ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ І КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

Проблеми математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика

колективна монографія

До 90-ї річниці
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

Кафедра математики та інформатики

Проблеми математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика

колективна монографія

До 90-ї річниці
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

Вінниця
ВНТУ
2023

УДК [001+37.016]:[51+004](06)
П-78

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського
(протокол № 7 від 20 грудня 2023 р.)

***Автори*:**
С. М. Бак, Г. М. Ковтонюк, М. М. Ковтонюк, О. П. Косовець, Я. В. Крупський, І. М. Леонова, О. М. Соя

Рецензенти:

Коломієць Алла Миколаївна – доктор педагогічних наук, професор, проректор з наукової роботи Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;

Михалевич Володимир Маркусович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету.

П-78 **Проблеми** математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика : колективна монографія [Електронний ресурс] / за заг. ред. М. М. Ковтонюк та С. М. Бака. Вінниця: ВНТУ, 2023. (PDF, 243 с.).

ISBN 978-617-8163-03-7 (PDF)

Монографію підготовлено до 90-річчя створення кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Представлено результати наукових досліджень членів кафедри математики та інформатики, які виконувалися в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Проблеми математики та інформатики у педагогічному ВНЗ: теорія і практика» (РК №0119U103325). Видання адресовано науковим, науково-педагогічним і педагогічним працівникам, аспірантам, докторантам, широкому колу осіб, хто цікавиться науковими та освітніми проблемами математики та інформатики.

УДК [001+37.016]:[51+004](06)

ISBN 978-617-8163-03-7 (PDF)

Передмова

Монографія присвячена моделюванню науково-освітнього середовища з математики та інформатики в педагогічних закладах вищої освіти. Тут представлено результати наукових досліджень членів кафедри математики та інформатики, які виконувалися в рамках кафедральної науково-дослідної роботи «Проблеми математики та інформатики у педагогічному ВНЗ: теорія і практика» (РК №0119U103325).

Одержано низку теоретичних математичних результатів. Зокрема, встановлено умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці та умови існування стоячих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона. Для цього використано варіаційний метод і метод періодичних апроксимацій. Також побудовано формальні розв’язки зчисленної системи диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами і встановлено їх асимптотичний характер. Результати цих досліджень інтегровано в освітній процес.

Також у монографії представлено ряд теоретичних і практичних результатів науково-методичного характеру. Зокрема, досліджено концептуальні засади форсайт моделювання синергетичного освітнього простору бакалавра математики. Розкрито можливості змісту навчального матеріалу з математичних та інформатичних дисциплін та методів їх навчання у формуванні в студентів математичних, інформатичних та професійних компетентностей. Досліджено технології використання систем комп’ютерної математики у процесі вивчення математичних та інформатичних дисциплін. Проаналізовано основні тенденції і стратегії використання цифрових технологій в ЗВО та їх застосування у підготовці майбутніх учителів математики та інформатики у ВДПУ. Розроблено методичну систему навчання математичних та інформатичних дисциплін в умовах змішаної системи навчання у педагогічних ЗВО.

РОЗДІЛ 1
ІСНУВАННЯ І ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗЧИСЛЕННИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Існування біжучих і стоячих хвиль в системах осциляторів

Бак С. М., Ковтонюк Г. М.

1.1.1. Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. У 1953 році один із найвидатніших фізиків XX століття Енріко Фермі попросив двох своїх колег (по Лос-Аламоській лабораторії) Станіслава Улама і Джона Пасту розв'язати одну з нелінійних задач на ЕОМ. Вони повинні були дослідити питання про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах на прикладі коливання 64 важок, пов'язаних одна з одною пружинками (рис. 1.1), які при відхиленні від положення рівноваги на Δl отримували силу повернення, рівну $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$. Тут k і α – сталі коефіцієнти. При цьому нелінійний доданок передбачався малим у порівнянні з основною силою $k\Delta l$. Створюючи початкове коливання, дослідники хотіли подивитися, як ця початкова мода буде розподілятися по всіх інших модах.

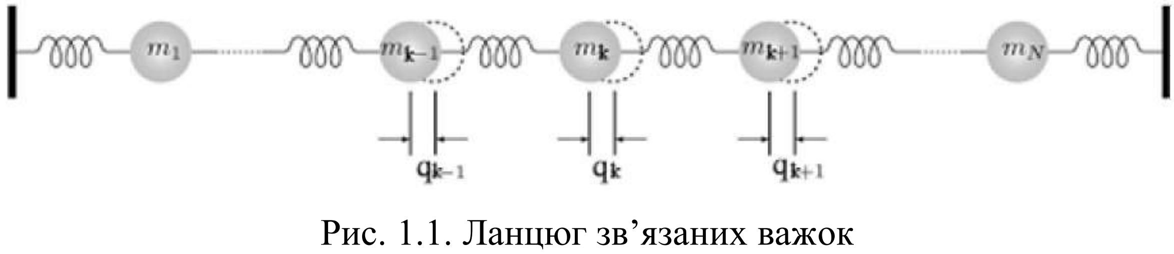


Рис. 1.1. Ланцюг зв'язаних важок

Передбачалося, що енергія в кінці кінців рівномірно розподілиться між модами, тобто по всій довжині хвилі, тим самим відбудеться термалізація енергії. У 1954 році після проведення розрахунків цієї задачі на ЕОМ очікуваного результату вони не отримали, але виявили, що перекачування енергії в дві або три моди на початковому етапі розрахунку дійсно відбувається, але потім спостерігається повернення до початкового стану. Про цей парадокс, пов'язаний з поверненням початкового коливання, стало відомо кільком математикам і фізикам. Зокрема, про цю задачу дізналися американські фізики Мартін Крускал і Норман Забускі ([34]), які вирішили продовжити обчислювальні експерименти з моделлю, запропонованою Фермі. Виявилося, що в ланцюжку виникають особливі хвилі – солітони, які не дають енергії рівномірно розподілятися по всій її довжині. Це було виявлено тільки через 11 років.

Результати досліджень Енріко Фермі, Джона Пасти і Станіслава Улама [14] дали поштовх для багатьох наступних досліджень систем типу Фермі-Пасти-Улама. До подібних систем також належить повністю інтегровний ланцюг Тоди (див. [31]). Разом з тим ланцюг Тоди є єдиною відомою цілком інтегровною системою типу ФПУ. Для всіх інших подібних систем існуючі результати переважно стосуються точних або наближених часткових їх розв'язків.

Зауважимо, що один з перших строгих результатів для більш загальних (нескінченниих) систем типу ФПУ був одержаний Жеро Фрізеке і Джонатаном Ваттісом у 1994 році ([15]). Вчені встановили умови існування відокремлених біжучих хвиль з певними припущеннями, які стосуються потенціалів взаємодії між частинками. Зокрема, встановлені умови задовольняють потенціали типу Леннарда–Джонса, Тоди та ін. Для доведення існування відокремлених біжучих хвиль вони використали метод умовної мінімізації і принцип концентрованої компактності ([19]).

Існування надзвукових відокремлених біжучих хвиль з іншими припущеннями було встановлено Дідьє Сметсом і Майклом Віллемом в праці [29] у 1997 році. Для доведення основного результату вони застосували одну із версій теореми про гірський перевал, в якій відсутня так звана умова Пале–Смейла.

Переглянувши останній підхід, Олександр Панков і Клаус Пфлюгер у 2000 році довели існування періодичних біжучих хвиль за допомогою стандартної теореми про гірський перевал (з умовою Пале-Смейла), а існування відокремлених біжучих хвиль – за допомогою методу періодичних апроксимацій (див. [25]).

У 2005 році вийшла монографія Олександра Панкова [23], в якій можна знайти найбільш повний на той час огляд результатів про існування розв'язків і, зокрема, існування біжучих хвиль в системах ФПУ. Панков розглядав одновимірний нескінченний ланцюг зв'язаних частинок, які взаємодіють зі своїми попередньою і наступною сусідніми частинками. Динаміка такого ланцюга описується нескінченною системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$m_n\ddot{q}_n = U'_{n+1}\left(q_{n+1}-q_n\right) - U'_n\left(q_n-q_{n-1}\right),\ \ n\in\mathbb{Z},$$

де $q_n = q_n(t)$ – координата n-ї частинки в момент часу t, m_n – маса n-ї частинки, U_n – потенціал взаємодії між сусідніми n-ою та $(n-1)$-ю частинками. Панков досить детально дослідив не тільки питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль, але й питання коректності задачі Коші та існування періодичних розв'язків. Зауважимо, що у цьому випадку біжучою хвилею є розв'язок вигляду

$$q_n\left(t\right) = u\left(n-ct\right),$$

де функція $u\left(s\right)$, $s = n-ct$, називається *профільною* функцією або *профілем* хвилі (вона визначає форму хвилі), а стала c задає *швидкість* хвилі.

У 2006 році Імран Батт і Джонатан Ваттіс в статті [11] показали, що двовимірна ґратка типу ФПУ може бути використана для моделювання передачі (трансмісії) електричного заряду. Ця ґратка представляє собою мережу повторюваних секцій електричної установки. При цьому кожна секція складається з двох ідентичних лінійних *індукторів* (відповідають за створення робочого магнітного потоку) і нелінійного *конденсатора* (накопичує заряд і блокує постійний струм, пропускаючи змінний струм). Взаємне розташування вузлів ґратки, які визначаються за розташуванням конденсаторів, показано на рис. 1.2.

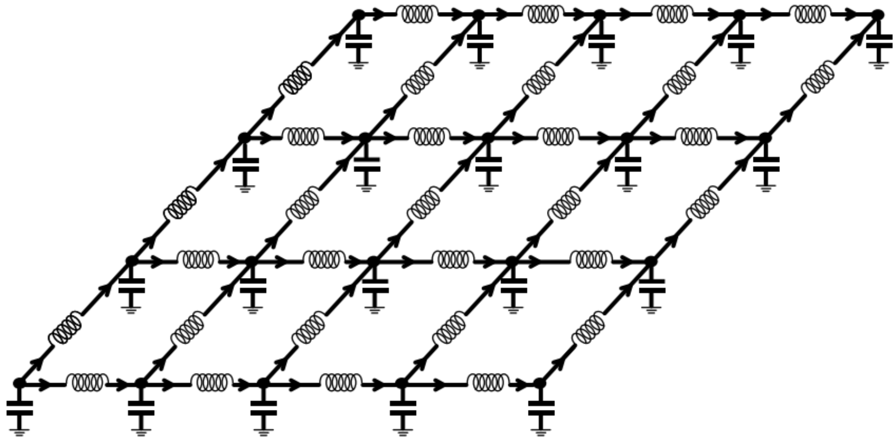


Рис.1.2. Двовимірна ґратка електричної передачі

Основні їх результати стосуються дослідження дискретних бризерів для двовимірної ґратки ФПУ та одержані за допомогою асимптотичних методів.

