

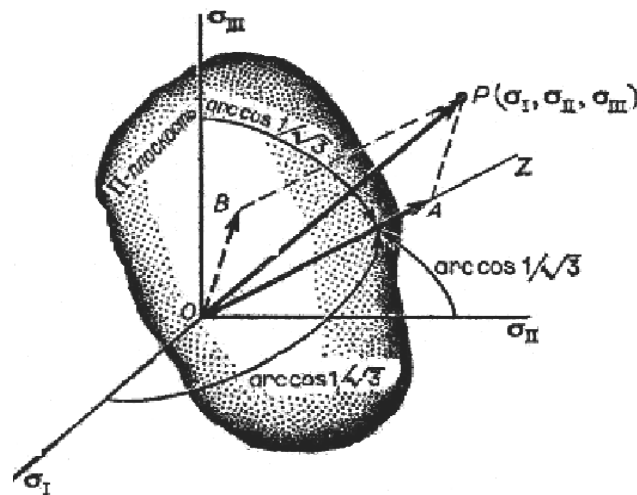


Рисунок 2.6 – Крива текучості – перетин поверхні текучості з Π -площиною

2.5 Теорія пластичного потенціалу.

Метод «пружних» рішень Ільюшина

При локалізації області текучості матеріалу в невеликій його зоні рішення в пружній постановці може бути використано в інженерній практиці.

Як тільки в тілі виникають великі зони розвитку пластичних деформацій ε^P (великі зони граничного стану), визначальні рівняння теорії пружності перестають бути правомірними. В силу того, що пластичні деформації залежать від усієї історії навантаження матеріалу в теорії

пластичності співвідношення між $\sigma - \varepsilon$ формулюють *через прирости деформацій*. Це так звані моделі *інкрементальні* теорії, чи теорії течії.

Задача моделі – аналогічно моделювати (імітувати) поведінку оригіналу та прогнозувати його реакцію на ті чи інші впливи.

Коли приріст деформацій розкласти на пружну і пластичну частини:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^E + d\varepsilon_{ij}^P, \quad (2.22)$$

і зв'язати приріст пластичних деформацій з компонентами девіатора напружень

$$d\varepsilon_{ij}^P = S_{ij}d\lambda, \quad (2.23)$$

ми приходимо до рівняння Прантля-Рейса, яке є законом течії ідеально пружного пластичного матеріалу. Він встановлює зв'язок між приростами пластичних деформацій і девіатором текучих напружень.

Функцію компонент напружень $F(\sigma_{ij})$, яка має властивість

$$d\varepsilon_{ij}^P = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad F \neq f \quad (2.24)$$

називають *пластичним потенціалом*. Для так званого стійкого пластичного матеріалу (при асоційованому законі пластичної течії) така функція існує і тотожно збігається з функцією текучості f .

Рівняння (2.24) і є тим додатковим фізичним співвідношенням, або *рівнянням стану* при неасоційованому законі пластичної течії.

Розв'язок задач теорії пластичності пов'язаний з розв'язком системи нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що є надскладною задачею. Тому розв'язання такої задачі найчастіше бу-дується за допомогою наближених методів.

Одним з дійових методів є метод послідовних наближень, запропонований О. А. Ільюшиним. Цей метод в теорії пластичності називають методом «пружних рішень». Його суть – розгляд послідовності лінійних задач теорії пружності, який із збільшенням порядкового номера збігається з розв'язком задачі теорії пластичності.

Метод «пружних» розв'язків О. А. Ільюшина є дієвим наближеним методом, який дозволяє звести розв'язання пружно-пластичної задачі до послідовного розв'язання лінійних задач. Розглядаються малі пружно-пластичні деформації.

Середовище навантажується поступово з визначеними малими порціями навантаження. Малі довантаження відповідно викликають малі прирости деформацій, напружень і переміщень. При цьому з достатнім ступенем достовірності допускається, що при малих переміщеннях середовище поводить як лінійно-пружне.

РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕХАНІКИ ДИСПЕРСНИХ ҐРУНТІВ

3.1 Види ґрунтових основ.

Фізичні та міцнісні характеристики ґрунтів

Ґрунти – продукти механічних, фізико-хімічних, біологічних процесів, що проходили протягом низки геологічних епох на поверхні скальних порід. Вони поділяються на скальні і нескальні. Останні в свою чергу діляться на крупно-уламкові, піщані, глинисті.

Піщані ґрунти (результат вивітрювання кварцу) мають зернисту будову, між зернами якого через відсутність цементуючого в'язучого немає зв'язності. Відсутність зчеплення приводить до того, що при вільній засипці цих ґрунтів вони розсипаються, приймаючи вигляд конічної купи. До основних властивостей піщаних ґрунтів відносяться:

- добра водопроникна спроможність;
- незначні набухання при замочуванні і усадка при висушуванні;
- відсутність пластичності і деяка спроможність підтягувати воду по капілярах [9].

Глинисті ґрунти – зв'язні, їм не властива сипучість, в залежності від вологості (W) можуть бути твердими, пластичними, текучими. Є продуктом вивітрювання силікатних і алюмосилікатних порід (каолінит). Зв'язні (глинисті) ґрунти дрібнозернисті. Вузькі щілини між їх зернами заповнені водою, меніски і плівки яких викликають доволі значне зчеплення. На противагу піщаним ґрунтам глинистим властиві:

- погана водопроникна спроможність;
- значне набухання при замочуванні, усадка при висушуванні;
- висока пластичність та висока спроможність підтягувати воду.

За фізико-механічними характеристиками глинисті ґрунти проти-лежні піщаним і при будівництві їх поведінка різко відрізняється від піщаних ґрунтів. Глинисті ґрунти за видами бувають: супісок, суглинок, глина.

Реактивні сили в сипучих і зв'язних ґрунтах при дії на них зовнішнього навантаження виникають в результаті зчеплення і внутрішнього тертя, на них значно впливає тип ґрунту.

Якщо в міцності піщаного ґрунту основну роль грає тертя, то визначальним фактором міцності глини є зчеплення. Ґрунти розглядають як трифазову систему: скелет + вода + повітря (газ) [39–41]. Від співвідношення фаз залежать будівельні властивості ґрунту.

Однофазові (скальні) ґрунти найбільш міцні. Будівельні характеристики двофазових ґрунтів і трифазових менш чіткі і для їх визначення залучають фізико-механічні дослідження.

В трифазовій системі ґрунту, де частина об'єму приходить на тверду фазу (скелет), дві інші частини – на рідку (вода) і газоподібну (повітря) навантаження, насичення водою і висушування викликають зміни співвідношень фаз в одиниці об'єму ґрунту.

Розподіл фаз в ґрунті характеризується:

$$- \text{відносною вологістю } W = m_w / m_s; \quad (3.1)$$

$$- \text{щільністю ґрунту } \rho = m_0 / V_0; \quad (3.2)$$

$$- \text{щільністю частинок ґрунту } \rho_s = m_s / V_s; \quad (3.3)$$

де m_w – маса води, що знаходиться в порах; m_s – маса скелету ґрунту.

При визначенні вологості проводять висушування зразків ґрунту при $t = 105\text{--}110^\circ\text{C}$ до отримання постійної маси. m_0, V_0 – маса та об'єм зразка. Ці характеристики ґрунту знаходяться лабораторним шляхом. Використовуючи їх можна визначити співвідношення маси та об'єму частинок в ґрунті:

– щільність сухого ґрунту

$$\rho_d = m_s / V_0; \text{ або } \rho_d = \frac{\rho}{1+W}; \text{ або } \rho_d = \frac{\rho}{1+0,01W} \quad (3.4)$$

$$- \text{пористість ґрунту } n = \frac{V_{\text{пор}}}{V_0}; \quad (3.5)$$

$$- \text{частина об'єму, що займає скелет } m = \rho_d / \rho_s; \quad (3.6)$$

$$- \text{коефіцієнт пористості } e = \frac{n}{m} = \frac{\rho_s}{\rho_d} - 1 = \frac{\rho_s(1+w)}{\rho}. \quad (3.7)$$

Коефіцієнт пористості характеризує ущільненість ґрунтів і використовується для оцінки їхньої придатності в якості основ споруд. Якщо $e \leq 0,5$ – ґрунт малостисливий і основа надійна. При $e > 1$ ґрунт пухкий. В багатьох розрахунках пористість n і скелетність m_s ґрунтів виражають через коефіцієнт пористості. Такий підхід зручно використовувати для оцінки фізичного стану ґрунтів і його ущільненості.

Таким чином, до фізичних характеристик ґрунту відносяться: вологість W , об'ємна вага q_w , питома вага γ , пористість n_w , гранулометричний склад і пластичність w_1, w_2, w_A .

До механічних властивостей ґрунтів відносяться: сили зчеплення C , внутрішнє тертя ґрунту φ , модуль деформацій E , коефіцієнт Пуассона ν .

Опір ґрунтів зсуву визначає їх міцність і стійкість в основах споруд, відкосів. Опір зсуву по різному проявляється в піщаних і глинистих ґрунтах і залежить від характеру контакту між частинками ґрунту. Опір ґрунту зсуву можна визначити на одноплощинному зсувному пристрої прямого зрізу. В ньому ґрунт зрізується зусиллям T після розміщення його в двох компресійних кільцях та обтисненням його ущільнюючою вертикальною силою F (рис. 3.1). Проводиться зріз декількох обтиснутих різними вертикальними навантаженнями зразків. Результати досліджень наносять на графік і отримують залежність опору ґрунту зсуву (рис. 3.2) від вертикального стискаючого напруження.

За допомогою такого графіка визначають параметри опору ґрунту зсуву: кут внутрішнього тертя φ , питома зчеплення C . Величину $tg\varphi$ називають коефіцієнтом внутрішнього тертя ґрунту, а залежність

$$\tau = \sigma_n \cdot tg\varphi + c \quad (3.8)$$

отримала назву узагальненого закону Кулона і характеризує опір зсуву зв'язних ґрунтів. Залежність

$$\tau = \sigma_n tg\varphi \quad (3.9)$$

дійсна для сипучих ґрунтів і означає, що опір зсуву пропорційний нормальному напруженню на поверхні зсуву.

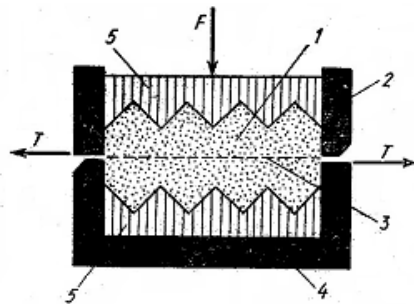


Рисунок 3.1 – Схема односмугового зсувного приставу: 1 – зразок ґрунту; 2 – верхня рухома обойма; 3 – площина зрізу; 4 – нижня рухома обойма; 5 – зубчасті фільтруючі пластини

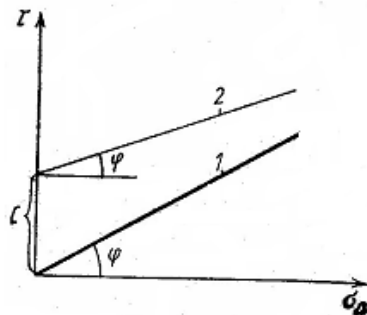


Рисунок 3.2 – Графік опору зсуву ґрунтів: 1 – піщаного; 2 – глинистого

Дослідження в стабілометрах (приладах тривісного стиснення) проводиться також з декількома зразками. Для прийнятого напруження σ_1 (найбільшого головного) визначається бокове σ_3 (найменше головне), при якому проходить руйнування зразка по косих поверхнях зсуву. Потім по кругах Мора для декількох зразків, досліджених при різних сполученнях σ_1 і σ_3 , будується їх обвідна (рис. 3.3, 3.4) – дотична пряма, аналогічна графіку Кулона. По ній визначають міцнісні характеристики ґрунту – параметри опору зсуву – $tg\varphi$ та C .

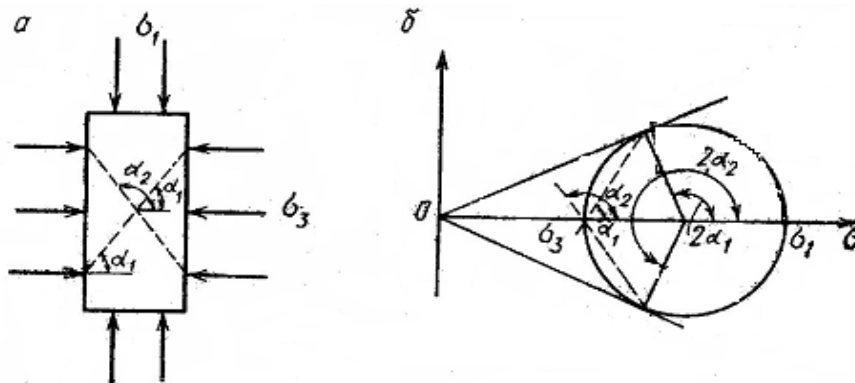


Рисунок 3.3 – Визначення параметрів зсуву за результатами тривісного стиснення сипучого ґрунту: а – схема тривісного дослідження ґрунту, б – круг Мора

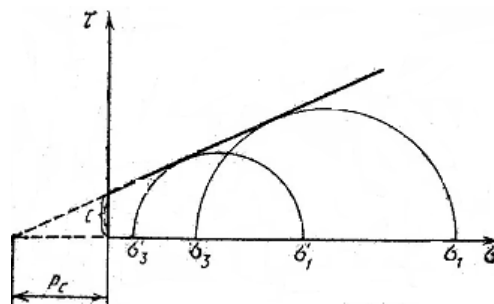


Рисунок 3.4 – Визначення параметрів опору зсуву за результатами всебічного стиснення зв'язного ґрунту ($p_0 = c / tg\varphi$ – всебічний тиск зв'язності)

3.2 Несуча спроможність ґрунтів. Граничні тиски та деформації

Основний показник роботи ґрунту – його осідання від гравітаційних та вітрових навантажень на споруду. Осідання споруд, як правило, пов'язані з ущільненням ґрунту. Типовий графік поведінки ґрунту дослідним штампом при зростаючому навантаженні наведено на рис. 3.5.

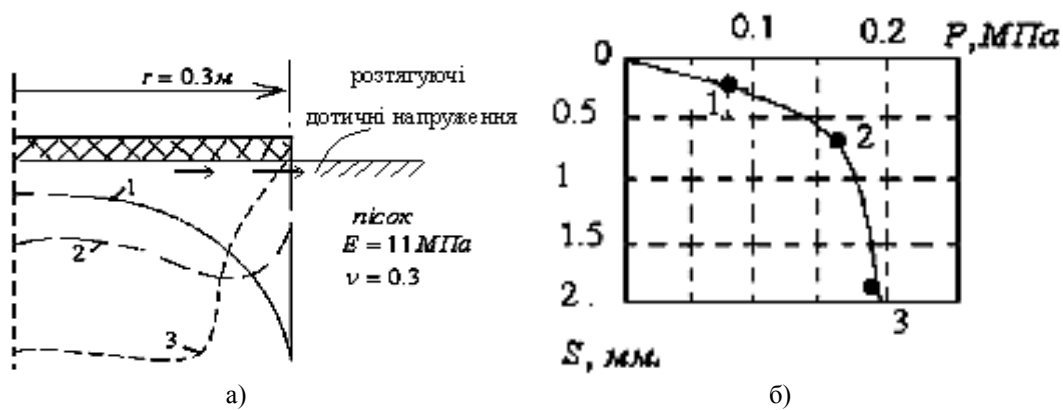


Рисунок 3.5 – Типовий графік поведінки ґрунту:

- а) – епюри нормальних напруг під штампом;
 б) – графік «навантаження – осідання» та розмежування стадій деформацій

Навантаження, що відповідають границям переходу від одного виду (стадії) деформацій до другого, отримали назву критичних навантажень чи критичних тисків. Прийнято вважати, що під дією зростаючого навантаження ґрунт проходить три стадії деформацій:

- ущільнення (стадія прямої пропорційності між $\sigma - \varepsilon$);
- зсувів (стадія пластичних деформацій – нелінійності між $\sigma - \varepsilon$);
- стадія руйнування (повна втрата несучої спроможності рис. 3.5б).

- В першій фазі деформування осідання здійснюється тільки за рахунок ущільнення ґрунту. Цьому відповідає прямолінійна ділянка (чи близька до неї).

- Друга ділянка – (фаза зсувів) криволінійна і характеризується зростанням деформацій через розвиток пластичних зон в ґрунті під краями штампа. В межах другої фази деформування швидкість осідання постійна і залежить від тиску по підшві штампа.

- Третя ділянка відображує фазу випирання при прогресуючій течії ґрунту без збільшення навантаження на штамп.

Деформації дисперсних середовищ здійснюються при дислокації твердих частинок в поровий простір, що неминуче приводить до одночасної зміни об'єму і форми.

Властивість змінювати свою будову (упакування твердих частинок) в залежності від зовнішніх дій є однією із характерних властивостей ґрунтів, яка відрізняє їх від твердих тіл.

Зменшення пористості дисперсних ґрунтів при більш компактному упакуванні (*стисливості*) проходить завдяки місцевим зсувам частинок в пори ґрунту.

Залежність тиск-осідання ґрунту носить чітко виражений *нелінійний характер*. З ростом тиску на ґрунт жорсткість ґрунту знижується. Урахування нелінійності деформування основи найбільш ефективно при розрахунку споруд в складних геологічних умовах.

Розрізняють *початковий критичний тиск*, *нормативний розрахунковий опір* і *граничний опір*, які визначають ступінь розвитку в ґрунті пластичних деформацій.

Початковий критичний тиск на ґрунт відповідає закінченню фази ущільнення, при якій розпочинають формуватись площадки зсувів. На площадках зсувів має місце гранична рівновага:

$$\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \sin \varphi = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} - C \cos \varphi. \quad (3.10)$$

Пластичні деформації з'являються спочатку під кутами завантаженої площі (рис. 3.6), а потім захоплюють все більші зони. Глибина зон пластичних деформацій (позначимо через α частину від ширини b) може бути виражена через ширину b – менший розмір завантаженої площі. Тоді глибину зони граничної рівноваги можна подати як $\alpha \cdot b$. В цьому випадку величину *початкового критичного тиску*, що відповідає глибині $\lambda \cdot b$, можна знайти з рівності

$$p_{кр} = \frac{\pi(\alpha \cdot \gamma_0 \cdot b + \gamma_0 \cdot h + c \cdot \operatorname{tg} \phi)}{\operatorname{ctg} \phi + \phi - \pi / 2} + \gamma_0 \cdot h, \quad (3.11)$$

де γ_0 – об'ємна маса ґрунту, що лежить вище площини прикладання навантаження г/см^3 ; h – відстань від площини прикладання навантаження до поверхні ґрунту, см ; c – параметр зчеплення ґрунту основи, кг/см^2 ; φ – кут внутрішнього тертя ґрунту.

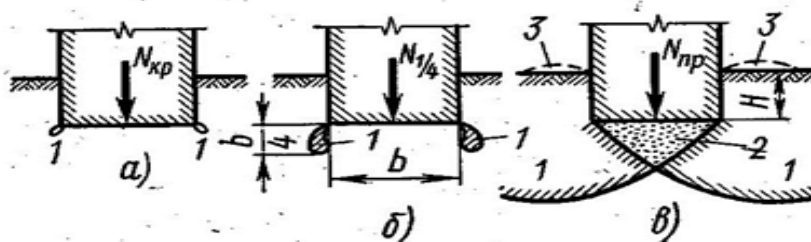


Рисунок 3.6 – Схеми розповсюдження областей граничної рівноваги в ґрунті основи:

- а) – при граничному крайовому навантаженні (початок стадії зсувів);
- б) – на глибині 0,25 ширини підоснови фундаменту;
- в) – при граничному навантаженні (початок стадії випирання чи втрати несучої спроможності); 1 – область граничної рівноваги; 2 – ущільнене ядро; 3 – випирання ґрунту

На основі численних експериментів встановлено, що при $\alpha \leq 0,25$ загальна деформація всього напруженого масиву ґрунту, ще відповідає закону Гука ($\varepsilon = \sigma / E$), тобто залежність між $\sigma - \varepsilon$ ще пропорційна (лінійна).

Тоді, при виконанні умови $\alpha \leq 0,25$ ґрунтову основу можна розглядати як лінійно-деформовану систему. Такий стан основи можна розглядати як **розрахунковий граничний стан**, а відповідний йому тиск в нормативних документах отримав назву **нормативний тиск на ґрунт** (R^H), що відповідає поняттю **нормативного опору ґрунту**.

Нормативний опір ґрунту основи. Вимога відсутності зон зсуву в основі є жорстка при призначенні тиску на ґрунт на рівні підшви фундаменту. Фундаменти виходять широкими і неекономічними. За наявності невеликих зон пластичних деформацій ґрунту графік « $P - s$ » близький до лінійного. Тому нормативні документи допускають розвиток зон граничної рівноваги ґрунту біля країв фундаменту на глибину $\frac{1}{4}$ їхньої ширини b , тобто, $z_{\max} = 0,25b$. **Нормативний опір ґрунту**

$$R^H = \frac{\pi\gamma}{\operatorname{ctg}\phi^H - \frac{\pi}{2} + \phi^H} \left(0,25b + d + \frac{c^H}{\gamma \cdot \operatorname{tg}\phi^H} \right) + \gamma \cdot d, \quad (3.12)$$

або

$$R^H = (M_\gamma \cdot b + M_q \cdot d)\gamma + M_c \cdot c, \quad (3.13)$$

де M_γ, M_q, M_c – безрозмірні коефіцієнти, що залежать від ϕ^H ; b, d – ширина підшви фундаменту і глибина його закладання.

Якщо ввести позначення

$$A = 0,25 \frac{\pi}{\operatorname{ctg}\phi - \pi/2 + \phi}; \quad B = 1 + \frac{\pi}{\operatorname{ctg}\phi - \pi/2 + \phi}; \quad D = \frac{\pi \cdot \operatorname{ctg}\phi}{\operatorname{ctg}\phi - \pi/2 + \phi}; \quad (3.14)$$

то рівність (3.13) можна подати як

$$p_{0,25} = R^H = (A \cdot b + B \cdot H)\gamma_0 + c^H \cdot D. \quad (3.15)$$

В нормативному документі СНиП II-Б.1-62 [40] в наявності величини A, B, D обраховані в залежності від кута внутрішнього тертя ϕ^H .

Розрахунковий опір ґрунту основи. Запроектовані згідно з (3.15) фундаменти в багатьох випадках були неекономічними через неповне

використання несучої спроможності ґрунтів, особливо піщаних, глинистих твердих. Згідно з нормативними документами (СниП 2.02.01-83 [38]) *розрахунковий опір ґрунту* визначається за формулою

$$R = \frac{\gamma_{c1}\gamma_{c2}}{k} [M_{\gamma}k_z b \gamma_{II} + M_q d_1 \gamma'_{II} + M_{q-1} d b \gamma'_{II} + M_c c_{II}], \quad (3.16)$$

де γ_{c1}, γ_{c2} – коефіцієнти умов роботи; M_{γ}, M_q, M_c, b – теж, що і в (3.15); γ'_{II} – усереднена розрахункова питома вага ґрунту.

Норми проектування вимагають обмежувати напруження по підшві фундаментів *розрахунковим опором ґрунту* основи, тому що це є умовою можливості прикладання до ґрунтів моделі лінійно-деформованого середовища, яка дозволяє отримати в цих межах достовірні значення осідань.

Нормативи при розрахунках осідань допускають розвиток зсувів до глибини, що не перевищує чверть ширини підшви фундаменту тобто при $z_{\max} = 0,25 \cdot b$ (де b – ширина фундаменту). В цьому випадку значення *критичного навантаження* на ґрунт основи

$$p = M_{\gamma} \cdot b \cdot \gamma + M_q \cdot d \cdot \gamma_d + M_c \cdot c, \quad (3.17)$$

де $M_{\gamma} = \frac{0,25 \cdot \pi}{\text{ctg}\phi + \phi - \pi/2}$, $M_q = \frac{\pi}{\text{ctg}\phi + \phi - \pi/2} + 1$, $M_c = \frac{\text{ctg}\phi \cdot \pi}{\text{ctg}\phi + \phi - \pi/2}$, – коефіцієнти несучої спроможності; γ_d – питома вага ґрунту, що залягає вище підшви фундаменту; γ, ϕ, c – відповідно питома вага, кут внутрішнього тертя та зчеплення ґрунту під підшвою фундаменту.

При проектуванні фундаментів важливо знати не лише критичний тиск на ґрунти основи, що відповідає роботі ґрунту в межах двох перших фаз роботи ґрунту при відносно незначних осіданнях, але і навантаження, при якому пройде втрата стійкості та випирання ґрунту. *Граничне значення* тиску на ґрунт отримано при розв'язанні цієї задачі за умов граничної рівноваги. При центральному навантаженні середній граничний тиск

$$P_{\text{граничне}} = N_{\gamma} \cdot b \cdot \gamma + N_q \cdot d \cdot \gamma_d + N_c \cdot c \quad (3.18)$$

де N_{γ}, N_q, N_c – коефіцієнти несучої спроможності, що визначаються з таблиць ДБН [18].

У зв'язку із значними об'ємами будівельних робіт виникає необхідність напрацювання інженерно-фізичних передумов для розрахунку взаємодії споруди і ґрунтової основи. Виникає потреба в практич-

ному визначенні фізичних процесів деформування і руйнування дисперсних ґрунтів під дією зовнішніх навантажень і в створенні нових методів розрахунку дисперсних ґрунтів. Н. М. Герсіванов, К. Терцагі, Н. А. Цитович досягли значних успіхів у вирішенні багатьох важливих проблем, які стали базою науково обґрунтованого проектування основ споруд на дисперсних ґрунтах. Створено будівельні норми і правила проектування основ і фундаментів. Та вивчення фізичної суті явища взаємодії основ та фундаментів не втратило актуальності. Класичні положення теорії пружності і теорії пластичності далеко не повністю відображають все різноманіття інженерно-фізичних властивостей ґрунту. Подальший розвиток методів розрахунку – урахування пружно-пластичної стадії роботи ґрунту.

Основоположники механіки дисперсних ґрунтів виходили з таких принципів: дисперсне ґрунтове середовище під впливом зовнішнього навантаження деформується нелінійно, наявна в порах вода впливає на деформативність, а присутність газу в цій воді вносить свої корективи.

Починаючи з основоположної роботи К. Кулона (1773 р.) до початку ХХ століття механіка дисперсних гранульованих середовищ розвивалась в основному як наука про статику сипучих середовищ. Це пояснювалось тим, що рівняння НДС плоского деформованого стану і рівняння теорії ідеальної пластичності є статично визначеними і можуть бути розв'язані без залучення кінематичних співвідношень. Та в гранульованих ґрунтових середовищах поля швидкостей деформацій і напружень не збігаються.

3.3 Залежність об'ємної деформації в ґрунтах від деформації формозміни. Експеримент Рейнольдса. Дилатансія гранульованих дисперсних ґрунтів

В реологічних рівняннях існує розбиття деформованого і напруженого стану на ізотропну компоненту, і на компоненту, що характеризує «відхилення» від ізотропного стану. Якщо це відноситься до деформацій, то перша частина називається об'ємною деформацією (чи деколи дилатацією), а друга частина називається деформацією формозміни. Якщо це відноситься до напруженого стану, то першу складову називають гідростатичним тиском, чи всебічним розтягом, а другу – девіатором напружень, яку можна трактувати як комбінацію дотичних напружень.

