Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова

ЕКВІВАЛЕНТУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ОБ’ЄКТІВ

Монографія

Вінниця
ВНТУ
2021

УДК 517-977
Е35

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 12 від 25.03.2021).

Рецензенти:
В. М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
В. Я. Данилов, доктор технічних наук, професор

Мокін, Б. І.
Е35 Еквівалентування динамічних об’єктів : монографія / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 144 с.
ISBN 978-966-641-855-8

В монографії представлені результати дослідження проблеми синтезу еквівалентних за вибраними критеріями математичних моделей мінімального порядку для складних динамічних об’єктів, що містять у своїй структурі велику кількість накопичувачів енергії чи маси, а тому їхні точні математичні моделі мають порядок, не нижчий кількості цих накопичувачів.

Розрахована на інженерів, науковців та студентів ЗВО, яким при розв’язанні поставлених задач необхідно синтезувати чи використовувати математичні моделі складних динамічних об’єктів у формі, придатній для практичного застосування.

УДК 517-977

ISBN 978-966-641-855-8

ЗМІСТ

ВСТУП

Аналізуючи роботи [3, 16, 30, 39, 46, 69, 75] нескладно прийти до висновку, що процес у динамічному об’єкті з одним накопичувачем маси чи енергії, може бути описаний диференціальним рівнянням першого порядку, а якщо ж цей об’єкт має у своїй структурі два чи n накопичувачів маси або енергії, то процеси в ньому можуть бути описані диференціальними рівняннями другого чи n-го порядку. І оскільки кожний електротехнічний комплекс містить в собі значну кількість накопичувачів електричної енергії у вигляді конденсаторів та накопичувачів магнітної енергії у вигляді котушок індуктивностей, то повними математичними моделями процесів у цих комплексах можуть виступати лише диференціальні рівняння порядків, не нижчих за сумарну кількість конденсаторів та котушок індуктивностей у їхніх структурах. А оскільки кожна механічна система, як і кожний електротехнічний комплекс, також містить в собі велику кількість накопичувачів енергії, але механічної у вигляді елементарних накопичувачів маси та пов’язаних з масою накопичувачів потенціальної і кінетичної енергій, то адекватними математичними моделями процесів в механічних системах також можуть бути лише диференціальні рівняння порядків, не нижчих за сумарну кількість елементарних накопичувачів потенціальної і кінетичної енергій у їхніх структурах. Але, аналізуючи роботу [13], легко прийти до висновку, що при використанні математичної моделі реального фізичного процесу у вигляді диференціального рівняння невисокого, але правильно вибраного порядку, майже завжди можна отримати результати віддзеркалення цього реального фізичного процесу у часі кращі, а ніж моделюючи цей процес диференціальним рівнянням з порядком, що дорівнює кількості елементарних накопичувачів енергії чи маси у структурі цього об’єкта. Процес заміни математичних моделей реальних фізичних процесів в динамічних об’єктах, що мають вигляд диференціальних рівнянь високих порядків, математичними моделями у вигляді диференціальних рівнянь невисокого порядку, які за певним критерієм достатньо адекватно відображають ці реальні фізичні процеси, що моделюються, науковці домовились називати еквівалентуванням динамічних систем, а самі математичні моделі мінімального порядку науковці домовились називати еквівалентними математичними моделями.

На можливість використання при моделюванні реальних фізичних процесів з багатьма накопичувачами маси та енергії еквівалентних моделей невисокого порядку вперше вказав у шістдесятих роках минулого століття відомий київський вчений, академік Ішлінський, який на одній із науково-технічних конференцій висловив гіпотезу, що рух динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням з порядком, вищим третього, в діапазоні зміни координат руху можна еквівалентно (без внесення суттєвих похибок) описувати диференціальним рівнянням з порядком, не вищим третього, або, як має місце в роботах самого академіка Ішлінського [26, 27], навіть не вищим другого. Самим академіком Ішлінським ця гіпотеза не була доведена, але її справедливість інтуїтивно можна підтвердити, використавши перетворення за Лапласом, адже, якщо перетворити диференціальне рівняння, що описує фізичний процес у якомусь динамічному об’єкті, за Лапласом, то отримаємо адекватну цьому диференціальному рівнянню математичну модель на комплексній площині у вигляді передаточної функції, порядок якої буде дорівнювати порядку перетвореного диференціального рівняння. І, як загальновідомо, чим ближче до уявної осі на комплексній площині знаходитиметься пара комплексно спряжених полюсів передаточної функції, тим більший розмах коливань ця пара задаватиме вихідній координаті динамічного об’єкта, яка є розв’язком диференціального рівняння. А полюси передаточної функції, які розташовані далеко від уявної осі на комплексній площині, деформують розв’язок диференціального рівняння несуттєво, а тому їх можна відсікти, не вносячи помітних похибок в кінцевий результат. А це дає нам право вилучити зі структури передаточної функції ці полюси. А, вилучаючи зі структури передаточної функції якусь пару комплексно спряжених полюсів передаточної функції, ми на основі теореми Вієтта одразу ж маємо право на дві одиниці зменшити порядок передаточної функції, що на дві одиниці зменшує і порядок диференціального рівняння, яке вона отримала перетворенням за Лапласом. Але при цьому потрібно дати відповідь на запитання: «А за яких умов вилучення пари комплексно спряжених полюсів передаточної функції не вплине суттєво на розв’язок диференціального рівняння, яким ми моделюємо реальний фізичний процес і порядок якого, відкинувши пару комплексно спряжених полюсів передаточної функції, ми на дві одиниці понижуємо?» Відповіді на це запитання в загальному вигляді ні академіком Ішлінським, ні кимось іншим не дано.

А тому дослідження, в яких будуть отримані відповіді, за яких умов можна замість математичних моделей реальних процесів в динамічних об'єктах, що мають вигляд диференціальних рівнянь високого порядку, використовувати, не вносячи суттєвих похибок, еквівалентні математичні моделі, що мають вигляд диференціальних рівнянь порядку, мінімально допустимого за якимось критерієм, та відповіді, як ідентифікувати синтезовані еквівалентні моделі, будуть залишатись актуальними ще довгий час, особливо в частині еквівалентування нелінійних динамічних об'єктів.

А тому мета і нашого дослідження полягає у створенні методів синтезу та ідентифікації математичних моделей мінімально допустимого порядку для моделювання динамічних об'єктів, процеси в яких адекватно описуються за допомогою диференціальних рівнянь з порядками, набагато вищими.

Для досягнення поставленої мети розв'язані наукові завдання, суть і зміст яких проглядаються у наведеному вище «Змісті», тому немає сенсу їх виписувати окремо.

Об'єктом нашого дослідження, результати якого представлені в монографії, є процеси в лінійних та нелінійних неперервних та дискретних динамічних об'єктах, а предметом дослідження є синтез математичних моделей мінімального порядку для адекватного опису цих процесів.