Аналогічні результати для двовимірної гексагональної ґратки ФПУ (рис. 1.3) вони одержали вже у наступному році в статті [12].

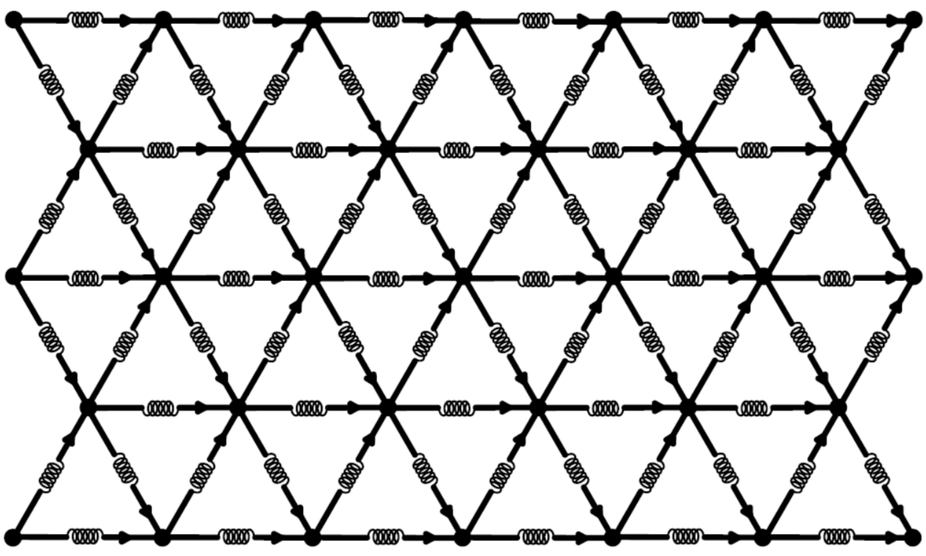


Рис. 1.3. Двовимірна гексагональна ґратка електричної передачі

У 2009 році Йі Ксянг, Джонатан Ваттіс, Хаді Сузанто та Лінда Каммінгс розглянули механічну пружинну ґратку, що описується двовимірною системою типу ФПУ, і побудували асимптотичне наближення бризера для цієї системи ([33]).

У 2012 році один із співавторів цього підрозділу (див. [36]) встановив умови існування періодичних біжучих хвиль в нескінченних системах типу ФПУ на двовимірній ґратці. В системах, які він розглядав, враховувалася лише локальна взаємодія, тобто кожна частинка взаємодіяла з чотирма своїми найближчими сусідами (по два по вертикалі і по горизонталі). Динаміка такої системи описується такою системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\ddot{q}_{n,m} = U'\left(q_{n+1,m} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n-1,m}\right) +$$
$$+U'\left(q_{n,m+1} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n,m-1}\right), \ \left(n, m\right) \in \mathbb{Z}^2.$$

Зауважимо, що у цьому випадку біжучою хвилею є розв'язок вигляду

$$q_{n,m}\left(t\right) = u\left(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct\right),$$

де функція $u\left(s\right)$, $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, називається *профільною* функцією або *профілем* хвилі, а стала c задає швидкість хвилі, вектор $\vec{l}\left(\cos\varphi, \sin\varphi\right)$ – хвильовий вектор (визначає напрям поширення хвилі).

У цій роботі вивчалися біжучі хвилі, які мали періодичний профіль відносних зміщень (тобто похідна профілю хвилі), тоді як сам профіль біжучої хвилі може бути не обов'язково періодичним. Для одержання основних результатів він використав варіаційний підхід. Зокрема, за допомогою теореми про гірський перевал було встановлено існування надзвукових періодичних біжучих хвиль з монотонними профілями, а за допомогою теореми про зачеплення – існування дозвукових періодичних біжучих хвиль.

У 2018 році авторами цього підрозділу (див. [2]) було встановлено існування відокремлених надзвукових біжучих хвиль з монотонними профілями для систем вигляду (1.9). Для одержання основних результатів було використано метод періодичних апроксимацій. Суть цього методу полягає в тому, що відокремлені біжучі хвилі будуються за допомогою граничного переходу в періодичних біжучих хвилях, коли період прямує до нескінченності.

У 2019 році Олександр Панков ([24]) розглянув системи типу ФПУ з нелокальною взаємодією, в яких кожна частинка взаємодіє з $2M$ сусідами:

$$\ddot{q}_j = \sum_{m=1}^{M} \left[U'_m \left(q_{j+m} - q_j \right) - U'_m \left(q_j - q_{j-m} \right) \right], \;\; j \in \mathbb{Z},$$

для яких за допомогою варіаційного підходу встановив умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

У 2020 році автори цього підрозділу (див. [5; 9]) за допомогою варіаційного підходу дослідили питання існування несталих періодичних і відокремлених надзвукових біжучих хвиль для систем вигляду:

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,m} = W'_1\left(q_{n+1,m} - q_{n,m}\right) - W'_1\left(q_{n,m} - q_{n-1,m}\right) + \\ + W'_2\left(q_{n,m+1} - q_{n,m}\right) - W'_2\left(q_{n,m} - q_{n,m-1}\right), \;\; (n, m) \in \mathbb{Z}^2,\end{gathered}$$

де W_1 і W_2 – потенціали взаємодії сусідніх частинок. У цій статті періодичні умови та граничні умови накладалися вже на сам профіль хвилі, а не на його похідну, як це робилося у попередніх їх працях. Розглянемо більш детально результати цих статей.

Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама з нелінійностями типу Амброзетті-Рабіновіца. Будемо вивчати систему типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – координата (n,m)-ї частинки (осцилятора) в момент часу t. Передбачається, що кожна частинка нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,\,m} = W'_1\left(q_{n+1,\,m} - q_{n,\,m}\right) - W'_1\left(q_{n,\,m} - q_{n-1,\,m}\right) + \\ + W'_2\left(q_{n,\,m+1} - q_{n,\,m}\right) - W'_2\left(q_{n,\,m} - q_{n,\,m-1}\right), (n,\,m) \in \mathbb{Z}^2.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Будемо шукати розв’язки системи (1.1) у вигляді біжучих хвиль:

$$q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct), \tag{1.2}$$

де $\vec{l}\,(\cos\varphi, \sin\varphi)-$ фіксований *хвильовий вектор*, який задає напрям поширення хвилі. Функція $u(s)$ неперервного аргументу $s\in\mathbb{R}$ називається *профілем* біжучої хвилі. Стала c представляє собою *швидкість* хвилі. Якщо $c>0$, то хвиля зміщується вправо, а якщо $c<0$, то вліво. Для профілю $u(s)$ біжучої хвилі, де $s=n\cos\varphi+m\sin\varphi-ct$, рівняння (1.1) набуде вигляду

$$\begin{aligned}c^2u''(s)&=W_1'\big(u(s+\cos\varphi)-u(s)\big)-W_1'\big(u(s)-u(s-\cos\varphi)\big)+\\&+W_2'\big(u(s+\sin\varphi)-u(s)\big)-W_2'\big(u(s)-u(s-\sin\varphi)\big).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Спочатку будемо вивчати періодичні та відокремлені біжучі хвилі в рівнянні (1.3). Зокрема, профіль періодичної хвилі задовольняє умову періодичності

$$u(s+2k)=u(s),\; s\in\mathbb{R},\tag{1.4}$$

а профіль відокремленої хвилі задовольняє крайові умови на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty}u(s)=u(\pm\infty)=0.\tag{1.5}$$

Позначимо через E_k гільбертів простір

$$E_k=\{u\in H^1_{loc}(\mathbb{R}):u'(s+2k)=u'(s),\; u(0)=0\}$$

зі скалярним добутком

$$(u,v)_k=\int_{-k}^{k}u'(s)v'(s)ds\,,$$

а через X_k – гільбертів простір

$$X_k=\{u\in H^1_{loc}(\mathbb{R}):u(s+2k)=u(s),\; u(0)=0\}$$

з тим самим скалярним добутком, що й в E_k і відповідною нормою $\|u\|_k=(u,\,u)^{\frac{1}{2}}$. Цей простір є замкненим підпростором простору E_k. Більше того, $u\in E_k$ належить X_k тоді і тільки тоді, коли похідна u' має нульове середнє значення, тобто

$$\langle u'\rangle:=\int_{-k}^{k}u'(s)ds=0.$$

Це означає, що X_k є 1-ковимірним підпростором простору E_k. А ортогональне доповнення є власне підпростір E_k, породжений функцією $h_0(s) = s$.

Позначимо через E гільбертів простір

$$E = \left\{ u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}), u(0) = 0 \right\}$$

зі скалярним добутком

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(s) v'(s) ds$$

і відповідною нормою $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$. Через $\|\cdot\|_*$ позначимо норму на просторі E^*, який є спряженим (дуальним) до простору E. Простір E є 1-ковимірним підпростором гільбертового простору

$$\tilde{E} = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

зі скалярним добутком

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(s) v'(s) ds + u(0) v(0).$$

Нехай X замикання простору $C_0^\infty(\mathbb{R})$ по відношенню до норми

$$\|u\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, що X є замкненим підпростором простору $\tilde{E}$, а тому функції з X задовольняють умову (1.5).

Далі означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s + \cos\varphi) - u(s) = \int_s^{s+\cos\varphi} u'(\tau) d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s + \sin\varphi) - u(s) = \int_s^{s+\sin\varphi} u'(\tau) d\tau.$$

Ці оператори є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності (див. |дисертація|, Лема 6.1).

$$\|Au\|_{L^\infty(-k,k)} \le l_1(k)\cdot\|u\|_k\,,\ \|Au\|_{L^2(-k,k)} \le |\cos\varphi|\cdot\|u\|_k\,, \tag{1.6}$$

$$\|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} \le l_2(k)\cdot\|u\|_k\,,\ \|Bu\|_{L^2(-k,k)} \le |\sin\varphi|\cdot\|u\|_k\,, \tag{1.7}$$

де

$$l_1(k)=\begin{cases}|\cos\varphi|\sqrt{\left[\dfrac{1}{2k}\right]+1}, & 0<2k<1,\\ |\cos\varphi|, & 2k\ge 1,\end{cases}$$

та

$$l_2(k)=\begin{cases}|\cos\varphi|\sqrt{\left[\dfrac{1}{2k}\right]+1}, & 0<2k<1,\\ |\sin\varphi|, & 2k\ge 1,\end{cases}$$

де $\left[\dfrac{1}{2k}\right]$ – ціла частина $\dfrac{1}{2k}$.