В класичній теорії пружності вважається, що любий матеріал характеризується двома незалежними реологічними рівняннями:

– перше пов'язує ізотропні компоненти;

– друге пов’язує девіатор напружень і деформації формозміни, тобто, це співвідношення між дотичними напруженнями і зсувом.

Вважалось, що ізотропне напруження викликає лише об’ємні зміни чи дилатацію, і не викликає зміну форми. Аналогічно в класичній теорії пружності передбачалось, що дотичні напруження викликають лише зсув чи зміну форми, а не впливають на об’єм чи щільність матеріалу.

Такий погляд класичної теорії пружності стосовно дисперсних ґрунтових основ був уточнений в 1885 р. О. Рейнольдсом відкриттям явища дилатансії [38].

На рис. 3.7 (зліва) показано 64 сфери, що утворюють майже щільне упакування. Якщо цю систему піддати дії зсуву, то сфери мають на початку прийняти більш відкрите упакування, яке показано справа. На рис. 3.7 видно, що така зміна упакування приводить до об’ємного розширення.

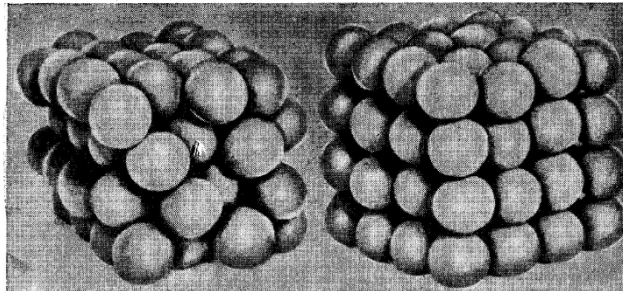


Рисунок 3.7 – Дані експериментальних досліджень явища дилатансії

Дилатансія (див. рис. 3.7) полягає в деякій зміні об’єму в результаті зміни форми чи деформації викривлення. Ще в 1975 р. В. Кельвін відмічав, що дотичні напруження τ можуть викликати в ізотропному тілі скорочення чи розширення об’єму, пропорційне квадрату їх величини.

Якщо група шарів утворює найщільніше упакування (рис. 3.7 зліва), то, приймаючи щільність шарів за одиницю, щільність середовища в цьому випадку рівна $\pi/3\sqrt{2}$.

Якщо скласти шари у вигляді правильного кубічного утворення, то щільність буде $\pi/\sqrt{6}$, чи в $\sqrt{2}$ рази менша, ніж в першому випадку. О. Рейнольдс відмітив, що зміна форми викликала зміну об’єму та назвав це явище дилатансією [29, 32].

Дилатансія залежить від τ^2 і є явище другого порядку малості. Якщо зсув малий, то дилатансією, яка залежить від квадрату зсуву, можна знехтувати. Це і є причиною того, що в класичній теорії пружності дилатансія не розглядається.

Суцільні тіла, які описує загальна механіка суцільних середовищ, мають міцність зразків між мінеральними зернами таку ж, як і міцність окремих зерен.

В дисперсних ґрунтах при дії зовнішніх сил виникають як загальні деформації, що властиві всім суцільним середовищам, так і *деформації, обумовлені взаємними переміщеннями окремих зерен ґрунту при порушенні структурних зв'язків* між окремими частинками.

Тому в ґрунтах крім загальних закономірностей є низка особливостей, обумовлених природою пористих ґрунтів. Міцність зв'язків в ґрунтах набагато менша міцності самих частинок. В моделях ґрунтів доводиться відмовлятися від колінеарності (паралельності згідно з термінологією векторного числення) T_σ та T_ε . Це пояснюється перерозподілом реактивних тисків з ростом навантаження.

В більшості випадків деформації ґрунту супроводжуються зміною об'єму. Лише у виняткових випадках зсув в ґрунті не супроводжується зміною його об'єму, причому це не пов'язано із зміною об'єму, що викликано простою компресією під впливом нормальних навантажень. Об'єм ґрунту, що піддавався зсуву, може як збільшуватись, так і зменшуватись.

При зсуві щільний ґрунт починає розпушуватись (здійснюється явище дилатансії, рис. 3.8), ґрунт пухкого стану починає ущільнюватись (проходить контракансія), рис. 3.8. Частинки ґрунту мають неправильну форму, і коли вони повертаються відносно одна одної, то починають укладатись чи більш рихло (збільшуючи об'єм), чи більш щільно (проникаючи в пори).

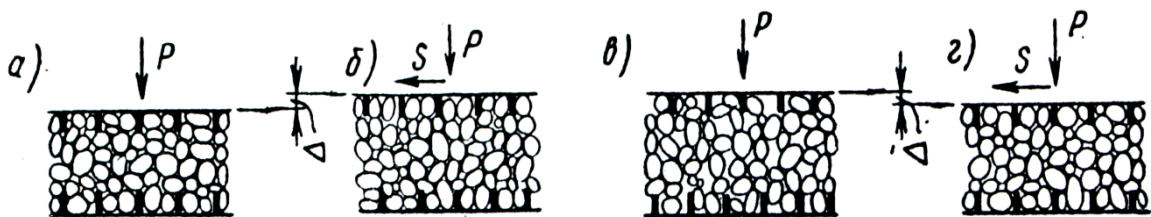


Рисунок 3.8 – Вплив зсуву на об'єм піщаного ґрунту –

- а) – щільний пісок перед зсувом; б) – щільний пісок, що розширився під час зсуву;
- в) – пухкий пісок перед зсувом; г) – пухкий пісок, що ущільнився після зсуву

В теорії пластичності зазвичай розглядаються матеріали, що не змінюють свій об'єм, оцінка деформацій зводиться лише до визначення величин зсуву.

3.4 Закономірності формозміни дисперсних ґрунтів та зміни об'єму в сипучих ґрунтах при зсуві

Перші експериментальні дослідження в області *закономірностей формозміни ґрунтів* належать А. І. Боткіну. Досліджуючи пісок в стабілометрах він установив, що інтенсивність зсуву γ_i залежить не тільки від τ_i (як у металів), а і від σ_m , тобто, діаграма $\gamma_i - \tau_i$ це сімейство кривих, кожній з яких відповідає деяке значення σ_m .

Експериментальні графіки залежності величини зсувного напруження τ від зсуву γ , залежності коефіцієнта пористості e , об'єму V , щільності ρ , подано на рис. 3.9–3.12.

Реологія ґрунту дуже складна. Міцнісні характеристики ґрунту змінюються в процесі деформування.

При реалізації одночасного стиснення із зсувом в залежності від інтенсивності кожного з цих процесів пісок може ущільнюватись, зберігати щільність незмінною, чи навіть розпушуватись.

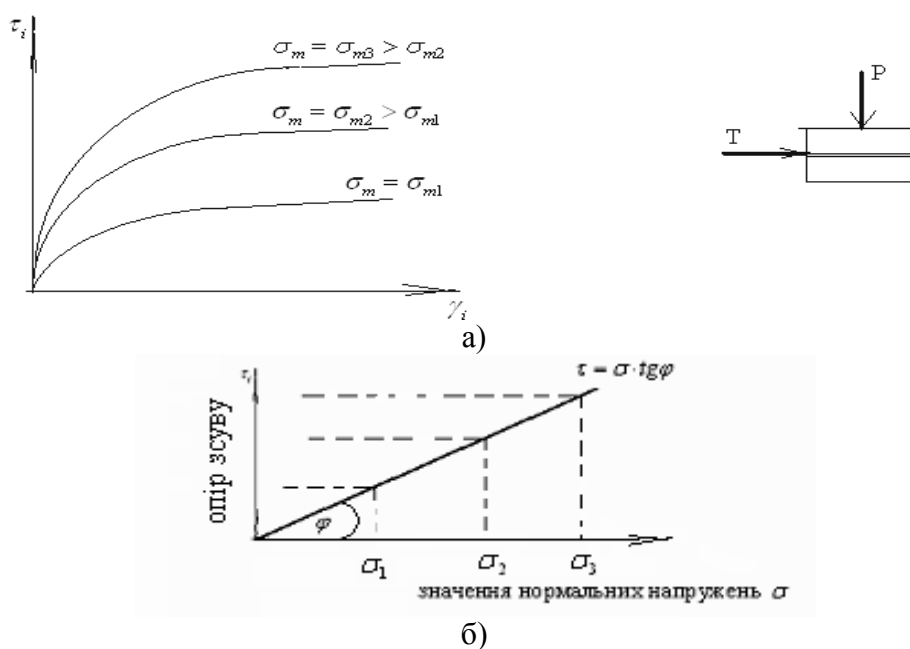


Рисунок 3.9 – Вплив нормального напруження на опір зсуву зернистих ґрунтів

Ці реологічні властивості піску пов'язані із явищем дилатансії. Опір ґрунту зсувним зусиллям – величина змінна, його числова величина має визначальне значення для практики, оскільки обумовлює точність інженерних розрахунків по виявленню граничного навантаження на ґрунти.

Деформації зсуву в ґрунтах супроводжуються переорієнтацією частинок, що викликає зміни об'єму пор. Механізм зміни об'єму доволі складний, оскільки пов'язаний із випадковим переміщенням частинок ґрунту в зоні зсувів. На цей механізм впливає багато факторів:

- градація та розмір частинок;
- стан та тип їх упаковки;
- положення головних площадок;
- відношення головних напружень;
- історія напруженого стану і величина меншого головного напруження;
- конструкція приладів, методика досліджень та підготовки зразка.

Деформування гранульованого матеріалу ґрунту здійснюється при взаємному проковзуванні зерен, а в умовах великих тисків – при їх крихкому руйнуванні. При реалізації одночасного стиснення і зсуву в залежності від інтенсивності кожного з цих процесів піщаний ґрунт може:

- ущільнюватись,
- зберігати незмінну щільність,
- розпушуватись, рис. 3.10, 3.11.

Принципову схему зміни об'єму проілюстровано на рис. 3.8 [31, 32].

На рис. 3.8а наведено схему щільного упакування піску, при якому зерна так міцно зчеплені, що деформація зсуву неможлива без руйнування зерен, якщо тільки не здійсниться розпушення, що показано на рис. 3.8б.

В пухкому піску при деформації зсуву проходить переміщення зерен в поровий простір, що супроводжується зменшенням об'єму, рис. 3.8г.

Характерною особливістю деформування ґрунтів є дилатансія – зміна об'єму за рахунок девіаторної складової тензора напружень. Це явище в 1885 р. відмічено О. Рейнольдсом. Він пояснив його переупаковкою частинок ґрунту при зсуві. Якщо при зсуві в результаті перебудови структури матеріал збільшується в об'ємі, то така об'ємна деформація називається дилатансія. Коли при зсуві об'єм матеріалу зменшується, це від'ємна дилатансія – контракансія.

Згідно з експериментальними дослідженнями М. Н. Гольдштейна об'ємна деформація без формозміни здійснюється лише при гідростатичному тиску, а формозміна без об'ємної деформації проходить лише при чистому зсуві. Наявність в матеріалі ущільнення вносить корек-

тиви в розрахунок процесів деформування, приводить до перебудови полів $\sigma - \varepsilon$.

Результати дренованих досліджень на зсув піску наведено на рис. 3.10. Деформація ґрунту при мобілізації його пікової міцності τ_{\max} (рис. 3.10а) носить характер кутових перекосів [29]. Після проходження піка цей перекіс поступово збільшується і починає зароджуватись поверхня зсуву.

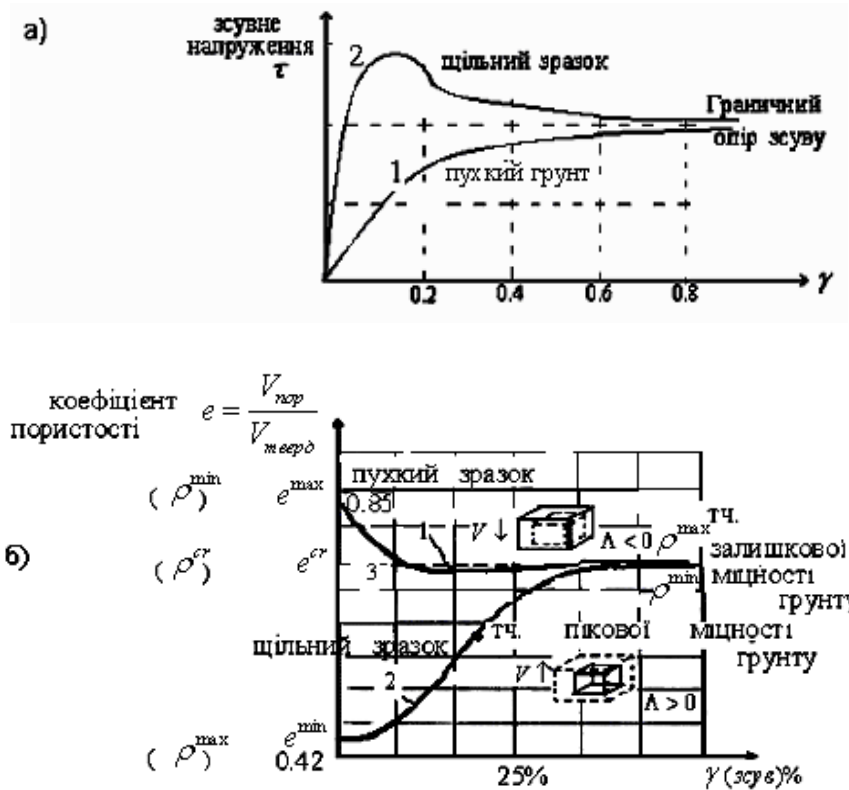


Рисунок 3.10 – Зміна девіатора напружень ($\tau = \sigma_1 - \sigma_3$) та коефіцієнта пористості e сипучого ґрунту в процесі дренованих досліджень на зсув (γ) піщаних ґрунтів.

1 – пухкий пісок; 2 – щільний пісок; 3 – неперервне деформування при постійному об'ємі

При значних деформаціях ґрунту, коли його міцність зменшується до залишкового значення τ_f , виникають ясно виражені лінії ковзання та поверхня ковзання. Лінії ковзання – це лінії сильного дотичного розриву, по яких здійснюється проковзування. Вдовж ліній ковзання одночасно має виконуватись закон сухого тертя. В природних умовах абсолютна більшість зміщень масивів ґрунту пов'язана з мобілізацією пікової міцності ґрунту [29–32]. Крива $\tau - \gamma$ для *пухкого стану* піску (рис. 3.10а) спочатку доволі різко піднімається вгору та після осьової

деформації в 1 % девіатор напружень зростає поволі, сягаючи пікового значення між деформаціями 10–15 %, потім поволі знижується.

Порушення структури зразка зазвичай обмежується деформацією, при якій ще можна отримати надійні заміри (біля 25 % по відношенню до початкової висоти зразка).

Коефіцієнт пористості на рис. 3.10б графік 1 (для *пухкого зразка*) швидко зменшується, сягаючи мінімального значення, а потім знов зростає доти, поки не буде досягнуто пікове значення девіатора напружень.

В *щільному стані* (графік 2 на рис. 3.10а) девіатор напружень зростає при деформуванні значно швидше ніж у випадку *пухкого ґрунту*, сягаючи пікового значення приблизно при 5 % деформацій, а потім порівняно швидко падає.

Після деякої початкової ділянки (графік 2 на рис. 3.10б) коефіцієнт пористості e швидко зростає, потім крива стає більш пологою і наближається до асимптоти.

3.5 Дилатансійна модель ґрунтового середовища

В роботі використано дилатансійну модель трифазового ґрунту проф. В. М. Ніколаєвського, проф. І. П. Бойка для розв'язання змішаної задачі механіки ґрунтів. Ця дилатансійна модель використовує теорію пружності, неасоційований закон пластичної течії, враховує дилатансію та контрактансію ґрунту.

При компоновці рівнянь граничного стану ґрунту крім рівнянь рівноваги та геометричних рівнянь додаються:

- критерій переходу до граничного стану, в якості якого використовується критерій Мізеса–Шлейхера–Боткіна, що встановлює зв'язок між гідростатичним тиском σ_m та інтенсивністю дотичних напружень T_i на октаедричній площині;

- взаємозв'язок між швидкостями пластичних деформацій $d\varepsilon^p$ з пластичним екіпотенціалом F ;

- записується кінематична (дилатансійна) умова для корегування орієнтації вектора швидкостей пластичних деформацій $d\varepsilon^p$ до поверхні навантаження.

При тисках, близьких до граничних, в ґрунтах має місце некоаксиальність (непаралельність чи неспіввісність) тензорів напружень та деформацій. Теорія пластичної течії не вимагає коаксиальності T_σ і T_ε та відображає в розрахунках можливе їх відхилення.

Основою введення дилатансійної теорії були експериментальні дані про поведінку пористих матеріалів в різних умовах навантаження. Факт наявності зміни об'єму при зсуві в ґрунтах (дилатансії) був відкритий О. Рейнольдсом ще в 1885 р.

Поява зміни об'єму при зсуві в ґрунтах (дилатансії) вказує на *високий рівень зсувних напружень*. Як сам коефіцієнт дилатансії $\Lambda = \frac{dV}{d\gamma}$

(відношення приростів об'ємних деформацій до приростів зсувних деформацій), так і його знак не є постійною величиною для ґрунту.

Прийнятий в рамках асоційованого закону пластичної течії постійний рівень дилатансії $\Lambda = \tan \varphi$, де φ – кут нахилу граничної прямої до гідростатичної осі на девіаторній площині, приводить до завищених значень несучої здатності фундаментних конструкцій. Невраховання рівня дилатансії (прийняття $\Lambda = 0$) суттєво знижує значення несучої здатності фундаментних конструкцій.

Додатний чи від'ємний знак коефіцієнта дилатансії Λ залежить від вихідної щільності ґрунту.

В 1936 р. А. Казагранде запропонував ввести критичну пористість e^{cr} (асимптота – 3, до якої прямують криві 1 і 2 на рис. 3.10б), при $e = e^{cr}$ зсув ґрунту проходить при постійному об'ємі. Коефіцієнт критичної пористості e^{cr} (чи критична щільність ρ^{cr}) це відповідність *раптового переходу ґрунту в стан текучості*. Стан текучості ґрунту – явище, що супроводжується зсувом ґрунту при *постійному об'ємі*.

За величиною різниці між пористістю ґрунту в природних умовах і критичною пористістю можна відслідковувати небезпеку виникнення стану текучості в ґрунті.

Для конкретного зернистого ґрунту величини e^{cr} і ρ^{cr} *непостійні*:

$$\text{при} \begin{cases} e > e^{cr} \Rightarrow V \downarrow \\ e = e^{cr} \Rightarrow V = \text{Const}; \\ e < e^{cr} \Rightarrow V \uparrow \end{cases} \quad \text{при} \begin{cases} \rho > \rho^{cr} \Rightarrow V \downarrow \\ \rho = \rho^{cr} \Rightarrow V = \text{Const} \\ \rho < \rho^{cr} \Rightarrow V \uparrow \end{cases} \quad (3.19)$$

Зсув ґрунту з щільним упакуванням частинок приводить до розпушення ґрунту (збільшення об'єму), а зсув ґрунту з пухкою упаковкою – до ущільнення ґрунту, рис. 3.8, 3.11. Саме у зв'язку з цим приріст пластичних деформацій подають складовими

$$d\varepsilon^P = d\varepsilon_{шар.} + d\varepsilon_{девіат.} \quad (3.20)$$

Знак коефіцієнта дилатансії Λ можна визначити з результатів три-вісних експериментальних досліджень Бішопом [32] на зсув незв'язних ґрунтів пухких (рис. 3.11а) та щільних (рис. 3.11б) пісків [32]. Бішопом побудовано графіки залежностей $\gamma - \varphi_m$, $\gamma - \varepsilon_v$ (рис. 3.11). З цих графіків $\operatorname{tg}\theta = \Lambda$ може бути знайдена по дотичній до графічних залежностей $\varepsilon_v = f(\gamma)$.

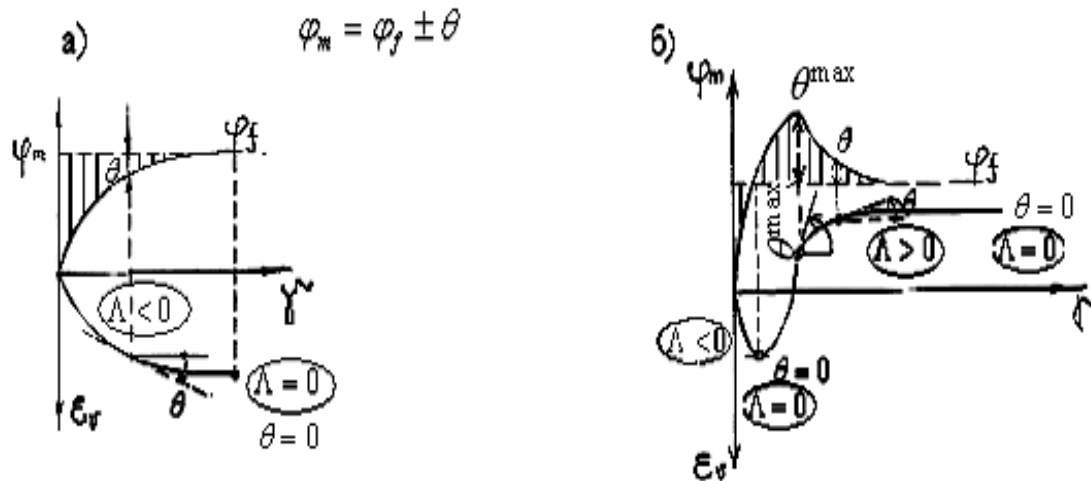


Рисунок 3.11 – Експериментальні дані [32] зміни об'єму сипучого ґрунту (ефектив дилатансії та контрактансії) в процесі зсуву пухкого (а) та щільного (б) зразків:

φ_m – кут нахилу дотичної до кругів Мора; φ_f – залишковий кут внутрішнього тертя ґрунту; Λ – коефіцієнт дилатансії; θ – кут поверхневої енергії

чи кут дилатансії; $\operatorname{tg}\theta = \Lambda = \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_\gamma}$

При зсуві пухких пісків об'єм ґрунту зменшується (рис. 3.11а) $\Lambda < 0$. На початковій стадії експерименту з щільними пісками (рис. 3.11б) коефіцієнт дилатансії теж від'ємний, $\Lambda < 0$. Потім, коли кут зсуву ґрунту зростає до величини кута внутрішнього тертя φ_f кут дилатансії θ стає рівним нулю. Після цього, будучи вже додатним, кут θ збільшується. Максимальна величина кута зсуву φ^{\max} відповідає точці злому графіка залежності $\varepsilon_v = f(\gamma)$. Це точка пікової міцності ґрунту зсуву $\tau = \tau^{\max}$. Потім мобілізований кут зсуву зменшується, і після зсуву, коли кут дилатансії стає $\theta = 0$, φ_m стає рівним куту залишкового внутрішнього тертя φ_f . При цьому опір ґрунту зсуву теж зменшується до свого залишкового значення. Згідно з експериментальними даними

міцність зразка ґрунту понижується до свого залишкового значення при зсуві на декілька сантиметрів (на 20–30 %) після досягнення піка міцності на зсув (точка θ^{\max} на рис. 3.11б). Ефекти дилатансії проявляються аналогічно і для нормально ущільнених глин (рис. 3.11а), і для переущільнених глин (рис. 3.11б).

Як висновки із експериментальних досліджень Бішопа, результати яких наведено на рис. 3.11:

- Коли початкова щільність ґрунту рівна критичній, то об'єм ґрунту при зсуві не змінюється, $\Lambda = 0$, що можливо лише при чистому зсуві.

- Коли початкова щільність ґрунту більша критичної, ґрунт є переущільненим і при зсуві буде розпушуватися, $\Lambda > 0$. Це процес дилатансії ґрунту – розвиток системи внутрішніх тріщин від зсувних дотичних напружень τ .

- Коли початкова щільність ґрунту менша критичної, то об'єм ґрунту при зсуві зменшуватиметься, ґрунт почне ущільнюватись, $\Lambda < 0$. Це процес контракансії ґрунту [29–32]. Та ущільнення ґрунту буде йти лише до досягнення $\rho = \rho^{cr}$, після чого ґрунт почне розпушуватись.

Величина щільності ρ дисперсних порід лежить в межах приблизно $1,3 - 2,42 \text{ т/м}^3$.

На рис. 3.12а наведено графік для визначення ρ^{cr} [30] в межах зміни щільності ґрунту в залежності від величини гідростатичного тиску σ_m , а на рис. 3.12б – внутрішню взаємодію частинок в щільному зернистому ґрунті при дії зсуву. Ґрунт має набути більш відкритого упакування. При доведенні до максимального упакування частинки зміщуються туди, де менший опір, що спричиняє збільшення об'єму ($V \uparrow$).

В матеріалах, що мають внутрішнє тертя (ґрунти, бетони) зміна в процесі навантаження середнього напруження σ_m приводить до порушення колінеарності векторів приростів зсувних напружень та деформацій.

В цьому випадку $F \neq f$, де F – пластична еквіпотенціаль; f – поверхня навантаження (поверхня текучості).

Для корегування колінеарності цих векторів в дилатансійній теорії в вектор пластичних деформацій вводиться складова приростів об'ємної деформації дилатансії ґрунту $d\varepsilon_{uap}^p$.

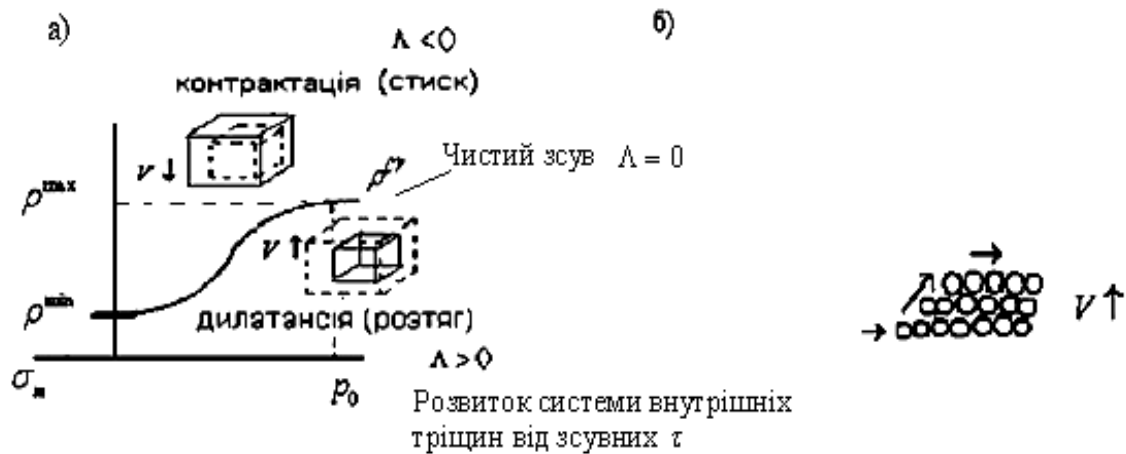


Рисунок 3.12 – Межі зміни щільності ґрунту в залежності від величини гідростатичного тиску σ_m (а) та процес прийняття більш відкритого упакування при зсуві щільних ґрунтів (б)

При використанні дилатансійної моделі В. М. Ніколаєвського пластична еквіпотенціаль F є фіктивною, вона не збігається з поверхнею текучості f . Лише лінія, дотична до еквіпотенціалі, ортогональна до вектора пластичних деформацій.