При виконанні дослідження були використані методи теорії диференціальних рівнянь, методи теорії функцій комплексної змінної, функціональний аналіз, методи теорії автоматичного керування, методи теорії інтегральних рівнянь, методи теорії вимірювань, методи теорії ймовірностей взагалі та стаціонарних часових рядів зокрема, методи теорії ідентифікації динамічних систем, а також методи технічної кібернетики і комп'ютерного моделювання. А далі зупинимось більш предметно на математичному апараті, з якого ми стартували, розпочинаючи дослідження.

Науковці, які проводять дослідження в галузі технічної кібернетики та теорії автоматичного керування [4, 5, 11, 12, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 30, 35, 36, 39, 64, 69, 70, 72, 75, 77], динамічні об'єкти відносять до детермінованих чи стохастичних в залежності від того, процеси в них детерміновані чи стохастичні; відносять до лінійних чи нелінійних в залежності від того, їхні статичні характеристики є лінійними чи нелінійними; відносять до неперервних чи дискретних в залежності від того, сигнали в них є неперервними чи дискретними; відносять до об'єктів з зосередженими чи розподіленими параметрами в залежності від того вихідна реакція об'єкта на вхідний сигнал має місце одразу ж після надходження вхідного сигналу чи з запізненням. Тож цілком очевидно, що і математичні моделі для кожного із цих класів різняться між собою. А тому, перш ніж почати синтез еквівалентних математичних моделей мінімального порядку для різних класів динамічних об'єктів, визначимось із класами математичних моделей, в яких ми здійснюватимемо еквівалентування.

І почнемо з класу неперервних лінійних детермінованих динамічних об'єктів з зосередженими параметрами, математичні моделі процесів в яких можна описати в загальному вигляді диференціальними рівняннями:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \tag{B.1}$$

$$n = 1, 2, \ldots, N; \; m = 1, 2, \ldots, M;$$

з початковими умовами:

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y'(0) = y'_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{B.2}$$

в яких x – сигнал на вході об'єкта, який є функцією часу t, тобто, є функцією $x(t)$; y – сигнал на виході об'єкта, який теж є функцією часу, тобто, є функцією $y(t)$.

Вимірність динамічного об'єкта, математична модель якого задається диференціальним рівнянням (В.1), визначається порядком n старшої похідної у лівій частині цього диференціального рівняння, яка характеризує зміну у часі реакції об'єкта $y(t)$.

Варто звернути увагу і на те, що для реальних динамічних об’єктів в силу обмеженості їхніх енергетичних ресурсів завжди виконується умова

$$m \le n\,, \tag{В.3}$$

яку прийнято називати умовою можливості фізично реалізувати цей об’єкт.

Варто також звернути увагу і на те, що до класу детермінованих без внесення суттєвих похибок у результати моделювання процесів в них можна віднести усі динамічні об’єкти, рівень завад випадкового характеру в яких є на порядок нижчим від рівня корисних сигналів, але при цьому слід не забувати, що у цьому випадку математична модель процесу у вигляді диференціального рівняння характеризуватиме не миттєве значення вихідної координати цього об’єкта, а її згладжений тренд, знання якого в більшості практичних задач, пов’язаних з аналізом роботи динамічних об’єктів, цілком достатньо, – а це робить клас детермінованих динамічних об’єктів досить широким і вартим того, щоб саме з нього розпочати створення теорії еквівалентування. Вимога лінійності клас детермінованих динамічних об’єктів дещо звужує, але все одно залишає його ще досить широким в практичному аналізі, оскільки без внесення суттєвих похибок лінійними можна вважати усі динамічні об’єкти з аналітичними нелінійностями, якщо ці об’єкти функціонують в режимах, близьких до заданого, оскільки у цьому випадку через малі відхилення вихідної координати від її бажаного значення нелінійну статичну характеристику об’єкта шляхом лінеаризації можна апроксимувати прямою лінією.

Як показано у тих роботах, на які уже вище зроблене посилання, якщо диференціальне рівняння (В.1) перетворити по Лапласу при нульових початкових умовах (В.2), то отримаємо аналог математичної моделі (В.1) на комплексній площині змінної p у вигляді

$$Y(p) = W(p)X(p), \tag{В.4}$$

де $W(p)$ – передаточна функція неперервного лінійного детермінованого динамічного об’єкта, що має вигляд

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + 1}, \tag{В.5}$$

а $X(p), Y(p)$ – перетворені за Лапласом вхідний $x(t)$ і вихідний $y(t)$ сигнали:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt, \quad (B.6)$$

$$Y(p) = L\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt. \quad (B.7)$$

А, як відомо з тих же джерел, якщо у виразі для передаточної функції $W(p)$ замінити комплексну змінну p на уявну змінну $j\omega$, в якій $j=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця, а ω – кругова частота, то отримаємо ще одну структуру математичної моделі неперервного лінійного детермінованого динамічного об’єкта, яка несе в собі той же об’єм інформації, у вигляді

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(j\omega) + 1}, \quad (B.8)$$

яку називають амплітудно-фазовою частотною характеристикою (АФЧХ) і яку можна представити у вигляді

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}, \quad (B.9)$$

де $A(\omega)$ – амплітудна частотна характеристика (АЧХ); $\varphi(\omega)$ – фазова частотна характеристика (ФЧХ), або у вигляді

$$W(j\omega) = R(\omega) + jQ(\omega), \quad (B.10)$$

де $R(\omega)$ – дійсна частотна характеристика об’єкта (ДЧХ), а $Q(\omega)$ – уявна частотна характеристика (УЧХ) цього об’єкта, причому ДЧХ та УЧХ пов’язані з АЧХ і ФЧХ залежностями:

$$R(\omega) = A(\omega)\cos\phi(\omega), \quad (B.11)$$

$$Q(\omega) = A(\omega)\sin\phi(\omega), \quad (B.12)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\left(R(\omega)\right)^2 + \left(Q(\omega)\right)^2}, \quad (B.13)$$

$$\phi(\omega) = arctg\frac{Q(\omega)}{R(\omega)}. \quad (B.14)$$

Якщо ж взяти натуральний логарифм від АФЧХ у вигляді (В.9), то отримаємо вираз

$$\ln W\left(j\omega\right)=\ln A\left(\omega\right)+j\phi\left(\omega\right), \qquad (В.15)$$

з якого випливає, що в якості математичних моделей неперервних лінійних детермінованих динамічних об'єктів у частотній області можна використовувати ще й їхні логарифмічні характеристики – логарифмічну фазову частотну характеристику (ЛФЧХ $\varphi(\omega)$), яка відрізняється від ФЧХ $\varphi(\omega)$ лише логарифмічним масштабом по осі частот, та логарифмічну амплітудну частотну характеристику (ЛАЧХ)

$$L\left(\omega\right)=\ln A\left(\omega\right), \qquad (В.16)$$

яка при моделюванні динамічних об'єктів цього класу частіше використовується у вигляді

$$L^{*}\left(\omega\right)=20\lg A\left(\omega\right), \qquad (В.17)$$

що дозволяє в якості одиниць вимірювання підсилення чи затухання сигналу використовувати децибели.

