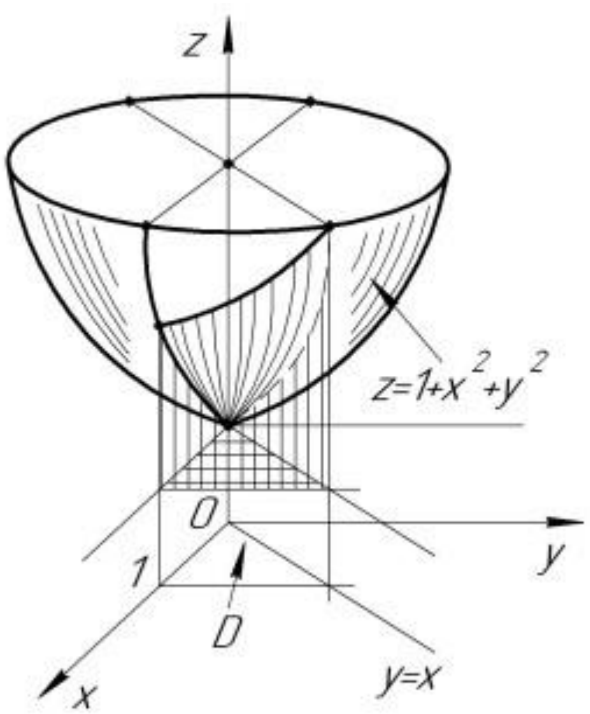
В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк, А. А. Коломієць

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк, А. А. Коломієць

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2022

УДК 517
К-77

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 23.12.2021 р.)

Рецензенти:

Т. Л. Годованюк, доктор педагогічних наук, професор

О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор

В. Х. Касіяненко, доктор фізико-математичних наук, професор

Краєвський, В. О.

К-77 Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та елементи теорії поля: навчальний посібник / В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк, А. А. Коломієць. – Вінниця : ВНТУ, 2022. – 142 с.

ISBN 978-966-641-907-4

У навчальному посібнику містяться основні формули, теореми, означення теорії кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів, а також приведено елементи теорії поля. З цією метою розроблено значну кількість покрокових алгоритмів, які стануть у пригоді студентам під час розв'язання практичних завдань. В підручнику підібрано достатню кількість завдань для розв'язання на практичних заняттях по кожній темі та для самостійної роботи студентів. Розглянуто розв'язання основних прикладів з кожної теми, надається 80 варіантів завдань для типових розрахунків та контрольних робіт.

Посібник розрахований для студентів технічних спеціальностей.

УДК 517

ISBN 978-966-641-907-4

ЗМІСТ

1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1 Подвійні інтеграли та їх обчислення

На площині Oxy розглянемо деяку замкнену область D, що обмежена кривою L. Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в області D. Довільними лініями розіб'ємо D на n елементарних ділянок S_i, площі яких позначимо ΔS_i $(i = \overline{1, n})$ (рис. 1). Діаметром d_i ділянки S_i називається довжина найбільшої з хорд, що з'єднує граничні точки S_i. В кожній ділянці S_i (всередині або на межі – неважливо) оберемо довільну точку $P_i(x_i y_i)$ і складемо суму добутків виду

$$I_n = f(x_1, y_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\Delta S_2 + ... + f(x_n, y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \,. \quad (1)$$

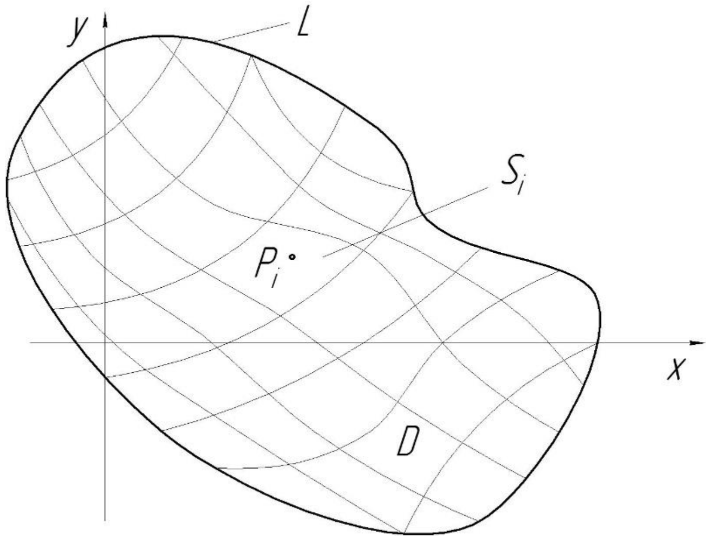


Рисунок 1

Ця сума називається n-ою інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ в області D. Внаслідок довільного розбиття області D на елементарні ділянки S_i та випадкового вибору в них точок P_i можна скласти нескінченну кількість вказаних сум.