При $\Lambda > 0$ (це відповідає щільному стану ґрунту або процесу його розпушення) пластичні еквіпотенціалі мають форму гіпербол на площині $\tau - p$, при дії зсуву об'єм ґрунту збільшується ($V \uparrow$). В цьому випадку ($\Lambda > 0$) початкова щільність ґрунту більша критичної, ґрунт є переущільненим, і при зсуві буде розпушуватись об'єм ($V \uparrow$), $\rho^{\max} > \rho > \rho^{cr}$.

Окремий випадок, лише при $\Lambda = tg \psi$, $\Lambda > 0$ гіпербола вироджується в пряму лінію, пластична еквіпотенціаль збігається з поверхнею навантаження (з прямою текучості Мора–Кулона) і має місце асоційований закон течії, де ψ – кут нахилу прямої Мора на октаедричній площині, рис. 3.13.

При $\Lambda < 0$ (це відповідає пухкому стану ґрунту чи процесу його ущільнення) пластичні еквіпотенціалі мають форму еліпсів і при дії зсуву об'єм ґрунту зменшується. Цей випадок ($\Lambda < 0$) реалізується, коли початкова щільність ґрунту менша критичної, ґрунт при зсуві буде ущільнюватись, об'єм ($V \downarrow$), $\rho^{\min} < \rho < \rho^{cr}$.

Випадок $\Lambda = 0$ відповідає критичному стану ґрунту – еквіпотенціалю є пряма лінія, паралельна осі тиску. При $\Lambda = 0$ – критичний стан середовища – об'єм ґрунту постійний при зсуві ($V = Const$), початкова

щільність ґрунту $\rho = \rho^{cr}$. Загальна картина напруженого стану може бути охарактеризована на площині Мора–Кулона в осях $\tau - p$, суміщених з площиною пластичних деформацій $(\varepsilon^p, \gamma^p)$ – об’ємних і зсувних, рис. 3.12.

Таким чином, дилатансійне розпушення порід розпочинається поблизу їх граничного стану і сягає максимуму в момент руйнування. Саме тому в задачах визначення несучої спроможності основ споруд використовуються гіпотези про граничну напруженість сипучого ґрунтового середовища. Так в теорії граничної рівноваги сипучих тіл використовуються ті ж диференціальні рівняння рівноваги, що і в теорії пружності, та замість умови суцільності (геометричних умов нерозривності) використовуються формули, виведені на умові міцності ґрунту, що пов’язують між собою напруження в граничному стані. Ці формули властиві кожній точці сипучого середовища і накладають на ґрунтовий масив умову граничного стану в усіх точках області, що розглядається.

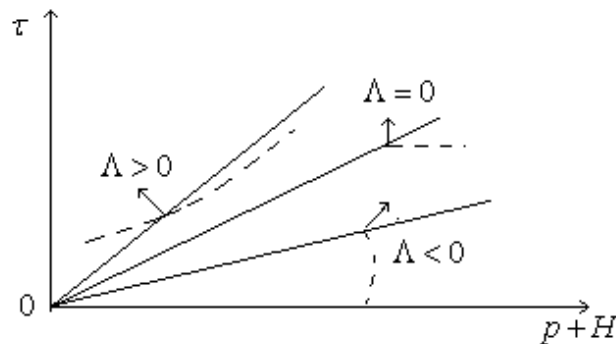


Рисунок 3.13 – Форми пластичних еквіпотенціалів

Таким чином, деформації в ґрунті є наслідком локального руйнування існуючих зв’язків між його частинками і виникненням нових зв’язків. Поки цей процес збільшує опір ґрунту, зберігається рівновага між внутрішніми і зовнішніми силами. Коли резерви міцності вичерпуються, настає руйнування ґрунту. З огляду на ці міркування, процес деформування ґрунту можна пов’язувати з параметрами, які характеризують його міцність.

Із експериментальних досліджень відомо, що порушенню міцності ґрунту передуює його прогресуюче деформування. Щоб знайти деформа-

ції Р. Мізесом була запропонована *теорія пластичного потенціалу*, що встановлює залежність між напруженнями та швидкостями деформацій.

Пропозиції Р. Мізеса були узагальнені Прагером і Друкером для си-пучих тіл, яким властиве тертя. Прагер та Друкер ввели функцію F та назвали її потенціалом текучості чи *пластичним потенціалом*. Частинна похідна від F по σ_{ij} відповідає приростам пластичних деформацій. Використання гіпотези про пластичний потенціал дозволяє перейти до визначення граничної деформативності дисперсного ґрунтового середовища.

Співвідношення між $\sigma - \varepsilon$ в пластичному стані (фізичні рівняння стану, в літературі зустрічається назва – кінематичні співвідношення, рівняння стану при течії, *неасоційований закон пластичної течії*):

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{dF}{d\sigma_{ij}}, \quad F \neq f. \quad (3.21)$$

В конкретний момент часу деформація ґрунту не визначається станом, що має місце в цей момент часу, а залежить від попередніх подій. В силу того, що вектор пластичних деформацій залежить від всієї історії навантаження, залежність між напруженнями та деформаціями формулюється через прирости пластичних деформацій. Це так звана інкрементальна теорія, чи теорія пластичної течії. Функцію напружень F , яка має властивість

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{dF}{d\sigma_{ij}},$$

називають пластичним потенціалом чи *дисипативною функцією*. Для так званого стійкого пластичного матеріалу така функція існує і тотожно збігається з функцією текучості f . Це є найпростіший випадок, коли поверхня текучості (функція навантаження, умова пластичності) $f = F$, відповідає *асоційованому* закону пластичної течії:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{df}{d\sigma_{ij}}. \quad (3.22)$$

Лише в цьому випадку пластична течія в ґрунтах проходить в напрямку нормалі до поверхні текучості.

Математичний апарат пружно-пластичних моделей доповнюється різними експериментальними законами зсувного деформування, адже пластичне деформування це теж стан руху. При цьому на відміну від моделей суцільного середовища в ґрунтах враховується те, що деформа-

ції зсуву залежать не лише від девіатора, а й від шарового тензора напружень (останній їх стримує). Об'ємні деформації пов'язані як з шаровим тензором, так і з девіатором напружень (девіатор напружень в залежності від пористості ґрунту додатково ущільнює чи розпушує ґрунт).

В ґрунтах замість вимоги ортогональності вектора пластичних деформацій $d\varepsilon_{ij}^p$ до поверхні f доцільно використовувати неасоційований закон пластичної течії (3.21) з доповненням дилатансійними співвідношеннями В. М. Ніколаєвського, І. П. Бойка згідно з якими зміна об'єму ґрунту може проходити **лише** при дисипації механічної енергії. Пластична еквіпотенціаль в цьому випадку є фіктивною, вона не збігається з поверхнею текучості.

* При $\Lambda < 0$ еквіпотенціллю є еліпс і при дії зсуву об'єм зменшується ($V \downarrow$);

* при $\Lambda > 0$ еквіпотенціллю є гіпербола, дія зсуву збільшує об'єм ($V \uparrow$);

* при $\varphi = \Lambda > 0$ гіпербола вироджується в пряму лінію, еквіпотенціаль збігається з поверхнею навантаження (з прямою Мора–Кулона) і має місце асоційований закон течії;

* при $\Lambda = 0$ еквіпотенціллю є лінія, паралельна кривій тиску – критичний стан середовища, об'єм постійний при зсуві ($V = Const$).

В октаедричній теорії вектор деформацій ґрунтового масиву визначається за формулою

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \sum \varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^p \cdot \delta_{ij}, \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p(uap) + d\varepsilon_{ij}^p(oev), \quad (3.23)$$

де $d\varepsilon_{ij}^p(uap) = \Lambda(\chi)d\gamma^p$ – приріст непружних змін об'єму, що супроводжують зсув, додаткова чисто *кінематична дилатансійна умова* В. М. Ніколаєвського, І. П. Бойка використовується в розрахунку замість вимоги ортогональності вектора $\bar{\varepsilon}^p$ до поверхні навантаження; Λ – швидкість дилатансії $\Lambda = d\theta/d\gamma$; $d\gamma^p$ – приріст деформацій зсуву; χ – параметр зміцнення ґрунту.

Приріст пластичних деформацій визначається з фізичного рівняння роботи ґрунту в фазі зсувів. Розглядається довільна, неасоційована дилатансія (3.21)

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{dF}{d\sigma_{ij}}; \quad F \neq f,$$

де F – пластичний потенціал, який визначає «дилатансійність» середовища ґрунту – *зміну його об'єму при зсуві*. Закон течії (3.21) визна-

чає пластичну течію після початку текучості. В цьому випадку функція текучості f і пластичний потенціал F не збігаються, тобто має місце неасоційований закон пластичної течії. Таким чином, при напруженні цієї моделі використовувалась термодинаміка незворотних процесів деформування.

3.6 Дилатансійні властивості ґрунту

В дисперсному середовищі ґрунту за даними експериментів характеристики поля напружень і поля швидкостей змінюють свої кути в ході нелінійного деформування, ускладнення при розв'язанні таких задач значно зростають. Як відмічалось вище, замість вимоги ортогональності вектора швидкостей деформацій $d\varepsilon_{ij}^p$ до поверхні навантаження f , яку встановлює асоційований закон пластичної течії (3.22), доцільно в моделях використовувати друге додаткове рівняння, основу побудови якого склала експериментальна інформація про поведінку реальних ґрунтів. Це рівняння визначає орієнтацію вектора швидкостей пластичних деформацій та характеризує особливість застосування моделей суцільних середовищ до тіл, що ущільнюються. Для моделювання процесів ущільнення ґрунтів, стискуваність яких в сотні разів перевищує стискуваність будівельних матеріалів наземних споруд, в запропонованій в роботі моделі використовувалась система уявлень В. М. Ніколаєвського, І. П. Бойка про дилатансійну теорію ґрунтового середовища. Для корегування неспіввідності тензорів напружень та деформацій при роботі ґрунту в пластичній стадії використано дилатансійну умову В. М. Ніколаєвського, І. П. Бойка [2,29]:

$$d\varepsilon_{ij(\text{шар})}^p = \Lambda(\chi)d\gamma^p, \quad (3.24)$$

де $d\varepsilon_{ij(\text{шар})}^p$ – скалярний еквівалент приросту непружних об'ємних деформацій (шарової частини тензора деформацій); $d\gamma^p$ – скалярний еквівалент приросту інтенсивності зсуву. Прирости пластичних деформацій зсуву $d\gamma^p$ визначаються девіаторним оператором. $\Lambda(\chi)$ – швидкість (коефіцієнт) дилатансії, визначається з [2, 29] та може приймати як додатні значення (дилатансія)

$$\Lambda = \sqrt{1 - (\rho^{cr} / \rho)^2}, \quad (3.25)$$

так і від'ємні значення (контрактансія)

$$\Lambda = -\sqrt{1 - (\rho / \rho^{cr})^2}, \quad (3.26)$$

де ρ^{cr} – критична щільність, є функцією гідростатичного тиску σ_m [2, 30] та констант ґрунту $\rho_0, \rho_{\min}, \rho_{\max}$; χ – параметр зміцнення ґрунтового середовища, прийнято щільність ґрунту ρ .

В свою чергу ρ^{cr} є функціональною залежністю від гідростатичного тиску σ_m , параметра P_0 та мінімального і максимального значенням щільності досліджуваного ґрунту [29–32] (рис. 3.12):

$$\rho^{cr} = f(\sigma_m, P_0, \rho_{\min}, \rho_{\max}). \quad (3.27)$$

На рис. 3.12 ρ_{\min}, ρ_{\max} – мінімальне та максимальне значення критичної щільності ґрунту; P_0 – характеризує величину σ_m , коли щільність ґрунту сягає критичного значення ρ_{\max} і ґрунт працює як суцільне середовище, міцність якого не залежить від ефектів дилатансії, та відсутні шарові деформації.

Максимальна щільність ґрунту ρ_{\max} відповідає найбільш компактному упакуванню його частинок без їх руйнування. Навіть в стані максимальної щільності ґрунт включає деякий об'єм міжчастинкових пор. Звідси виходить, що мінімальний коефіцієнт пористості e^{\min} ніколи не дорівнює нулю [46]. Саме тому компресійні криві досліджень ґрунтів мають тенденцію набувати асимптотичного характеру при $e = e^{\min}$, а не при $e=0$.

Оскільки швидкість дилатансії Λ змінюється при зміні щільності ґрунту, то в процесі деформування характеристики швидкостей теж змінюють свої кути, прямуючи до ортогональності в критичному стані

$$F\left(\frac{\rho}{\rho^{cr}}\right) = F(1) = 0. \text{ В такому випадку пластичну течію ґрунту можна}$$

вивчати шляхом визначення поля швидкостей, а зміна щільності на кожному малому кроці в процесі деформування дає можливість визначити нові напрямки характеристик поля швидкостей. Із даних експериментів, залишковий опір ґрунту від початкової щільності ρ не залежить, рис. 3.10.

Для визначення кінцевого деформованого стану пластичного матеріалу ґрунту деформований стан формозміни накладався на деформований стан від гідростатичного тиску. Так компонувався вектор пластичних деформацій для даного ступеня навантаження. Сумарний вектор використовувався для визначення напруженого стану з ураху-

ванням пластичності як на межі фундаментної конструкції, так і в активній зоні основи для даного ступеня навантаження.

Явище дилатансії є особливістю деформування ґрунтів підтверджене численними дослідними даними. Стискуваність ґрунту та опір зсуву – найбільш важливі з практичної точки зору властивості ґрунтів. Об’ємні деформації основ, згідно з фазовою моделлю К. Терцагі, можуть проходити за рахунок відносного вмісту в ґрунті різних фаз (твердих частинок, пор, води). Об’єм ґрунту, що потрапив під дію зсуву, може як зменшуватись, так і збільшуватись (рис. 3.10, 3.11). Згідно з сучасними експериментальними даними зміцнення та незміцнення ґрунту пов’язане з дилатансійним явищем зміни об’єму при зсуві, відкритим О. Рейнольдсом. Дилатансія – це фізичне явище, порушення структури або зміна міцності, що залежить від переміщень частинок ґрунту, обумовлених коливанням ефективних напружень а також фізико-хімічними процесами, які протікають на контакті поверхні твердих частинок і водної плівки.

В залежності від стану ущільнення дилатансія ґрунту може бути як додатною (розпушення) так і від’ємною (ущільнення – контракансія [29, 30]), рис. 3.11.

Дилатансія ґрунту (режим деформацій – розтягнення (рис. 3.8а), ґрунт розпушується, проходить розпушення структури за рахунок збільшення пористості мікро- та макротріщин) спостерігається при зсуві щільного ґрунту при напруженнях, менших тих, що привели ґрунт до такого ступеня ущільнення. Контракансія ґрунту (режим деформування – стискання, ґрунт ущільнюється) виникає при зсуві пухких ґрунтів (рис. 3.8б).

Так, відсутність силової взаємодії між частинками піску, крім контактної, дозволяє пов’язувати механічні властивості піщаних тіл виключно з їхньою упаковкою в об’ємі. Перебудова упаковки визначає опір деформуванню (зміну форми) піщаного тіла. Наявність процесу релаксації в піску дозволяє природним тілам перерозподіляти напруження навколо себе, тим самим створюючи потенціал спонтанного механічного руху в локальних просторових областях.

В 1958 році Б. Хансен запропонував ввести до розгляду кут дилатансії (кут поверхневої енергії) θ . Це дало можливість кут зсуву φ_m ґрунтової основи (нахил дотичної до кругів Мора) визначати з формули

$$\varphi_m = \varphi_f \pm \theta, \quad (3.28)$$

де φ_f – кут внутрішнього тертя ґрунту.

В теорії пластичної течії через

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{d\varepsilon_v}{d\gamma} = \Lambda \quad (3.29)$$

визначається швидкість дилатансії (додатковий параметр неасоційованої моделі пластичної течії). Таким чином, $\operatorname{tg} \theta$ можна знайти з дотичної до експериментальних графіків залежності $\varepsilon_v - \gamma$, поданих на рис. 3.11.

Фазу структурних змін роботи ґрунту характеризують змінні процеси дилатансії, які роблять параметри НДС ґрунту суттєво нелінійними. Головний ефект дилатансії – залежність міцності ґрунту від щільності його упаковки (фактично пористості). Тобто, опір деформаціям є функцією самих деформації і змінюється в ході зміни останніх. Оскільки ґрунти в першому наближенні кулонівський матеріал, в якому границя текучості визначається гідростатичною величиною тиску ($\tau = (\sigma_m + H)\operatorname{tg} \varphi_m$), а залишкові деформації ведуть до зміни пористості ґрунту, за пропозицією проф. І. П. Бойка [2] доцільно в якості параметра зміцнення прийняти щільність ґрунту ρ , пов'язуючи її із швидкістю дилатансії Λ та величиною критичної щільності ґрунту ρ^{cr} :

Щільність є своєрідною «пам'яттю» ґрунту, її підвищення означає зміну межі текучості. В якості параметра зміцнення в розрахунковій моделі прийнято щільність ґрунту

$$\rho = m/V. \quad (3.30)$$

Оскільки швидкість дилатансії Λ змінюється при зміні щільності ґрунту, то в процесі деформування характеристики швидкостей теж змінюють свої кути, прямуючи до ортогональності в критичному стані

$F\left(\frac{\rho}{\rho^{cr}}\right) = F(1) = 0$. В такому випадку пластичну течію ґрунту можна вивчати

шляхом визначення поля швидкостей, а зміна щільності на кожному малому кроці в процесі деформування дає можливість визначити нові напрямки характеристик поля швидкостей. Із даних експериментів, залишковий опір ґрунту від початкової щільності ρ не залежить.

Октаедрична теорія міцності враховує просторовий напружений стан та всі три види головних напружень:

$$\sigma_{окт} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3; \tag{3.31}$$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}.$$

Наведені вище умови граничної рівноваги Мора–Кулона і Мізеса–Шлейхера–Боткіна найбільш прийнятні в механіці сипучих та пористих середовищ. Умова Мора–Кулона задовільно відповідає експериментальним даним, але має утруднення з використанням через наявності на граничній поверхні сингулярних точок (3.8). Умова Мізеса–Шлейхера–Боткіна (2.14) більш зручна у використанні (вона має регулярну поверхню, див. рис. 2.5), але прогнозує завищений порівняно з експериментом через вплив проміжного головного напруження σ_2 на міцність (в запас міцності).

3.7 Принцип максимуму Мізеса і постулат Друккера

Теорія пластичної течії засновується на принципі максимуму Мізеса та швидкості дисипації механічної роботи, визначає приріст компонентів тензора пластичних деформацій пропорційно градієнту деякої функції, яку називають пластичним потенціалом і ототожнюють з функцією навантаження (з неасоційованого закону пластичної течії (3.21)):

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{dF}{d\sigma_{ij}} d\lambda,$$

де F – пластичний потенціал це функція напружень, частинна похідна від якої по σ_{ij} пропорційна приросту пластичних деформацій $d\varepsilon_{ij}^p$, $d\lambda$ – коефіцієнт пропорційності.

Функція F визначається лише в точках миттєвої поверхні текучості, сліди яких на площині σ, τ , є системою прямих (суцільні лінії, рис. 3.13 [32]).

В якості основного принципу, покладеного в основу побудови теорії пластичності, приймається принцип максимуму дисипації механічної роботи чи принцип максимуму Мізеса

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p > \sigma_{ij}^{\bullet} d\varepsilon_{ij}^p, \tag{3.32}$$

де σ_{ij} – дійсні значення компонент напружень, що відповідають полю деформацій ε_{ij}^p . σ_{ij}^* – компоненти будь-якого допустимого функцією навантаження напруженого стану $F(\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^p, T, \chi) \leq 0$.

$$\text{Повна деформація : } d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (3.33)$$

Нехай задано поле розподілу швидкостей деформацій ε_{ij}^p , якому відповідає поле напружень σ_{ij} . В цьому випадку величина дисипації має вигляд:

$$D = \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^p. \quad (3.34)$$

Для істинного напруженого стану потужність дисипації не менша ніж для будь-якого допустимого стану σ_{ij}^* , тому мають виконуватись нерівності:

$$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij} d\lambda \frac{dF}{d\sigma_{ij}} \geq \sigma_{ij}^* \cdot \varepsilon_{ij}^p \text{ або } (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \cdot \varepsilon_{ij}^p \geq 0, \quad (3.35)$$

отже, робота по замкнутому шляху невід'ємна:

$$\oint (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \cdot d\varepsilon_{ij}^p \geq 0.$$

Це доводить принцип не ввігнутості поверхні навантаження. Із постулату Друккера випливає

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

це асоційований закон течії, суть його в тому, що цей закон міцно пов'язаний з умовою течії, тобто він асоційований з цією умовою. За умови врахування нестискуваності середовища функція текучості залежить лише від девіатора напружень:

$$F\{(\sigma_1 - \sigma_2), (\sigma_2 - \sigma_3), (\sigma_3 - \sigma_1)\} = 0, F(I_2 D_\sigma, I_3 D_\sigma) = 0, I_1 D_\sigma = 0. \quad (3.36)$$

В такому випадку геометричною інтерпретацією функції текучості є циліндр (див. рис. 2.4) з віссю рівнонахиленою до $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

При навантаженні з утворенням пластичних деформацій змінюються межі пропорційності матеріалу та утворюються залишкові де-

формації. Тому для наступного етапу навантаження при встановленні залежності $\sigma - \varepsilon$ потрібно знати передісторію навантаження.

Пластичні деформації залежать від усієї історії навантаження матеріалу і в теорії пластичності співвідношення $\sigma - \varepsilon$ формулюються у вигляді *приростів деформацій*. Це так звана інкрементальна теорія пластичної течії.

Однозначної залежності $\sigma - \varepsilon$ для пластичного матеріалу не існує, замість закону Гука застосовуються інші фізичні відношення, які ще називають рівняннями стану.

Саме теорія пластичності і встановлює цей зв'язок між $\sigma - \varepsilon$. Середовище може знаходитись під впливом великого рівностороннього стиснення і працювати пружно, **за перехід в пластичний стан відповідає девіатор напружень**.

Матеріали витримують без ушкоджень дуже великі обтиснення якщо діаметр круга Мора залишається в деяких межах, тобто в деяких межах залишається величина $(\sigma_1 - \sigma_3)$. (Як відомо, круг Мора задається абсцисою його центра $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ і радіусом $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$).

Присутність девіатора викликає пластичну течію чи руйнування, якщо цей девіатор веде до виникнення дотичної складової, тобто зсуву. Тому зрозуміло, що результати дослідження опору зсуву і визначення граничної кривої відповідають фізичній суті явищ.

Таким чином, прикладання теорії пластичності в механіці ґрунтів є перспективним.

Головний шлях розвитку механіки ґрунтів це дослідження пружно-пластичних дилатинсійних моделей та їх удосконалення на основі порівняння з експериментом.

Це відправний шлях для розв'язання широкого кола задач, що мають безпосередні інженерні застосування.

Неврахування неоднорідності ґрунтів в інженерних розрахунках приводить до введення коефіцієнтів запасу та величина цієї компенсації для різних ґрунтових основ залишається поки що вельми не визначеною.

РОЗДІЛ 4. МЕТОД ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ТА ЙОГО ПРИКЛАДАННЯ ДО МЕХАНІКИ ДИСПЕРСНИХ ҐРУНТІВ

4.1 Задачі теорії потенціалів

Будівництво – одна із провідних галузей народного господарства в історичному аспекті його розвитку. Успішне спорудження будівель житлового, промислового призначення потребує більш глибокого проникнення в таємниці неживої природи, знайомства з основами механіки.

НДС довільної системи можна отримати за допомогою двох еквівалентних підходів: локального та інтегрального. Локальний базується на повній системі рівнянь будівельної механіки. Інтегральний – на варіаційному численні. В результаті отримуємо систему диференціальних рівнянь 15-го порядку. Поява ЕОМ дала поштовх до напрацювання методів доведення математичних досліджень до числового результату, який натеper шукають за допомогою ЕОМ та числових методів МСЕ, МГЕ. Одним із сучасних методів розв'язання крайових задач є МГЕ, який використано в роботі.

Сучасні числові методи є основним і часто єдиним апаратом розв'язання багатьох прикладних задач механіки. Їх універсальність дозволяє за допомогою обчислювальних комплексів реалізовувати на ЕОМ системний підхід до розв'язання крайових задач з аналізу поведінки як наземних, так і підземних конструкцій в різних режимах експлуатації.

МГЕ значно розширив можливості розв'язання крайових задач будівельної механіки, механіки ґрунтів, тому ліг в основу сучасних програмних комплексів (ПК), перетворився в робочий інструмент дослідження і розв'язання прикладних задач будівельної галузі.

На теперішній час встановлено, що МГЕ є важливим, альтернативним по відношенню до існуючих числових методів, підходом до досліджень в механіці суцільних та пористих середовищ. Однією із найбільш важливих областей його прикладання є задачі, чиї розрахункові рівняння є класичними рівняннями Лапласа чи Пуассона, в яких використовується *функція потенціалу*.

Реальні задачі геомеханіки моделюються диференціальними рівняннями в частинних похідних *і зводяться до класу крайових задач*.

Характерною особливістю крайової задачі є наявність деякої області R , що лежить всередині області S . Частина параметрів задається на границі S у вигляді граничних умов, решта параметрів визначається в результаті розрахунку.

Аналітичне розв'язання крайової задачі може бути отримано, коли дослідна область R – однорідна, вихідні диференціальні рівняння – лінійні, тобто, коли можна застосовувати принцип суперпозицій. В реальних задачах при оцінці можливих ситуацій ця умова часто не виконується і аналітичний розв'язок отримати неможливо. Тоді розв'язок шукають з залученням числових методів МСЕ, МГЕ. Використання МСЕ, МГЕ приводить до отримання розрахункової системи нелінійних систем алгебраїчних рівнянь відносно невідомих шуканих параметрів. Цю систему можна подати у формі матричного рівняння

$$[A(q)] \cdot \{q\} = \{P\} , \quad (4.1)$$

де $\{q\} = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$ – вектор невідомих шуканих величин; $\{P\}$ – вектор зовнішніх впливів на дослідну систему; $\{A(q)\}$ – квадратна матриця $n \times n$, елементи якої залежать від матеріалу дослідної системи та від її НДС.

МГЕ був напрацьований в Саутгемптонському університеті на основі проведених там досліджень за методами розв'язання класичних інтегральних рівнянь з використанням скінченних елементів. При використанні МГЕ розмірність задачі зменшується на одиницю, проводиться апроксимація лише границі досліджуваної області. МГЕ не має такого недоліку класичного методу скінченних елементів МСЕ, як трудність описання з достатньою точністю нескінченних областей, необхідність розв'язання громіздких систем рівнянь та визначення складних характеристик конструкцій.

Однією з найбільш цікавих особливостей МГЕ є простота вхідних даних, потрібних для переходу до однорідної задачі. Напроти, в МСЕ число таких даних зазвичай дуже велике. Це суттєво з практичної точки зору, бо при використанні МСЕ доводиться витратити багато часу для підготовки та перевірки вхідних даних. Точність МГЕ перевищує точність МСЕ. МГЕ краще працює в місцях концентрації напружень.