Орієнтовні графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ динамічного об'єкта із визначеного вище класу наведені на рис. 1

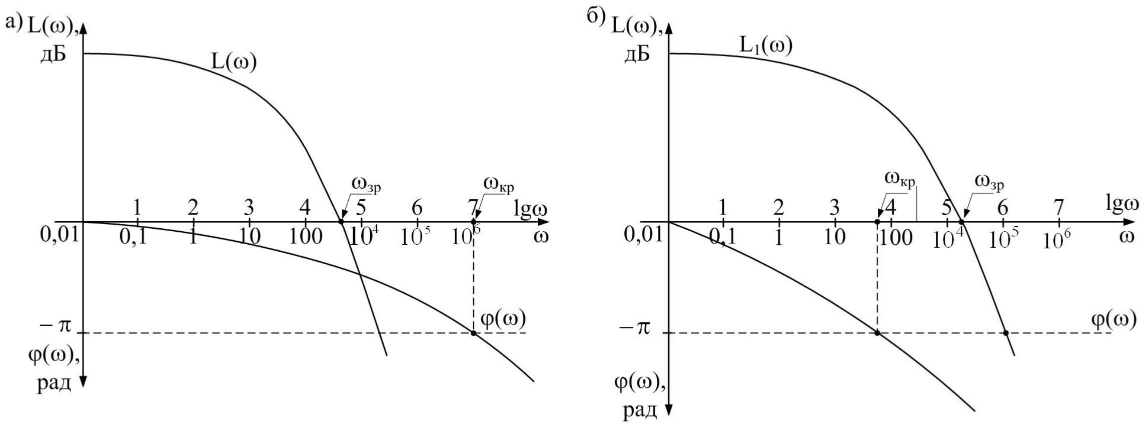

Рисунок 1 – Орієнтовні графіки ЛАЧХ
та ЛФЧХ неперервного лінійного детермінованого динамічного об'єкта *n*-го порядку за відсутності похідних у правій частині його математичної моделі

Як відомо з підручників з теорії автоматичного керування, наведених у списку літератури, для ЛАЧХ і ЛФЧХ є характерними дві частоти – частота зрізу $\omega_{зр}$ та критична частота $\omega_{кр}$, які знаходяться з рівнянь:

$$L(\omega_{зр}) = 0, \tag{В.18}$$

$$\phi(\omega_{кр}) = -\pi \tag{В.19}$$

та мають графічну інтерпретацію, представлену на рис. 1.

Згідно з критерієм Найквіста, якщо

$$\omega_{зр} < \omega_{кр}, \tag{В.20}$$

то стійкий неперервний лінійний детермінований динамічний об'єкт, для якого виконується умова (В.20), залишається стійким і після замикання його одиничним від'ємним зворотним зв'язком. Тобто у такому об'єкті характер процесів до його замикання одиничним від'ємним зворотним зв'язком і після замикання не змінюється.

Якщо ж

$$\omega_{зр} > \omega_{кр}, \tag{В.21}$$

то неперервний лінійний детермінований динамічний об'єкт, стійкий у розімкнутому стані, для якого виконується умова (В.21), стає нестійким після замикання його одиничним від'ємним зворотним зв'язком. Тобто у такому об'єкті характер процесів до його замикання одиничним від'ємним зворотним зв'язком і після замикання змінюється.

З логарифмічними частотними характеристиками пов'язане поняття мінімально-фазової системи (МФС), для якої справедливим є перетворення Гільберта – подаємо його у вигляді, запозиченому з роботи [16] –

$$\ln A(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(u)}{u-\omega}du, \tag{В.22}$$

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln A(\omega)}{u-\omega}du. \tag{В.23}$$

Із виразів (В.22), (В.23) видно, що характерною особливістю для МФС є те, що, знаючи одну із логарифмічних частотних характеристик, можна за допомогою перетворення Гільберта однозначно визначити і спарену з нею його другу частотну характеристику, а, як наслідок, – це означає, що кожна із логарифмічних частотних характеристик несе однакову кількість інформації про неперервний лінійний детермінований динамічний об’єкт, який відноситься до класу МФС. І ця кількість інформації є такою ж, яку несе і АФЧХ об’єкта $W(j\omega)$ і передаточна функція цього об’єкта $W(p)$.

З фізичної точки зору належність неперервного лінійного детермінованого динамічного об’єкта до класу МФС означає, що при однаковій АЧХ з іншими об’єктами він має мінімальне значення ФЧХ, тобто, не містить у своїй структурі ланок чистого запізнення на час τ^*, наприклад, трубопроводів, при передачі рідин чи газів, довгих стержнів чи канатів, при передачі механічних зусиль, або тисяч кілометрів проводів чи ефіру, при передачі електричних сигналів чи електромагнітних хвиль.

І лише якщо неперервний лінійний детермінований динамічний об’єкт відноситься до класу МФС, його математичну модель можна синтезувати в класі диференціальних рівнянь (В.1). В разі ж якщо неперервний лінійний детермінований динамічний об’єкт не відноситься до класу МФС, тобто, відноситься до класу немінімально-фазових систем (НМФС), то, як показано в роботі [15], його математичну модель слід синтезувати в класі диференціальних рівнянь з аргументом, що запізнюється, найбільш загальна форма для яких має вигляд

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dt}+y=\begin{pmatrix} b_m\dfrac{d^mx\left(t-\tau^*\right)}{dt^m}+ \\ +b_{m-1}\dfrac{d^{m-1}x\left(t-\tau^*\right)}{dt^{m-1}}+\ldots \\ +b_1\dfrac{dx\left(t-\tau^*\right)}{dt}+b_0x\left(t-\tau^*\right)\end{pmatrix}1\left(t-\tau^*\right) \tag{В.24}$$

з початковими умовами:

$$\begin{cases} y\left(\tau^*\right)=y_*, \\ y'\left(\tau^*\right)=y'_*, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(n-1)}\left(\tau^*\right)=y_*^{(n-1)}, \end{cases} \tag{В.25}$$

де $1(t-\tau^*)$ – зсунута на τ^* одинична функція $1(t)$, для якої справедливим є вираз

$$1\left(t-\tau^*\right)=\begin{cases}1 & при \ \ t \ge \tau^*, \\ 0 & при \ \ t<\tau^*.\end{cases} \tag{В.26}$$

Ще раз наголошуємо на тому, що математичні моделі і математичний апарат, що наведені вище, будуть використовуватись нами при розв’язанні задач еквівалентування неперервних лінійних детермінованих динамічних об’єктів з зосередженими (В.1)–(В.21) та розподіленими (В.24)–(В.26) параметрами.