Розглянемо довільну послідовність n-них інтегральних сум, що складені для функції $z = f(x, y)$ по області D:

$$I_{n_1}, I_n, ..., I_{n_k}, ... \quad (2)$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій області D, то існує границя послідовності n-их інтегральних сум (2) при прямуванні максимального діаметра $d_{i\max}$ до 0 і вона єдина, тобто не залежить ні від способу розбиття області D на ділянки S_i, ні від вибору точок P_i.

Ця границя називається **подвійним інтегралом** функції $z = f(x, y)$ по області D. Позначається подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dS$, при цьому $f(x,y)$ називається підінтегральною функцією, а D – областю інтегрування. Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{d_{i\max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i \qquad (3)$$

Основні властивості подвійного інтегралу та його геометричний та фізичний зміст

1. $\iint\limits_D dS = S_D$, де S_D − площа області інтегрування D.

2. Якщо підінтегральна функція $z = f(x,y) = \mu(x,y)$ − поверхнева густина матеріальної пластини, яка займає область D, то маса цієї пластини визначається за формулою

$$m = \iint\limits_D \mu(x,y)dS\,. \qquad (4)$$

Це фізичний зміст подвійного інтегралу.

3. Якщо $f(x,y)\ge 0$ в області D, то подвійний інтеграл (3) чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, яке знаходиться над площиною Oxy, нижньою основою якого є область D, верхньою − частина поверхні $z = f(x,y)$, яка проектується в D, а бічна поверхня − циліндрична, прямолінійні твірні якої паралельні осі Oz і проходять через межу L області D (рис. 2). Якщо $f(x,y)\le 0$ в області D, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму циліндричного тіла, яке знаходиться під площиною Oxy (рис. 3), що взятий із знаком «–» $(-V)$. Якщо ж функція $f(x,y)$ в області D змінює знак, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює різниці об'ємів циліндричних тіл, які знаходяться над площиною Oxy та під нею, тобто

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = V_1 - V \qquad (5)$$

(рис. 4). Ця властивість визначає геометричний зміст подвійного інтеграла.