Метод граничних елементів з'явився в результаті подальшого теоретичного розвитку широкого класу числових методів, об'єднаних під загальною назвою «теорія скінченних елементів». Методи «теорії скінченних елементів» базуються на понятті фундаментального

розв'язання крайової задачі, яке відповідає функції джерела, заданої у вигляді дельта-функції Дірака. В цьому випадку скінченні елементи (СЕ) використовуються для апроксимації границі області, а апарат класичних інтегральних рівнянь застосовується для внутрішньої частини області. МГЕ напрацьований К. Бреббія і С. Уокером [4,5], має низку переваг порівняно з класичною теорією скінченних елементів. Він добре підходить для розв'язання двовимірних, тривимірних задач теорії пружності, теорії потенціалу, для дослідження динамічних явищ, де МСЕ є неефективним.

Суть МГЕ – перетворення системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описують поведінку невідомої функції в середині і на границі області, в інтегральне рівняння, яке визначає лише граничні значення, а потім пошук числового розв'язку цього рівняння. При потребі знайти розв'язок потенціалу у внутрішній точці області, їх можна обрахувати, використовуючи відомі розв'язки на границі. Оскільки всі наближення пов'язані лише з границею, розмірність задачі зменшується на одиницю і отримана система рівнянь стає меншою порівняно з вихідною системою диференціальних рівнянь.

Вперше інтегральні рівняння були використані для формулювання фундаментальних крайових задач теорії потенціалу в 1903 р. Фредгольмом [4], який довів існування розв'язків таких рівнянь за допомогою процедури дискретного подання. Поява ЕОМ дала можливість використовувати процедуру дискретного подання аналітично, а потім без особливих затрат праці отримувати числові розв'язки. В останні роки показано, що інтегральні співвідношення можуть бути отримані за допомогою методу зважених нев'язок [4, 5].

4.2 Елементи класичної теорії потенціалу

В роботі можливості методу показані на інженерних задачах, які зводяться до розв'язання рівнянь Лапласа, Пуассона. Розглянуто проблеми, що виникають при розрахунку нелінійних і нестационарних задач про пружно-пластичні деформації дисперсних ґрунтових середовищ.

Метою будь-якого наближеного методу є приведення розрахункового рівняння (чи системи рівнянь) і граничних умов до системи алгебраїчних рівнянь. Це досягається розбиттям суцільного середовища на ряд скінченних елементів і вважається, що для кожного такого елемента відомі варіації апроксимуючих і вагових функцій.

Якщо частинка з одиничною масою, на яку діє сила з боку деякого специфічного поля F , рухається від точки ξ до точки x простору, то робота, яка виконується цим полем при русі частинки:

$$W = \int_{\xi}^x F \cdot dr, \quad (4.2)$$

де F – сила дії векторного поля; r – радіус-вектор точки на траєкторії, по якій рухається частинка. Якщо поле таке, що робота не залежить від шляху, по якому рухається частинка, то поле має назву консервативного. В загальному випадку робота залежить не лише від відстані між точками ξ та x , але і від шляху, по якому рухається частинка. Вважаючи точку ξ зафіксованою, а точку x змінною, розглянемо інтеграл (4.2) як функцію x . Така скалярна функція

$$W = u(x) = \int_{\xi}^x F \cdot dr \quad (4.3)$$

називається **потенціалом поля** F . Якщо поле гравітаційне, то потенціал є ньютонівським. Потенціальна енергія обумовлюється взаємодією тіл. Якщо процес деформування зворотній, то поведінка матеріалу пружна. Робота внутрішніх сил не залежить від шляху і $W = u$, що можна пояснювати як пружний потенціал. Знаючи u , можна отримати співвідношення $\sigma - \varepsilon$:

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}. \quad (4.4)$$

Для добре вивчених адіабатичного та ізотермічного процесів питому потенційну енергію деформацій U можна ототожнювати з відомими термодинамічними функціями стану («потенціалами»).

До прикладу можна взяти розв'язок рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 u(x) = 0 \quad \text{на } x \in \Omega, \quad (4.5)$$

де $u(x)$ – функція точного розв'язку; Ω – досліджувана область. Граничні умови можуть бути двох типів:

– типу Діріхле: $u(x) = \bar{u}(x)$ на границі Γ_1 ($x \in \Gamma_1$), (4.6)

– чи типу Неймана: $q(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \bar{q}$ на ділянці Γ_2 границі ($x \in \Gamma_2$), (4.7)

де Γ_1, Γ_2 – частини границі, на яких задаються ті чи інші умови. Повна границя Γ досліджуваної області $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$; n – зовнішня одинична нормаль до поверхні Γ ; \bar{u} , \bar{q} – задані значення функції і її нормальної похідної на границі $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Точний розв’язок (4.5) може бути знайдено лише для небагатьох простих випадків, тому, як правило, розв’язання потрібно якимось чином апроксимувати. Це можна зробити скориставшись системою лінійно незалежних функцій ϕ_i і невідомим коефіцієнтами λ_i .

В цьому випадку наближений вираз [5] для функції

$$u = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3 + \dots \quad (4.8)$$

Підставивши це наближений розв’язок в (4.5)–(4.7) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &\neq 0 \quad \text{на} \quad \Omega \\ u - \bar{u} &\neq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ q - \bar{q} &\neq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \end{aligned}$$

де $q = \partial u / \partial n$.

В такому випадку для досліджуваної області і її границі можна визначити функції похибок таким чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \nabla^2 u \neq 0 \quad \text{на} \quad \Omega \\ \varepsilon_1 &= u - \bar{u} \neq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ \varepsilon_2 &= q - \bar{q} \neq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \end{aligned}$$

Тепер метою подальших дій буде зробити цю похибку як можна меншою як в досліджуваній області, так і на її границі. Для цього похибки можна розподілити. Способи, якими проводяться ці розподілення, породжують різні варіанти методу зважених нев’язок.

4.3 Метод зважених нев’язок

Перевагою МГЕ є те, що він дозволяє визначити невідомі величини на границі, в багатьох задачах цим можна обмежитись. Розв’язок у внутрішніх точках, коли це необхідно, можна отримати за допомогою квадратур. Таке спрощення досягається шляхом точної відповідності вихідним диференціальним рівнянням за допомогою подання розв’язку у вигляді, характерному теорії потенціалу (застосовується метод зважених нев’язок). Вказані подання можуть бути використані в рамках МГЕ

лише у випадку, коли відомі у явному вигляді фундаментальні розв'язки (чи функції Гріна) для досліджуваних диференціальних рівнянь. Потрібно відмітити, що в результаті математичної складності цього питання (аналітичного розв'язання системи диференціальних рівнянь і його відносної новизни) до сьогоднішнього дня існує лише декілька розв'язків. До відомих точних розв'язків крайової задачі від дії одиничної зосередженої сили в середині півплощини (функції впливу) відносяться розв'язки Р. Міндліна, і саме вони найкраще відповідають фізичній задачі геомеханіки з визначення НДС ґрунтового середовища.

Для запису фундаментального інтегрального співвідношення МГЕ, числова реалізація якого здійснена в роботі, було використано модифіковане *рівняння методу зважених нев'язок*, в яке входять рівняння рівноваги та граничні умови [4, 5].

Згідно з методом зважених нев'язок для запису інтегрального співвідношення МГЕ визначались функції нев'язок як в середині дослідної області, так і на границі, вони мінімізувались таким чином, щоб *перетворити в нуль* їх усереднене значення за допомогою введення *вагових функцій* w [4].

В якості вагових функцій в МГЕ взято фундаментальні розв'язки Р. Міндліна для півпростору, які найбільше відповідають фізичному змісту задачі пошуку НДС ґрунтової основи споруди. Підстановка розрахункового рівняння Лапласа $\Delta^2 u = 0$ в (4.5) приводить до залежності

$$\int_{\Omega} = \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_1} .$$

Щоб звести задачу (4.5) до граничної потрібно знайти функцію w , що задовольняє рівняння $\nabla^2 w = 0$, чи функцію u , яка є розв'язком рівняння $\nabla^2 u = 0$. При такому підході отримуємо лише один інтеграл по області Ω від функції b .

При розв'язанні (4.5) опираються зазвичай на деякий частинний розв'язок, який називають *фундаментальним*.

Фундаментальний розв'язок є розв'язком рівняння Лапласа для нескінченної області і для заданого в деякій точці i значення потенціалу, рівного одиниці, тобто

$$\nabla^2 u^* = \delta_i, \tag{4.9}$$

де δ_i – дельта-функція Дірака, що є одиничним зосередженим потенціалом в точці i .

Цей тип розв'язання широко використовується в граничних задачах і є функцією Гріна, чи функцією впливу.

Найпростіший із варіантів метода зважених нев'язок заснований на точному задоволенні граничних умов (тобто, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) і розподіленні помилки у відповідності з видом вагової функції w . Ця функція тотожно задовольняє однорідні граничні умови і може бути записана у вигляді

$$w = \beta_1 \cdot \psi_1 + \beta_2 \cdot \psi_2 + \beta_3 \cdot \psi_3 + \dots \quad (4.10)$$

де ψ_i – система лінійно-незалежних функцій; β_i – довільні коефіцієнти, які можна позначити через ω_i , вони є довільними вузловими коефіцієнтами.

Функцію помилки ε можна розподілити по області, помноживши її на вагову функцію ω та про інтегрувавши її по дослідній області:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \cdot \omega d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla^2 u) \cdot \omega d\Omega = 0. \quad (4.11)$$

Таким чином, похибка розподіляється у відповідності з функціями, які входять в ω . Часто використовується в якості вагової функції дельта-функція Дірака:

$$\omega = \omega_1 \delta_1 + \omega_2 \delta_2 + \omega_3 \delta_3 + \dots \quad (4.12)$$

Дельта-функція Дірака є узагальнюючою функцією, яку можна подати як межу звичайної функції таким чином:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin[N(x - x_i)]}{\pi(x - x_i)} = \delta(x - x_i). \quad (4.13)$$

Вибіркові властивості дельта-функції складаються з того, що межа цієї функції дорівнює нулю кругом, за винятком рівності аргументу нулю (тобто, при $x = x_i$). В цій точці межа рівна безмежності. Це має місце в точці x_i з джерелом. Дельта функція Дірака має такі властивості:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_i) dx = \int_{X_i - a}^{X_i + a} \delta(x - x_i) dx = 1, \quad (4.14)$$

де a – довільне додатне число.

4.4 Фундаментальне розв'язання і пряме формулювання МГЕ

Використання МГЕ залежить від можливості побудови фундаментальних розв'язань. В техніці числового МГЕ значну роль грають *сингулярні розв'язання*, тобто такі *аналітичні розв'язання*, що відповідають *точковому збуренню в безмежному просторі, чи півпросторі*.

Ці рішення добре поводяться в області R за винятком точки збурення, в якій з'являється математична аномалія – сингулярність.

Основними сингулярними розв'язками в задачах механіки ґрунтів можуть слугувати розв'язки Бусинеска, Кельвіна, Мілана, Міндліна.

Розв'язання задачі про дію зовнішніх сил на деяке тіло має задовольняти рівняння рівноваги, геометричні рівняння, фізичні рівняння. Ці 15 рівнянь включають 15 невідомих: шість компонент тензора напружень, шість компонент тензора деформацій, 3 компоненти переміщень.

Точне розв'язання цієї системи настільки громіздке, що до цих пір було отримано лише декілька точних розв'язків. На щастя, ряд задач, що мають велике значення для механіки ґрунтів відносяться до цієї групи.

В задачах, де умови задаються на *поверхні ґрунту чи рідини*, зручно розглядати фундаментальні розв'язання для напівнескінченного простору. Це розв'язання підбирається таким чином, щоб тотожно задовольнялись граничні умови на поверхні, тоді при використанні МГЕ не потрібно задавати скінчені елементи (СЕ) на границі.

До таких задач відноситься задача дії в півпросторі зосередженої нахиленої сили, прикладеної в середині півнескінченного масиву, розв'язана в 1936 р. Р. Міндліним.

Гранична умова відповідала відсутності напружень на поверхні півпростору. Задача відповідає умовам роботи фундаментів. Нахилену силу можна розкласти на нормальну і горизонтальну складові. Графіки напружень і переміщень для нормальної до поверхні зосередженої сили на рис. 4.1.

В роботі використано пряме формулювання методу граничних елементів, де значення невідомої функції і їх похідних на границі Γ грають роль щільності джерел, які визначають функцію U всередині області Ω .

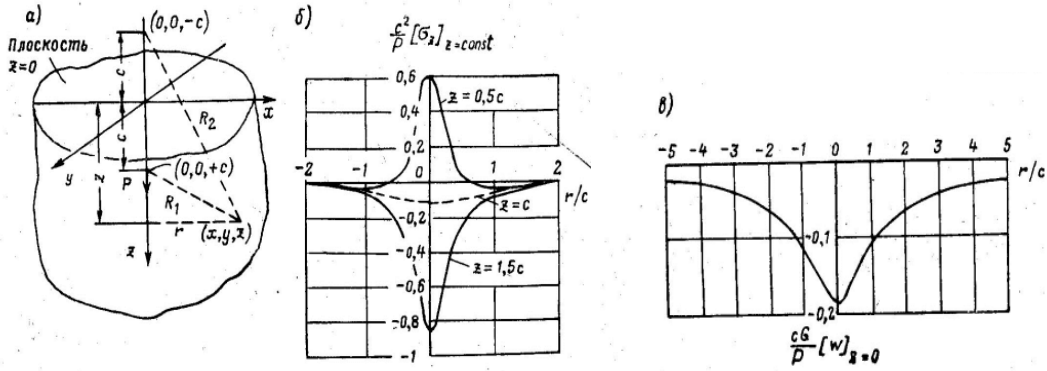


Рисунок 4.1 – Зосереджена сила, що діє всередині півпростору нормально до його границі (рішення Міндліна, 1936 р.) а) прийняті позначення; б) еюра вертикальних стискаючих напружень; в) еюра граничних переміщень граничної поверхні

При компоновці вихідного інтегрального рівняння МГЕ використовується теорема Бетті про взаємність робіт двох станів деформованого тіла (*інтеграл взаємності*):

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \cdot \varepsilon^*_{jk} d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{jk} \cdot \sigma^*_{jk} d\Omega, \quad (4.15)$$

де вираз зліва – стан, в якому шукаються напруження, вираз справа – запис у формі з початковими деформаціями.

До прямого формулювання МГЕ можна прийти, використовуючи третю тотожність Гріна, теорему Бетті, загальні принципи про взаємність робіт, можна використовувати метод зважених нев'язок, який є універсальним. Використовуючи пряме формулювання МГЕ, та підставивши вирази для фундаментальних розв'язків отримано основне співвідношення прямого методу граничних елементів, яке пов'язує значення потенціалу U і його нормальних похідних в кожному вузлі [4, 5]:

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Omega} b u^* d\Omega, \quad (4.16)$$

де коефіцієнт $c_i = 1$ у внутрішніх точках дослідного середовища; $c_i = 1/2$ в точках на гладкій границі, та $c_i = 0$ в точках, які лежать зовні області Ω .

Оскільки отримання аналітичного розв'язку (4.16) пов'язане із значними математичними ускладненнями, вихідне інтегральне рівняння зводять до алгебраїчної системи рівнянь, щоб можна було скористатись числовим підходом. Цей підхід включає такі етапи:

1. Границя Γ розбивається на ряд скінченних граничних елементів, всередині яких вважають, що потенціал і його нормальна похідна змінюються в відповідності з вибраними інтерполюючими функціями, які можуть бути лінійними залежностями, квадратними чи кубічними параболою. Було визначено [4, 5], що серед різних типів граничних елементів, які можна використовувати при числовому розв'язанні дискретного аналога інтегрального рівняння, лінійні граничні елементи дають прийнятну точність не потребуючи значних зусиль з точки зору числової реалізації.

2. Використовується метод калокації, згідно з яким для окремих вузлових точок, розподілених в середині кожного граничного елемента, записується дискретна форма рівняння, яка пов'язує значення потенціалу і її нормальної похідної в кожному вузлі. Для адекватного описання розривів напружень у вузлах на границі можна скористатись поняттям про подвійні вузли. У випадку двовимірних задач вводиться поняття про два граничні вузли з однаковими координатами, між якими не розміщується який-небудь скінченний граничний елемент.

3. Інтеграл по кожному елементу обраховується за допомогою однієї зі схем числового інтегрування.

4. Шляхом додавання граничних умов отримується система лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання якої проводиться прямим чи ітераційним методом. Розв'язання цієї системи дає значення невідомих функцій на границі досліджуваного об'єкта.

Залученням до (4.16) підходящого фундаментального розв'язку, що задовольняє частині граничні умови задачі, яка розглядається, можна виключити дискретне подання цієї частини границі, це дозволить знизити об'єм обчислювальних робіт.

4.5 Матричне та дискретне формулювання інтегрального рівняння МГЕ

Наші сучасні погляди на фундаментальні закони природи часто подаються у вигляді диференціальних рівнянь, які часто дають саме просте математичне описання явищ природи. Так математичним описом об'єктів проектування в будівельній механіці та механіці ґрунтів

служують, як правило, системи диференціальних рівнянь в частинних похідних (рівняння рівноваги, геометричні рівняння, фізичні рівняння та відповідні граничні умови) точний розв'язок яких вдається отримати в не багатьох окремих випадках.

У зв'язку з цим для аналізу об'єктів розробляються наближені методи розв'язання в основі яких лежить варіаційне числення (метод скінченних елементів – МСЕ) чи інтегральні рівняння (метод граничних елементів МГЕ). Інтегральні рівняння застосовувались в теорії пружності ще з 1960 років. В 1980 роках К. Бреббія та Г. Теллес [4] запропонували пряме формулювання МГЕ та розглянули його застосування до пластичних задач. В створенні математичної моделі використано прямиий МГЕ [4, 5]. Невідомі функції, що присутні в інтегральному рівнянні, є фізичними змінними задачі (це зусилля та переміщення граничної поверхні фундаментної конструкції).

МГЕ зводить розрахункову систему диференціальних рівнянь до інтегрального рівняння методу граничних елементів (пряме формулювання якого є більш загальним) [4]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_j &= 0 \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x), \quad (4.17)$$

де $\sigma_{ij,j} + b_j = 0$ – статичні рівняння рівноваги; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – геометричні рівняння; $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ – фізичні рівняння середовища.

Рівняння (4.17) для лінійної задачі можна подати у матричному вигляді:

$$\frac{1}{2}u_i + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma . \quad (4.18)$$

Нехай середовище є двовимірним, його границя розбита на N сегментів, чи граничних скінченних елементів. Точки, в яких розглядаються невідомі величини, називаються вузлами, вони знаходяться в середині кожного сегмента у випадку так званих постійних елементів. Вузли можуть знаходитися на стику двох елементів, тоді потрібно вводити додатковий внутрішній вузол.

Значення функцій u і q вважаються постійними для кожного елемента і рівних їхнім значенням у внутрішньому вузлі елемента. Для кожного елемента відома одна із двох функцій (u чи q).

Співвідношення (4.17) в дискретному випадку можна записати для точки i в такому вигляді:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma. \quad (4.19)$$

Для граничного скінченного елемента такого типу границя завжди є гладкою, тому перед u_i стоїть множник $1/2$, Γ_j – границя елемента j .

Співвідношення (4.19) записано для окремого i -го вузла. Функції u_i , q_i можна винести з під знаку інтегралу, оскільки при лінійній постійній апроксимації вони вважаються постійними по довжині граничного елемента, це дає:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right) u_j = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right) q_j. \quad (4.20)$$

Інтеграл $\int q^* d\Gamma$ встановлює зв'язок i -го вузла з j -им елементом (ГЕ), за яким проводиться інтегрування. Позначимо цей інтеграл через \hat{H}_{ij} . Інтеграл в правій частині (4.20) має вигляд $\int u^* d\Gamma$ позначимо через \hat{G}_{ij} . Тоді (4.20) матиме вигляд:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} \cdot u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \cdot q_j. \quad (4.21)$$

Співвідношення (4.20) записується для кожного i -го вузла, який розглядається.

Введення позначень

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{при } i = j \\ \hat{H}_{ij} & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (4.22)$$

дає можливість переписати (4.20) у вигляді

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \cdot u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} \cdot q_j.$$

Повну систему рівнянь можна подати в матричній формі

$$H^*U = G^*Q, \quad (4.23)$$

де U – потенціал; G – похідна.

Якщо на частині Γ границі відомі N_i значень функції u і N_j значень функції q , то в (4.23) буде входити лише N невідомих, які можна виразити через вихідні невідомі. Всі невідомі можна перенести вліво і отримати вираз:

$$A^*X=F, \quad (4.24)$$

де X – вектор, компонентами якого є невідомі функції u , q .

Розв'язком рівняння (4.24) будуть значення u , q на границі. Значення u , q в довільній внутрішній точці знаходяться так:

$$u_i = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma. \quad (4.25)$$

Інтеграли \hat{H}_{ij} і \hat{G}_{ij} обраховуються за допомогою процедури Гаусса для всіх точок, за винятком однієї, яка відповідає вузлу, що розглядається, тоді потрібно розглядати більш точні процедури інтегрування.

Функції u , q можна обрати постійними по довжині елемента. Та вони можуть змінюватись за лінійним і більш складними законами. Є зручним, щоб функція q мала порядок, на одиницю менший, ніж функція u , оскільки q є першою похідною від потенціалу u .

В нелінійній задачі механіки ґрунтів диференціальні рівняння є квазілінійними. Матричне співвідношення МГЕ для нелінійної задачі:

$$H \cdot U = A \cdot Y + D \cdot \overline{E^P} \quad (4.26)$$

Коефіцієнти матриць A , H обчислюються шляхом подвійного інтегрування розв'язків Р. Міндліна по поверхні фундаментної конструкції (по граничних елементах бокової поверхні та підошви фундаментної конструкції). При інтегруванні граничних елементів активної зони ґрунтової основи використовувались трикутні граничні елементи:

$$D = \int_{\Omega} \sigma^* \Phi^T d\Omega. \quad (4.27)$$

Метою наближеного способу розв'язання є зведення розрахункового рівняння і граничних умов до системи алгебраїчних рівнянь. Це досягається шляхом розбиття суцільного середовища на ряд елементів в припущенні, що для кожного такого елемента відомі варіації апроксимуючих і вагових функцій.

Для отримання величин швидкостей напружень σ у внутрішніх осередках нелінійного середовища ґрунту інтегральне рівняння (4.28) диференціювалось чисельно по координаті ξ точки прикладання одиничної сили і отриманий вираз для деформацій підставлявся в закон Гука. Тензорна та матрична форма отриманого рівняння [4, 5]:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} U^* p' d\Gamma - \int_{\Gamma} P^* U' d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^* \varepsilon d\Omega + f_{ij} \varepsilon^p, \quad (4.28)$$

$$\vec{\sigma} = \bar{A}' \bar{P}' - \bar{H}' U' + (D' + \bar{C}') \vec{\varepsilon}^p, \quad (4.29)$$

$$\text{де } A' = \int_{\Gamma} U^* d\Gamma; \quad H' = \int_{\Gamma} P^* d\Gamma; \quad D' = \int_{\Omega} \sigma^* \Phi^T d\Omega. \quad (4.30)$$

Щоб зробити мінімальною похибку числового розв'язання задач про непружну поведінку ґрунту і створити можливість єдиного підходу до обчислення напружень $\vec{\sigma}$ у внутрішніх осередках нелінійного середовища ґрунту і на границі фундаментної конструкції невідомі величини в формулах (4.28), (4.29) групувались. Після групування невідомих вирази для приросту напружень в граничних вузлах і внутрішніх точках осередків активної зони ґрунту:

$$Y = A^{-1} F - A^{-1} \cdot D \cdot \vec{\varepsilon}^p, \quad Y = M - K \cdot \vec{\varepsilon}^p \quad (4.31)$$

$$\text{де } M = A^{-1} \cdot F, \quad K = A^{-1} \cdot D.$$

$$\vec{\sigma}_{\Omega} = B \cdot \vec{\varepsilon}^p + N, \quad (4.32)$$

$$\text{де } N = (A' \cdot M - F'); \quad B = (D^* \varepsilon^p - A' \cdot K) \cdot \varepsilon^p.$$

Рівняння (4.32) – це рекурентне співвідношення, що пов'язує швидкість зміни напружень σ в граничних вузлах і внутрішніх точках з відповідними непружними деформаціями ε^p та розв'язком лінійної задачі для пружного матеріалу. Уточнене значення $d\varepsilon_{екв}^p$ отримується в результаті збіжності ітераційного процесу. Блок-схему розрахунку нелінійної задачі наведено на рис. 4.2. Через NE в блок-схемі позначено кількість граничних елементів, через Nja – кількість трикутних осередків при дискретизації активної зони фундаменту.

До переваг МГЕ відноситься:

1 – при дослідженні тих же самих задач використовується менше число невідомих (дискретизується лише контактна границя); 2 – проста вхідних даних; 3 – можливість моделювання нескінченних границь (задачі Гельмгольца – дифракція, резонанс...); 4 – зниження розмірності задачі на одиницю, оскільки розглядається лише границя досліджуваної області.

При числовій реалізації багат шарова ґрунтова основа замінювалась еквівалентним ізотропним середовищем із середньозваженими характеристиками ґрунту (фізичними параметрами стану):

$$E, \nu, \rho, \rho^{\min}, \rho^{\max}, c, \varphi, p_0.$$

4.6 Етапи розв'язання нелінійної задачі механіки ґрунтів

Серед великого різноманіття твердих тіл в природі лише мала частина має властивість повністю відновлювати свою форму і розміри після зупинки дії зовнішніх зусиль.

Більшість тіл вже при помірних зовнішніх впливах отримують незворотне деформування. Характер залишкових деформацій неоднаковий для різних класів тіл. У в'язких чи повзучих тіл ці деформації залежать від швидкості прикладання зовнішніх зусиль, у пластичних тіл – ні.

В групу пластичних тіл входить більшість металів, сплавів, тобто більшість будівельних матеріалів і ґрунт. Тому прикладне значення теорії пластичності має бути вище, ніж теорія пружності, яка охоплює хоча і більшу групу тіл, та справедлива лише при достатньо низьких рівнях зусиль.

Руйнування дискретних матеріалів проходить в результаті накопичення пластичних (залишкових) деформацій, що в граничному стані викликає розрив суцільності масиву в формі взаємного проковзування його частин.

В дисперсній нелінійній геомеханіці намітились нові перспективи, які привели до кращого розуміння задач, де в якості змінних приймаються швидкості пластичних деформацій.

Головною проблемою механіки ґрунтів залишається вибір адекватної теоретичної моделі. На теперішній час – це теорія пластичної течії.

Теорія пластичної течії базується на принципі максимуму Мізеса та швидкості дисипації механічної роботи, визначає приріст компонентів тензора пластичних деформацій пропорційно градієнту деякої функції, яку називають пластичним потенціалом, ототожнюють з функцією навантаження f (із асоційованого закону пластичної течії).

При дослідженні поля $\sigma - \varepsilon$ системи «ґрунт – фундамент – основа» ґрунт моделюється пружно-пластичним тілом, до границі текучості залежність $\sigma - \varepsilon$ лінійна, потім ґрунт переходить в текучий стан.

Поведінка ґрунту в пластичній стадії описувалась теорією пластичної течії, при цьому вносились поправки, які диктували реальні експерименти. Оскільки межа текучості для ґрунтів змінна, для отримання НДС на наступному кроці навантаження потрібно знати історію навантаження і залежність $\sigma - \varepsilon$ формувати через $\sigma - d\varepsilon$, що і робить інкрементальна теорія пластичності.