А при розв’язанні задачі еквівалентування нелінійних систем ми в якості базової будемо використовувати гіпотезу Ван Тріса, висловлену ним в роботах [12, 100], згідно з якою неперервний нелінійний детермінований динамічний об’єкт з зосередженими параметрами може бути представлений у вигляді послідовного з’єднання двох структурних ланок, як показано на рис. 2, одна з яких – лінійна, яка характеризує

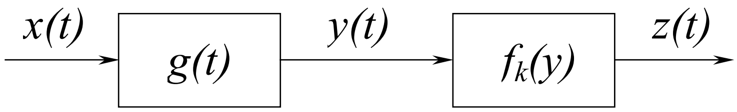

Рисунок 2 – Структурна схема неперервного нелінійного детермінованого динамічного об’єкта за Ван Трісом

інерційні властивості і описується ваговою функцією $g(t)$, а друга – безінерційна, яка характеризує нелінійні властивості, зв’язуючи свій вхід y з виходом Z, задається степеневим багаточленом

$$Z=f_k\left(y\right)=v_1y+v_2y^2+\cdots+v_ky^k, \tag{В.27}$$

а з вхідним $x(t)$ сигналом неперервного нелінійного детермінованого динамічного об’єкта та між собою вони обидві зв’язуються інтегральним рівнянням Вольтерра

$$z(t)=\sum_{i=1}^{k}v_i\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\overset{i}{\cdots}\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_i)\cdot g(\tau_1,\ldots,\tau_i)\,d\tau_1\ldots d\tau_i. \tag{В.28}$$

Ну, а для розв’язання задач еквівалентування дискретних стохастичних об’єктів в досліджені будуть використовуватись почерпнутий із робіт [4, 5, 80, 81] клас моделей авторегресії – ковзного середнього

АРКС(r, q) розмірності r по авторегресії та розмірності q по ковзному середньому, що мають вигляд

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \ldots + \phi_r z_{t-r} + \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2} - \ldots - \theta_q \xi_{t-q}, \quad \text{(В.29)}$$

або

$$\Phi(B) z_t = \Theta(B) \xi_t, \quad \text{(В.30)}$$

де оператор авторегресії $\Phi(B)$ та оператор ковзного середнього $\Theta(B)$ мають такий вигляд:

$$\Phi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \ldots - \varphi_r B^r, \quad \text{(В.31)}$$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q, \quad \text{(В.32)}$$

параметри φ_i, $i = 1,2,...,r$; θ_l, $l = 1,2,...,q$ – це коефіцієнти, які є дійсними числами, оператор зсуву на один крок назад B забезпечує виконання операції

$$z_{t-1} = B z_t, \quad \text{(В.33)}$$

змінна z_t, $t = 1,2,...$ це центрований числовим значенням μ стаціонарний часовий ряд, тобто, є стаціонарним дискретним процесом з нульовим середнім, а ξ_t – імпульс «білого шуму», який є нормально-розподіленим стаціонарним дискретним процесом, значення якого корелюються лише самі з собою і навіть сусідні значення якого не корелюються, тобто, справедливим є співвідношення

$$K_\xi(t-i) = M\{\xi_t \xi_{t-i}\} = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} \xi_t \xi_{t-i} = \begin{cases} \sigma_\xi^2 = const & при \ i = 0, \\ 0 & при \ i \neq 0, \end{cases} \quad \text{(В.34)}$$

в якому $K_\xi(t-i)$ – кореляційна функція «білого шуму», вираз (В.34) для якої можна переписати і так:

$$K_\xi(t-i) = \sigma_\xi^2 \delta(t-i), \quad \text{(В.35)}$$

де $\delta(t-i)$ – одностороння дельта-функція, для якої справедливими є умови:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & при \ t = 0, \\ 0 & при \ t \neq 0; \end{cases} \quad \text{(В.36)}$$

$$\int_0^\infty \delta(t) dt = 1. \quad \text{(В.37)}$$

Результати дослідження, що представлені в монографії, отримані авторами в рамках наукової школи «Розроблення математичних моделей процесів, що протікають в складних технічних та організаційних системах, інформаційно-вимірювальних систем та систем автоматичного і автоматизованого керування цими процесами», створеної заслуженим діячем науки і техніки України, академіком Національної академії педагогічних наук України, доктором технічних наук, професором Б. І. Мокіним, в процесі реалізації програм досліджень на кафедрі відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів Вінницького національного технічного університету і на кафедрі системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки цього ж університету, а також у відділенні вищої освіти Національної академії педагогічних наук України.

Значна частина результатів, викладених в даній монографії, вперше побачила світ у вигляді статей в наукових журналах, опублікованих її авторами, і вперше була узагальнена на сторінках кандидатської дисертації аспірантки І. О. Чернової за спеціальністю 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи, яку вона захистила у 2019 році та яку написала під науковим керівництвом професора Б. І. Мокіна, навчаючись в аспірантурі перші два роки – на етапі розроблення теоретичних основ – на кафедрі системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки Вінницького національного технічного університету та отримуючи допомогу в дослідженнях і при написанні наукових статей і від її завідувача, професора В. Б. Мокіна, а також навчаючись в аспірантурі на третьому році – на етапі практичного впровадження результатів – на кафедрі відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів цього ж університету та отримуючи допомогу в дослідженнях і при написанні наукових статей і від її завідувача, професора О. Б. Мокіна, що і обумовило наявність у монографії чотирьох співавторів.

РОЗДІЛ 1 ЕКВІВАЛЕНТУВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ЛІНІЙНИХ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ В КЛАСІ МІНІМАЛЬНО-ФАЗОВИХ

1.1 Огляд базових публікацій з синтезу та ідентифікації еквівалентних математичних моделей неперервних лінійних детермінованих динамічних об'єктів в класі мінімально-фазових

Як ми уже відзначили у «Вступі», в шістдесятих роках минулого століття відомий радянський вчений, академік Ішлінський на одній із науково-технічних конференцій висловив гіпотезу, що рух динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням з порядком, вищим третього, тобто, диференціальним рівнянням, яке він конкретизував у вигляді [23]

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_n x, \quad n > 3, \tag{1.1}$$

можна з прийнятною для практичних задач точністю описувати диференціальним рівнянням з порядком, не вищим третього –

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^{21}} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_3 x, \tag{1.2}$$

або не вищим другого [26, 27] –

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^{21}} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_2 x, \tag{1.3}$$

а в окремих випадках навіть і не вищим першого –

$$a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_1 x, \tag{1.4}$$

не навівши однак теоретичного підтвердження можливостей такого еквівалентування.

Тож ми вирішили віднайти умови, за яких ця гіпотеза є справедливою.

А методи синтезу та ідентифікації математичних моделей динамічних об'єктів, в яких не ставиться задача отримання їхнього мінімального порядку, найбільш повно представлені в роботі П. Ейкгофа [24] та узагальнені в роботі Я. З. Ципкіна [77], що побачила світ на 10 років пізніше.

І останнім, на що ми хочемо звернути увагу у цьому підрозділі, буде те, що при викладенні змісту наступних підрозділів цього розділу ми будемо використовувати матеріали, опубліковані нами в роботах [46, 47, 49, 50, 51, 57, 58, 59, 61, 92, 94, 95] та в рукописному тексті кандидатської дисертації аспірантки І. О. Чернової.

1.2 Умови еквівалентування неперервних лінійних детермінованих динамічних об'єктів в класі мінімально-фазових з порядком, не вищим третього

І почнемо викладення матеріалу зі звернення уваги на те, що диференціальним рівнянням (1.4) описується процес аперіодичного наростання струму в котушці індуктивності після її підключення до джерела напруги постійного струму, а диференціальним рівнянням (1.3) описується процес коливального наростання струму у послідовному з'єднанні котушки індуктивності та ємності після підключення цього послідовного з'єднання до джерела напруги постійного струму [3].