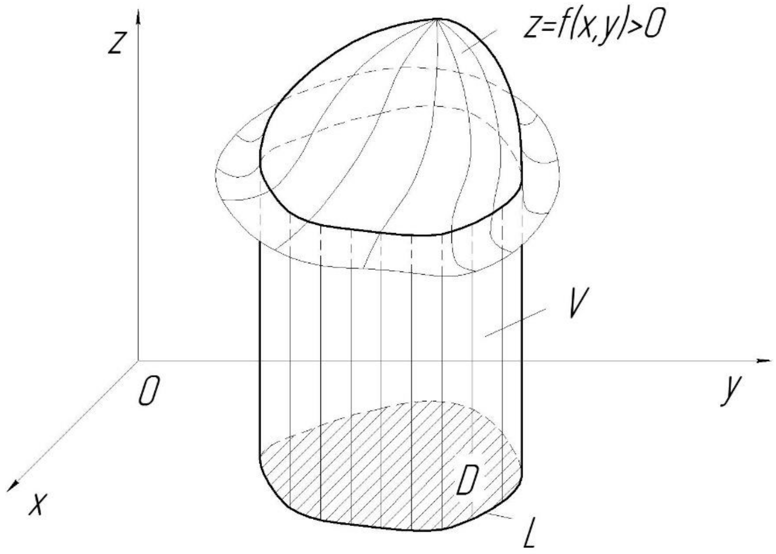


Рисунок 2

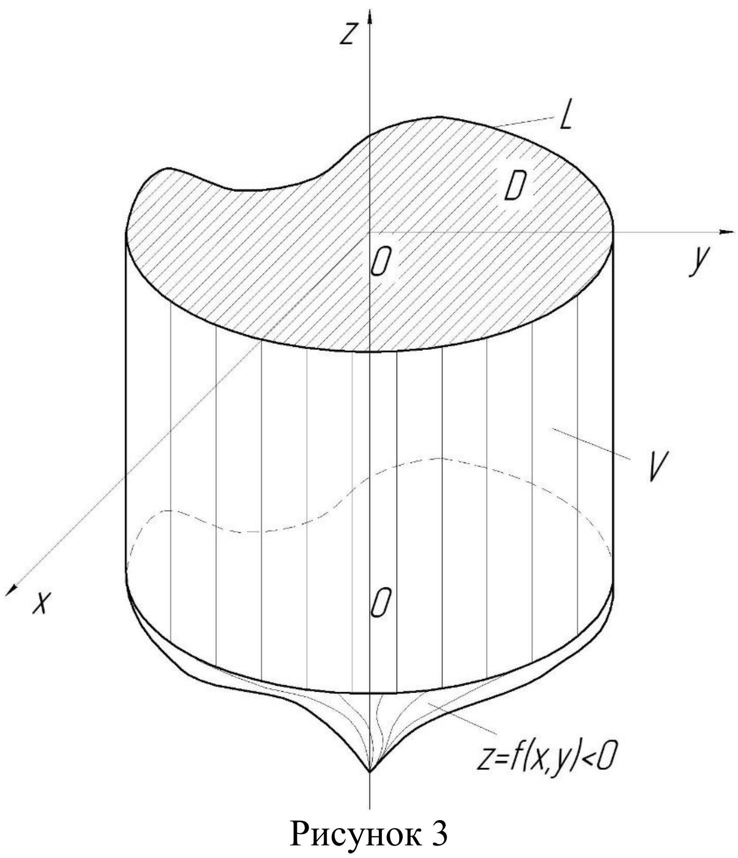


Рисунок 3

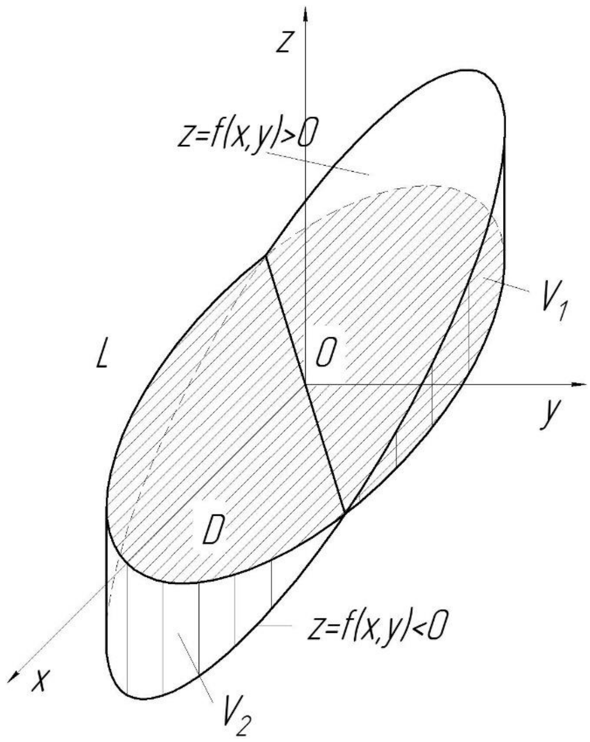


Рисунок 4

4. Якщо функція $z = f_i(x,y)$ $(i = \overline{1,k})$ неперервні в області D, то

$$\iint_D \left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x,y) \right) dS = \quad \iint f(x,y)dS\,. \tag{6}$$

5. Сталий множник C підінтегральної функції можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D Cf(x,y)dS = C\iint_D f(x,y)dS\,. \tag{7}$$

Поєднавши формули (6) та (7) отримаємо властивість лінійності подвійного інтеграла

$$\iint_D \left(\sum_{i=1}^{k} C_i f_i(x,y) \right) dS = \quad C_i \iint f_i(x,y)dS\,, \tag{8}$$

де $C_i = const$, $i = \overline{1,k}$.

6. Властивість адитивності. Якщо область D розбити на скінченну кількість областей $D_1, D\ ,..., D_k$, які не мають спільних внутрішніх точок, то інтеграл по області D дорівнює сумі інтегралів по областям D_k:

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_D f(x,y)dS + ... + \iint_{D_k} f(x,y)dS\,. \tag{9}$$

7. Теорема про середнє. Для неперервної функції $z = f(x,y)$ в області D, площа якої S_D, завжди знайдеться хоча б одна точка $P(x\ , y_c) \in D$, така що

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = f(x_c, y_c)S_D\,. \tag{10}$$

Число $f(x\ ,y_c)$ називається середнім значенням функції $z = f(x,y)$ в області D.