Пружно-пластичному середовищу ґрунту властива, за формулюванням О. А. Ільюшина, «довга пам'ять», тобто величина вкладу попередньої історії в напружений стан в даний момент.

Процес деформування ґрунту розглядався як незворотній термодинамічний процес, який проходить поступово (відповідає термінам за будови реальних споруд) та складається із послідовного ряду рівновісних термодинамічних станів, при яких всі механічні характеристики ґрунту зберігають своє значення за умови збереження зовнішніх умов.

Числова реалізація реальної задачі механіки ґрунтів базувалась на її лінеаризації згідно з теорією О. А. Ільюшина. Тобто, пошук розв'язку нелінійної задачі здійснювався розв'язанням рекурентної послідовності лінійних задач.

В пружно-пластичній моделі граничний стан є функцією як модуля деформацій ґрунту, так і межі міцності. При моделюванні поведінки ґрунту за межами пружності в пластичній стадії з метою врахування дисипативних ефектів ґрунту крім рівнянь рівноваги в модель вводилось ще дві додаткові умови:

- а) критерій переходу до граничного стану (умову граничної рівноваги);
- б) залежність між напруженнями та швидкостями деформацій для пластичного стану.

Блок-схему розрахунку наведено на рис. 4.2.

Перше додаткове рівняння (пороговий характер пластичних деформацій) формувалось для компонент T_σ і на октаедричній площині за його допомогою визначалась миттєва поверхня текучості, прийнято модифіковану умову текучості Мізеса–Шлейхера–Боткіна [1, 31], яка відповідає властивостям ґрунтів і не надто складна для практичного використання. Поверхня розриву подавалась у вигляді поєднання конічної та циліндричної частин (2.14):

$$\begin{cases} f = T + \sigma_{окт} \operatorname{tg}\psi - \tau_s = 0, & \sigma_{окт} \leq p_0, \\ f = T + p_0 \operatorname{tg}\psi - \tau_s = 0, & \sigma_{окт} > p_0, \end{cases}$$

де T – інтенсивність дотичних напружень (другий інваріант девіатора напружень D_σ – інтенсивність девіатора напруг); $\sigma_{окт}$ – гідростатичний тиск (перший інваріант T_σ); ψ – граничний кут тертя на октаедричній площині; τ_s – параметр на октаедричній площині, аналогічний зчепленню; p_0 – величина гідростатичного тиску на девіаторній площині, коли ґрунт працює як суцільне середовище (межа пластичної стисливості [2], характеризує перехід від конуса до циліндра в критерії Мізеса–Шлейхера–Боткіна).

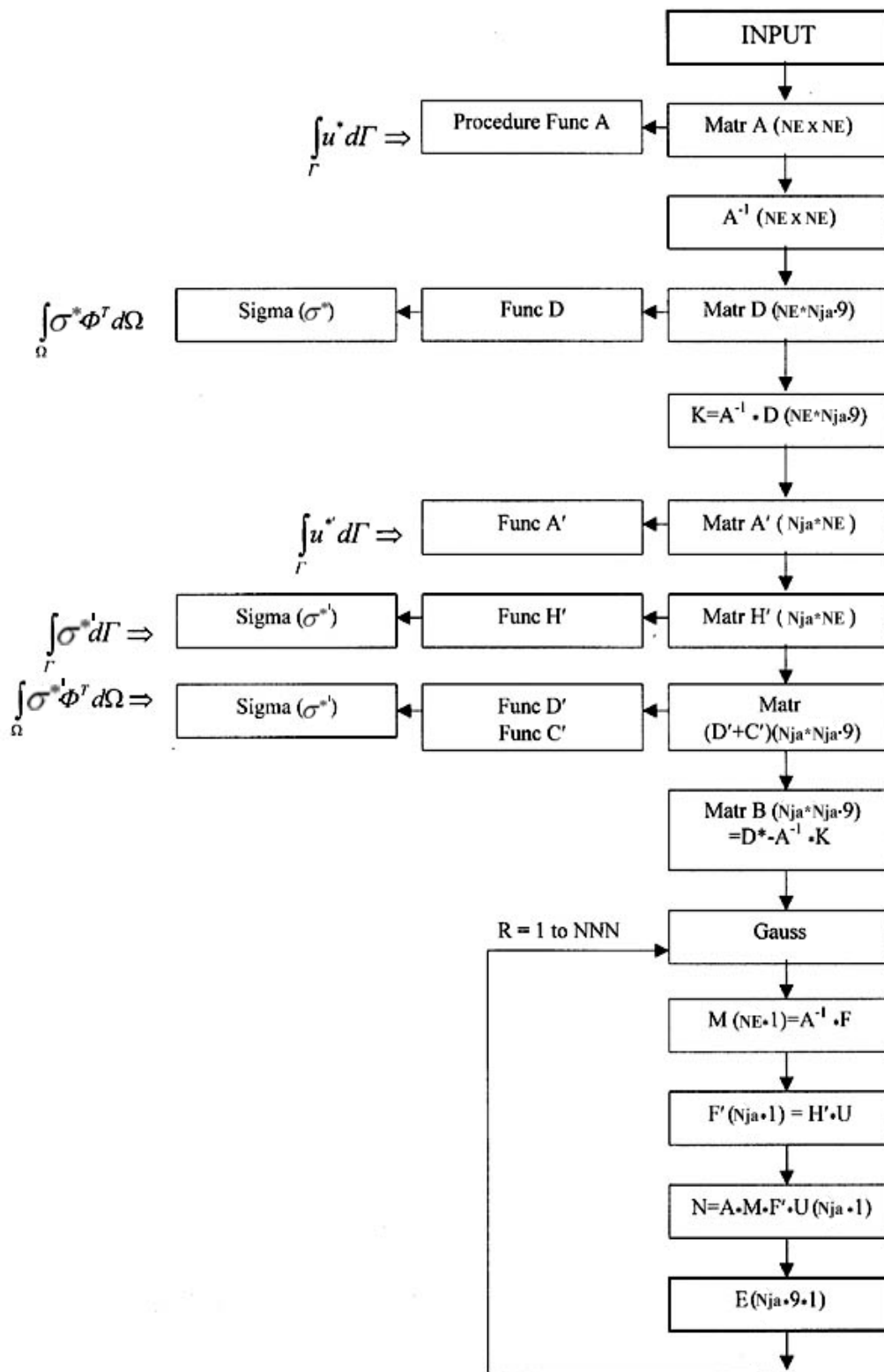


Рисунок 4.2 – Блок-схема нелінійного розрахунку фундаментних конструкцій за числовим МГЕ та дилатансійною моделлю

Друге додаткове рівняння, що характеризує взаємозв'язок між швидкостями пластичних деформацій та напруженнями, визначалось за неасоційованим законом пластичної течії (3.21):

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{dF}{d\sigma_{ij}}, \quad F \neq f.$$

де F – пластичний потенціал, визначений лише в точках миттєвої поверхні текучості, функція історії деформування (дисипативна функція пористого середовища ґрунту); f – критерій переходу до пластичного стану; λ – скалярний коефіцієнт простого навантаження.

Відповідним вибором $F = F(\sigma_{ij})$ забезпечувалась орієнтація $d\varepsilon_{ij}^p$ згідно з дослідними даними.

Властивість ґрунтів накопичувати залишкові деформації, які залежать як від історії, так і від шляху навантаження, визначили напрям їх розрахунку за теорією пластичної течії.

Залежність формозміни від шарового тензора напружень, а об'ємних деформацій від девіатора напружень (одночасність зміни об'єму і форми) є однією із особливостей ґрунту. Цей ефект перехресного впливу інваріантів T_σ та ε_{ij}^p один на другий, який в класичній механіці відносився до ефектів другого порядку і не характеризував класичні моделі, значною мірою властивий поведінці ущільненого ґрунту та названий ще в 1885 р. О. Рейнольдсом дилатансією. Саме дилатансія робить параметри НДС основ нелінійними.

З метою врахування впливу на пластичні деформації ґрунту девіаторних та гідростатичних складових тензора напружень T_σ ці частини були розділені:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \delta_{ij} \cdot \sigma, \quad (4.33)$$

де перша складова – дисипативна частина тензора напружень T_σ , друга складова – консервативна складова T_σ .

В запропонованій моделі розрахунок граничного стану проводився за траєкторією простого навантаження та пропорційно одному параметру змінювались компоненти девіатора напружень (коефіцієнт Лоде по напруженнях μ_σ зберігав в процесі навантаження постійне значення).

Це дало можливість обчислювати приріст пластичних деформацій під час текучого кроку навантаження, а потім знаходити сумарні навантаження шляхом додавання. При розв'язанні нелінійної задачі механіки ґрунтів використано кроковий метод навантаження О. А. Ільюшина. Процес складався із низки «довантажень», які викликали відповідний приріст пластичних деформацій $\Delta\varepsilon$, та вважалось,

що в рамках k -го кроку навантаження характеристики жорсткості ґрунту не змінювались:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \sum \varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^p \cdot \delta_{ij} ; \\ d\varepsilon_{ij}^p &= d\varepsilon_{ij(\text{шар})}^p + d\varepsilon_{ij(\text{дев})}^p ,\end{aligned}\tag{4.34}$$

де $d\varepsilon_{ij(\text{шар})}^p = \Lambda(\chi)d\gamma^p$ – приріст непружних змін об’єму, що супроводжують зсув, додаткова чисто *кінематична дилатансійна умова* В. М. Ніколаєвського, І. П. Бойка, використовується в розрахунку замість вимоги ортогональності вектора $\bar{\varepsilon}^p$ до поверхні навантаження; Λ – швидкість дилатансії $\Lambda = d\theta / d\gamma$; $d\gamma^p$ – приріст деформацій зсуву; χ – параметр зміцнення ґрунту; ε_{ij} – повний тензор деформацій, величина якого залежить від попередньої історії навантаження; $\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$ – пружні та пластичні деформації ґрунту до кроку навантаження, який розглядається; $d\varepsilon_{ij}^p$ – приріст пластичних деформацій на текучому кроці навантаження; $d\varepsilon_{ij(\text{шар})}^p, d\varepsilon_{ij(\text{дев})}^p$ – прирости шарової та девіаторної частини тензора деформацій; δ_{ij} – дельта Кронекера.

В дисперсному неізотропному середовищі ґрунту (ізотропія зводиться до співвісності тензора напружень T_σ та тензора швидкостей деформацій T_ε) за даними експериментів характеристики поля напружень та поля швидкостей деформацій змінюють свої кути в ході нелінійного деформування, ускладнення при розв’язку таких задач значно зростають.

Замість вимоги ортогональності вектора швидкостей деформацій $d\varepsilon_{ij}^p$ до поверхні навантаження f (яку встановлює асоційований закон пластичної течії) використовується інше додаткове експериментальне рівняння, основу побудови якого склала експериментальна інформація про поведінку реальних ґрунтів. Це рівняння і визначало орієнтацію вектора швидкостей пластичних деформацій та характеризувало особливість застосування моделей суцільних середовищ до тіл, що ущільнюються.

Для моделювання приростів ущільнення ґрунтів, стискуваність яких в сотні раз перебільшує стискуваність будівельних матеріалів наземних споруд, використовується система уявлень проф. В. М. Ніколаєвського і проф. І. П. Бойка про дилатансійну теорію ґрунтового середовища. Для корегування неспіввісності T_σ та T_ε при роботі ґрунту в пластичній стадії використано рівняння

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda(\chi)d\gamma^p ,\tag{4.35}$$

де $d\varepsilon_{ij(\text{шар})}^p$ – скалярний еквівалент приросту непружних об’ємних деформацій (шарової частини тензора швидкостей деформацій), $d\gamma^p$ – скалярний еквівалент приросту інтенсивності зсуву; $\Lambda(\chi)$ – швидкість дилата-

нсії; χ – параметр зміцнення ґрунтового середовища, прийнято щільність ґрунту.

Для визначення кінцевого деформованого стану пластичного матеріалу ґрунту деформований стан формозміни накладався на деформований стан гідростатичного тиску.

Так компонувався вектор пластичних деформацій (3.20) для даного ступеня навантаження.

Сумарний вектор деформацій (3.23) використовувався для визначення напруженого стану ґрунту з урахуванням пластичності на граничній поверхні палі та в навколо пальовому просторі для даного ступеня навантаження.

Для моделювання змінних процесів дилатансії в якості параметра зміцнення прийнято щільність ґрунту $\rho = m/V$ [1,2,3], яка пов'язана із швидкістю дилатансії Λ та величиною критичної щільності ґрунту ρ^{cr} [3] $\Lambda = \Lambda(\rho, \rho^{cr})$ (3.25), (3.26).

В свою чергу ρ^{cr} є функціональною залежністю від гідростатичного тиску σ_m , параметра ρ_0 і мінімального та максимального значення щільності досліджуваного ґрунту [3] (3.27):

$$\rho^{cr} = f(\sigma_m, \rho_0, \rho_{\min}, \rho_{\max}).$$

Оскільки швидкість дилатансії Λ змінюється при зміні щільності ґрунту, то в процесі деформування характеристики швидкостей деформацій ($\dot{\varepsilon}_{ij}^p$) теж змінюють свої кути, прямуючи до ортогональності до поверхні навантаження в критичному стані:

$$F(\rho / \rho_{cr}) = F(1) = 0.$$

В такому випадку пластичну течію ґрунту можна вивчати шляхом визначення поля швидкостей, а зміна щільності на кожному малому кроці в процесі деформування дає можливість визначати нові напрямки характеристик поля швидкостей деформацій.

Із даних експериментів, залишковий опір ґрунту від початкової щільності ρ не залежить. В якості параметра зміцнення в розрахунковій моделі прийнято щільність ґрунту.

Величина текучого значення щільності ґрунту на кожному кроці навантаження визначалась за формулою із закону збереження маси:

$$\rho_i = \rho_0 / e^{\varepsilon^v}, \quad (4.36)$$

де ε^v – об'ємні деформації, для запису яких використано міру деформацій Генкі,

$$\varepsilon^v = \ln \frac{V_i}{V_0}, \quad (4.37)$$

де ρ_i, V_i – текуче значення щільності та об'єму на i -му кроці навантаження; ρ_0, V_0 – їхні початкові величини.

Значення p_0, H визначались за формулами:

$$H = K * \varepsilon_m^{\min}, \quad p^0 = K * \varepsilon_m^{\max}, \quad (4.38)$$

де K – об'ємний модуль.

Напрацьована на основі пластичної течії та дилатансійної теорії математична модель нелінійної задачі механіки ґрунтів згідно рис. 4.2 дозволяє:

1 – схематизувати процес розрахунку, розбивши його на послідовні стадії (формозміна, ущільнення);

2 – скористатись результатами теорії пластичності нестискуваних тіл, апарат яких напрацьовано достатньо повно Д. Друкером, В. Прагером;

3 – провести лінеаризацію розв'язку нелінійної задачі, виконавши його методом пружних розв'язків О. А. Ільюшина, в основі якого лежить реалізація серії пружних задач для ізотропного середовища. При реалізації крокового методу навантаження розбивалось на ряд «довантажень» та вважалось, що в рамках k -го кроку навантаження характеристики жорсткості ґрунту не змінювались;

4 – врахувати траєкторію навантаження, появу неспіввісності T_σ, T_ε та рівня дилатансії;

5 – перейти до автоматизованого розрахунку фундаментних конструкцій на ЕОМ, дискретизувавши розрахункову модель та проводити розрахунок за числовим МГЕ.

Запропонована дилатансійна модель потребує введення 27 вхідних параметрів, з них вісім це фізико-механічні характеристики ґрунту, решта описують геометрію та топологію.

Вихідні параметри моделі автоматизовані та виводяться у вигляді інтегральних графіків «навантаження-осідання» та зображення поля напружень активної зони основи на кожному кроці навантаження. З огляду на великі об'єми цифрових даних, більшу наочність дає стиснення цієї інформації.

Таким чином, головний шлях розвитку механіки ґрунтів пов'язаний з якісними дослідженнями основних задач в рамках пружно-пластичних дилатансійних моделей, і удосконалення цієї моделі на основі порівняння числових розв'язків з експериментом.

Це відправний шлях для розв'язання широкого кола задач, які мають безпосереднє інженерне прикладання [30].

РОЗДІЛ 5 ПРИКЛАДАННЯ МГЕ ДО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ФУНДАМЕНТОБУДУВАННЯ

5.1 Пластична течія ґрунтів в основах буронабивних паль за МГЕ

Проектування надійних і економічних сучасних будівельних об'єктів, які є великомасштабними спорудами, є актуальним, тому вірне використання законів механіки ґрунтів особливо важливо при їхньому проектуванні і будівництві. Механіка ґрунтів – це механіка природних дисперсних (мілко подрібнених) тіл, що включає як закони теоретичної механіки (механіки твердих абсолютно нестискуваних тіл) так і закономірності будівельної механіки (закони пружності, пластичності). Успіхи фундаментобудування в цілому зобов'язані його науковій базі – механіці ґрунтів.

Граничний напружений стан ґрунту в даній точці відповідає такому напруженому стану, коли незначний додатковий силовий вплив порушує існуючу рівновагу і приводить ґрунт в нестійкий стан, в масиві ґрунту виникають поверхні ковзання, розриви, просідання і порушується міцність між його частинками і агрегатами. Такий напружений стан ґрунтів потрібно розглядати як недопустимий при будівництві на них споруд. Саме тому для інженерної практики дуже важливо вміти оцінювати максимально можливе навантаження на ґрунт, при якому він буде ще знаходитись в рівновазі, тобто не буде втрачати міцність і стійкість.

Конструктивні заходи боротьби з великими і нерівномірними осіданнями насипних ґрунтів це:

- обмеження тиску на ґрунти до 125–150 КПа;
- додаткове їх ущільнення;
- піщані подушки;
- перехресні монолітні фундаменти;
- просторові жорсткі наземні конструкції;
- деформаційні шви

в основному себе виправдовують, та необхідний подальший розвиток раціональних та оптимальних форм фундаментних конструкцій, якими є буронабивні палі.

Розрахункові моделі, що базуються на уявленні про континуальність (суцільність) ґрунтового середовища широко розповсюдженні в механіці ґрунтів. Та ґрунти – дисперсні системи на макрорівні і застосування до них моделей суцільних середовищ обмежена, оскільки ґрунти мають свої особливості деформування.

Складність властивостей ґрунтів та численність визначальних факторів, що впливають на їх механічну поведінку, були бар'єром, перед яким були безсилі сучасні математичні методи механіки суцільних середовищ, ґрунтам не притаманні ідеальні пружні деформації. Вже при дії експлуатаційних навантажень в них з'являються пластичні деформації, які викликають суттєвий перерозподіл зусиль. Вплив пластичності проявляється в розвитку переміщень, перерозподілі внутрішніх зусиль, який є наслідком зміни в співвідношеннях жорсткості ділянок середовища. Збільшення деформативності основи знижує її несучу здатність, а в пластичних зонах саме підвищується деформативність ґрунту.

В літературі неодноразово відмічалась необхідність напрацювання розрахункової моделі, що дозволяє враховувати одночасно широкий набір реальних властивостей ґрунту, також таких, які обумовлені його дискретністю.

В основах споруд є зони як дограничного, так і граничного стану ґрунту. При розрахунках ґрунтових основ широко використовуються моделі лінійно-деформованого середовища і теорія граничної рівноваги, які є взаємовиключними. Перша заснована на допуску, що ні в одній точці ґрунту нема стану граничної рівноваги, а друга – навпаки, що він є у всіх її точках.

В дійсності в основах споруд в наявності зони як дограничного, так і граничного напруженого стану ґрунту. Для використання допустимих деформацій споруд необхідні методи розрахунку, що дозволяють визначати нелінійні осідання. Для цього бажане використання пружно-пластичної (змішаної) задачі.

При навантаженнях близьких до граничних (80 % від граничних), розв'язанням змішаної задачі, яка повніше характеризує поведінку ґрунту, встановлено в пластичних областях сильну некоаксіальність тензорів напружень і деформацій.

У зв'язку із зростанням об'єму використання буронабивних паль назріла необхідність напрацювань сучасних прогнозних методів визначення їх несучої спроможності з залученням ЕОМ, адже основною задачею при проектуванні споруд є інженерна оцінка несучої спроможності ґрунтових основ та фундаментів.

Буронабивні палі – важливий конструктивний елемент промислового, цивільного, гідротехнічного, аеродромно-дорожнього будівництва. В будівництві все має бути передбачене в проектній майстерні: і

міцність і економічна доцільність. Балансування на «краю прірви» потребує точного математичного апарату розрахунку.

В роботі за числовим МГЕ змодельовано процес деформативності буронабивної палі. Питання міцності (несучої спроможності), стійкості ґрунтів є задачами загальної теорії граничної рівноваги, початок якої було покладено ще в працях М. Кулона та Л. Прантля. Сучасне висотне будівництво підняло питання необхідності врахувань в проектних розрахунках всієї складності ґрунтових умов, їх перерозподільних властивостей, особливостей деформування фундаментних конструкцій та необхідності розглядати основу і фундамент як єдину систему, хоча складові цієї системи мають різну природу.

Процеси, що проходять в ґрунтах при їх навантаженні є дуже складні як об'єкти досліджень і контролю і до цих пір вивчено не всі аспекти деформування ґрунтової основи під навантаженням. На сьогодні постає задача дослідження НДС споруд за допомогою ЕОМ та сучасних числових методів, що забезпечує економічне та надійне проектне рішення, тому тема деформативності буронабивних паль є актуальною та має важливе прикладне та наукове значення.

У зв'язку з розвитком будівництва споруд із значними зосередженими навантаженнями (на колону від 150 кН до 100000 кН), а також із забудовою в не зручних і затиснених будівельних майданчиках спостерігається тенденція до збільшення об'ємів буронабивних паль (БНП), які часто дозволяють найбільш просто і економічно розв'язувати питання улаштування фундаментів без суттєвих динамічних впливів на існуючі будівлі. Тому особливістю сучасного фундаментобудування є зміщення центра ваги на буронабивні палі, які є ефективнішими за забивні, мають підвищену несучу спроможність, знижені витрати металу, не викликають при заглибленні динамічних впливів. Буронабивна технологія дозволяє забезпечити заглиблення на конкретну позначку.

Вибір для дослідження буронабивної палі пояснюється їх широким розповсюдженням в цивільному та промисловому будівництві та їх техніко-економічною перспективністю.

Дослідження механіки ґрунтів та техніки фундаментобудування має своєю метою розрахунок і конструювання споруд на ґрунтах і основною задачею при цьому є будівництво споруд з достатнім ступенем надійності.

Одним із ефективних шляхів прискорення технічного прогресу в будівництві є впровадження в практику актуальних сучасних методів розрахунку.

В прикладних технічних науках прогрес неможливий без переходу до математичного процесу. Сучасний математичний апарат механіки ґрунтів заснований на рішеннях теорії пружності і теорії граничної рівноваги. Етап пружно-пластичного деформування від кінця пружної стадії до втрати стійкості не охоплений розрахунковими моделями. В той же час резерви пружно-пластичної зони дозволяють збільшити навантаження на фундаменти тоді, коли осідання пружної стадії не досягають гранично допустимого для даної споруди значення.

В літературі неодноразово відмічалась необхідність напрацювання розрахункової моделі, що дозволяє враховувати одночасно широкий набір реальних властивостей ґрунту, і також таких, що обумовлені його дискретністю.

Деформації дисперсних середовищ здійснюються при дислокації твердих частинок в поровий простір, що неминуче приводить до одночасної зміни об'єму і форми, це проява ефектів дилатансії матеріалу.

Дискретна (зерниста) будова ґрунту є основною властивістю, що різнить його від твердих тіл. Оскільки механіка ґрунтів користується теоретичною базою, що відноситься до суцільних тіл – теорія дискретних середовищ є перспективною в розрахунках ґрунтів.

Визначальним співвідношенням в проведеному розрахунку є інтегральне рівняння МГЕ. Суть МГЕ – зведення крайової задачі із 15 диференціальних рівнянь до інтегрального рівняння. МГЕ – це класичний метод дослідження крайових задач. Зведення крайової задачі до граничного інтегрального рівняння понижує на одиницю розмірність задачі і тим самим дає можливість при наявних обчислювальних засобах (ЕОМ) розглядати більш складні класи задач, ніж ті, що можна розв'язувати іншими методами, ця безумовна перевага МГЕ.

Перевагою МГЕ є і те, що він дозволяє зразу визначати невідомі величини на границі, не обраховуючи їх по всій області, як це вимагають інші методи. В багатьох задачах цим можна обмежитись, коли ж необхідно знайти рішення в довільній внутрішній точці області, то для цього достатньо виконати інтегрування. Математичний апарат МГЕ є повністю класичним і достатньо сильним, щоб встановлювати загальні співвідношення між шуканими функціями і конкретними

граничними елементами. Числовий аналіз МГЕ і організація обчислювальної програми приводять до значного підвищення ефективності використання МГЕ в розрахунках задач механіки ґрунтів.

Зв'язок між компонентами векторів напружень і переміщень на границі встановлюється за допомогою системи інтегральних рівнянь (1), яка чисельно перетворюється в алгебраїчну систему рівнянь, яку потрібно обрахувати. Роль механіки ґрунтів в модернізації будівельних фундаментних конструкцій і удосконаленні будівельного виробництва достатньо велика та загально відома.

Реальні задачі геомеханіки моделюються диференціальними рівняннями в частинних похідних і зводяться до класу крайових задач [4, 5], точний розв'язок яких вдається отримати лише в поодиноких випадках.

В роботі проведено числові дослідження за МГЕ визначення несучої спроможності буронабивної палі $L=6,85$ м, $d=0,8$ м дев'ятиповерхової будівлі. Розрахункове інтегральне рівняння МГЕ – (4.17). Інженерно геологічні умови будівельного майданчика та схему дискретизації активної зони БНП подано на рис. 5.1а,б.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_j = 0 \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x),$$

де $\sigma_{ij,j} + b_j = 0$ – статичні рівняння рівноваги; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – метричні рівняння; $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ – фізичні рівняння середовища; u, p – шукані вектори переміщень та напружень на границі фундаментної конструкції; інтеграл по області Ω (Ω – активна зона навколо фундаментної ґрунтової основи) включає вектор пластичних деформацій ε_p ; Γ – границя досліджуваного об'єкта; u^*, p^* – сингулярні фундаментальні розв'язки Р. Міндліна, що відповідають одиничним збурюючим впливам у півпросторі.

Основна задача при проектуванні – зведення до мінімуму осідань ґрунту під фундаментами, оскільки завдяки цьому зменшуються додаткові навантаження (і перевантаження) наземних конструкцій, які і без того мають сприймати низку постійних і тимчасових навантажень.

Поведінку ґрунтів під навантаженням визначають особливості його структурних зв'язків. Багатошаровість ґрунтової основи в моделі замінювалась еквівалентним ізотропним тілом. Середньозважені деформаційні характеристики ґрунту узагальнено описували деформативність однорідного ізотропного матеріалу в досліджуваному об'ємі ґрунту. Для числового моделювання багатошарова основа замінювалась еквівалентним квазіоднорідним середовищем із середньозваженими в рамках активної зони характеристиками фізико-механічних властивостей ґрунтів. В розрахунку враховано 8 показників інженерно-геологічних характеристик ґрунту. Від того наскільки достовірно визначені інженерно-геологічні показники ґрунту, що рекомендуються до розрахунку, в основному і залежать результати проектних рішень та їх надійність. Неврахування неоднорідності ґрунтів в інженерних нормативних розрахунках приводить до введення коефіцієнтів запасу, та ступінь цієї компенсації для різних ґрунтових основ залишається поки що вельми не визначеним.