Припустимо, що виконуються умови:

(i_1) $W_i(r)=\dfrac{c_i}{2}r^2+f_i(r),\ i=1,2$, *де* $f_i\in C^1(\mathbb{R})$, $f_i(0)=f_i'(0)=0$ *і* $f_i'(r)=o(|r|)$ *при* $r\to 0$;

(ii_1) *існують такі* $r_0\in\mathbb{R}$ *і* $\mu>2$, *що* $f_i(r_0)>0$ *і* $\mu f_i(r)\le rf_i'(r),\ r\in\mathbb{R}$.

Останню нерівність називають *нерівністю Амброзетті-Рабіновіца*.

На просторах X_k та X розглянемо відповідно функціонали

$$J_k(u)=\int_{-k}^{k}\left\{\frac{c^2}{2}|u'(s)|^2-W_1\big(Au(s)\big)-W_2\big(Bu(s)\big)\right\}ds,$$

$$J(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{c^2}{2}|u'(s)|^2-W_1\big(Au(s)\big)-W_2\big(Bu(s)\big)\right\}ds.$$

Неважко переконатися, що ці функціонали є неперервно диференційовними на відповідних просторах, а їхні похідні визначаються формулами

$$\left\langle J_k'(u),h\right\rangle=\int_{-k}^{k}\big[c^2u'(s)h'(s)-c_1^2Au(s)Ah(s)-c_2^2Bu(s)Bh(s)-$$

$$-f_1'(Au(s))Ah(s)-f_2'(Bu(s))Bh(s)\big],\ u,h\in X_k,$$

$$\big\langle J'(u),h\big\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\big[c^2u'(s)h'(s)-c_1^2Au(s)Ah(s)-c_2^2Bu(s)Bh(s)-$$

$$-f_1'(Au(s))Ah(s)-f_2'(Bu(s))Bh(s)\big],\ u,h\in X.$$

Легко бачити, що критичні точки цих функціоналів у просторах X_k та X є розв'язками рівняння (1.3), що задовольняють умови (1.4) та (1.5) відповідно.

За допомогою теореми про гірський перевал і методу періодичних апроксимацій відповідно, одержуються наступні результати.

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови* (i_1), (ii_1). *Тоді для будь-яких* $k>0$ *і* $c^2>a:=\max\{c_1,c_2,0\}$ *рівняння (1.3) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (1.4).*

Перевіримо виконання умов теореми про гірський перевал для функціоналу J_k.

Лема 1.1. *За виконання умов теореми 6.1* функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.

Доведення. Нехай $\{u_n\}\subset X_k$ послідовність Пале–Смейла функціоналу $\mathrm{J_k}$ рівня b. Тоді для достатньо великих n,

$$b+1+\frac{1}{\mu}\|u_n\|_k\ge J_k(u_n)-\frac{1}{\mu}\big\langle J_k'(u_n),u_n\big\rangle=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int_{-k}^{k}\left(c^2|u_n'(s)|^2-c_1|Au_n(s)|^2-c_2|Bu_n(s)|^2\right)ds+$$

$$+\int_{-k}^{k}\left[\frac{1}{\mu}\Big(f_1'\big(Au_n(s)\big)Au_n(s)+f_2'\big(Bu_n(s)\big)Bu_n(s)\Big)-f_1\big(Au_n(s)\big)-f_2\big(Bu_n(s)\big)\right]ds.$$

Відповідно до умови леми другий і третій інтеграли є невід'ємними і тому, за лемою 6.1 ([41]), маємо

$$b+1+\frac{1}{\mu}\|u_n\|_k\ge\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\big(c^2-a\big)\|u_n\|_k^2.$$

А це означає, що послідовність $\{u_n\}$ є обмеженою у просторі X_k.

Тоді, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), $u_n \to u$ слабко в X_k, а отже, $Au_n \to Au$ *і* $Bu_n \to Bu$ слабко в X_k, і сильно в $L^2(-k, k)$ *і* $C([-k, k])$. Прямим обчисленням показується, що

$$c^2 \|u_n - u\|_k^2 = \int_{-k}^{k} c^2 |u_n'(s) - u'(s)|^2 \, ds =$$

$$= \left\langle J_k'(u_n) - J_k'(u), u_n - u \right\rangle + c_1 \|Au_n - Au\|_{L^2(-k,k)}^2 + c_2 \|Bu_n - Bu\|_{L^2(-k,k)}^2 +$$

$$+ \int_{-k}^{k} \left(f_1'(Au_n(s)) - f_1'(Au(s)) \right) \left(Au_n(s) - Au(s) \right) ds +$$

$$+ \int_{-k}^{k} \left(f_2'(Bu_n(s)) - f_2'(Bu(s)) \right) \left(Bu_n(s) - Bu(s) \right) ds .$$

Як і вище, всі доданки в правій частині останньої рівності збігаються до нуля. Таким чином, $\|u_n - u\|_k \to 0$ при $n \to \infty$, і лему доведено. □

Лема 1.2. *За виконання умов теореми 1.1 існують такі* $r_0 > 0$ *і* $\alpha_0 > 0$, *які не залежать від* k, *що* $\inf\limits_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > \alpha_0$.

Доведення. Подамо функціонал J_k у вигляді

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \Psi_k(u) - S_k(u),$$

де

$$\Psi_k(u) = \int_{-k}^{k} \left[c^2 |u'(s)|^2 - c_1 |Au(s)|^2 - c_2 |Bu(s)|^2 \right] ds ,$$

$$S_k(u) = \int_{-k}^{k} \left[f_1(Au(s)) + f_2(Bu(s)) \right] ds .$$

Тоді за лемою 6.1 ([41]) маємо

$$J_k(u) + S_k(u) = \frac{1}{2} \Psi_k(u) \ge \frac{c^2 - a}{2} \|u\|_k^2 .$$

Покажемо, що $S_k(u) = o\left(\|u\|_k^2\right)$. Згідно умови $\left(i_1\right)$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $|r| \le \delta$

$$\max\left\{f_1(r),\ f_2(r)\right\} \le \frac{\varepsilon r^2}{2}.$$

Покладемо

$$r_0 = \frac{\delta}{\max\left\{l_1(k),\ l_2(k)\right\}},$$

і візьмемо $u \in X_k$ з нормою $\|u\|_k = r_0$. Тоді, враховуючи цю лему, для майже всіх s маємо

$$|Au(s)| \le \|Au\|_{L^\infty(-k,\,k)} \le l_1(k)\|u'\|_k \le \delta\,,$$

$$|Bu(s)| \le \|Bu\|_{L^\infty(-k,\,k)} \le l_2(k)\|u'\|_k \le \delta\,.$$

Отже,

$$S_k(u) \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-k}^{k}\left[\left(Au(s)\right)^2 + \left(Bu(s)\right)^2\right]ds \le \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_k^2.$$

В силу довільності ε, маємо

$$S_k(u) = o\left(\|u\|_k^2\right).$$

Зокрема, якщо вибрати ε так, щоб $0 < \varepsilon < c^2 - a$, то одержимо

$$J_k(u) \ge \left(c^2 - a - \varepsilon\right)\frac{r_0^2}{2} > 0$$

і лему доведено. □

Лема 1.3. *За виконання умов теореми 1.1 існує елемент* $e \in X_k$ *з нормою* $\|e\|_k > r_0$ *такий, що* $J_k\left(e\right) \le 0$.

Доведення. За лемою 3.1 ([41]), для всіх r

$$\min\left\{f_1(r),\ f_2(r)\right\} \ge d|r|^\mu - d_0.$$

Нехай $u \in X_k \setminus \{0\}$ та $r > 0$. Тоді маємо

$$J_k(ru) = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k}\left\{c^2 r^2 \left|u'(s)\right|^2 - c_1 r^2 \left|Au(s)\right|^2 - c_2 r^2 \left|Bu(s)\right|^2\right\} ds -$$

$$-\int_{-k}^{k}\left\{f_1\left(Aru(s)\right) + f_2\left(Bru(s)\right)\right\} ds \le$$

$$\le \frac{r^2}{2}\int_{-k}^{k}\left[c^2 \left|u'(s)\right|^2 - c_1 \left|Au(s)\right|^2 - c_2 \left|Bu(s)\right|^2\right] ds -$$

$$-dr^{\mu}\int_{-k}^{k}\left[\left|Au(s)\right|^{\mu} + \left|Bu(s)\right|^{\mu}\right] ds + 4kd_0.$$

Оскільки $\mu > 2$, то $J_k(ru) \to -\infty$ при $r \to +\infty$, а отже, існує таке $r_0 = r_0(u) > 0$, що $J_k(ru) \le 0$ для всіх $r > r_0$ і лему доведено. □

Доведення теореми 1.1. Леми 1.1 – 1.3 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал ([32]). Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in X_k$, яка є розв'язком задачі (1.3), (1.4). Несталість розв'язку очевидна. Теорему доведено. □

Теорема 1.2. *Нехай виконуються умови (i_1), (ii_1) і $c^2 > a := \max\{c_1, c_2, 0\}$. Тоді рівняння (1.3) має несталий розв'язок u, що задовольняє умову (1.5).*

Доведення. Міркуючи аналогічно, як у підрозділі 6.2 дисертації [41], неважко довести, що функціонал J задовольняє геометрію гірського перевалу в просторі E. Оскільки існує такий елемент $e \in X$, що $J(e) < 0$, то функціонал J задовольняє геометрію гірського перевалу і в просторі X. Тоді за теоремою С.3 ([23]), існує послідовність Пале-Смейла $\{u_n\} \subset X$ рівня b, тобто $J(u_n) \to b$ і $J'(u_n) \to 0$ у просторі X^*.