8. Якщо в області D для неперервних функцій $f(x,y)$, $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ виконуються нерівності $f_1(x,y) \le f\ (x,y) \le f\ (x,y)$, тоді

$$\iint\limits_D f_1(x,y)dS \le \iint\limits_D f\ (x,y)dS \le \iint\limits_D f\ (x,y)dS\,. \tag{11}$$

9. Теорема про оцінку подвійного інтеграла. Якщо функція $z = f(x,y) \neq const$ і неперервна в області D, M і m – максимальне та мінімальне значення функції в області D відповідно, то

$$mS_D < \iint\limits_D f(x,y)dS < MS_D\,. \tag{12}$$

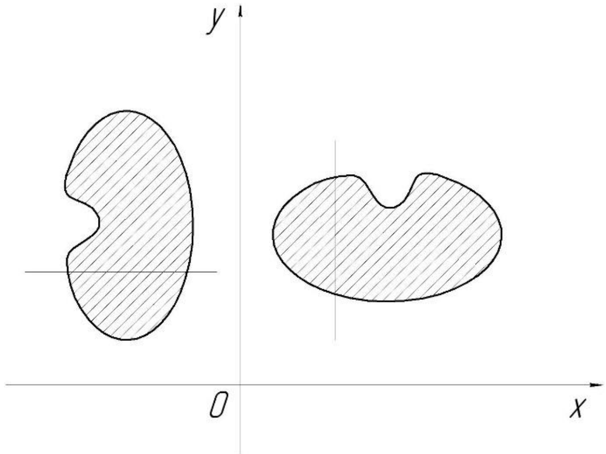
Обчислення подвійного інтеграла

Так як границя n-ї інтегральної суми I_n не залежить від способу розбиття області D на елементарні області S_i, то в декартовій системі координат область D зручно розбивати на елементарні області S_i прямими, що паралельні осям координат. Отримані при такому розбитті елементарні області S_i, які належать області D, є прямокутниками. Отже, $dS = dxdy$, тоді

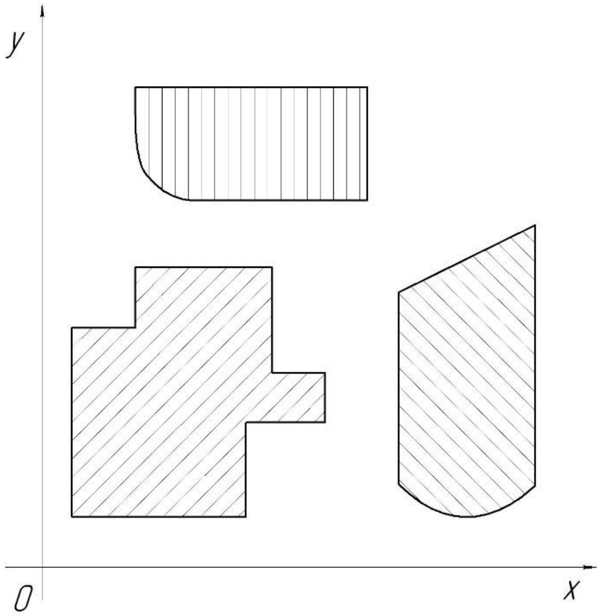
$$\iint f(x,y)dS = \iint\limits_D f(x,y)dxdy\,. \tag{13}$$

Область інтегрування D називається правильною відносно осі Ox (осі Oy), якщо будь-яка пряма, що паралельна осі Ox (осі Oy), перетинає границю L області D не більше двох раз (рис. 5, а). Область D вважається також правильною, якщо частина її границі або вся границя L складається з відрізків прямих, що паралельні осям координат (рис. 5, б).