Показники інженерно-геологічних характеристик ґрунтів подано в табл. 5.1. При розрахунку враховувалось, що паля і ґрунт працювали в умовах осьової симетрії.

Вихідним пунктом наближеного розв'язання крайових задач є дискретизація континууму, тобто, перехід від нескінченного числа ступенів вільності до кінцевого. Ключовою особливістю МГЕ є та обставина, що дискретизується лише поверхня тіла. Загальні методи числового розрахунку засновані на дискретизації об'єкта і апроксимації щільностей еластопотенціалів (в даній задачі – напружень), що дозволяє перейти від функціональних до алгебраїчних рівнянь. Та в результаті таких перетворень порушується неперервність деформацій об'єкта, а граничні умови задовольняються в окремих точках. Припущені похибки обчислень залежать від ступеня дискретизації і із зменшенням кроку дискретизації зменшуються. З метою відпрацювання параметрів алгоритму та оцінки похибок результату числового дослідження проведено порівняння з експериментом.

Як впливає із результатів компресійних і штампових досліджень ґрунтів, вони деформуються нелінійно. Перспективним шляхом розрахунку основ фундаментних конструкцій по двох нормативних граничних станах є використання співвідношень теорії пластичної течії, тому що її математичний апарат дозволяє відобразити в розрахунках властиву ґрунтам нелінійність зв'язку між $\sigma - \varepsilon$ як в дограничній області, так і в області граничного стану.

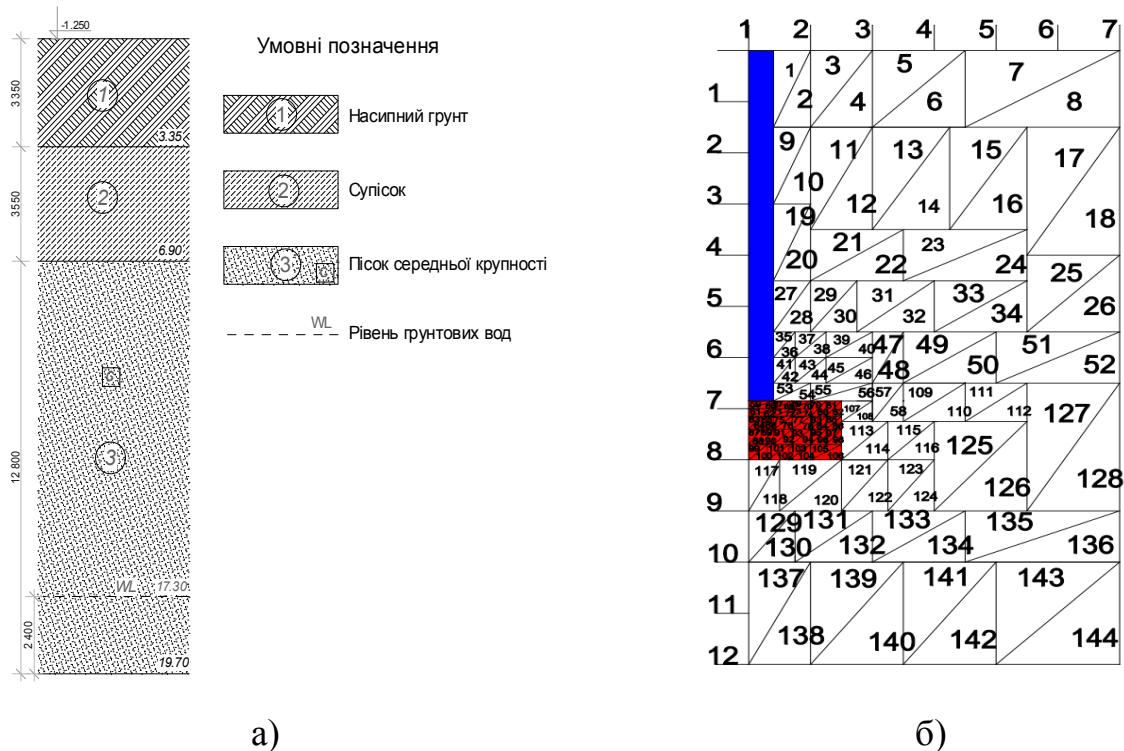


Рисунок 5.1 – Інженерно-геологічні шари ґрунту (а); дискретизація навколо пальової активної зони ґрунтової основи (б)

Теорія пластичної течії засновується на принципі мінімуму Мізеса та швидкості дисипації механічної роботи дійсних напружень на пластичних деформаціях. Вільна енергія в дійсному стані *менша* ніж в інших можливих станах, це означає, що $\sigma * d\varepsilon^P \geq 0$ – скалярний добуток не від’ємний.

Неасоційований закон пластичної течії визначає приріст компонентів тензора пластичних деформацій пропорційно градієнту деякої функції, яку називають пластичним потенціалом і ототожнюють з функцією навантаження (із асоційованого закону пластичної течії) (3.21):

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{dF}{d\sigma_{ij}}, \quad F \neq j$$

Принцип дисипації механічної роботи (принцип мінімуму Мізеса)

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^P > \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^P, \quad (5.1)$$

де σ_{ij} – дійсні значення компонент напружень, що відповідають полю деформацій ε_{ij}^P ; σ_{ij}^* – компоненти будь-якого допустимого функцією навантаження напруженого стану $F(\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^P, T, \chi) \leq 0$.

Таблиця 5.1 – Фізико-механічні характеристики ґрунту

Вид ґрунту	γ , кН/м ³	γ_{s_0} , кН/м ³	W	WL	WP	IP	IL	e	Sr	C , кПа	φ^0 ,	E , МПа	R_0 , кПа
1. Насипний ґрунт	17,7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
2. Супісок вологий, пластичний	18,7	27	0,21	0,23	0,18	0,05	0,6	0,75	0,76	11	21	10	190
3. Пісок середньої крупності, середньої щільності, мало вологий	17,6	26,5	0,018	–	–	–	–	0,587	0,22	10	37/34	35	450
Рівень ґрунтових вод – 17,9 м													

В теорії пластичної течії поряд з повними деформаціями ε_{ij} розглядаються незворотні пластичні ε_{ij}^p і пружні деформації ε_{ij}^e :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e. \quad (5.2)$$

Компоненти пружних деформацій пов'язані з законом Гука. Для визначення приростів деформацій пластичного відгуку ґрунтів використано неасоційований закон пластичної течії (3.21) та до основних фізико-механічних характеристик ґрунту додався коефіцієнт дилатансії $\Lambda = \frac{dV}{d\gamma}$ – швидкість деформування ґрунту в граничному стані. Відмічений вперше О. Рейнольдсом в 1885 р. ефект дилатансії (зміна об'єму, що супутня зсувним деформаціям) характерний для незворотного деформування ґрунтів. В якості додаткової умови до неасоційованого закону пластичної течії (3.21) замість вимоги ортогональності вектора пластичних деформацій $d\varepsilon_{ij}^p$ до поверхні навантаження f використано дилатансійну теорію ґрунтового середовища Ніколаєвського–Бойка [3, 31]:

$$d\varepsilon_{шар}^p = \Lambda \cdot d\gamma, \quad (5.3)$$

де $d\varepsilon_{шар}^p$ – приріст непружних змін об'єму, що супутні зсуву; $d\gamma$ – приріст інтенсивності зсуву.

Граничний напружений стан ґрунту в роботі визначався в формі октаедричної теорії міцності Мізеса–Шлейхера–Боткіна.

В основах фундаментів, як показують експерименти, [10] навантаження ґрунту проходить по траєкторіях, близьких до траєкторій простого навантаження. При простому навантаженні всі компоненти девіатора напружень зростають пропорційно одному параметру. В роботі навантаження здійснювалось згідно з траєкторією простого навантаження.

Результати розрахунку подано на рис. 5.2. В роботі проведено також визначення несучої здатності розглянутої буронабивної палі згідно з нормативними документами. Неврахування неоднорідності ґрунтів в інженерних нормативних розрахунках приводить до введення коефіцієнтів запасу, та ступінь цієї компенсації для різних ґрунтових основ залишається поки що вельми не визначеним.

Несучу здатність палі визначено за нормативною формулою (4.1) [13]. Необхідні для розрахунку параметри: $\gamma_c = 1$, $\gamma_{cR} = 1$, $\gamma_{cf} = 0,7$;

Площа вістря палі $A = \pi \cdot 0,8^2 / 4 = 0,5024 \text{ (м}^2\text{)}$;

Периметр бокової поверхні БНП $u = \pi \cdot 0,8 = 2,512 \text{ (м)}$;

Розрахунковий опір ґрунту під нижнім кінцем бурової палі знайдено за таблицею 7 [13] $R = 980 \text{ кПа}$ при $H = 10,4 \text{ м}$ – глибина закладання нижнього кінця палі.

Для визначення розрахункового опору ґрунту по боковій поверхні палі ґрунтову товщу розділено на шари товщиною не більше 2 м. Обчислення занесено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Визначення несучої здатності буронабивної палі по боковій поверхні за ДБН

№ шару	$H_{\text{сеп, м}}$	$h_i, \text{ м}$	$f_i, \text{ кПа}$	γ_{cfi}	$\gamma_{cfi} f_i h_i, \text{ кН/м}$	I_L
1	4,475	1,85	14,5	0,7	18,78	0,6
2	6,15	1,5	18,1	0,7	19	0,6
3	7,9	2,0	61,8	0,7	86,52	Пісок середньої крупності
4	9,65	1,5	64,5	0,7	67,7	Пісок середньої крупності

$$\Sigma \gamma_{cfi} f_i h_i = 192.$$

Сумарна несуча здатність БНП за ДБН:

$$F_d = 1(1 \times 980 \times 0,5024 + 2,512 \times 192) = 974,66 \text{ (кН)}.$$

Оскільки при навантаженні $P = 975$ кН, $s = 0,9$ см згідно з графіком нелінійних досліджень за МГЕ (див. рис. 5.2) паля не досягає допустимих деформацій ($s \leq 8$ см), врахування нелінійності роботи БНП дозволяє в цьому випадку в 2,5 рази підняти навантаження на палю, що сприятиме економічному ефекту. Нові методи розрахунку нелінійно деформованих основ дають можливість використання переваг розрахунку основ за деформаціями.

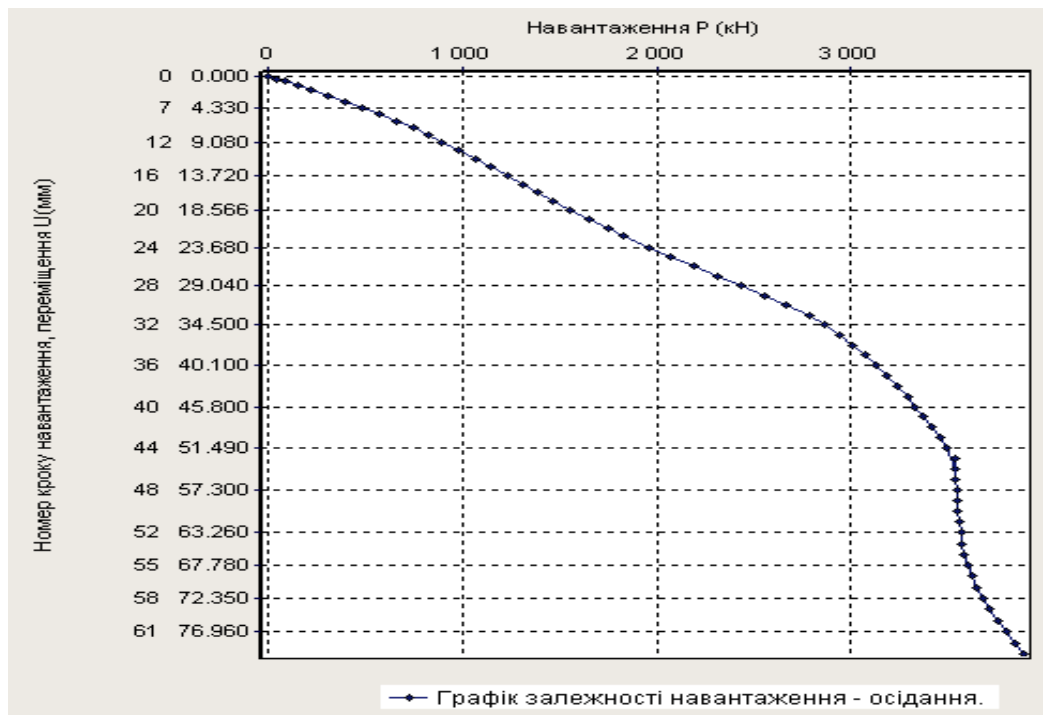


Рисунок 5.2 – Прогноз за МГЕ процесу деформування БНП $L = 6,85$ м, $d = 0,8$ м

Оскільки запропонована пружнопластична модель ґрунту, що використовує умову міцності Мізеса–Шлейхера–Боткіна та неасоційований закон пластичної течії, є ефективною нелінійною моделлю, то прикладна спрямованість запропонованої моделі дозволяє розрахунковим шляхом оцінити вплив раніше визначених та зафіксованих в дослідках і натурних спостереженнях зон підвищеної деформативності основ на осідання будівель і зусилля в фундаменті та враховувати їхню наявність ще при проектуванні. Це сприятиме підвищенню несучої спроможності порівняно з традиційним розрахунком.

Дискретизація та квантування неперервних процесів – це складові прийняття рішень в багатьох складних системах. Запропонована концепція восьми параметричної математичної моделі дозволяє краще враховувати всю складність ґрунтових умов будівельного майданчика.

Використання запропонованої дилатансійної моделі дає можливість ще на стадії проектування прогнозувати стан основи споруди в різних інженерно-геологічних умовах, що дозволяє підняти якість проектного розрахунку, можливість збільшити термін експлуатації будівлі шляхом регулювання її НДС.

Розв'язання цього питання має як наукове, так і прикладне значення та тісно пов'язане з аналізом НДС ґрунту. Із результатів роботи видно, що подібне технічне рішення дозволяє суттєво скоротити терміни і кошторисну вартість спорудження підземної частини висотних будівель з дотриманням вимог надійності і довговічності споруд.

5.2 Прогноз деформування буронабивних паль з розширенням з ґрунтовою основою за МГЕ

Сучасне висотне будівництво підняло питання необхідності врахування в проектних розрахунках всієї складності ґрунтових умов, їх перерозподільних властивостей, особливостей деформування фундаментних конструкцій та необхідності розглядати основу і фундамент як єдину систему, хоча складові цієї системи мають різну природу. Результати моніторингу осідань будівель показують значні розбіжності між фактичними і розрахунковими їх значеннями.

Це пояснюється умовністю розрахункових схем, неврахуванням реальних процесів навантаження ґрунтів. Міцність ґрунту суттєво залежить від траєкторії навантаження, початкової щільності, співвідношення девіаторної та шарової частини тензора напружень, тобто з ефектами дилатансії та контракції. Тому розвиток і уточнення розрахункових моделей основ споруд є актуальним для сьогодення.

На сьогодні в прикладних технічних науках процес розрахунку неможливий без переходу до математичного моделювання. Дисперсним ґрунтам властиві ефекти дилатансії – зміни об'єму при зсуві, під дією навантаження тверді частинки ґрунту переміщуються в поровий простір, що неминуче веде до одночасної зміни об'єму та форми. Тому для розрахунку ґрунтових основ крім апарату теорії пружності необхідно залучення пластичних математичних моделей. Основна задача при проектуванні – зведення до мінімуму осідань ґрунту під фундаментами, оскільки завдяки цьому зменшуються додаткові навантаження наземних конструкцій, які і без того мають сприймати низку постійних і тимчасових навантажень.

В роботі за пружно-пластичною дилатансійною моделлю прогнозовано за числовим МГЕ поведінку під навантаженням буронабивної палі довжиною $L = 12$ м, діаметром $d = 0,6$ м з розширенням $1,6$ м в області п'яти палі. Буронабивні палі з розширенням широко розповсюджені в промисловому та цивільному будівництві, мають техніко-економічні перспективи. П'ята пальового фундаменту сприймає 28–35 % навантаження. Це говорить про суттєву роль п'яти. Дія сил тертя по боковій поверхні викликає значні реактивні зусилля. Розширення стовбура палі в області п'яти збільшує як поверхню п'яти, так і розміри бокової поверхні, що сприяє підвищенню несучої спроможності палі та зменшує осідання.

Несуча спроможність залізобетонних палі по матеріалу використовується недостатньо. Для підвищення несучої спроможності палі, з метою покращити ситуацію, в палях влаштовують розширення. Наявність розширень в палі дозволяє в 2–3 рази підняти розрахункове навантаження на палю по ґрунту [1].

Процеси, що проходять в ґрунтах при їх навантаженні, є дуже складні як об'єкти досліджень і контролю. Ще досі вивчені не всі аспекти деформування ґрунтової основи під навантаженням. На сьогодні постає задача дослідження НДС споруд за допомогою ЕОМ та сучасних числових методів, які забезпечують економічне та надійне проектне рішення, тому тема роботи є актуальна та має важливе прикладне та наукове значення.

Збільшення несучої спроможності буронабивних палі з розширенням пояснюється [8, 47] ростом сил тертя по боковій поверхні, площа якої у палі з розширенням значно зростає. Під впливом опорного розширення п'ята обтискується ґрунтом основи.

Опорне розширення буронабивних палі впливає на жорсткість як нижніх ділянок верхньої циліндричної частини палі, так і на верхні ділянки п'яти палі [47].

Метою цього дослідження є обґрунтування розрахунку таких фундаментів сучасним числовим методом МГЕ.

Фундаментна конструкція має забезпечити міцність будівлі, а це вимагає найбільш точного прогнозу деформацій. Сучасний математичний апарат механіки ґрунтів заснований на рішеннях теорії пружності (закон Гука ліг в основу багатьох важливих інженерних теорій) і тео-

рії граничної рівноваги. Етап пружно-пластичного деформування від кінця пружної стадії до втрати стійкості не охоплений розрахунковими методами. В той же час резерви пружно-пластичної зони дозволяють збільшити навантаження на фундаменти тоді, коли осідання в пружній стадії не досягають гранично допустимого для оданої споруди значення.

Задачі геомеханіки на теперішній час моделюються диференціальними рівняннями в частинних похідних і відносяться до класу крайових задач (4.17):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_j &= 0 \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x),$$

де $\sigma_{ij,j} + b_j = 0$ – статичні рівняння рівноваги; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – геометричні рівняння; $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ – фізичні рівняння середовища; u, p – шукані вектори переміщень та напружень на границі фундаментної конструкції; Ω – активна зона навколо фундаментної ґрунтової основи (інтеграл по області Ω включає вектор пластичних деформацій ε_p); Γ – границя дослідного об'єкта; u^*, p^* – сингулярні фундаментальні розв'язки Р. Міндліна, що відповідають одиничним збурювальним впливам в півпросторі.

Проектне рішення визначення несучої спроможності буронабивної палі з розширенням обґрунтовано з залученням основного інтегрального рівняння методу граничних елементів, яке є синтезом статичних, геометричних, фізичних рівнянь (4.17). До розгляду взято буронабивну палю довжиною $L = 12$ м, діаметром $d = 0,6$ м з розширенням в області п'яти палі 1,6 м. Дискретизацію активної зони цієї палі подано на рис. 5.3. При числовому розрахунку палі за МГЕ із всієї палітри властивостей ґрунтів враховуються 9 геологічних чинників впливу. Їх середньозважені значення: модуль деформації ґрунту $E = 20,57$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,307$; зчеплення $c = 11$ кПа; кут внутрішнього тертя $\varphi = 0,325$ рад.; щільність ґрунту $\rho = 1,814$ кН/м³; мінімальна

щільність ґрунту $\rho_{\min} = 1,67 \text{ кН/м}^3$; максимальна щільність ґрунту $\rho_{\max} = 2,2 \text{ кН/м}^3$; структурна щільність ґрунту $\rho_s = 2,713 \text{ кН/м}^3$; октаедричне напруження (кПа) при переході з пружної в пластичну стадію роботи $p_0 = -1890 \text{ кПа}$.

Для визначення несучої спроможності та деформативності буронабивної палі з розширенням залучено програмний комплекс, який базується на методі граничних елементів (МГЕ) [25].

Рівняння стану буронабивної палі з розширенням під навантаженням в розрахунку визначало інтегральне рівняння (4.26) [4]:

$$C_{ij} \cdot u_{ij} + \int_{\Gamma} p_{ij}^* \cdot u_{ij} d\Gamma = \int_{\Gamma} p_{ij} \cdot u_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \cdot \varepsilon^{nn}_{ij} d\Omega$$

де U – заданий вектор переміщень на границі палі; p_{ij} – вектор напружень на цій границі; U^* , p^* , σ^* – ядра граничного рівняння – розв’язки Р. Міндліна для $P = 1$ у півпросторі для переміщень, напружень і похідних від напружень відповідно; C_{ij} – матриця, яка визначається із умов руху тіла як цілого; Γ , ξ , X – відповідно, гранична поверхня фундаментної конструкції, точка прикладання $P=1$, точка спостереження. Рівняння (4.26) є граничним інтегральним рівнянням щодо значень шуканих функцій (напружень по боковій поверхні та підшві палі) на границі дослідного об’єкта. Ця важлива обставина надає найбільшої привабливості цьому рівнянню, яке стає вельми прийнятним для досліджень числовими методами.

Визначення несучої здатності та величини осідання фундаментної конструкції проводилось в такій послідовності:

- дискретизація граничної контактної поверхні фундаментної конструкції та активної зони ґрунту (див. рис. 5.3);
- компоновка розрахункових матриць впливу МГЕ на основі розв’язків Р. Міндліна;
- запис розрахункових систем рівнянь;
- розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, для отримання НДС фундаментної конструкції на кожному етапі навантаження;
- визначення областей граничного стану з аналізу вектора пластичних деформацій;
- прийняття і обґрунтування проектного рішення про несучу спроможність буронабивної палі з розширенням.

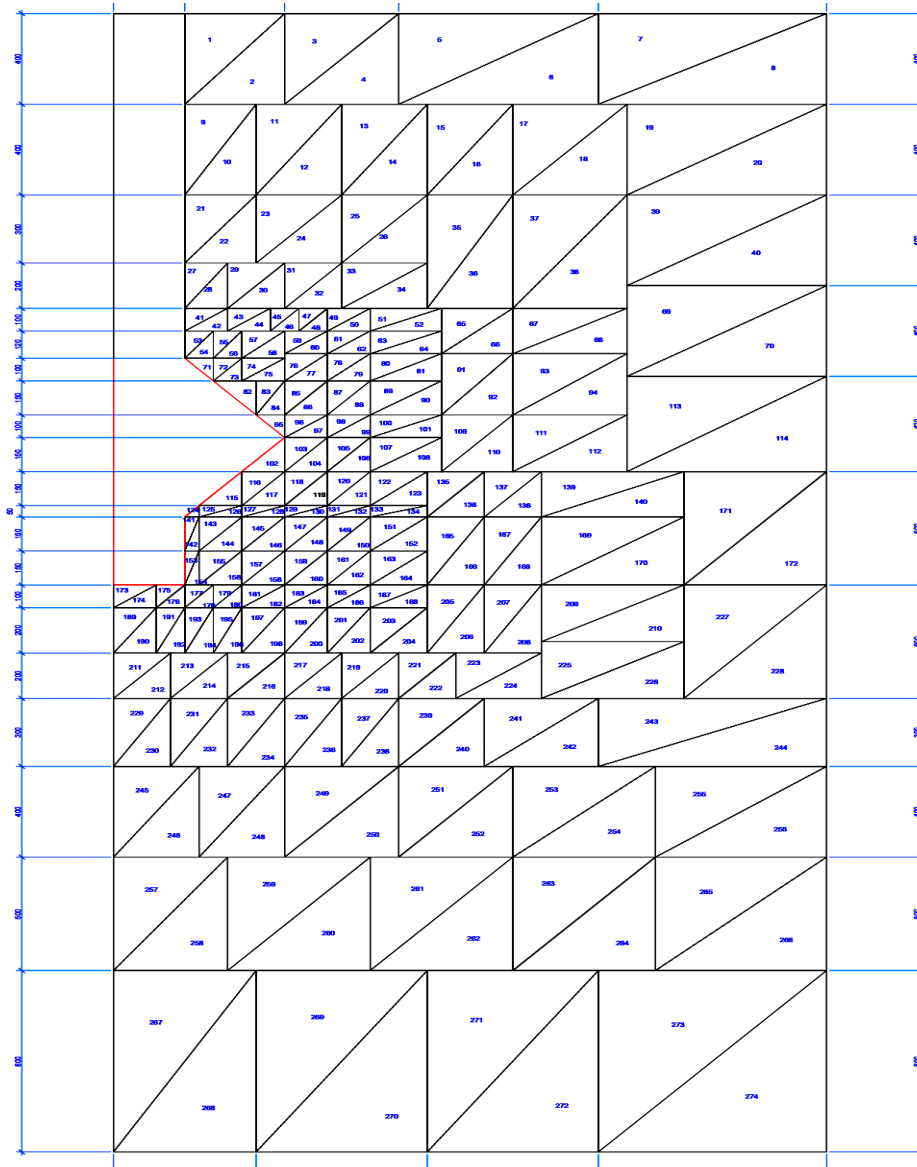


Рисунок 5.3 – Схема дискретизації активної зони буронабивної палі
 $L = 12$ м з розширенням 1,6 м

При розгляді тривимірної задачі пружно-пластичної поведінки ґрунтової основи споруди границя контакту фундаментної конструкції та ґрунту дискретизували лінійними граничними елементами (ГЕ), а підвалини, де очікуються пластичні деформації, дискретизували 167 внутрішніми осередками трикутної форми (див. рис. 5.3).

Матричне співвідношення інтегрального граничного рівняння рівноваги (4.26) для граничного вузла ξ_i має такий вигляд:

$$HU = GP + DE^P,$$

де $H = \int_{\Gamma} \rho^* \Phi d\Gamma$, $G = \int_{\Gamma} U^* \Phi d\Gamma$ – інтеграли по кожному граничному елементу бокової поверхні та нижньої поверхні (п'яти), що обраховуються за схемами числового інтегрування двовимірних квадратур Гауса [27, 5]; G – матриця впливу МГЕ; U^* , ρ^* – ядра граничного рівняння, матриці впливу Гріна, в даній роботі – це фундаментальні сингулярні розв'язки Р. Міндліна; Γ , ζ , x – відповідно границя, точка збурення, точка нагляду; $D = \int_{\Omega} \sigma^* \Phi^T d\Omega$ – матриці D відповідають інтеграли, що включають непружні деформації.

Інтеграли по внутрішніх осередках ґрунту Ω обраховувались за схемою напіваналітичного інтегрування з використанням формул Хамера [4,28].

Мінливість процесу деформування ґрунту основи споруди в роботі проведено за дилатансійною математичною моделлю В. Н. Ніколаєвського і І. П. Бойка [1, 29].

Поведінку ґрунту в нелінійній стадії описано неасоційованим законом пластичної течії. Для врахування дисипативних ефектів ґрунту до рівняння (4.26) додавали:

а) – неасоційований закон пластичної течії (3.21):

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{dF}{d\sigma_{ij}} d\lambda, \quad F \neq f,$$

де F – пластичний потенціал (дисипативна функція пористого середовища ґрунту); f – критерій переходу до пластичного стану; $d\lambda$ – скалярний множник;

б) – критерій переходу в пластичний стан.