Як і вище, послідовність $\{u_n\}$ обмежена в X. Більше того, як і в лемі 6.11, маємо, що $\|u_n\|$ обмежена знизу додатною сталою, а отже, $\|u_n\| \not\to 0$. Тому можна вважати, що $u_n \to u$ слабко в X. Далі, як і в лемі 6.12 ([41]), для будь-якого $r > 0$ існують $\theta > 0$, підпослідовність послідовності $\{u_n\}$ (як і раніше позначатимемо через $\{u_n\}$) та $\{\eta_n\} \subset \mathbb{R}$, такі, що

$$\int_{\eta_n - r}^{\eta_n + r} \left[|Au_n(s)|^2 + |Bu_n(s)|^2 \right] ds \geq \theta.$$

Замінюючи $u_n(s)$ на $u_n(s-\eta_n)$, одержуємо

$$\int_{-r}^{r} \left[|Au_n(s)|^2 + |Bu_n(s)|^2 \right] ds \geq \theta$$

і нова послідовність $\{u_n\}$ залишається послідовністю Пале-Смейла. Згідно теореми вкладення, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ у просторі $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$, тобто рівномірно на відрізках і, отже,

$$\int_{-r}^{r} \left[|Au(s)|^2 + |Bu(s)|^2 \right] ds \geq \theta > 0.$$

А це означає, що $u \neq 0$.

Далі, як і в доведенні леми 6.13 ([41]), беремо $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ і показуємо, що $\langle J'(u), g \rangle = 0$, тобто u – нетривіальна критична точка функціоналу J, а отже, розв'язок рівняння (1.3), що задовольняє умови (1.5). Несталість розв'язку очевидна. Теорему доведено. □

Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійностями. Тепер розглянемо більш детально результати авторів цього підрозділу, одержані в статтях [3; 4; 7; 8]. Будемо вивчати рівняння (1.3) із так званими *насичуваними* нелінійностями. Це означає, що на нескінченності $W_i'(r)$ ростуть як $const \cdot r$, тобто потенціали $W_i(r)$ є асимптотично квадратичними на нескінченності $(i = 1, 2)$.

Далі будемо вивчати два види біжучих хвиль: періодичні і відокремленні. Але у цьому випадку періодична хвиля має періодичні профілі відносних зміщень, тобто періодичну похідну профілю:

$$u'(s+2k)=u'(s),\ s\in\mathbb{R}, \tag{1.8}$$

де $k>0-$деяке число. Зауважимо, що профіль такої хвилі не обов'язково періодичний.

Профіль відокремленої хвилі задовольняє умови на нескінченності:

$$\lim_{s\to\pm\infty}u'(s)=u'(\pm\infty)=0. \tag{1.9}$$

Всюди далі припускається, що виконуються умови:

(i_2) $W_i(r)=\dfrac{c_i^2}{2}r^2+f_i(r),$ *де* $c_i\in\mathbb{R},$ $f_i\in C^1(\mathbb{R}),$ *причому* $f_i(0)=f_i'(0)=0$ *і* $f_i'(r)=o(r)$ *при* $r\to 0,\ i=1,2$;

(ii_2) *існує скінченна границя* $\lim\limits_{r\to\pm\infty}\dfrac{f_i'(r)}{r}=l$ *та функції* $g_i(r)=f_i'(r)-lr$ *обмежені* $(i=1,2)$;

(iii_2) $f_i(r)\geq 0$ *для всіх* $r\in\mathbb{R}$ *і для будь−якого* $r_0>0$ *існує* $\delta_0=\delta_0(r_0)>0$ *таке, що* $\dfrac{1}{2}rf_i'(r)-f_i(r)\geq\delta_0$ *для* $|r|\geq r_0$ $(i=1,2).$

Зауваження 1.1. *Зроблені припущення зокрема означають, що функції* $f_i(r)$ *зростаючі при* $r\geq 0$ *і спадні при* $r\leq 0,$ *а* $G_i(r)<0$ *для всіх* $r\neq 0,\ i=1,2.$

Для спрощення записів покладемо

$$h_i(r):=f_i'(r)=lr+g_i(r),\ i=1,2,$$

та

$$G_i(r):=\int_0^r g_i(\rho)d\rho,\ i=1,2,$$

і додатково припустимо, що виконується одна з умов:

(iv_2) $G_i(r) \to -\infty$ *при* $r \to \pm\infty$ $(i = 1,2)$;

або

(v_2) $c^2\left(\frac{\pi n}{k}\right)^2 - 4\left(c_1^2 + l\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2k}\cos\varphi\right) - 4\left(c_2^2 + l\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{2k}\sin\varphi\right) \neq 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$.

Як і вище, на просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k}\left[\frac{c^2}{c}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(Au(s))^2 - \frac{c_2^2}{2}(Bu(s))^2 - f_1(Au(s)) - f_2(Bu(s))\right]ds. \quad (1.10)$$

Неважко переконатися, що J_k – функціонал класу C^1 на E_k, а його похідна визначається формулою

$$\left\langle J_k'(u), h\right\rangle = \int_{-k}^{k}\left[c^2u'(s)h'(s) - c_1^2 Au(s)Ah(s) - c_2^2 Bu(s)Bh(s) - \right.$$

$$\left. -f_1'(Au(s))Ah(s) - f_2'(Bu(s))Bh(s)\right]$$

для $u, h \in E_k$. Більше того, критичні точки функціоналу J_kє розв'язками рівняння (1.3), що задовольняють умову (1.8).

Таким чином, для встановлення існування розв'язків рівняння (1.3), що задовольняють умову (1.8), достатньо довести існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Для цього буде використано спеціальну форму теореми про гірський перевал (див. |Willem, Pankov|).

Нехай на гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$ заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1. Кажуть, що I задовольняє *умову Пале-Смейла,* якщо виконується така умова:

(PS) якщо $\{u_n\} \subset H$ *така послідовність, що* $\{I(u_n)\}$ *обмежена та* $I'(u_n) \to 0, n \to \infty,$ *то* $\{u_n\}$ *містить збіжну послідовність.*

Зауважимо, що при перевірці цієї умови можна, без обмеження загальності, вважати, що числова послідовність $\{I(u_n)\}$ збігається, оскільки з обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну послідовність.

Послідовність $\{u_n\}$ точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу I на деякому рівні *b,* якщо $I(u_n) \to b$ та $I'(u_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тоді, враховуючи сказане вище, умову Пале-Смейла можна переформулювати таким чином:

(PS) будь-яка послідовність Пале-Смейла $\{u_n\} \subset H$ *містить збіжну під-послідовність.*

Якщо існують $e \in H$ *і* $r > 0$, *такі,що* $\|e\| > r$ *і*

$$\beta := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e),$$

то кажуть, що функціонал *I* задовольняє *геометрію гірського перевалу.*

Наступну теорему типу теореми про гірський перевал можна знайти в [10] (Теорема 10).

Теорема 1.3. *Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал I:* $H \to \mathbb{R}$ *класу* C^1*, який задовольняє умову Пале-Смейла та геометрію гірського перевалу I припустимо, що* $P: H \to H$ *таке неперервне відображення, що*

$$I(Pu) \leq I(u)$$

для всіх $u \in H$, *причому* $P(0) = 0$ *і* $P(e) = e$. *Тоді існує критична точка* $u \in \overline{PH}$ *(замикання PH) функціоналу I з критичним значенням*

$$I(u) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0.1]} I(\gamma(t)) \geq \beta,$$

де $$\Gamma := \left\{ \gamma \in \big([0,1], H\big) : \ \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = e \right\}.$$

Покладемо

$$(Pu)(s) := \int_0^s |u'(t)|\,dt.$$

Зауваження 1.2. *Неважко перевірити, що P неперервно відображає простір E_k в себе і PE_k складається із неспадних функцій.*

Далі нам знадобиться така величина:

$$c_0 = c_0(\varphi) := \sqrt{c_1^2 \cos^2 \varphi + c_2^2 \sin^2 \varphi.}$$

Наступна теорема встановлює існування періодичних біжучих хвиль з неспадними і незростаючими профілями.

Теорема 1.4. *Нехай виконуються умови $(i_2)-(iii_2)$ та (iv_2) або (v_2). Тоді, якщо $\varphi \in \left[\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, і $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$, то рівняння (1.3) має нестaлі як неспадні, так і незростаючі розв'язки, які задовольняють умову (1.8).*

Зауважимо, що з точки зору фізики, зростаючі хвилі є *хвилями розширення,* а спадні — *хвилями стиснення.*

Зауваження 1.3. *Оскільки ми розглядаємо монотонні хвилі, то можемо припустити, що умови теореми 1.4 виконуються для $r \geq 0$ (відповідно для $r \leq 0$), та отримати неспадні (відповідно, незростаючі) біжучі хвилі. З іншого боку, при доведенні теореми можна припустити, що потенціали $f_i(r)$ є парними функціями.*

Для зручності подамо функціонал J_k у вигляді:

$$J_k(u) = \frac{1}{2} Q_k(u,u) - \int_{-k}^{k} \left[G_1(Au(s)) + G_2(Bu(s))\right] ds, \tag{1.11}$$

де

$$Q_k(u,h) = \int_{-k}^{k} \left[c^2 u'(s) v'(s) - (c_1^2 + l) Au(s) Ah(s) - (c_2^2 + l) Bu(s) Bh(s)\right] ds.$$

Тоді похідну можна записати у вигляді

$$\left\langle J_k{}'(u),h\right\rangle = Q_k(u,k) - \int_{-k}^{k}\left[g_1(Au(s))Ah(s) + g_2(Bu(s))Bh(s)\right]ds \qquad (1.12)$$

для $u,h \in E_k$.

Нехай

$$\sigma(\xi) := c^2\xi^2 - 4(c_1^2+l)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\cos\varphi\right) - 4(c_2^2+l)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\sin\varphi\right)$$

та $\xi_n = \dfrac{\pi n}{k}$, де $n = 1,2,\ldots$. Покладемо

$$e_0(s) = s,\; e_n^{(1)}(s) = \sin(\xi_n s),\, e_n^{(2)}(s) = \cos(\xi_n s) - 1,$$

де $n = 1,2,\ldots$ Тоді система функцій

$$\left\{e_0, e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : n = 1,2,\ldots\,.\right\},$$

є повною ортогональною системою в E_k. Ця система є також ортогональною по відношенню до білінійної форми Q_k. Крім того,

$$Q_k(e_0,e_0) = 2k(c^2 - c_0^2 - l)$$

та

$$Q_k(e_n^{(1)},e_n^{(1)}) = Q_k(e_n^{(2)},e_n^{(2)}) = k\sigma(\xi_n),\; n = 1,2,\ldots\,.$$

Нехай

$$E_k^- := span\left\{e_0, e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : \sigma\left(\xi_n\right) < 0\right\},$$

$$E_k^0 = span\left\{e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : \sigma\left(\xi_n\right) = 0\right\}$$

та

$$E_k^+ = span\left\{e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : \sigma\left(\xi_n\right) > 0\right\}.$$

Ці підпростори є взаємно ортогональними щодо скалярного добутку і білінійної форми Q_k, та

$$E_k = E_k^- \oplus E_k^0 \oplus E_k^+.$$

Підпростори E_k^- та E_k^0 є скінченновимірними, а E_k^+ – нескінченновимірний. Очевидно, що форма Q_k від'ємно визначена на E_k^-, додатно визначена на E_k^+, і нульова на E_k^0.