А далі нагадаємо про те, що, як відомо з теорії автоматичного керування [30, 39, 46, 69], в разі перетворення диференціальних рівнянь (1.4), (1.3) за Лапласом і визначення передаточних функцій $W_1(p), W_2(p)$ котушки індуктивності та послідовного з'єднання котушки індуктивності з ємністю як неперервних лінійних детермінованих динамічних об'єктів, що здійснюють перетворення напруги $x(t)$ постійного струму у постійний струм $y(t)$, у вигляді:

$$W_1(p) = \frac{K_1}{T_1 p + 1}, \tag{1.5}$$

$$W_2(p) = \frac{K_2}{T_2^2 p^2 + 2T_2 \xi p + 1}, \tag{1.6}$$

де

$$T_1 = a_1, \ \ T_2 = \sqrt{a_2}, \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \tag{1.7}$$

то легко бачити, що полюс p_1 передаточної функції (1.5) є дійсним від'ємним числом

$$p_1 = -\frac{1}{T_1} = -\frac{1}{a_1}, \tag{1.8}$$

а полюсами p_2, p_3 передаточної функції (1.6) є або пара комплексно-спряжених чисел:

$$p_2 = -\frac{\xi}{T_2} + \sqrt{\frac{\xi^2}{T_2^2} - \frac{1}{T_2^2}} = -\frac{a_1}{2a_2} + j\frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2a_2}, \tag{1.9}$$

$$p_3=-\frac{\xi}{T_2}-\sqrt{\frac{\xi^2}{T_2^2}-\frac{1}{T_2^2}}=-\frac{a_1}{2a_2}-j\frac{\sqrt{4a_2-a_1^2}}{2a_2},$$

з від'ємними дійсними частинами, якщо

$$0<\xi<1;\quad 4a_2>a_1^2, \tag{1.10}$$

або пара дійсних від'ємних чисел:

$$p_2^*=-\frac{\xi}{T_2}+\sqrt{\frac{\xi^2}{T_2^2}-\frac{1}{T_2^2}}=-\frac{a_1}{2a_2}-\frac{\sqrt{-4a_2+a_1^2}}{2a_2}, \tag{1.11}$$

якщо

$$\xi\geq 1;\quad 4a_2\leq a_1^2. \tag{1.12}$$

Варто звернути увагу на те, що для умов (1.12) передаточну функцію (1.6) інколи записують у вигляді

$$W_3(p)=\frac{K_3}{T_3T_4p^2+(T_3+T_4)p+1}, \tag{1.13}$$

з полюсами:

$$p_2^*=-\frac{T_3+T_4}{2T_3T_4}+\sqrt{\frac{(T_3+T_4)^2}{4T_3^2T_4^2}-\frac{1}{T_3T_4}}=-\frac{a_1}{2a_2}+\frac{\sqrt{-4a_2+a_1^2}}{2a_2}, \tag{1.14}$$

$$p_3^*=-\frac{T_3+T_4}{2T_3T_4}-\sqrt{\frac{(T_3+T_4)^2}{4T_3^2T_4^2}-\frac{1}{T_3T_4}}=-\frac{a_1}{2a_2}-\frac{\sqrt{-4a_2+a_1^2}}{2a_2}.$$

Знову ж таки, як відомо з теорії автоматичного керування [30, 39, 46, 69], при подачі на вхід об'єкта з передаточною функцією (1.5) одиничного сходинкового вхідного сигналу

$$x(t)=1(t)=\begin{cases}1 & при \quad t\geq 0,\\ 0 & при \quad t<0,\end{cases} \tag{1.15}$$

на його виході матимемо реакцію у вигляді

$$y(t)=K_1(1-e^{-\frac{t}{T_1}}), \tag{1.16}$$

при подачі цього ж сигналу (1.15) на вхід об’єкта з передаточною функцією (1.6) на його виході матимемо реакцію у вигляді

$$y(t)=K_2(1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi}{T_2}t}\sin(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T_2}t+arctg\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})), \qquad (1.17)$$

а при подачі цього ж сигналу (1.15) на вхід об’єкта з передаточною функцією (1.13) на його виході матимемо реакцію у вигляді

$$y(t)=K_3(1-\frac{1}{T_3-T_4}(T_3e^{-\frac{t}{T_3}}-T_4e^{-\frac{t}{T_4}})). \qquad (1.18)$$

Графіки функцій (1.16), (1.17), (1.18) представлені на рис. 3 (a, b, c) у тій же послідовності.

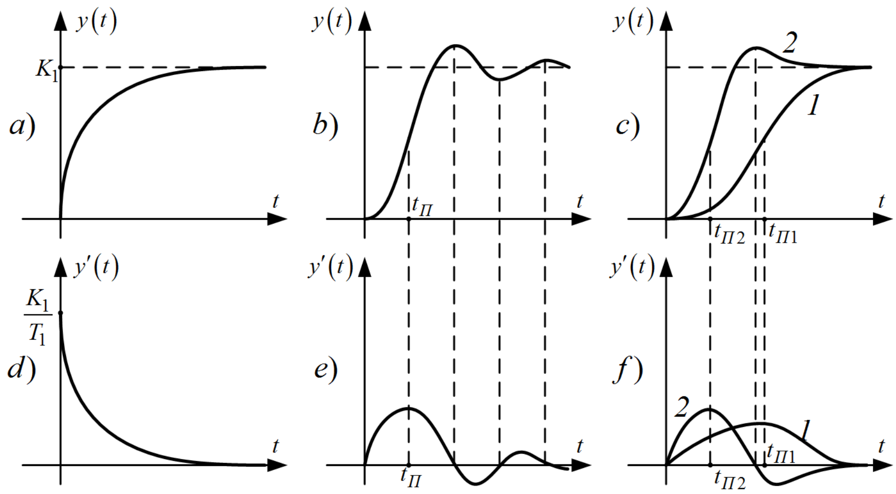

Рисунок 3 – Графіки можливих реакцій неперервних лінійних детермінованих динамічних об’єктів 1-го та 2-го порядків на вхідний сигнал у вигляді одиничної сходинки та графіки похідних від цих реакцій

Із цих графіків ми бачимо, що:

- в разі наявності у передаточної функції об’єкта лише одного полюса у вигляді дійсного від’ємного числа графік реакції $y(t)$ має аперіодичний характер з більш крутим переднім фронтом (див. рис. 3a) порівняно з аналогічним графіком в разі наявності у передаточної функції об’єкта двох полюсів у вигляді двох дійсних від’ємних чисел (див. рис. 3c, крива 1);

- в разі наявності у передаточної функції об’єкта двох полюсів у вигляді двох комплексно-спряжених чисел графік реакції $y(t)$ має ко-

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ананьєв М. В. Вибір початкових даних для ідентифікації об'єктів керування / М. В. Ананьєв // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2012. – № 6. – С. 7–10.