Прихід граничного стану визначався згідно з октаедричною теорією міцності Мізеса–Шлейхера–Боткіна, яка припускає руйнування ґрунту по октаедричних площадках (2.14):

$$\begin{cases} f = T + \sigma_{окт} \cdot tg\psi - \tau_s = 0 & \text{при } \sigma_{окт} \leq p_0 \\ f = T + \rho_0 \cdot tg\psi - \tau_s = 0 & \text{при } \sigma_{окт} > p_0 \end{cases},$$

де T – інтенсивність дотичних напружень (інтенсивність девіатора напруг); $\sigma_{окт}$ – гідростатичний тиск; ψ – граничний кут тертя на октаедричній площині, аналогічний куту внутрішнього тертя; τ_s – значен-

ня граничних напружень на октаедричній площині при $\sigma_m = 0$; p_0 – величина гідростатичного тиску на девіаторній площині, коли ґрунт працює як суцільне середовище (межа переходу від конуса до циліндра в теорії Мізеса–Шлейхера–Боткіна).

В якості додаткової умови до неасоційованого закону пластичної течії (3.21) замість вимоги ортогональності вектора пластичних деформацій $d\varepsilon_{ij}^p$ до поверхні навантаження f використано дилатансійну теорію ґрунтового середовища В. М. Ніколаєвського й І. П. Бойка [4, 5] (для корегування неспіввісності тензорів напружень і тензорів деформацій роботи навантаженого ґрунту в пластичній стадії) (3.24):

$$d\varepsilon_{шар}^p = \Lambda \cdot d\gamma.$$

де $d\varepsilon_{шар}^p$ – приріст непружних змін об'єму, що супутні зсуву; $d\gamma$ – приріст інтенсивності зсуву.

Напрацьована дилатансійна модель з'єднує розрахунок ґрунтових основ за обома граничними станами (по деформаціях і несучій здатності) у рамках єдиної розрахункової схеми.

На рис. 5.4 з використанням розробленої моделі спрогнозовано несучу здатність палі в залежності від величини її деформації для відміченої вище геологічної ситуації будівельного майданчика споруди.

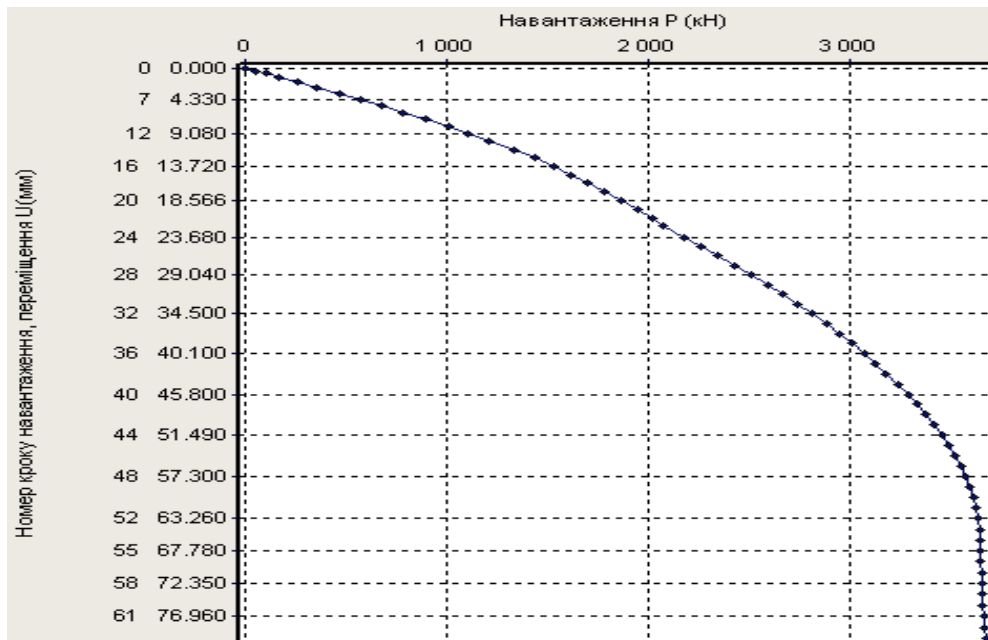


Рисунок 5.4 – Графік залежності «навантаження-осідання» буронабивної палі довжиною $L=12$ м, діаметром $d=0,6$ м з розширенням в області п'яти палі 1,6 м

Числові дослідження за МГЕ несучої спроможності по ґрунту буронабивної палі довжиною $L=12$ м, діаметром $d=0,6$ м з розширенням в області п'яти палі 1,6 м відповідають даним нормативних досліджень та добре корелюють з розрахунком цієї палі згідно з програмним комплексом.

«Palya», в основі якого закладено положення розрахунку паль згідно з нормативними документами, величина несучої спроможності палі згідно з ПК «Palya» склала 2888 кН, згідно з даними розрахунку за МГЕ – 2817 кН. Запропонована дилатансійна модель дає можливість відслідковувати НДС ґрунтової основи на всіх етапах навантаження та отримати графік роботи фундаментної конструкції «навантаження–осідання».

5.3 Поведінка дисперсного ґрунту в основах бурових опор-колон за МГЕ

На теперішній час спорудження каркасних будівель проводиться на звичайних стовпчастих фундаментах, влаштування яких пов'язане з необхідністю виконання великого об'єму земляних робіт, значними затратами на виготовлення опалубки та підготовки бетонної суміші в стислих умовах.

Зниження трудовитрат та економію можна отримати при використанні фундаментів із буронабивних паль та улаштуванні залізобетонних ростверків, а це також потребує риття котлованів, додаткових витрат арматури, затрат праці та матеріалів. Крім того бетонування ростверків з технологічною перервою після улаштування паль збільшує терміни будівництва.

Більш економічним є застосування одиночних бурових опор-колон. Вони мають більший діаметр стовбура ніж буронабивні палі та більш високу несучу здатність. Розширення у верхній частині стовбура збільшує опір ґрунту в горизонтальному напрямку за рахунок розвиненої бокової поверхні, а також сприяє використуванню вертикального навантаження для привантаження призми випору, що примикає до верхньої частини опори (за аналогією з пірамідальними палями). Розширена п'ята підвищує несучу здатність ґрунту на дію вертикального навантаження.

Зростання об'ємів промислового і цивільного будівництва та необхідність проектування надійних і економічних споруд потребують напрацювання сучасних прогнозних методів визначення несучої

спроможності такого виду фундаментів з метою забезпечення міцності будівель.

Напрацювання і впровадження більш досконалих і економічних методів розрахунку та проектування фундаментних конструкцій, направлених на виявлення і реалізацію їх резервів, є важливою і актуальною проблемою будівельної науки. Врахування нелінійності деформування фундаментів в сполученні з прийомами їх оптимального проектування дозволяє підняти адекватність розрахунків і отримати суттєву економію бетону та арматури.

В роботі за числовим методом граничних елементів (МГЕ) з позицій механіки дисперсного пружно-пластичного середовища викладено уявлення прогнозування несучої спроможності бурових опор-колон з розширеннями в верхній та нижній частинах. Розв'язання нелінійної задачі прогнозування несучої спроможності бурових опор-колон з розширеннями має як наукове, так і прикладне значення та тісно пов'язане з аналізом НДС ґрунту.

В роботі проведено розрахунок несучої спроможності за МГЕ бурової палі-колони Білоцерківського комбінату шин, конструкція якої на рис. 5.5, результати статичних досліджень цієї палі-колони наведені в [37]. Будівельний майданчик на глибину 12–13 м складається з лесоподібних суглинків і супісків II типу по осіданню, які підстиляються моренними суглинками. Бурова паля-колонна довжиною в ґрунті 12,9 м, діаметром стовбура 900 мм, розширена п'ята (камуфлет) – 1900 мм, верхнє розширення – 1200×1600×1800 мм (рис. 5.5). Граничне навантаження згідно з експериментальними дослідженнями склало 5500 кН при $S_{\text{граничне}} = 8 \text{ см}$.

Впровадження цього проекту знизило кошторисну вартість порівняно із запропонованими раніше забивними палями 30×30 см довжиною 12 м на 40 %, трудомісткість виготовлення зменшилась в 2,8 рази, об'єм земляних робіт зменшився в 6,7 рази, витрати бетону – на 23 %, арматури – на 59 %. Саме тому є актуальним напрацювання сучасного методу розрахунку такого виду фундаментів для забезпечення ними міцності та стійкості споруд. Тим більше, що проблема моделі ґрунтової основи, що забезпечує достатню відповідність між результатами розрахунку і дійсністю, все ще не вирішена.

Сучасний математичний апарат механіки ґрунтів заснований на рішеннях теорії пружності і теорії граничної рівноваги. Етап пружно-

пластичного деформування від кінця пружної стадії до втрати стійкості не охоплений розрахунковими моделями.

В той же час резерви пружно-пластичної зони дозволяють збільшити навантаження на фундаменти тоді, коли осідання пружної стадії не досягають гранично допустимого для даної споруди значення. Основна вимога розрахунку основ по другому граничному стану полягає в тому, що розрахункова деформація основи не має перебільшувати його граничну величину, яка гарантує експлуатаційну придатність споруди:

$$S_{\text{розрах.}} \leq S_{\text{граничне}}$$

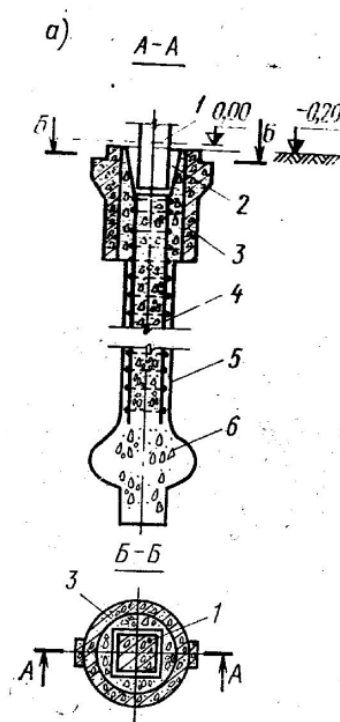


Рисунок 5.5 – Конструкція бурової опори-колони $L=12,9$ м з розширеннями

В літературі неодноразово відмічалась необхідність напрацювання розрахункової моделі, що дозволяє враховувати одночасно широкий набір реальних властивостей ґрунту, і також таких, що обумовлені його дискретністю.

При розрахунках ґрунтових основ широко використовуються моделі лінійно-деформованого середовища і теорії граничної рівноваги, які суперечать одна одній. Перша заснована на допуску, що ні в одній точці ґрунту нема стану граничної рівноваги, а друга – навпаки, що він

є у всіх її точках. В дійсності в основах споруд в наявності зони як до-граничного, так і граничного напруженого стану ґрунту.

Для використання нормативних положень допустимих деформацій споруд необхідні методи розрахунку, що дозволяють визначати нелінійні осідання.

Для цього бажано використання пружно-пластичної (змішаної) задачі. При навантаженнях, близьких до граничних (більше 0,8 частини від граничних) розв'язання змішаної задачі, яка повніше характеризує поведінку ґрунту, встановлює в пластичних областях сильну некоаксіальність тензорів напружень і деформацій.

Для обґрунтування визначення несучої спроможності бурової опори-колони з розширеннями в області п'яти та в верхній частині (рис. 5.5) використано числовий МГЕ. Проектування поведінки ґрунтів під навантаженням пов'язане з необхідністю аналізу складних фізичних процесів ущільнення та переупакування частинок ґрунту, математичним описанням цих процесів є неголономні диференціальні рівняння в частинних похідних. В роботі розв'язання засноване на основі інтегрального рівняння числового МГЕ [4,5], який є синтезом статичних, геометричних, фізичних рівнянь (4.17):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij,j} + b_j &= 0 \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma(x),$$

де $\sigma_{ij,j} + b_j = 0$ – статичні рівняння рівноваги; $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ – геометричні рівняння; $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ – фізичні рівняння середовища; u, p – шукані вектори переміщень та напружень на границі фундаментної конструкції; інтеграл по області Ω (Ω – активна зона навколо фундаментної ґрунтової основи) включає вектор пластичних деформацій ε_p ; Γ – границя дослідного об'єкта; u^*, p^* – сингулярні фундаментальні розв'язки використано рішення Р. Міндліна, що відповідають одиничним збурюючим впливам в півпросторі [5]. Оскільки фундаментальний розв'язок задовольняє граничні умови на вільній від напружень поверхні півпростору потрібно дискретизувати лише граничну поверхню стикування фундаментної конструкції та ґрунту.

МГЕ дає можливість розчленувати розрахункову систему рівнянь на основі кожного окремого граничного елемента, що дуже зручно в

реалізації і є особливістю методу. В роботі використано кусково-лінійну апроксимацію граничних елементів.

В роботі при моделюванні поведінки під навантаженням бурової опори-колони враховано пружно-пластичну стадію роботи ґрунту.

Тіла, що ущільнюються (в даному випадку ґрунт), мають особливості механічної поведінки: гідростатичний тиск може здійснювати вплив на формозміну, а дотичні напруження можуть впливати на ущільнення – це прояв ефектів дилатансії. Наявність пор в ґрунті дає можливість отримувати свободу руху. З місць тимчасової дислокації частинки ґрунту можуть переміщуватись в пори.

При ущільненні ґрунту зменшується поверхнева енергія. Не дивлячись на великий різновид підходів до вивчення деформованого стану ґрунтового дискретного середовища, найбільш коректною аж до теперішнього часу залишається запропонована Д. Друкером і В. Прагером (1952) теорія пластичної течії.

Використана в роботі методика дослідження НДС ґрунтової основи базується на теорії пластичності течії в формі неасоційованого закону пластичної течії, який описує роботу ґрунту після граничної стадії деформування (3.21),

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{dF}{d\sigma_{ij}} d\lambda, \quad F \neq f$$

та дилатансійних співвідношеннях В. Н. Ніколаєвського, І. П. Бойка [3, 29], методу пружних розв'язань Ільюшина [26]. В (3.21) F – пластичний потенціал – така функція напружень, частинна похідна від якої по σ_{ij} пропорційна приросту пластичних деформацій $d\varepsilon_{ij}^p$; $d\lambda$ – коефіцієнт пропорційності. Функція F визначається лише в точках миттєвої поверхні текучості.

При неасоційованому законі пластичної течії характеристики поля напружень і швидкостей деформацій не збігаються, що відповідає саме класу задач течії гранульованих ґрунтових середовищ.

За умову проходження граничного стану взято критерій (2.14) Мізеса–Шлейхера–Боткіна [2, 3], який в просторі головних напружень подається поверхнею із циліндричної та конічної частин (див. рис. 2.5)

$$\begin{cases} f = T + \sigma_{окт} \cdot \operatorname{tg} \psi - \tau_s = 0 & \text{при } \sigma_{окт} \leq p_0 \\ f = T + \rho_0 \cdot \operatorname{tg} \psi - \tau_s = 0 & \text{при } \sigma_{окт} > p_0 \end{cases},$$

де T – інтенсивність дотичних напружень (інтенсивність девіатора напружень); $\sigma_{окт}$ – гідростатичний тиск; ψ – граничний кут тертя на октаедричній площині, аналогічний куту внутрішнього тертя; τ_s – значення граничних напружень на октаедричній площині при $\sigma_m = 0$; p_0 – величина гідростатичного тиску на девіаторній площині, коли ґрунт працює як суцільне середовище, межа пластичної стисливості [2] чи максимальний гідростатичний тиск (межа переходу від конуса до циліндра в теорії Мізеса–Шлейхера–Боткіна, див. рис. 2.5).

В якості додаткової умови до неасоційованого закону пластичної течії (3.21) замість вимоги ортогональності вектора пластичних деформацій $d\varepsilon_{ij}^p$ до поверхні навантаження f використано дилатансійну теорію ґрунтового середовища В. М. Ніколаєвського, І. П. Бойка [5, 2] (3.24):

$$d\varepsilon_{шар}^p = \Lambda(\chi) \cdot d\gamma^p,$$

де $d\varepsilon_{шар}^p$ – приріст непружних змін об'єму, що супроводжують зсув; $d\gamma^p$ – скалярний еквівалент приросту зсувної пластичної деформації на октаедричній площині (приріст інтенсивності зсуву); Λ – швидкість дилатансії; χ – параметр зміцнення ґрунтового середовища, прийнято щільність ґрунту ρ , яка є своєрідною пам'яттю ґрунту.

Математична реалізація процесу прогнозування несучої спроможності фундаменту за МГЕ передбачає дискретизацію граничної поверхні фундаментної конструкції та активної зони ґрунту граничними елементами, рис. 5.6, активну зону основи дискретизували 467 трикутні осередки. Центр кожного ГЕ вибирався в якості вузлової точки. Значення шуканої функції (напруження) вважались постійними в межах кожного відрізка і рівними значенню у вузлі.

Якщо щільність ґрунту в n -му осередку активної зони ґрунту сягла максимального значення критичної величини щільності (згідно з модифікацією дилатансійної теорії І. П. Бойка [2]), то деформування ґрунту вважалось подібним роботі суцільного середовища.

Для описання цього випадку роботи ґрунту використовується циліндрична частина критерію (циліндр Мізеса). В межах зміни щільності ґрунту при його навантаженні в якості поверхні текучості (див. рис. 2.5) використано конічну поверхню та критерій Мізеса–Шлейхера–Боткіна (2.14).

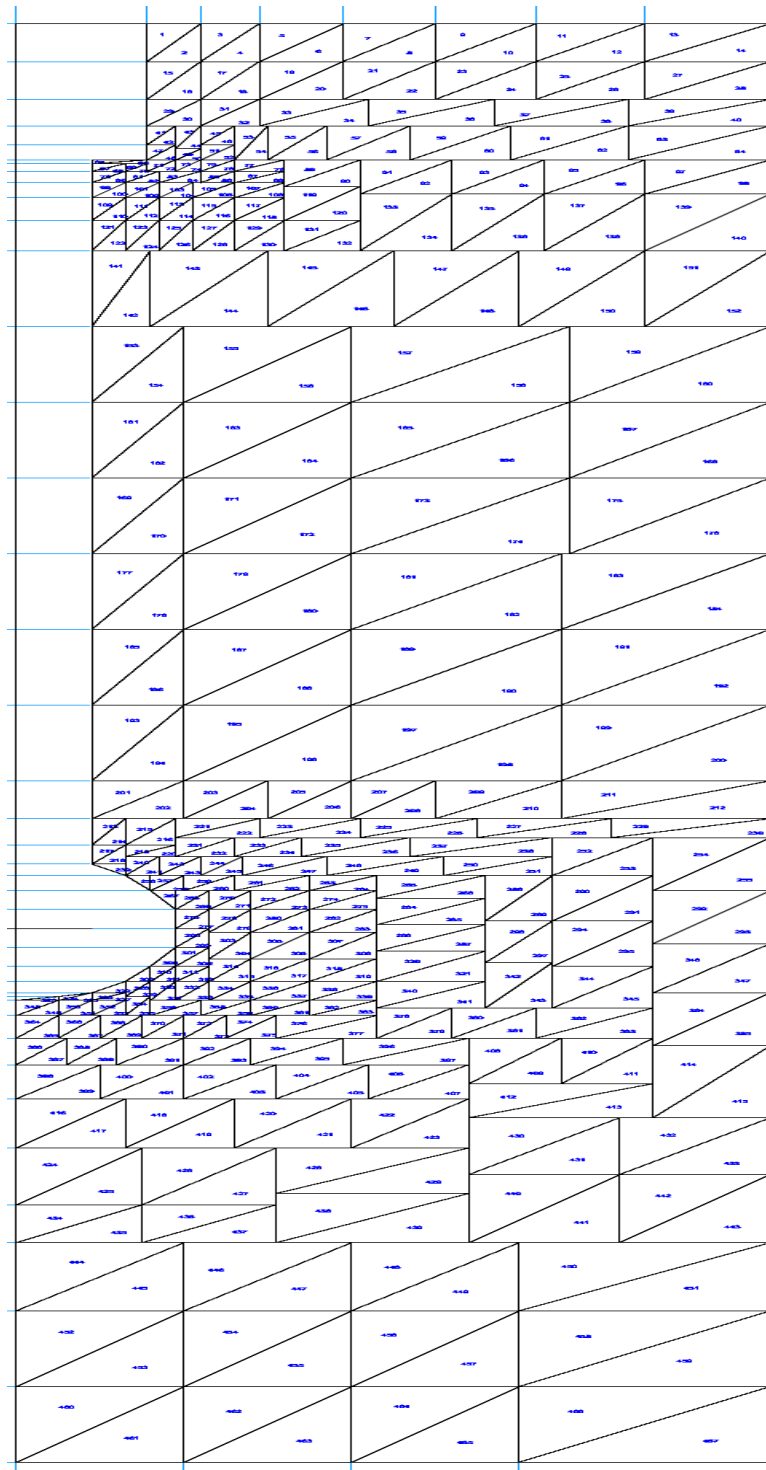


Рисунок 5.6 – Дискретизація навколопальнової ґрунтової основи бурової опори-колони $L=12,9$ м з розширеннями в верхній та нижній частинах

В розрахунок взято значення восьми фізико-механічних показників ґрунтової основи будівельного майданчика:

- модуль деформації E ,
- коефіцієнт Пуассона ν ,
- щільність ґрунту ρ ,
- зчеплення c ,
- кут внутрішнього тертя ϕ ,
- межа переходу ґрунту в пластичну стадію p_0 – рис. 2.5):

$$E = 20570 \text{ кПа}, \quad \nu = 0,32, \quad \rho = 1,814 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \rho^{\min} = 1,67 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \rho^{\max} = 2,2 \frac{\text{г}}{\text{см}^3},$$

$$c = 5,4 \text{ кН}, \quad \phi = 0,325 \text{ рад}, \quad c = 11 \text{ кН}, \quad p_0 = -1800 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}.$$

Для отримання розв'язку нелінійної задачі процесу деформування основи бурової опори-колони з розширеннями використано еволюційний алгоритм розв'язання, який базується на кроковому методі О. А. Ільюшина – на наступному кроці використовуються дані з попереднього кроку. На кожному кроці навантаження в кінці ітерації визначались напруження та проводилось порівняння з критерієм пластичності (тобто, з умовою міцності Мізеса–Шлейхера–Боткіна, яка розглядає напруження на октаедричній площині). Робота ґрунту в нелінійній стадії моделювалась дилатансійною теорією співвідношень В. Н. Ніколаєвського, І. П. Бойка [1, 3] і до основних фізико-механічних характеристик ґрунту додався коефіцієнт дилатансії:

$$\Lambda = \frac{dV}{d\gamma} \text{ – швидкість деформування ґрунту в граничному стані.}$$

Відмічений вперше О. Рейнольдсом в 1885 р. ефект дилатансії (зміна об'єму, що супутня зсувним деформаціям) характерний для незворотного деформування ґрунтів.

В пружній області роботи ґрунту ($f(\sigma_{ij}) < 0$) прирости пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^e$ визначались із закону Гука.

Приріст повних деформацій ґрунту складався із суми пружних та пластичних приростів (3.23):

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p.$$

Приріст пластичних деформацій визначався згідно (3.23).

Методика дає можливість відслідковувати НДС ґрунтової основи на всіх етапах навантаження та отримати графік роботи фундаментної конструкції «навантаження–осідання», рис. 5.7.

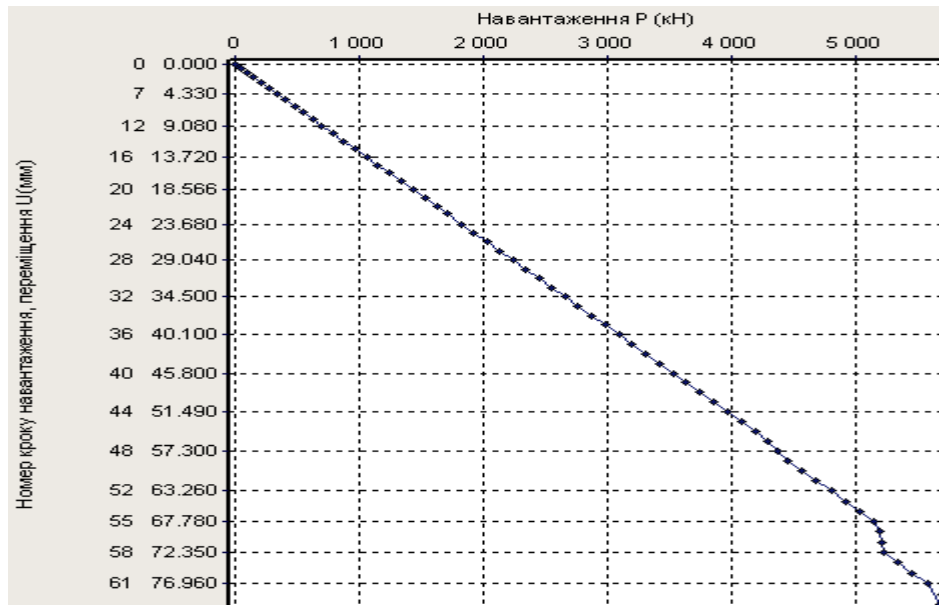


Рисунок 5.7 – Графік «навантаження–осідання» бурової опори-колони $L = 12,9$ з розширеннями

Для відпрацювання параметрів алгоритму та оцінки похибок результати числового за МГЕ дослідження порівняно з експериментом. При осіданні $s = 8$ см. Згідно з натурним експериментом [37] величина навантаження склала $P = 5500$ кН. Згідно з числовими дослідженнями за МГЕ при $s = 8$ см величина навантаження склала $P = 5610$ кН.

Таким чином, дискретизація та квантування неперервних процесів – це складові прийняття рішень в багатьох складних системах. Запропонована концепція восьми параметричної математичної моделі дозволяє враховувати більшою мірою всю складність ґрунтових умов будівельного майданчика. Використання запропонованої дилатансійної моделі дає можливість ще на стадії проектування прогнозувати стан основи споруди в різних інженерно-геологічних умовах, що дозволяє підняти якість проектного розрахунку, можливість збільшити термін експлуатації будівлі шляхом регулювання її НДС. Вирішення цього питання має як наукове, так і прикладне значення.

Головний шлях розвитку механіки ґрунтів – дослідження пружно-пластичних дилатансійних моделей і їх удосконалення на основі порівняння з експериментом.

Перспективним шляхом розрахунку основ фундаментних конструкцій по двох граничних станах є використання співвідношень теорії пластичної течії, так її математичний апарат дозволяє відобразити в розрахунках властиву ґрунтам неоднорідність зв'язку між $\sigma - \varepsilon$ як в дограничній області, так і в області граничного стану.

Одним із ефективних шляхів прискорення технічного прогресу в будівництві є впровадження в практику актуальних сучасних методів розрахунку.

5.4 Кінематика дискретного ґрунтового середовища за МГЕ

Зпрогнозовано за МГЕ поведінку під навантаженням матеріалу, що не опирається розтягу (ґрунту), в якому при навантаженні здійснюється перерозподіл напружень, і тому метод його розв'язання аналогічний методу розв'язання задач теорії пластичності.