Позначимо через u^-, u^0 та u^+ ортогональні проекції елемента $u \in E_k$ відповідно на підпростори E_k^-, E_k^0 та E_k^+.

Лема 1.4. *За виконання умов теореми 1.4 функціонал* J_k *задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. Нехай $\{u_n\} \subset E_k$ – послідовність Пале-Смейла функціоналу J_k, тобто $\{J_k(u_n)\}$ обмежена і $J_k{}'(u_n) \to 0,\ n \to \infty.$

Доведемо спочатку, що послідовність $\{u_n\}$ обмежена. Оскільки форма Q_k додатно (відповідно, від'ємно) визначена на E_k^+ (відповідно, E_k^-), то існує $\alpha > 0$ таке, що

$$\pm Q_k(u,u) \ge \alpha \|u\|_k^2$$

для всіх $u \in E_k^{\pm}$. Далі, оскільки $J_k'(u_n) \to 0,\ n \to \infty$, то

$$\left\| J_k{}'(u_n) \right\|_{k,*} \le 1$$

для всіх досить великих *n*. Таким чином, з рівності (1.12) з $u = u_n$ та $h = u_n^{\pm}$ маємо, що

$$\alpha \left\| u_n^{\pm} \right\|_k^2 \le \left\| u_n^{\pm} \right\|_k + \int_{-k}^{k} \left[\left| g_1\left(Au_n(s) \right) \right| \left| Au_n^{\pm}(s) \right| + \left| g_2\left(Bu_n(s) \right) \right| \left| Bu_n^{\pm}(s) \right| \right] ds$$

для всіх досить великих *n*. Звідси за припущеннями (ii_2) та нерівностями (1.6), (1.7) одержуємо, що

$$\alpha \left\| u_n^{\pm} \right\|_k^2 \le C \left\| u_n^{\pm} \right\|_k$$

з деяким $C > 0$. Отже, послідовності $\{u_n^+\}$ та $\{u_n^-\}$ обмежені.

У випадку, коли виконується (v_2), маємо, що $E_k^0 = \{0\}$, і, отже, $\{u_n\} = \{u_n^+ + u_n^-\}$ обмежена послідовність.

Нехай тепер виконується умова (iv_2). Оскільки послідовність $\{u_n^- + u_n^+\}$ обмежена, то залишається показати, що $\{u_n^0\} \subset E_k^0$ є також обмеженою. Припустимо протилежне. Тоді, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $\|u_n^0\|_k \to \infty$. За означенням підпростору E_k^0, можна u_n^0 подати у вигляді

$$u_n^0(s) = \beta_n \sin\left(\xi^0 s + \varphi_n\right),$$

де $|\beta_n| \to \infty$, а $\xi^0 \neq 0$ є добутком деякого натурального числа на $\dfrac{\pi}{k}$ і таке, що $\sigma(\xi^0) = 0$.Тоді

$$Au_n^0(s) = 2\beta_n \sin\left(\frac{\xi^0}{2}\cos\varphi\right)\cos\left(\xi^0\left(s + \frac{1}{2}\cos\varphi\right) + \varphi_n\right),$$

$$Bu_n^0(s) = 2\beta_n \sin\left(\frac{\xi^0}{2}\sin\varphi\right)\cos\left(\xi^0\left(s + \frac{1}{2}\sin\varphi\right) + \varphi_n\right).$$

Це означає, що існують дві сталі $\delta > 0, \gamma > 0$ і підмножини $M_n \subset [-k;k]$ міри δ, такі, що $|Au_n^0(s)| + |Bu_n^0(s)| \geq \gamma|\beta_n|$ на M_n.

Рівність (1.11) означає, що

$$J_k(u_n) = \frac{1}{2}\left[Q_k\left(u_n^+, u_n^+\right) + Q_k\left(u_n^-, u_n^-\right)\right] -$$

$$-\int_{-k}^{k}\left[G_1\left(Au_n^+(s) + Au_n^-(s) + Au_n^0(s)\right) + G_2\left(Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s) + Bu_n^0(s)\right)\right]ds. \qquad (1.13)$$

За зауваженням 1.1., $G_i(r) < 0$ *на* $\mathbb{R}$, а нерівності (1.6) і (1.7) показують, що послідовності $\{Au_n^+(s) + Au_n^-(s)\}$ та $\{Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s)\}$ є обмеженими в $L^\infty(-k;k)$. Отже,

$$-\int_{-k}^{k}\left[G_1\left(Au_n^+(s) + Au_n^-(s) + Au_n^0(s)\right) + G_2\left(Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s) + Bu_n^0(s)\right)\right]ds \geq$$

$$\geq -\int\limits_{M_n}\left[G_1\left(Au_n^+(s)+Au_n^-(s)+Au_n^0(s)\right)+G_2\left(Bu_n^+(s)+Bu_n^-(s)+Bu_n^0(s)\right)\right]ds \to +\infty .$$

Оскільки всі інші доданки в правій частині (1.13) є обмеженими, то $J_k(u_n) \to +\infty$.Одержали протиріччя, яке і доводить, що $\{u_n^0\} \subset E_k^0$ обмежена.

Отже, послідовність Пале-Смейла $\{u_n\}$ обмежена.

Обмеженість послідовності $\{u_n\}$ означає, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), $u_n \to u$ слабко E_k, а отже, $Au_n \to Au$ *і* $Bu_n \to Bu$ слабко в E_k, і сильно в $L^\infty(-k;k)$ і $C([-k,k])$. Прямим обчисленням показується, що

$$\|u_n-u\|_k^2=\int\limits_{-k}^{k}\left(c^2(u_n'(s)-u'(s)\right)^2-c^2(u_n(s)-u(s))^2)ds=$$

$$=\left\langle J_k'(u_n)-J_k'(u),u_n-u\right\rangle+c_1^2\|Au_n-Au\|_{L^2(-k,k)}^2+c_2^2\|Bu_n-Bu\|_{L^2(-k,k)}^2+$$

$$+\int\limits_{-k}^{k}(f_1'(Au_n(s))-f_1'(Au(s)))(Au_n(s)-Au(s))ds+$$

$$+\int\limits_{-k}^{k}(f_2'(Bu_n(s))-f_2'(Bu(s)))(Bu_n(s)-Bu(s))ds.$$

Очевидно, що всі доданки в правій частині останньої рівності збігаються до нуля, а отже, $\|u_n-u\|_k \to 0$ при $n\to\infty$. Лему доведено. □

Лема 1.5. *За виконання умов теореми 1.1 функціонал* J_k *задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. З умови (i_2) випливає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке $r_0>0$, що $|f_i(r)|\leq \varepsilon r^2$ при $r\leq r_0$ (i=1, 2). Тоді, враховуючи нерівності (1.6) та (1.7), при $\|u\|_k\leq r_0$, маємо

$$J_k(u) \geq \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - \frac{c_1^{\ 2}}{2}|Au(s)|^2 - \varepsilon|Au(s)|^2 - \frac{c_2^{\ 2}}{2}|Bu(s)|^2 - \varepsilon|Bu(s)|^2 \right\} ds \geq$$

$$\geq \frac{c^2}{2}\|u\|_k^2 - \frac{c_1^{\ 2}}{2}|\cos\varphi|^2\|u\|_k^2 - \varepsilon|\cos\varphi|^2\|u\|_k^2 - \frac{c_2^{\ 2}}{2}|\sin\varphi|^2\|u\|_k^2 - \varepsilon|\sin\varphi|^2\|u\|_k^2 =$$

$$= \frac{c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon}{2}\|u\|_k^2 .$$

Тепер, вибираючи ε достатньо малим, одержуємо, що існує таке $\beta > 0$, що $J_k(u) \geq \beta > 0$ при $\|u\|_k = r_0$.

Покажемо тепер, що існує такий елемент $e \in E_k$, що $J_k(e) < 0$. Нехай $e_0(s) = s$ і $\tau > 0$. З умови (ii_2) випливає, що $|G_i(r)| \leq C|r|$ з деякою сталою $C > 0$. Тоді рівність (1.11) означає, що

$$J_k(\tau e_0) \leq k\left(c^2 - c_0^2 - l\right)\tau^2 + 2k\left(|\cos\varphi| + |\sin\varphi|\right)|\tau.|$$

Таким чином, $J_k(\tau e_0) < 0$ для достатньо великих $|\tau|$, а отже, існує таке τ_0, що $J_k(\tau_0 e_0) < 0$. Тепер залишається взяти $e = \tau_0 e_0$ і лему доведено. □

Доведення теореми 1.4. Нехай умови теореми виконуються для $r \geq 0$. Леми 1.4 та 1.5 показують, що для функціонал J_k виконуються майже всі умови теореми 1.3. Залишається тільки перевірити виконання нерівності $J_k(Pu) \leq J_k(u)$ для всіх $u \in E_k$.