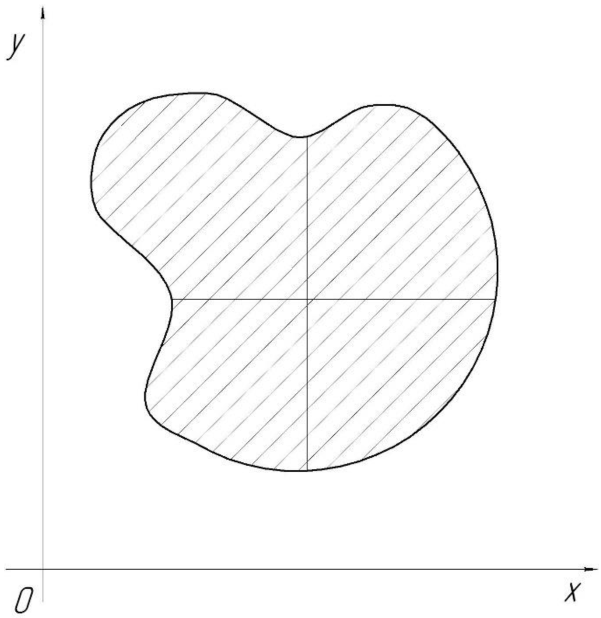
Розглянемо методи обчислення подвійного інтеграла по областям, які є правильними в напрямку координатних осей. Так як практично будь-яку область можна представити у вигляді об’єднання правильних областей (рис. 5, в), тоді згідно властивості 6 подвійних інтегралів, ці методи придатні для обчислення подвійних інтегралів по будь-яким областям.



а)



б)



в)

Рисунок 5

Розглянемо правильну відносно Oy область D, яка проектується на вісь Ox у відрізок $[a;b]$. AB – верхня межа області, яка описується рівнянням $y=\varphi_2(x)$, AC – нижня межа $y=\varphi_1(x)$ (рис. 6). Тоді

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(\ )}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \tag{14}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Аршава О. О. Поверхневі інтеграли : навчально-методичний посібник. / О. О. Аршава, А. І. Кононенко, Є. В. Поклонський, О. І. Котульська. – Х. : ХДТУБА, 2011. – 40 с.
2. Вища математика з комп`ютерною підтримкою. Функції багатьох змінних, кратні інтеграли : навчальний посібник / Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. О. Краєвський, М. Б. Ковальчук, Г. О. Черноволик. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 135 с.
3. Вища математика: невизначений інтеграл. Практикум для дистанційного навчання : електронний навчальний практикум комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / А. А. Коломієць, Я. В. Крупський, О. І. Тютюнник, К. І. Коцюбівська. – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 71 с.
4. Денисюк В. П. Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посіб.: У 4ч. Ч. 3./ В. П. Денисюк, В. К. Репета, К. А. Гаєва, Н. О. Клешня. − 3-тє вид., стереотип. − К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту«НАУ-друк», 2009. − 444 с.
5. Дідковський Р. М. Практикум з вищої математики: Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії векторного поля / Р. М. Дідковський, Н. В. Олексієнко, О. П. Грижук, Н. Ю. Вовненко // – Черкаси:ЧДТУ, 2008. – 112 с.
6. Дубовик В. П. Вища математика. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик // − К.: А.С.К., 2001. − 648 с.
7. Елементи теорії поля. Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики (для студентів електротехнічних спеціальностей). Уклад. В. В. Бізюк – Харків: ХНАМГ, 2006. – 75 с.
8. Збірник задач з математичного аналізу. Ч. 2. / За ред. проф. Ю. К. Рудавського. – Львів : Видавництво національного університету «Львівська політехніка», 2003. – 232 с.
9. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів за напрямком 6.050504 «Зварювання». Уклад. В. В. Довгай, А. Ф. Мельник. – К. : КПІ, 2013. – 79 с.
10. Пак В. В. Вища математика: Підручник. / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко // Д.: Видавництво Сталкер, 2003. − 496 с.
11. Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І. Елементи теорії поля. – Вінниця, ВНТУ, 2006. – 100 с.
12. Тевяшев А. Д. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних / [А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин, Г. М. Кривошеєва та ін.]. − Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с.
13. Швачич Г. Г. Вища математика. Розділ «Подвійні та криволінійні інтеграли» : навч. посіб. / Г. Г. Швачич, В. С. Коноваленков, Т. М. Заборова. – Дніпропетровськ : НМетАУ, 2011. – 36 с.

Навчальне видання

Володимир Олександрович Краєвський,
Юрій Володимирович Добранюк,
Альона Анатоліївна Коломієць

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Навчальний посібник

Рукопис оформив Ю. Добранюк

Редактор О. Ткачук

Оригінал-макет підготовано у РВВ ВНТУ.

Підписано до друку 18.02.2022 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 8,32.
Наклад 40 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2022-048.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
Email: irvc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01. 07.2009 р.