2. Андреев А. И. Анализ замкнутых систем автоматического управления судном по курсу/ А. И. Андреев, В. Е. Львов // 16-а міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2009» : тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 242–243.

3. Бессонов. Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. / Л. А. Бессонов. – М. : Высшая школа, 1978. – 528 с.

4. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1. / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М. : Мир, 1974. – 408 с.

5. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 2. / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М. : Мир, 1974. – 197 с.

6. Бабак В. П. Обробка сигналів / В. П. Бабак, В. С. Хандецький, Е. Шрюфер. – Київ : Либідь, 1999. – 496 с.

7. Булавацкий В. М. Некоторые задачи моделирования дробно-дифференциальной геофильтрационной динамики в рамках обобщенных математических моделей / В. М. Булавацкий // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 3. – С. 59–71.

8. Братусь Е. В. Разработка методов восстановления пропущенных значений и прогнозирования для взаимозависимых временных рядов / Е. В. Братусь, П. И. Бидюк, А. А. Болдак // Проблемы управления и информатики. – 2017. – № 5. – 13–21.

9. Березюк О. В. Удосконалення математичної моделі концентрацій забруднювальних речовин у фільтраті полігонів твердих побутових відходів / О. В. Березюк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2016. – № 4. – С. 28–31.

10. Білинський Й. Й. Математична модель вимірювального перетворювача компонентів скрапленого нафтового газу / Й. Й. Білинський, Б. П. Книш, Д. В. Шеванюк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2016. – № 3. – С. 7–12.

11. Волковский А. Ю. Дискретное управление процессами поддержания климатических условий в животноводческом комплексе / А. Ю. Волковский // Научный журнал КубГАУ. – 2011. – № 68(04). – С. 1–16.

12. Ван Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления / Г. Ван Трис. – М. : Мир, 1964. – 167 с.

13. Вашны Е. Динамика измерительных цепей / Е. Вашны. – М. : Энергия, 1969. – 288 с.

14. Горячев Г. В. Математичні моделі та методи комп’ютерного моделювання процесу екстрагування цукру в похилому дифузійному апараті / Г. В. Горячев, Б. І. Мокін. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. – 132 с.

15. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Х. Гурецкий. – М. : Машиностроение, 1974. – 328 с.

16. Глушков В. М. Энциклопедия кибернетики: в 2 т. Т. 1 / В. М. Глушков, Н. М. Амосов, И. А. Артеменко и др. – К. : Главная редакция УСЭ, 1975. – С. 86.

17. Губарев В. Ф. Исследование метода итеративной идентификации многомерных дискретных систем / В. Ф. Губарев, А. О. Жуков // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 5. – С. 23–38.

18. Данилина Н. И. Численные методы / Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П. Кваша, Г. Л. Смирнов, Г.И. Феклисов. – М. : Высшая школа, 1976. – 368 с.

19. Дубовой В. М. Моделювання систем контролю та керування / В. М. Дубовой. – Вінниця : ВНТУ, 2005. – 175 с.

20. Дубовой В. М. Моделювання та оптимізація систем : підручник / В. М. Дубовой, Р. Н. Квєтний, О. І. Михальов, А. В. Усов. – Вінниця : Едельвейс, 2017. – 804 с.

21. Добрушкін Г. О. Основні підходи до розпізнавання мовленнєвої інформації (Частина 1) / Г. О. Добрушкін, В. Я. Данилов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2009. – № 4. – С. 50–64.

22. Добрушкін Г. О. Основні підходи до розпізнавання мовленнєвої інформації (Частина 2) / Г. О. Добрушкін, В. Я. Данилов // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2010. – № 2. – С. 61–73.

23. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1965. – 424 с.

24. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления / П. Эйкхофф. – М. : Мир, 1975. – 683 с.

25. Жуков А. О. Рекурсивный поход к идентификации многомерных систем в условиях ограниченной неопределенности / А. О. Жуков

// 16-а міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2009» : тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 63–65.

26. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем / А. Ю. Ишлинский. – М. : Изд-во АН СССР, 1963. – 213 с.

27. Ишлинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами. Некоторые теоретические вопросы / А. Ю. Ишлинский. – М. : Наука, 1968. – 143 с.

28. Ивахненко А. Г. Метод группового учета аргументов – конкурент метода стохастической аппроксимации / А. Г. Ивахненко // Автоматика. – 1968. – № 3. – С. 57–74.

29. Иносов С. В. Статистическая идентификация системы централизованного теплоснабжения с автоматизированной отопительной котельной / С. В. Иносов // 16-а міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2009» : тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 153–155.

30. Куропаткин П. В. Теория автоматического управления : учебное пособие / П. В. Куропаткин. – М. : Высшая школа, 1973. – 528 с.

31. Квєтний Р. Н. Методи комп’ютерних обчислень : навчальний посібник / Р. Н. Квєтний. – Вінниця : ВДТУ, 2001. – 148 с.

32. Кунцевич В. М. Синтез управления линейными и нелинейными динамическими системами при ограниченных погрешностях измерения вектора состояний / В. М. Кунцевич // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 1. – С. 6–17.

33. Кику А. Г. Улучшение качества фильтрации переменных состояния дискретних динамических объектов /А. Г. Кику, Е. Ю. Рева, В. Ю. Шейко // 16-а міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2009» : тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 67–69.

34. Котенко Ю. В. Методика синтеза нейросетевой модели объекта управления минимальной структуры / Ю. В. Котенко, П. И. Кравец // XIV Міжнародна конференція з автоматичного управління (Автоматика-2007) : матеріали конференції, частина 1. – Севастополь, 2007. – С. 103.

35. Купин А. И. Исследование авторегрессионных моделей нейросетевой идентификации для процессов обогатительной технологии / А. И. Купин, В. М. Назаренко // XIV Міжнародна конференція з авто-

матичного управління (Автоматика-2007) : матеріали конференції, частина 2. – Севастополь, 2007. – С. 147–149.

36. Купін А. І. Узагальнений алгоритм нейромережевої ідентифікації ТП збагачення залізної руди / А. І. Купін // Вісник Криворізького технічного університету. – 2006. – Вип. 13. – С. 147–150.

37. Лежнюк П. Д. Застосування перетворень Фур'є та вейвлет-спектрограм для ідентифікації спотворених режимів роботи розподільних мереж 0,38/0,22 кВ / П. Д. Лежнюк, О. О. Мірошник // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2015. – № 1. – С. 71–79.

38. Ладієва Л. Р. Математична модель термомембранного розділення / Л. Р. Ладієва, Р. М. Дубік // 16-а міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2009» : тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 73–75.

39. Макаров И. М. Линейные автоматические системы / И. М. Макаров, Б. М. Менский. – М. : Машиностроение, 1977. – 464 с.

40. Макаров Е. Г. MathCAD : учебный курс / Е. Г. Макаров. – СПб. : Питер, 2009. – 384 с.

41. Мельников Ю. Л. Идентификация параметров при минимуме априорной информации / Ю. Л. Мельников // XIII міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2006» : тези доповідей. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. – С. 52–55 .