Нехай $\varphi \in \left[2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки

$$(APu)(s) = \int_{s}^{s+\cos\varphi} (Pu)'(\tau)d\tau = \int_{s}^{s+\cos\varphi} |u'(\tau)d\tau| \geq \left| \int_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau \right|$$

і

$$(BPu)(s) = \int_{s}^{s+\sin\varphi} (Pu)'(\tau)d\tau = \int_{s}^{s+\sin\varphi} |u'(\tau)d\tau| \geq \left| \int_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau \right|,$$

то

$$(APu)(s) \geq |(APu)(s)| \geq (Au)(s)$$

і

$$(BPu)(s) \geq |(BPu)(s)| \geq (Bu)(s).$$

Оскільки, згідно зауваження 1.1, потенціали $f_i(r)$ є неспадними, то

$$J_k(Pu) = \int_{-k}^{k} \Big[c^2 \left((Pu)'(s) \right)^2 - c_1^2 \left(APu(s) \right)^2 - c_2^2 \left(BPu(s) \right)^2 -$$

$$- f_1 \left(APu(s) \right) - f_2 \left(BPu(s) \right) \Big] ds =$$

$$= \int_{-k}^{k} \Big[c^2 \left(u'(s) \right)^2 - c_1^2 \left(APu(s) \right)^2 - c_2^2 \left(BPu(s) \right)^2 - f_1 \left(APu(s) \right) - f_2 \left(BPu(s) \right) \Big] ds \leq$$

$$\leq \int_{-k}^{k} \Big[c^2 \left(u'(s) \right)^2 - c_1^2 \left(Au(s) \right)^2 - c_2^2 \left(Bu(s) \right)^2 - f_1 \left(Au(s) \right) - f_2 \left(Bu(s) \right) \Big] ds = J_k(u).$$

Таким чином, за теоремою 1.3 існує нетривіальна критична точка $u \in PE_k$ функціоналу J_k така, що $J_k(u) \geq \beta$ *з* $\beta > 0$ з леми 1.1. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in PE_k \subset E_k$, яка є розв’язком задачі (1.3), (1.8). Крім того, за зауваженням 1.2 цей розв’язок неспадний і не сталий в силу означення простору E_k.

Випадок $r \geq 0$ аналогічний (із заміною *P* на *–P*). При цьому одержуються незростаючі розв’язки.

Легко бачити, що при $\varphi \in \left[\pi + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$, у випадку $r \geq 0$ одержуються незростаючі хвилі, а у випадку $r \leq 0 -$ неспадні. Теорему доведено. □

Далі будемо розглядати випадок выдокремлених біжучих хвиль, профіль яких є розв’язком рівняння (1.3), що задовольняє умови на нескінченності (1.9). Такі хвилі є в деякому сенсі граничним випадком розглянутих вище періодичних біжучих хвиль при $k \to \infty$. Тому їх буде побудовано за допомогою граничного переходу при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу

J_k. Цей метод називають методом періодичних апроксимацій.

Позначимо через E гільбертів простір

$$E = \left\{ u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}),\ u(0) = 0 \right\}$$

зі скалярним добутком

$$(u,v)_{\tilde{E}} = \int_{+\infty}^{-\infty} u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0).$$

Всюди далі припускається, що виконуються умови $(i_2)-(iii_2)$.

На просторі E розглянемо функціонал

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(Au(s))^2 - \frac{c_2^2}{2}(Bu(s))^2 - f_1(Au(s)) - f_2(Bu(s)) \right] ds. \quad (1.14)$$

Неважко переконатися, що J – функціонал класу C^1 на E, а його похідна визначається формулою

$$\left\langle J'(u), h \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2 u'(s)h'(s) - c_1^2 Au(s)Ah(s) - c_2^2 Bu(s)Bh(s) - \right.$$

$$\left. - f_1'(Au(s))Ah(s) - f_2'(Bu(s))Bh(s) \right] ds$$

для $u, h \in E$. Більше того, критичні точки функціоналу J є розв'язками рівняння (1.3), що задовольняють умови (1.9).

Наступна теорема встановлює існування відокремлених біжучих хвиль з неспадними і незростаючими профілями.

Теорема 1.5. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$. *Тоді, якщо* $\varphi \in \left[\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi \right]$, $n \in \mathbb{Z}$ *і* $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$, *то рівняння (1.3) має несталі як неспадні, так і незростаючі розв'язки, які задовольняють умови (1.9).*

Далі нам знадобляться такі дві леми (див. |Панков, Ротос|, Лема 2 і Лема 3). Перша з них є одним із варіантів принципу концентрованої компактності Ліонса [19].

Лема 1.6. *Нехай послідовність* $\{u_n\} \subset E_{k_n}$, $k_n \to \infty$, *така, що* $\|u_n\|_{k_n}$ *обмежена. Тоді виконується одна з таких двох можливостей:*

(a) (нерозпливання) для будь-якого $\sigma > 0$ *існує* $\eta > 0$, підпослідовність послідовності $\{u_n\}$ *(з тим самим позначенням) та послідовність* $\{\zeta_n\} \subset \mathbb{R}$, *такі, що*

$$\int\limits_{\zeta_n-\sigma}^{\zeta_n+\sigma} \left(|Au_n(s)|^2 + |Bu_n(s)|^2 \right) ds \geq \eta; \tag{1.15}$$

або

(b) (розпливання) $\|Au_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} + \|Bu_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0$ *для всіх* $p > 2$.

Крім того, якщо додатково виконується умова (i_2), $c > c_0$ *і* $\|J_k(u_n)\|_{k_n,*} \to 0$, *то у випадку (b) маємо, що* $\|(u_n)\|_{k_n} \to 0$.

Друга лема дає верхню рівномірну оцінку для значення гірського перевалу функціоналу J_k.

Лема 1.7. *Нехай виконуються умови* $(i_2) - (iii_2)$, *і* $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$. *Тоді існує така додатна стала K, що значення гірського перевалу* b_k *функціоналу* J_k *задовольняє нерівність*

$$b_k \leq K \tag{1.16}$$

для всіх $k > 1$.

Доведення теореми 1.5. Зафіксуємо довільну послідовність $\{k_n\}, k_n \to \infty$, і виберемо послідовність $\{c_n\}, c_n \to c$ так, щоб теорема 1.4 гарантувала існування біжучої хвилі з неспадним профілем $u_n \in E_{k_n}$ та швидкістю c_n ($c_n = c$ у випадку умови (iv_2)). Далі ми будемо часто переходити до підпослідовності без зміни позначення. Також позначимо через $\tilde{J}_{k_n}$ функціонал J_{k_n} з c заміненим на c_n.

Методом від супротивного покажемо, що послідовність $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ обмежена. Припустимо протилежне. Тоді, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $\|u_n\|_{k_n} \to \infty$. За лемою 1.6, для $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{k_n}}$ маємо, що виконується одна з двох можливостей: *(a)* (нерозпливання) або *(b)* (розпливання).

Припустимо, що виконується нерозпливання. Необмежуючи загальності можна вважати, що в рівності (2.13): $\zeta_n = 0$. Оскільки $\|v_n\|_{k_n} = 1$, то, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $v_n \to v$ слабко в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ і рівномірно на кожному скінченному інтервалі. Більше того, $v \in E$ та $\|v\| \le 1$, і нерозпливання означає, що v не є сталою.

Нехай тепер $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тоді для всіх достатньо великих n: $2k_n$-періодизація h_n функції h є коректно визначеною і належить простору E_{k_n}, причому

$$0 = \frac{1}{\|u_n\|_{k_n}} \left\langle \tilde{J}'_k(u_n), h_n \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c_n^2 v_n'(s) h'(s) - (c_1^2 + l) A v_n(s) A h(s) - (c_2^2 + l) B v_n(s) B h(s) \right] ds -$$

$$- \frac{1}{\|u_n\|_{k_n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g_1(Au_n(s)) + g_2(Bu_n(s)) \right] ds.$$

Оскільки функції g_i є обмеженими, то другий інтеграл в правій частині останньої рівності прямує до нуля. Тому, переходячи до границі при $n \to \infty$, одержуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[c_n^2 v_n'(s) h'(s) - (c_1^2 + l) A v(s) A h(s) - (c_2^2 + l) B v(s) B h(s) \right] ds = 0.$$

Це означає, що

$$(Lv)(s) := -c^2 v''(s) + \left(c_1^2 + l\right)\left(v(s + \cos\varphi) + v(s - \cos\varphi) - 2v(s)\right) +$$

$$+ \left(c_2^2 + l\right)\left(v(s + \sin\varphi) + v(s - \sin\varphi) - 2v(s)\right) = 0.$$

Оператор L є псевдодиференціальним оператором з символом $\sigma(\xi)$, введеним у попередньому підрозділі. Очевидно, що $Lv'=0$ та $v'\in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$. З іншого боку, використовуючи перетворення Фур'є, одержуємо, що $\sigma(\xi)\hat{v}'(\xi)=0$ і, отже, $v'=0$. Отримали протиріччя, яке виключає нерозпливання.

Тепер покажемо методом від супротивного, що для v_n розпливання також неможливе. У цьому випадку маємо, що

$$\|Av_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}+\|Bv_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}\to 0\ (n\to\infty)$$

для всіх $p>2$. Зафіксуємо довільне таке p. Маємо, що

$$0=\frac{1}{\|u_n\|_{k_n}^2}\left\langle \tilde{J}_k'(u_n),h_n\right\rangle=$$

$$=\int_{-k_n}^{k_n}\left[c_n^2v_n'(s)^2-c_1^2(Av_n(s))^2-c_2^2(Bv_n(s))^2\right]ds-$$

$$-\int_{-k_n}^{k_n}\left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)}(Av_n(s))^2+\frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)}(Bv_n(s))^2\right]ds.$$

Оскільки $c_n\to c$, то $2\alpha_0:=\inf(c_n\to c_0)>0$ і, отже,

$$2\alpha_0=2\alpha_0\|v_n\|_{k_n}^2\le\int_{-k_n}^{k_n}\left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)}(Av_n(s))^2+\frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)}(Bv_n(s))^2\right]ds. \quad (1.17)$$

За припущенням (i_2), існує таке $r_0>0$, що $\dfrac{h_i(r)}{r}\le\alpha_0$ при $|r|\le r_0$. Нехай $D_n=\{s\in[-k_n,k_n]:\max\left\{|Au_n(s)|,|Bu_n(s)|\le r_0\right\}$ i $CD_n=[-k_n,k_n]\setminus D_n$. Тоді

$$\int_{D_n}\left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)}(Av_n(s))^2+\frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)}(Bv_n(s))^2\right]ds\le$$

$$\le\alpha_0\int_{D_n}\left[(Av_n(s))^2+(Bv_n(s))^2\right]ds\le$$

$$\le\left[\|Av_n\|_{L^2(-k_n,k_n)}^2+\|Bv_n\|_{L^2(-k_n,k_n)}^2\right]\le\alpha_0\|v_n\|_{k_n}^2=\alpha_0.$$

Звідси враховуючи рівність (1.17), одержуємо, що

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{CD_n}\left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)}(Av_n(s))^2+\frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)}(Bv_n(s))^2\right]ds\geq\alpha_0. \tag{1.18}$$