Важливою областю прикладання МГЕ до нелінійних задач є задачі пружно-пластичних середовищ, до яких відносяться ґрунтові основи. Величина навантаження на основи споруд згідно з діючими нормативами підбирається таким чином, щоб не була перевищена межа пропорційності між напруженнями і деформаціями і лише з'являлись локальні пластичні зони. Величина таких напруг складає біля 4 кг/см^2 – це величина, що менша структурної міцності ґрунтів. А в сучасних висотних будівлях тиски сягають $0,3\text{--}1 \text{ МПа}$.

Тому виникає потреба зробити розвідку ситуації напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтів сучасними методами з урахуванням можливості роботи основ в граничному стані, виявити резерви міцності.

Протягом усього існування людства питанням фундаментобудування приділялась значна увага. На сьогодні математичне прогнозування є основним і найбільш економічним засобом теоретичних і прикладних досліджень актуальних задач фундаментобудування. Поведінка під навантаженням буронабивних паль досліджується в роботах Б. В. Бахолдіна, А. І. Догадайла, І. П. Бойка, М. Л. Зоценка, Ю. Л. Винникова та інших.

Нелінійну роботу системи «буронабивна паля–основа» змодельовано з використанням сучасного числового методу граничних елементів (МГЕ). Для реалізації цього методу використано інтегральний синтез рівнянь рівноваги, геометричних та фізичних рівнянь. Таким чи-

ном, поведінка ґрунту під навантаженням описувалась інтегральним рівнянням, отриманим К. Бребія [4] (4.17):

$$c_{ij} \cdot u_j + \int_{\Gamma} p^*_{ij} u_{ij} d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma^* \varepsilon_{jk}^p d\Omega$$

де u, p – шукані вектори переміщень та напружень на границі фундаментної конструкції; Ω – активна зона навколо фундаментної основи (інтеграл по області Ω включає вектор пластичних деформацій ε_{jk}^p);

Γ – границя досліджуваного об'єкта; u^*, p^* – сингулярні фундаментальні розв'язання Р. Міндліна, що відповідають одиничним збурювальним впливам в півпросторі [23, 4]; c – постійна, з'являється при переводі крайової задачі до інтегрального рівняння (4.17) для отримання єдиного розв'язку.

В зв'язку з тим, що шукана функція напружень розраховується відносно нульового значення напружень на границі півпростору (граничні умови) c вибирається таким чином, щоб сумарне «випромінювання» від всіх джерел перетворювалось в нуль на границі півпростору, знаходилось із умов руху тіла як цілого.

Фундаментальні розв'язання МГЕ при розгляді нелінійних задач мають той же вигляд, що і в задачах теорії пружності. В роботі в якості фундаментального розв'язання взято розв'язки Р. Міндліна для півплощини, які обертають в нуль інтеграли по області, зводячи задачу до визначення граничних функцій розрахункового рівняння стану (4.17). Саме тому в МГЕ використовується дискретне подання лише границі досліджуваного об'єкта, що є суттєвою перевагою числового МГЕ. За визначенням, фундаментальний розв'язок еквівалентний потенціалу поля, утвореного одиничним джерелом [4] і є по суті матрицею впливу.

Замість спроби знайти розв'язок рівняння (4.17) в явному вигляді, що є важкою задачею, розв'язок якої можливий лише для тіл простої геометрії і нескладних граничних умов, в МГЕ використовується числовий підхід.

1. Для наближеного розв'язку (4.17) проводилась дискретизація границі області, що розглядається. Аналогічно МСЕ, розбиття границі на елементи можна здійснювати різними способами. В найпростішому випадку, прийнятому в роботі, границя апроксимувалась лінійними елементами. Окремий елемент визначається координатами своєї сере-

дньої точки. Інтенсивність шуканих функцій в межах граничного елемента бралась постійною.

В МГЕ було визначено [4], що серед різних типів граничних елементів (ГЕ), які використовуються при числовому розв'язанні дискретного аналога рівняння (4.17), лінійні елементи дають прийнятну точність, не потребуючи значних зусиль з точки зору числової реалізації.

2. Рівняння (4.17) записувалось в дискретній формі для кожної точки ξ границі Γ та обраховувались інтеграли за схемою Гауса. В результаті було отримано систему n алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно n напружень та n переміщень в вузлах.

3. Наступним кроком було додавання граничних умов і задання n величин вузлових переміщень в кожному вузлі. Для знаходження решти граничних величин (вектора напружень по боковій поверхні палі та вістря палі) розв'язувалась СЛАР. За знайденим вектором напружень визначалась величина несучої спроможності палі при конкретному значенні переміщень.

Після знаходження невідомих на границі палі (нормальних та дотичних напружень по боковій поверхні палі), шукані функції в довільній внутрішній точці знаходяться з відомих співвідношень теорії пружності [1, 4]. Якби (4.17) вдалось проінтегрувати аналітично, то для вихідної задачі було б знайдено точне рішення.

На практиці інтеграли в (4.17) визначались з залученням числових методів інтегрування, що є єдиним джерелом похибок МГЕ. А як відомо, числове інтегрування є більш точним процесом, ніж числове диференціювання.

Для оцінки приходу граничного стану (початку порушення рівноваги між частинками ґрунту і його агрегатами, перехід ґрунту в стан пластичної течії) використано октаедричну теорію міцності та критерій текучості Мізера–Шлейхера–Боткіна, який вказує на те, що при пластичному стані ґрунту дотичне октаедричне напруження є функцією від нормального октаедричного напруження (2.14), рис. 2.5:

$$\tau_{окт} = f(\sigma_{окт}); f(\sigma_{окт}, \tau_{окт}) = 0$$

У координатах головних осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ та меридіональному перерізі в площині гідростатичного тиску, рис. 2.5, поверхня текучості (2.14):

$$f = \sigma_i + \sigma_m \operatorname{tg} \psi - \tau_s \quad \text{при} \quad \sigma_m \leq p_0,$$

$$f = \sigma_i + p_0 \operatorname{tg} \psi - \tau_s \quad \text{при} \quad \sigma_m > p_0,$$

де σ_i – інтенсивність діватора напруг; σ_m – гідростатичний тиск; ψ , τ_s – кут внутрішнього тертя та зчеплення на октаедричній площині; p_0 – межа переходу від конуса до циліндра.

Поверхня текучості дає співвідношення між $\sigma_{окт}$ та T на октаедричній площині і разом з рівняннями рівноваги забезпечує кількість рівнянь і кількість невідомих для замикання моделі. В (2.14) T – другий інваріант діватора напружень D_σ ; $\sigma_{окт}$ – перший інваріант тензора напружень $T\sigma$. Приріст деформацій складався із двох складових (3.23):

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$

де $d\varepsilon_{ij}^e$ – приріст пружних деформацій; $d\varepsilon_{ij}^p$ – приріст пластичних деформацій.

При переході ґрунту в пластичний стан в роботі замість вимог ортогональності вектора приросту пластичних деформацій ґрунтової основи $d\varepsilon_{ij}^p$ до поверхні пластичності f використано неасоційований закон пластичної течії (3.22):

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{dF}{d\sigma_{ij}}, \quad F \neq f,$$

та дилатансійні співвідношення В. М. Ніколаєвського, І. П. Бойка [1, 25] (3.23):

$$d\varepsilon_{ij}^e = d\varepsilon_{ij}^p_{шарове} + d\varepsilon_{ij}^p_{діваторне}$$

$$d\varepsilon_{ij}^p_{шарове} = \lambda(x) d\gamma^p$$

де $d\gamma^p$ – скалярна характеристика формозміни, другий інваріант діватора деформацій $I_2(D_\varepsilon)$; $\lambda(x)$ – коефіцієнт дилатансії.

$$d\varepsilon_{ij}^p_{діваторне} = D_{ij} d\lambda$$

де D_{ij} – діватор напруг; $d\lambda$ – скалярний коефіцієнт простого навантаження.

В роботі прийнято покроковий процес навантаження буронабивної палі $L=8$ м діаметром $d=50$ см. [17]. Для поступового крокового процесу навантаження швидкість стає нехтуюче малою на шляху

навантаження. Після кожного приросту навантаження стає постійним і, таким чином, система отримує можливість прийти в стаціонарний стан.

Розв'язання такої нелінійної задачі процесу деформування буронабивної палі проведено методом «пружних» розв'язків О. А. Ільюшина, який є дієвим наближеним методом, що дозволяє звести розв'язання нелінійної пружно-пластичної задачі до послідовного розв'язання лінійних задач.

Для обчислень інтегралів в (4.17) використано квадратурні формули Гаусса. При інтегруванні трикутних осередків дискретизованої активної зони основи залучено метод Хаммера [4, 5], рис. 5.8.

На кожному n -му етапі наближення ітераційного процесу пружних розв'язків Ільюшина розв'язувалась СЛАР з щоразу уточненою правою частиною. На наступному кроці навантаження використовувались дані з попереднього кроку. Процес навантаження основи розглядався як квазістатичний, який характеризувався нескінченно повільною течією. Саме такі процеси відповідають термінам забудови споруди.

Оскільки ступінь придатності моделі суттєво залежить від вхідних параметрів, в якості характеристик стану використано середньозважені фізико-механічні показники ґрунтової основи будівельного майданчика, табл. 5.3:

Таблиця 5.3 – Фізико-механічні показники ґрунтової основи будівельного майданчика

Назва шару	H , м	E , МПа	γ , $\text{кН} / \text{м}^3$	C , кПа	φ°
Суглинок жовтуватокоричневий	0,4	10	20,2	23	20
Супісок	2,3	11	19,9	10	29
Пісок середньої крупності	4,2	30	20,1	1	35
Суглинок коричневий	5,1	28	22,3	35	25

Сумісна робота фундаменту з основами виражається у взаємодії між зовнішнім навантаженням і внутрішніми силами опору ґрунту в межах активної зони (рис. 5.8) (зони впливу додаткового навантаження).

Зона деформацій є активною робочою зоною основи фундаменту, в рамках якої протягом деякого часу розвивається динамічний процес ущільнення ґрунту, який відображає суть сумісної роботи фундаменту і основи до переходу її в стан рівноваги.

На рис. 5.9 подано числовий прогноз за МГЕ результату навантаження буронабивної палі $L = 8$ м діаметром $d = 50$ см.

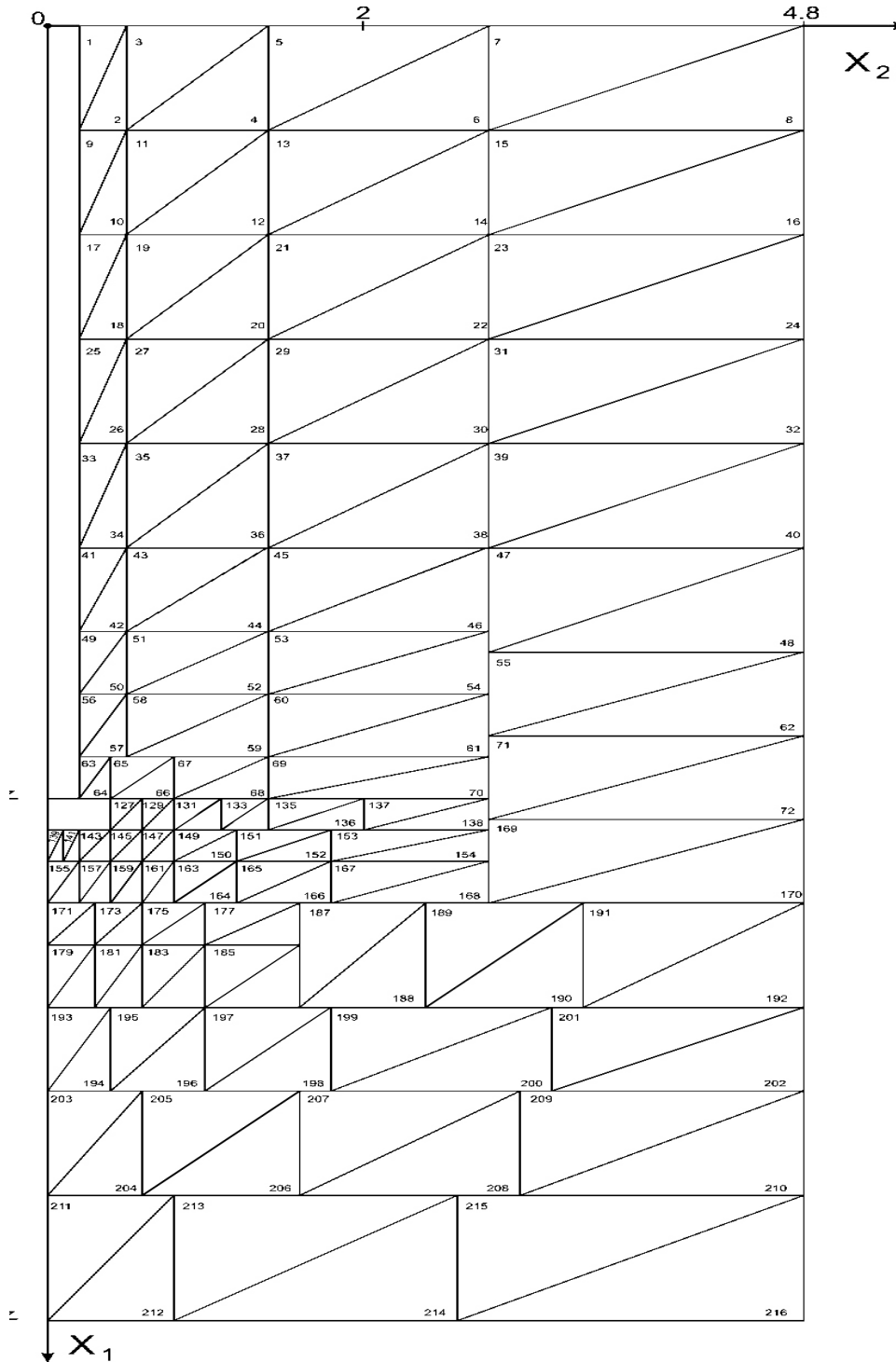
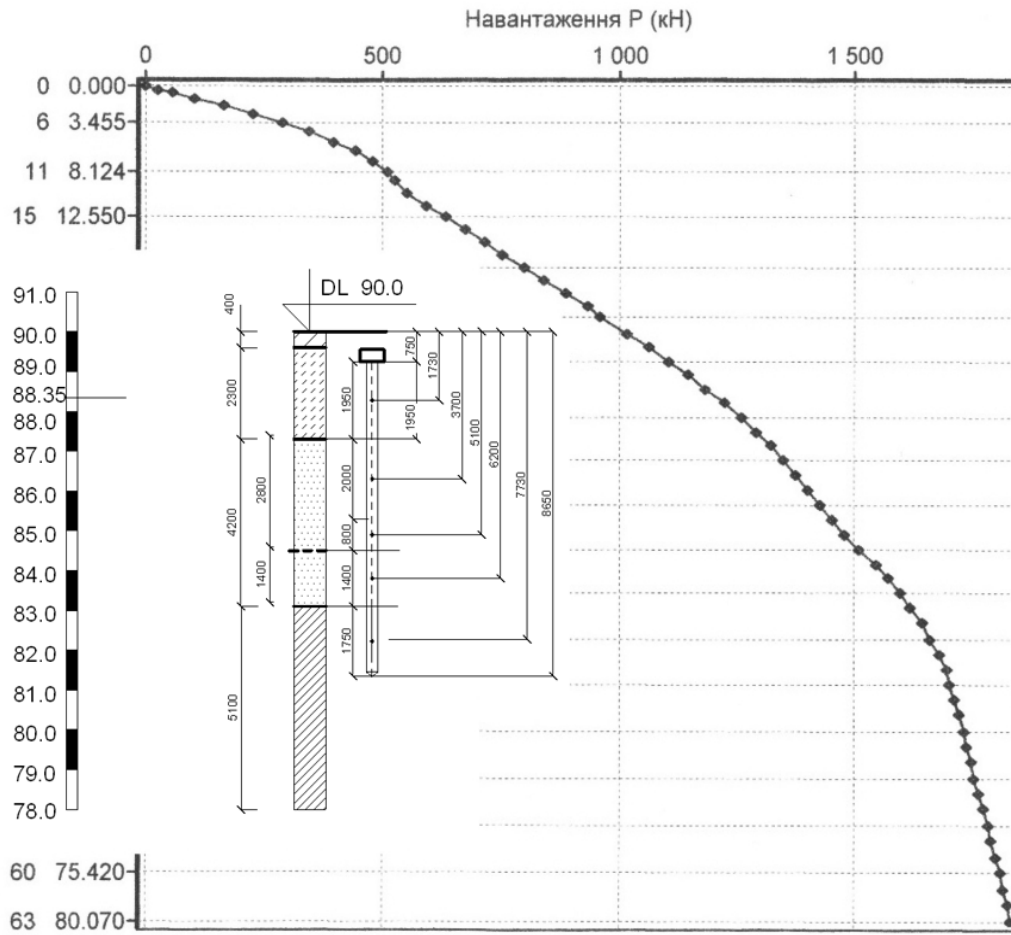


Рисунок 5.8 – Схема дискретизації активної зони навколо пальової основи

За даними експерименту [17] при $s = 3,6$ см $P = 1397$ кН, числовий прогноз за МГЕ фіксує при $s = 3,6$ см $P = 1375$ кН.



a)

Рисунок 5.9 – Числовий прогноз за МГЕ результату навантаження буронабивної палі

Результати розрахунку деформування буронабивної палі за запропонованою дилатансійною моделлю дають можливість ще на стадії проектування зробити прогноз кінцевих осідань основи в конкретних інженерно-геологічних умовах та відслідкувати відповідні значення несучої спроможності.

Модель дозволяє розглянути граничний стан основи за двома групами граничних станів (несучої здатності та деформацій) в рамках однієї розрахункової моделі. Результати числових розрахунків підтверджують ефективність проведених процедур за МГЕ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бойко І.П. Напружено-деформований стан ґрунтового масиву при побудові нових фундаментів поблизу існуючих будинків / І. П. Бойко, О. В. Сахаров // Основи і фундаменти : міжвідомчий науково-технічний збірник. – К. : КНУБА, 2004. – Вип. 28. – С. 3–10.
2. Бойко И. П. Напряженно-деформированное состояние упруго-пластического дилатирующего основания свайных фундаментов / И. П. Бойко // Основания и фундаменты : сб. КИСИ. – К. : Будівельник, 1986. – Вып. 19. – 79 с.
3. Бойко И. П. Теоретические основы проектирования свайных фундаментов на упругопластическом основании / И. П. Бойко // Основания и фундаменты : сб. КИСИ. – 1985. – № 18, С. 11–18.
4. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Телес, Л. Вроубел ; пер. с англ. Л. Г. Корнейчука под ред. Э. И. Григолюка. – М. : Мир, 1987. – 524 с.
5. Бреббия К. Применение метода граничных элементов в технике / К. Бреббия, С. Уокер. – М. : Мир. 1982. – 842 с.
6. Бахолдин Б. В. Методика контроля несущей способности буронабивных свай по результатам их динамических испытаний / Б. В. Бахолдин, А. В. Драницын // ОФМГ. – 2007. – № 1. – С. 26–30.
7. Бойко Н. В. Исследование работы набивных свай с уширенной пятой в глинистых набухающих грунтах / Н. В. Бойко. // ОФМГ. – 1972. – № 1. – С. 21–23.
8. Беляев В. Н., Рудь Ю. П. О влиянии способа устройства скважины на несущую способность коротких набивных свай / В. Н. Беляев, Ю. П. Рудь // ОФМГ. – 1979. – № 4. – С. 14–16.
9. Булычев В. Г. Механика дисперсных грунтов / В. Г. Булычев. – М. : Стройиздат, 1974. – 227 с.
10. Вялов О. С. Реологические основы механики грунтов / О. С. Вялов. – М. : Высшая школа, 1978. – 447 с.
11. Далматов Б. И. Механика грунтов / Б. И. Далматов. – М. : АСВ, 2000. – 201 с.
12. Далматов Б. И. Проектирование фундаментов зданий и подземных сооружений: Учебное пособие / под ред. Б. И. Далматова. – М. : АСВ ; СПб : СПбГАСУ, 2001. – 440 с.

13. ДБН В.2.1-10-2009. Основи та фундаменти споруд. Основні положення проектування / Мінрегіонбуд України. – К. : НДІБК, 2009. – 104 с.

14. ДСТУ Б В.2.1-27:2010. Основи та фундаменти споруд. Палі. Визначення несучої здатності за результатами пальових випробувань. – Київ : Мінрегіонбуд України. Чинний від 07.01.2011.

15. Догадайло А. И. Исследование и внедрение эффективной технологии устройства скважин набивных свай / А. И. Догадайло // Будівельні конструкції : збірник наукових праць НДІБК – 2008. – № 71. – С 12–18.

16. Зоценко М. Л. Інженерна геологія. Механіка ґрунтів, основи та фундаменти : підручник / М. Л. Зоценко. – Полтава : ПНТУ, 2004. – 568 с.

17. Крутов В. И. Конструкции фундаментов в вытрамбованных котлованах для объектов агропромышленных комплексов в сейсмических районах / В. И. Крутов, В. В. Стародворский, В. М. Шаевич // ОФМГ. – № 5. – 1983. – С. 8–11.

18. Кальницький А. А. Расчет и конструирование железобетонных фундаментов гражданских и промышленных сооружений / А. А. Кальницький, Л. М. Пешковский. – М. : Высшая школа, 1975. – 261 с.

19. Лучковський І. Я. К вопросу о расчетном сопротивлении гранта основания / И. Я. Лучковский. – Харьков : Коллегиум, 2010. – 48 с.

20. Малышев М. В. Механика ґрунтов, основания и фундаменты (в вопросах и ответах) : учеб. пособие / М. В. Малышев, Г. Г. Болдырев. – М. : АСВ, 2004. – 328 с.

21. Мангушев Р. А. Плитно-свайный фундамент для здания повышенной этажности / Р. А. Мангушев, А. Б. Фадеев // Основания, фундаменты и механика ґрунтов. – 2008. – № 1. – С. 15–19.

22. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М. : Мир, 1974. – 317 с.

23. Моргун А. С. Моделювання ефекту взаємодії системи «будівля-фундамент-основа» за числовим методом граничних елементів : монографія / А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 134 с.

24. Моргун А. С. Комп'ютерні технології розрахунку фундаментних конструкцій на основі методу граничних елементів /

А. С. Моргун, І. М. Меть, А. В. Ніцевич. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 162 с.

25. Моргун А. С. Нелінійні проблеми механіки ґрунтів / А. С. Моргун – Вінниця : ВНТУ, 2016. – 122 с.

26. Моргун А. С. Теорія пластичної течії в механіці ґрунтів / А. С. Моргун. – Вінниця : ВНТУ. – 2013 – 108с.

27. Моргун А. С. Деформативність ґрунту при пластичній формозміні та дилатансії : монографія / А. С. Моргун. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 103 с.

28. Моргун А. С. Геотехнічне обґрунтування за МГЕ розрахунку фундаментів / А. С. Моргун, В. О. Задорожнюк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 107 с.

29. Николаевский В. Н. Дилатансия и законы необратимого деформирования грунтов / В. Н. Николаевский // ОФМГ. – 1979. – № 5. – С. 29–31.

30. Николаевский В. Н. Современные проблемы механики грунтов / В. Н. Николаевский // Определяющие законы механики грунтов. – М. : Стройиздат, 1975. – С. 210–227.

31. В. Н. Николаевський. Механика пористых и трещиноватых сред / В. Н. Николаевский. – М. : Недра, 1984. – 232 с.

32. Николаевський В. М. Механические свойства грунтов и теория пластичности. Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел / В. Н. Николаевский. – М. : ВИНТИ, 1972. – Т. 6.

33. Оксанович Л. В. Невидимый конфликт / Л. В. Оксанович. – М. : Стройиздат, 1981. – 191 с.

34. Подгорный А. Н., Марченко Г. А., Пустынников В. И. Основы и методы прикладной теории упругости / А. Н. Подгорный, Г. А. Марченко, В. И. Пустынников. – Киев : Вища школа, 1981. – 328 с.

35. НПП «Геотек» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.geotek.ru/>.

36. Eurocode 7: Geotechnical design. – Part 2 : Design assisted by laboratory testing. EN 1997-2 : 2000. European Committee for Standardization – Brussel, 2000. – 107 p.

37. Романов Д. А. Проектирование и устройство буровых опор-колон / Д. А. Романов // ОФМГ. – 1978. – № 3. – С. 6–8.

38. Рейнер М. Деформация и течение. Введение в реологию / М. Рейнер. – М. : Гостехиздат, 1963. – 383 с.

39. СНиП 2.02.03-85 Свайные фундаменты. – М. : ФГУП ЦПП, 2006. – 46 с.
40. СНиП II-Б.1-62*. Основания зданий и сооружений нормы проектирования. – М. : Госстройиздат, 1962. – 23 с.
41. СНиП 2.02.01-83. Основания зданий и сооружений. – М. : ФГУП ЦПП, 2006. – 48 с.
42. Соболевский Ю. А. Механика грунтов / Ю. А. Соболевский. – Минск : Высшая школа, 1986. – 176 с.
43. Ухов С. Б. Механика грунтов, основания и фундаменты : учеб. пособие для строительных вузов / С. Б. Ухов. – М. : Высшая школа, 2002. – 566 с.
44. Филатов А. В. Исследование о несущей способности коротких буронабивных свай с камуфлетным расширением / А. В. Филатов, Н. В. Бойко // ОФМГ. – 1975. – № 3. – С. 15–17.
45. Харр М. Е. Основы теоретической механики грунтов / М. Е. Харр. – М. : Издательство литературы по строительству, 1971. – 320 с.
46. Хоу Б. К. Основы инженерного грунтоведения / Б. К. Хоу. – М. : Издательство литературы по строительству, 1966. – 460 с.
47. Ягудин А. М. Исследование распределения контактных давлений в короткой буронабивной свае с лучевидным уширением / А. М. Ягудин, Г. А. Дружинин, Ю. П. Рудь. // ОФМГ. – 1975. – № 3. – С. 18–19.
48. Bishop A. W. Discussion of Measurement of Shear Strength of Soils / A. W. Bishop // Geotechnique. – 1950. – №. 2. – P. 113–116.
49. Drucker D. C. Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity / D. C. Drucker, R. E. Gibson, D. S. Henkel // Transactions of the American Society of Civil Engineers. – 1957. – V. 122, is. 1. – P. 338–346.
50. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford, 1950.
51. Melan E. Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im innern beanspruchten Halbscheibe, // Angewandte, Mathematik und Mechanik. – 1932. – № 12. – S. 343–346.
52. Mindlin R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid // Physics. – 1936. – № 7. – P. 195–202.
53. Timoshenko S. Résistance des matériaux. T. 1. – Paris : Librairie Polytechnique Béranger, 1949.

*Наукове електронне видання комбінованого використання.
Можна використовувати в локальному та мережному режимах*

Наукове видання

Моргун Алла Серафимівна

Меть Іван Миколайович

**ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ
МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ
ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ ТА РОЗВИТКУ ЗОН
ГРАНИЧНОГО СТАНУ ҐРУНТУ**

Монографія

Редактор С. А. Малішевська

Оригінал-макет підготовлено А. С. Моргун

Підписано до видання 10.02.2021 р. Зам. № Р2021-02
Видавець та виготовлювач – Вінницький національний технічний
університет, Інформаційний редакційно-видавничий центр.
Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ, ГНК, к. 114,
м. Вінниця, 21021, тел.: (0432) 59-85-32, 59-81-59.
[press.vntu.edu.ua](mailto:kivc.vntu@gmail.com); *email*: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.