42. Мистриханов М. Ш. Идентификация множества эргодических линейных дискретных систем / М. Ш. Мистриханов, Е. Ю. Зыбин // 16-а міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2009» : тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 80–81.

43. Михалев А. И. Цифровая обработка данных: от Фурье к Wavelets / А. И. Михалев. – Днепропетровск : Системные технологии, 2007. – 200 с.

44. Мокін О. Б. До питання вибору оптимальної математичної моделі стаціонарного часового ряду / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, І. О. Чернова // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2018. – № 4. – С. 7–15.

45. Мокін Б. І. Фур'є-інтегральна ідентифікація нелінійних динамічних систем / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // 16-а міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2009» : тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 82–83.

46. Мокін Б. І. Математичні методи ідентифікації динамічних систем / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 260 с.

47. Мокін. О. Б. Визначення умов, за яких рух динамічних об'єктів з порядком математичних моделей, вищим трьох, можна описувати еквівалентними моделями з порядком, не вищим трьох / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2014. – № 4. – С. 7–15.

48. Мокін О. Б. Метод ідентифікації моделі авторегресії – ковзного середнього АРКС(p,q) з довільними значеннями порядків p,q, який узагальнює методику Юла–Уокера [Електронний ресурс] / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2014. – № 2. – С. 1–6. Режим доступу:http://praci.vntu.edu.ua/article/view/3626/5339.

49. Мокін О. Б. Метод ідентифікації процесів в багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу [Електронний ресурс] / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, І. О. Чернова // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2014. – № 3. – С. 1–10. – Режим доступу до журн.: http://praci.vntu.edu.ua/article/view/3751.

50. Мокін О. Б. Ідентифікація еквівалентної за критичною частотою математичної моделі мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін, І. О. Чернова // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2014. – № 5. – С. 9–14.

51. Мокин А. Б. Определение условий и разработка методов описания процессов в сложных динамических объектах эквивалентными моделями не выше третьего порядка / А. Б. Мокин, В. Б. Мокин, Б. И. Мокин, И. А. Чернова // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 2. – С. 37–49.

52. Мокін О.Б. Моделювання та оптимізація руху багатомасових електричних транспортних засобів поверхнями зі складним рельєфом / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 192 с.

53. Мокин Б. И. Восстановление входных сигналов измерительных систем с нелинейными характеристиками преобразования / Б. И. Мокин // 3-й Всесоюзный симпозиум «Методы теории иденти-

фикации в задачах измерительной техники и метрологии» : тез. докладов. – Новосибирск : Сиб. НИИМ, 1982. – С. 207–209.

54. Мокин Б. И. Математические модели контроля и управления в энергетике / Б. И. Мокин, Ю. Корбич. – Киев : Тэхника, 1990. – 192 с.

55. Мокін О. Б. Умови еквівалентування нелінійних динамічних систем зі степеневими нелінійностями в частотній області / О. Б. Мокін., Б. І. Мокін, Я. В. Хом'юк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2016. – № 5. – С. 40–44.

56. Мокін Б. І. Фур'є-інтегральний метод в задачах ідентифікації та відновлення вхідних сигналів нелінійних динамічних систем / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2000. – № 3. – С. 107–112.

57. Мокін Б. І. Метод ідентифікації процесів у багатовимірних динамічних об'єктах, що допускають лінеаризацію, математичними моделями не вище третього порядку, еквівалентними за частотою зрізу [Електронний ресурс] / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, І. А. Чернова // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2014. – № 3. – С. 1–10. – Режим доступу до журн.: http://praci.vntu.edu.ua/article/view/3751.

58. Мокін Б. І. Ідентифікація еквівалентної за критичною частотою математичної моделі мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін І. О. Чернова // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2014. – № 5. – С. 9–14.

59. Мокин Б. И. Построение математической модели минимального порядка для линейной динамической системы с обратной связью / Б. И. Мокин, И. А. Чернова // Проблемы управления и информации. – 2017. – № 2. – С. 59–66.

60. Мокін В. Б. Еквівалентування математичних моделей мінімально-фазових систем високого порядку в класі не мінімально-фазових / В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, Б. І. Мокін, С. О. Довгополюк, І. О. Чернова // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2017. – № 6. – С. 111–121.

61. Мокін Б. І. Еквівалентування замкнутої лінійної динамічної системи за наявності похідної у правій частині її математичної моделі / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова, С. О. Довгополюк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2017. – № 3. – С. 68–76.

62. Мокін Б. І. Узагальнення Фур'є-інтегрального методу ідентифікації на еквівалентні математичні моделі нелінійних динамічних систем з другим порядком їх інерційної складової / Б. І. Мокін, І. О. Чернова // Міжнародна наукова конференція КУС-2018 : тези доповідей. – Вінниця, 2018.

63. Мокін Б. І. Еквівалентування моделей мінімально-фазових лінійних систем автоматичного керування з ПІД-регуляторами в класі немінімально-фазових / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, І. О. Чернова // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2018. – № 3. – С. 81–88.

64. Мокін Б. І. Синтез еквівалентної математичної моделі для системного аналізу складної системи / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін, С. О. Довгополюк // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2020. – № 4. – С. 42–49.

65. Олійник А. П. Комплексна математична модель забруднення ґрунтів внаслідок реалізації технологічних процесів в нафтогазовій промисловості / А. П. Олійник, А. А. Мороз // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2016. – № 1. – С. 27–32.

66. Петрик М. Р. Высокоскоростные методы идентификации параметров моделей фильтрации-консолидации сжимаемых сред влагонасыщенных микропористых частиц / М. Р. Петрик // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 1. – С. 18–31.

67. Прилипко О. І. Моделі та методи організаційного управління поведінкою групи людей / О. І. Прилипко, А. О. Овезгельдиєв // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2016. – № 6. – С. 71–76.

68. Приходько С. Б. Идентификация нелинейных стохастических дифференциальных систем на основе математических моделей нормализованных случайных сигналов / С. Б. Приходько // 16-а міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2009» : тези доповідей. – Чернівці, 2009. – С. 90–91.

69. Райниш К. Кибернетические основы и описание непрерывных систем / К. Райниш – М. : Энергия, 1978. – 456 с.

70. Раскин Л. Г. Оценивание параметров уравнения регрессии для малой выборки нечетких данных / Л. Г. Раскин, О. В. Серая // XIII Міжнародна конференція з автоматичного управління «Автоматика-2006» : матеріали конференції. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2007. – С. 8–12.

71. Скляревич А. Н. Приведение линейных операторов в задачах автоматического управления / А. Н. Скляревич. – Рига : Зинатне, 1965. – 155 с.

72. Солодов А. В. Линейные автоматические системы с переменными параметрами / А. В. Солодов, Ф. С. Петров. – Москва : Наука, 1971. – 620 с.

73. Стоян В. А. О математических моделях динамики трехмерных упругих тел. Часть 1. Тела с непрерывно наблюдаемым начально-краевым состоянием / В. А. Стоян, С. Т. Даниш // Проблемы управления и информатики. – 2017. – № 2. – С. 37–44.