З іншого боку, за припущенням (ii_2), існує така стала $\alpha_1>0$, що $|h_i(r)|\leq\alpha_1|r|$ для всіх r. Таким чином, за нерівністю Гельдера маємо

$$\int_{CD_n}\left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)}(Av_n(s))^2+\frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)}(Bv_n(s))^2\right]ds\geq$$

$$\leq\alpha_1\left(meas(CD_n)\right)^{\frac{p-2}{p}}\left(|Av_n|^{\frac{2}{p}}_{L^p(-k_n,k_n)}+|Bv_n|^{\frac{2}{p}}_{L^p(-k_n,k_n)}\right), \tag{1.19}$$

де $meas$ позначає міру Лебега. З нерівності (1.18), враховуючи (1.17), одержуємо, що $meas(CD_n)\to\infty$. Тоді, за припущенням (iii_2), маємо

$$b_{k_n}=\tilde{J}_{k_n}(u_n)=\tilde{J}_{k_n}(u_n)-\frac{1}{2}\left\langle\tilde{J}'_{k_n}(u_n),u_n\right\rangle=$$

$$=\int_{-k_n}^{k_n}\left[\frac{1}{2}h_1(Au_n(s))Au_n(s)-f_1(Au_n(s))\right]ds+$$

$$+\int_{-k_n}^{k_n}\left[\frac{1}{2}h_2(Bu_n(s))Bu_n(s)-f_2(Bu_n(s))\right]ds\geq$$

$$\geq\int_{CD_n}\left[\frac{1}{2}h_1(Au_n(s))Au_n(s)-f_1(Au_n(s))\right]ds+$$

$$+\int_{CD_n}\left[\frac{1}{2}h_2(Bu_n(s))Bu_n(s)-f_2(Bu_n(s))\right]ds\geq 2\delta_0 meas\left(CD_n\right)\to\infty.$$

Отримали протиріччя, оскільки за лемою 1.7, b_k обмежено зверху. Отже, розпливання також неможливе, а це означає, що припущення про необмеженість послідовності $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ хибне.

Обмеженість $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ означає, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), існують $\varsigma_n\in\mathbb{R}$ і функція $u\neq0$ такі, що $u_n(\cdot+\varsigma)\to u$ слабко в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ і рівномірно на кожному скінченному інтервалі. Більше того, обмеженість $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ означає, що $\|u\|$ скінченна і, отже, $u \in E$. Неважко перевірити, що u є неспадною критичною точкою функціоналу J і, отже, розв'язком рівняння (1.3), що задовольняє умову (1.9).

Доведення у випадку незростаючих розв'язків аналогічне. Теорему доведено. □

1.1.2. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона. Дискретні нескінченновимірні динамічні системи широко використовуються для моделювання складних квантових і оптичних явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи типу Фермі–Пасти–Улама, дискретні нелінійне рівняння типу Шредінгера, дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона. Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують розв'язки у вигляді біжучих і стоячих хвиль. В статтях [1; 17; 18; 35; 40] для рівнянь типу Клейна-Ґордона досліджено питання існування біжучих хвиль. В статтях [6; 21; 22; 26; 37; 38] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера. В той же час для рівнянь типу Клейна-Ґордона відомі декілька праць [16; 20; 39; 42], в перших двох з яких вивчалося питання стійкості стоячих хвиль. Розглянемо більш детально результати одного з авторів цього підрозділу зі статті [42].

Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями.

Будемо вивчати дискретні нелінійні рівняння типу Клейна-Ґордона, які описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних осциляторів:

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n + f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.20}$$

де $q_n = q_n(t)$ – узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t, $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ калібровно інваріантна функція, тобто

$$f\left(e^{i\omega t}z\right)=e^{i\omega t}f(z) \qquad (1.21)$$

для всіх $\omega\in\mathbb{R}$. Припустимо, що $f\left(\mathbb{R}\right)\subset\mathbb{R}$. Рівняння (1.20) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Далі будемо розглядати *насичувані* нелінійності $f(z)$. Прикладом таких нелінійностей є

$$f(u)=\frac{\nu|u|^p}{1+\mu|u|^p}u,\ \mu>0, \nu>0,\ p>1.$$

Будемо шукати розв’язки системи (1.20) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n\left(t\right)=u_n\exp\left(-i\omega t\right), \qquad (1.22)$$

де $\left(u_n\right)\subset\mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega\in\mathbb{R}$ – частотою. Такі розв’язки іноді називають *бризерами* або *лакунарними солітонами*.

Підставляючи стоячу хвилю (1.22) в рівняння (1.20), одержуємо систему

$$\left(Lu\right)_n+\omega^2u_n=f\left(u_n\right),\ \ n\in\mathbb{Z}, \qquad (1.23)$$

де $\left(Lu\right)_n=\left(\Delta u\right)_n-m^2u_n$.

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з k-періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто

$$u_{n+k}=u_n,\ \ n\in\mathbb{Z}, \qquad (1.24)$$

де k – деяке натуральне число, то

$$\lim_{n\to\pm\infty}u_n=0 \qquad (1.25)$$

відповідно.

Нехай $F\left(t\right)$ первісна функція для функції $f\left(t\right)$, тобто $F\left(t\right)=\int\limits_0^t f\left(s\right)ds.$

Тоді всюди далі припустимо, що виконуються такі умови:

$\left(i_3\right)$ $f\left(t\right)=o\left(t\right), t\to 0;$

$\left(ii_3\right)$ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{f\left(t\right)}{t}=l<\infty;$

$\left(iii_3\right)$ $f\in C^1(\mathbb{R})$ і $f\left(t\right)t<f'\left(t\right)t^2, t\neq 0;$

(iv_3) $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}f(t)t-F(t)\right)=\infty.$

З системою (1.23) пов'язується функціонал

$$J(u)=\frac{1}{2}\left(Lu+\omega^2 u,\, u\right)-\sum_{n\in\mathbb{Z}}F(u_n),$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2=l^2(\mathbb{Z})$ зі скалярним добутком $(u,\, v)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}u_n v_n$ та нормою $\|u\|=\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Зазначимо, що кожний елемент простору l^2 автоматично задовольняє умову (1.25).

Нехай $k\geq 2$ – натуральне число. Тоді через l_k^2 позначимо простір всіх k-періодичних послідовностей $\{u_n\}$, які задовольняють умову (1.24). Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком $(u,\, v)_k=\sum\limits_{n\in Q_k}u_n v_n$ та нормою $\|u\|_k=\left(\sum\limits_{n\in Q_k}|u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, де $Q_k=\left\{n\in\mathbb{Z}:-\left[\frac{k}{2}\right]\leq n\leq k-\left[\frac{k}{2}\right]-1\right\}$, $\left[\frac{k}{2}\right]$ – ціла частина $\frac{k}{2}$. На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u)=\frac{1}{2}\left(L_k u+\omega^2 u,\, u\right)_k-\sum_{n\in Q_k}F(u_n),$$

де L_k – оператор L, який діє в просторі l_k^2.

Іноді ми також будемо розглядати простори l^p та l_k^p ($1\leq p\leq\infty$) з нормами

$$\|u\|_{l^p}=\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \|u\|_{l_k^p}=\left(\sum_{n\in Q_k}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

з відомою зміною при $p=\infty$. Нагадаємо, що при $1\leq p\leq q\leq\infty$

$$\|u\|_{l^q}\leq\|u\|_{l^p},\ \|u\|_{l_k^q}\leq\|u\|_{l_k^p}. \tag{1.26}$$

Зауваження 1.4. Оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2, а його спектр збігається з відрізком $\left[-m^2-4, -m^2\right]$ і є абсолютно неперервним. Причому за виконання умов $\left(i_3\right)$, $\left(ii_3\right)$ функція $\frac{f(t)}{|t|}$ строго зростаюча, тоді як функція $\frac{1}{2}f(t)t-F(t)$ строго зростає при $t \geq 0$ і строго спадає при $t \leq 0$, а отже, є невід'ємною.

За зроблених припущень функціонали J_k та J належать класу C^1, а їх похідні визначаються формулами

$$\left\langle J_k'(u), h\right\rangle = \left(L_k u + \omega^2 u, h\right)_k - \sum_{n \in Q_k} f\left(u_n\right) h_n,\ u, h \in l_k^2, \tag{1.27}$$

$$\left\langle J'(u), h\right\rangle = \left(Lu + \omega^2 u, h\right) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(u_n\right) h_n,\ u, h \in l^2. \tag{1.28}$$

Крім того, критичні точки J_k та J є розв'язками рівняння (1.23), що задовольняють відповідно умови (1.24) та (1.25).

Для функціоналів J_k та J означимо відповідні *многовиди Нехарі*

$$N_k := \left\{u \in l_k^2 \mid \left\langle J_k'(u), u\right\rangle = 0,\ u \neq 0\right\} \subset l_k^2$$

та

$$N := \left\{u \in l^2 \mid \left\langle J'(u), u\right\rangle = 0,\ u \neq 0\right\} \subset l^2.$$

Введемо позначення $I_k(u) := \left\langle J_k'(u), u\right\rangle$ та $I(u) := \left\langle J'(u), u\right\rangle$. Це C^1-функціонали, похідні яких визначаються формулами

$$\left\langle I_k'(u), h\right\rangle = 2\left(L_k u + \omega^2 u, h\right)_k - \sum_{n \in Q_k} \left(f\left(u_n\right) + f'\left(u_n\right) u_n\right) h_n, \tag{1.29}$$

$$\left\langle I'(u), h\right\rangle = 2\left(Lu + \omega^2 u, h\right) - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(f\left(u_n\right) + f'\left(u_n\right) u_n\right) h_n. \tag{1.30}$$

Лема 1.8. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iii_3)$, $\omega^2 > m^2+4$ *та* $\omega^2 - l < m^2+4$. *Тоді множини* N_k *та* N *є непорожніми замкненими* C^1-*підмноговидами відповідно у просторах* l_k^2 *та* l^2, *на яких* $I_k'(u)\neq 0$ *та* $I'(u)\neq 0$. *Крім того, існує* $\beta_0>0$, *яке не залежить від* k *і таке, що* $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u\in N_k$, *та* $\|u\|\geq\beta_0$, $u\in N$.