74. Стоян В. А. О математических моделях динамики трехмерных упругих тел. Часть 2. Тела с дискретно наблюдаемым начально-краевым состоянием / В. А. Стоян, С. Т. Даниш // Проблемы управления и информатики. – 2017. – № 5. – С. 22–29.

75. Сю Д. Современная теория автоматического управления и ее применение / Д. Сю, А. Мейер. – М. : Машиностроение, 1972. – 544 с.

76. Усов А. В. Моделирование систем с распределенными параметрами : монография / А. В. Усов, А. Н. Дубров, Д. В. Дмитришин. – Одесса : Астропринт, 2002. – 664 с.

77. Цыпкин Я. З. Основы информационной теории идентификации / Я. З. Цыпкин. – Москва : Наука, 1984. – 320 с.

78. Шилин А. Н. Цифровое моделирование электротехнических и электронных устройств : монография / А. Н. Шилин, О. А. Крутякова – Москва : Академия Естествознания, 2014. – 131 с.

79. Шейкус А. Р. Параметрична ідентифікація математичної моделі процесу ректифікації / А. Р. Шейкус // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2017. – № 3. – С. 32–40.

80. Box G. Time Series Analysis: Forecasting and Control / G. Box, G. Jenkins. – San Francisco : Holden-Day, 1976. – 575 p.

81. Box G. Time Series Analysis: Forecasting and Control / G. Box, G. Jenkins, G. Reinsel. – [4-th edition]. – Wiley, 2008. – 784 p.

82. Chua, L. O. Frequency domain analysis of nonlinear systems: general theory / L. O. Chua and C-Y Ng // Electronic Circuits and Systems. – 1979. – Vol. 3, no. 2. – P. 165–185.

83. Chua L. O. Frequency domain analysis of nonlinear systems: formulation of transfer functions / L. O. Chua and C-Y Ng // Electronic Circuits and Systems. – 1979. – Vol. 3, no. 4. – P. 257–269.

84. Dorf R. Modern Control Systems / R. Dorf, R. Bishop. – [12-th edition]. – Prentice Hall, 2010. 1104 p.

85. Halas M. An algebraic framework generalizing the concept of transfer functions to nonlinear systems / M. Halas // Automatica. – 2008. – Vol. 44, no. 2. – P. 1181–1190.

86. Halas M. An overview of transfer function formalism for nonlinear systems / M. Halas, M. Huba and U. Kotta // Journal of Cybernetics and Informatics. – 2009. – Vol. 8, – no. 3. – P. 28–35.

87. Halas M. A transfer function approach to the realisation problem of nonlinear systems / M. Halas and U. Kotta // International Journal of Control. – 2012. – Vol. 85, no.1. – P. 320–331.

88. Ivakhnenko A. G. Group Method of Data Handling for the Solution of the Various Interpolation Problems of Cybernetics / A. G. Ivakhnenko, Ju. V. Koppa // Second IFAC Symposium. «Identification and Process Parameter Estimation». – Prague, 1970. – Paper 2.1.

89. Jozef Korbicz. Metody matematyczne w zagadnieniach kontroli i sterowania w energetyce / Jozef Korbicz, Borys I. Mokin. – Zielona Gora : Wydawnictwo wyzszej szkoly inzynierskiej. – Kijow : Technika, 1990. – 158 p.

90. Kerschen G. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics / G. Kerschen, K. Worden, A. F. Vakakis and J. C. Golinval // Mechanical System and Signal Processing. – 2006. – Vol. 20, no. 2. P. 505–592.

91. Mokin O. B. Renewal of input signals of nonlinear Measuring converters by Fourier-integral method / O. B. Mokin, B. I. Mokin // Metrology in the 3rd Millennium : Proceedings of XVII IMEKO World Congress. – Croatia, Dubrovnik, 2003. – P. 468–471.

92. Mokin Alexander B. Determining the Conditions and Designing the Methods for Description of Processes in Complex Dynamic Objects by Equivalent Models not Higher than the Third-Order / Alexander B. Mokin, Vitaliy B. Mokin, Boris I. Mokin, Irina A. Chernova // Journal of Automation and Information Sciences. – 2016. – Vol. 48, no. 3. – P. 83–97.

93. Mokin V. Simulation of Dynamics of Processes of Water Biological Purification with Account of their Serial-Concurrent Interrelation in the Aquatic Systems / V. Mokin // Hydrobiological journal. – 2012. – № 4. – P. 100–107.

94. Mokin Borys I. Construction of a mathematical model of the minimum order for a linear dynamical system with feedback / Borys I. Mokin, Iryna A. Chernova // Journal of Automation and Information Sciences (USA). – 2017. – Vol. 49, – is. 3. – P. 69–77.

95. Mokin B. I. EQUIVALENT TO THE CRITICAL FREQUENCY MATHEMATICAL MODEL OF MINIMUM ORDER FOR A COMPLEX DYNAMIC OBJECT / B. I. Mokin, I. O. Chernova // XXII міжнародна конференція з автоматичного управління АВТОМАТИКА 2015 : матеріали конференції. – Одеса : ТЕС. – 2015. – С. 12–13.

96. Nassirharand A. Design of nonlinear lead and/or lag compensators / A. Nassirharand and Firdeh S. R. Mousavi // International Journal of Control, Automation, and Systems. – 2008. – Vol. 6, no. 3. – P. 394–400.

97. Nassirharand A. Design of nonlinear controllers using describing functions with application to servomechanism / A. Nassirharand and Firdeh, S.R. Mousavi // Asian Journal of Control. – 2009. – Vol. 11, no. 3. – P. 446–450.

98. Nassirharand A. Describing function-based identification of nonlinear transfer functions for nonlinear systems from experimental/simulation data / A. Nassirharand and S. H. The // Int. J. Modelling, Identification and Control. – 2016. – Vol. 25, no. 2. – P. 93–101.

99. Seshadev Padhi. Theory of Third-Order Differential Equations / Seshadev Padhi, Smita Pati. – Springer, 2014. – 515 p.

100. Van Trees H. L. Synthesis of Optimum Non-Linear Control Systems / H. L. Van Trees // MIT Press, Cambridge (Mass.). – 1962; русский перевод: Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления / Г. Ван Трис. – М. : Мир, 1964. –167 с.

101. Warisa Nakrim. Third-order ordinary differential equations equivalent to linear second-order ordinary differential equations via tangent transformations / Warisa Nakpim // Journal of Symbolic Computation. Elsevier, 2016. – 15 p. – DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2016. 01.006.

Наукове видання

Мокін Борис Іванович
Мокін Віталій Борисович
Мокін Олександр Борисович
Чернова Ірина Олександрівна

ЕКВІВАЛЕНТУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Монографія

Редактор С. Малішевська
Оригінал-макет підготовлено В. Мокіним

Підписано до друку 04.08.2021
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. др. арк. 8,32.
Наклад 30 пр. Зам № В2021-06

Вінницький національний технічний університет,
ІРВЦ ВНТУ,
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-85-32.
press.vntu.edu.ua; *email*: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано ФОП Барановська Т. П.
21021, м. Вінниця, вул. Порика, 7.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4377 від 31.07.2012 р.