Доведення. Розглянемо випадок N_k (інший випадок аналогічний). Спочатку покажемо, що многовид N_k непорожній. Нехай $\delta\in(\omega^2, l+m^2+4)$ і E_δ – спектральний підпростір оператора $L_k+\omega^2$ в просторі l_k^2, що відповідає відрізку $[0,\delta]$. Оскільки $\omega^2\in\sigma(L_k+\omega^2)$, то $E_\delta\neq\{0\}$. Нехай $v\in E_\delta\setminus\{0\}$. За умовою (i_3)

$$\langle J_k'(tv), tv\rangle = t^2\left(L_k v+\omega^2 v, v\right)_k - \sum_{n\in Q_k} f(tv_n)tv_n =$$

$$= t^2\left(L_k v+\omega^2 v, v\right)_k - o\left(t^2\right) > 0$$

для достатньо малих $t>0$. З іншого боку,

$$\langle J_k'(tv), tv\rangle = t^2\left(L_k v+\omega^2 v, v\right)_k - \sum_{n\in Q_k} f(tv_n)tv_n \leq$$

$$\leq t^2\left(\delta\|v\|_k^2 - \sum_{n\in Q_k}\frac{f(tv_n)v_n^2}{tv_n}\right).$$

За умовою (ii_3) сума в дужках збігається до $l\|v\|_k^2$, а тому $\langle J_k'(tv), tv\rangle<0$ для достатньо великих $t>0$. Тоді існує $t^*>0$ таке, що $\langle J_k'(t^*v), t^*v\rangle=0$ і $t^*v\in N_k$. Отже, $N_k\neq\varnothing$.

Нехай $u\in N_k$, тоді з рівностей (1.27), (1.29) та означення N_k, одержуємо

$$\langle I_k'(u), u\rangle = \langle I_k'(u), u\rangle - 2I_k(u) = \sum_{n\in Q_k}\left(f(u_n)u_n - f'(u_n)u_n^2\right).$$

За умовою (iii_3) ця сума є від'ємною. Тому $I'_k(u) \neq 0$ і за теоремою про неявну функцію (див. [13], Теорема 4.2.1), N_k є C^1-підмноговидом в просторі l_k^2. Замкненість N_k очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини леми. Нехай $\varphi(r) = \sup\limits_{|t| \le r} \dfrac{f(t)}{t}$. Це зростаюча функція від $r \ge 0$ і, згідно (i_3), $\varphi(r) \to 0$ при $r \to 0$. Нехай $u \in N_k$. Зазначимо, що оператор $L_k + \omega^2$ додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі і нерівностей (1.26) маємо

$$\omega^2 \|u\|_k^2 \le \left(L_k u + \omega^2 u, u\right)_k = \sum_{n \in Q_k} f(u_n) u_n \le$$

$$\le \varphi\left(\|u\|_{l_k^\infty}\right) \cdot \|u\|_k^2 \le \varphi\left(\|u\|_k\right) \cdot \|u\|_k^2.$$

А це означає, що $\varphi\left(\|u\|_k\right) \ge \omega^2$. Оскільки функція φ зростаюча, то знайдеться $\beta_0 > 0$ таке, що $\|u\|_k \ge \beta_0$, $u \in N_k$. Лему доведено. □

Наслідок 1.1. *Якщо* $I_k(v) \le 0$ *(відповідно* $I(v) \le 0$*), то існує єдине* $t^* \in (0, 1]$ *таке, що* $t^* v \in N_k$ *(відповідно* $t^* v \in N$*), а також існує таке* $v \in E_k \setminus \{0\}$ *(відповідно* $v \in E \setminus \{0\}$*), що* $J_k(v) < 0$ *(відповідно* $J(v) < 0$*).*

З означень J_k та I_k випливає, що на N_k

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2} I_k(u) = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right). \tag{1.31}$$

За умовою (iii_3) $J_k(u) \ge 0$, $u \in N_k$. Аналогічно, з означень J та I випливає, що на N_k

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{2} I(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) \tag{1.32}$$

та $J(u) \ge 0$, $u \in N$.

Лема 1.9. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iii_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді існує таке число* $\alpha_0 = \alpha_0(k) > 0$, *що* $J_k(u) \geq \alpha_0$ *для всіх* $u \in N_k$.

Доведення. Нехай $u \in N_k$, тоді має місце рівність (1.31). За лемою 1.8, $\|u\|_k \geq \beta_0 > 0$. Отже, існують $n_0 \in Q_k$ (залежне від u) і $\delta_0 = \delta_0(k, \beta_0) > 0$ (незалежне від u) такі, що $|u_{n_0}| \geq \delta_0$. Тоді, поклавши $\alpha_0 = \frac{1}{2} f(\delta_0)\delta_0 - F(\delta_0)$, за зауваженням 1.1 маємо, що $J_k(u) \geq \alpha_0$ для $u \in N_k$. Лему доведено. □

Тепер розглянемо дві задачі мінімізації

$$\inf\left\{J_k(u) : u \in N_k\right\} =: m_k, \tag{1.33}$$

$$\inf\left\{J(u) : u \in N\right\} =: \overline{m}. \tag{1.34}$$

Виявляється, що розв’язки цих задач є розв’язками системи (1.23) у відповідних просторах.

Лема 1.10. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iii_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді розв’язки задач (1.33) і (1.34) є розв’язками рівняння (1.23) в просторах* l_k^2 *та* l^2 *відповідно.*

Доведення. Розглянемо випадок задачі (1.34), інший випадок аналогічний. Нехай $u \in N$ розв’язок задачі мінімізації (1.34). Згідно методу множників Лагранжа, існує $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що

$$J'(u) + \lambda I'(u) = 0.$$

Оскільки $\langle J'(u), u \rangle = I(u) = 0$, то, враховуючи рівність (1.30), одержуємо

$$0 = \lambda \langle I'(u), u \rangle = \lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right).$$

За умовою (iii_3) сума в правій частині останньої рівності від’ємна і, отже, $\lambda = 0$, що й доводить лему. □

Лема 1.11. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iv_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді задача (1.33) має розв’язок.*

Доведення. Нехай $\left\{u^j\right\} \subset N_k$ – мінімізуюча послідовність для J_k, тобто $J_k\left(u^j\right) \to m_k$. З рівності (1.31) маємо

$$J_k\left(u^j\right) = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f\left(u_n^j\right) u_n^j - F\left(u_n^j\right) \right). \tag{1.35}$$

Покажемо, що послідовність $\left\{u^j\right\}$ обмежена в l_k^2. Припустимо протилежне. Оскільки простір l_k^2 скінченновимірний, а l^∞-норма еквівалентна евклідовій нормі на l_k^2, то, переходячи до підпослідовності, маємо, що $\left\|u^j\right\|_{l^\infty} \to \infty$. Тоді, для наступної підпослідовності, для якої збережемо теж саме позначення $\left\{u^j\right\}$, існує $n_0 \in Q_k$ таке, що $u_{n_0}^j \to \infty$. Тоді за рівністю (1.35), враховуючи умову $\left(iv_3\right)$, це означає, що $J_k\left(u^j\right) \to \infty$. Отримали суперечність, оскільки $J_k\left(u^j\right) \to m_k$ і, отже, послідовність $\left\{u^j\right\}$ обмежена.

Оскільки l_k^2 скінченновимірний простір та $\left\{u^j\right\}$ обмежена послідовність, то, переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що $\left\{u^j\right\}$ збігається до $u \in l_k^2$. Але многовид Нехарі N_k замкнений і J_k неперервний функціонал, тому $u \in N_k$ і $J_k\left(u\right) = m_k$. Лему доведено. □

Наступна теорема встановлює існування періодичних розв'язків.

Теорема 1.6. *Нехай виконуються умови* $\left(i_3\right)-\left(iv_3\right)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 2$ *рівняння (1.23) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u \in l_k^2$. *Більше того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (1.23) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in l_k^2$, *один з яких невід'ємний.*

Доведення. Існування нетривіального k-періодичного розв'язку $u \in l_k^2$ випливає з леми 1.11.

Нехай f непарна функція. Тоді F парна і очевидно, що рівняння (1.23) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in l_k^2$. Легко бачити, що

$$\left(L|u|, |u|\right)_k \le \left(Lu, u\right)_k .$$

Крім того, $f\left(|t|\right)|t| = f\left(t\right)t$ та $F\left(|t|\right) = F\left(t\right)$. А це означає, що

$$I_k\left(|u|\right) \le I_k\left(u\right) = 0 .$$

З іншого боку,

$$\sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(|u_n|\right)|u_n| - F\left(|u_n|\right)\right) = \sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_n\right)u_n - F\left(u_n\right)\right) = m_k .$$

За наслідком 1.1, існує $t^* \in \left(0, 1\right]$ таке, що $u^* = t^*|u| \in N_k$. Тоді за зауваженням 1.1 та рівністю (1.31), маємо

$$J_k\left(u^*\right) \le \sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_n\right)u_n - F\left(u_n\right)\right) = m_k .$$

Таким чином, $J_k\left(u^*\right) = m_k$ та u^* невід'ємний розв'язок, і, отже, можна взяти $u = u^*$. Теорему доведено. □

Аналогічну лему до леми 1.11 для задачі (1.34) довести складно. Тому для одержання l^2-розв'язку рівняння (1.23) ми скористаємося методом періодичних апроксимацій, тобто перейдемо до границі при $k \to \infty$. Для цього знадобиться лема:

Лема 1.12. *Нехай виконуються умови $\left(i_3\right) - \left(iv_3\right)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ та $\omega^2 - l < m^2 + 4$. І нехай u^k – k-періодичний розв'язок задачі (1.33). Тоді послідовності $\left\{m_k\right\} = \left\{J_k\left(u^k\right)\right\}$ та $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ обмежені.*

Доведення. Крок 1. Спочатку нагадаємо, що спектр оператора L абсолютно неперервний і збігається з відрізком $\left[-m^2 - 4, -m^2\right]$. А отже, для будь-якого $\delta \in \left(\omega^2, l + m^2 + 4\right)$ спектральний підпростір оператора $L + \omega^2$ в просторі l^2, що відповідає відрізку $[0,\delta]$, ненульовий. Нехай $w \neq 0$ довільний вектор з цього підпростору. Тоді маємо

$$\begin{aligned} I(tw) = \langle J'(tw), tw\rangle = t^2\left(Lw + \omega^2 w, w\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(tw_n)tw_n \leq \\ \leq t^2\left(\delta\|w\|^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f(tw_n)}{tw_n} w_n^2\right). \end{aligned} \tag{1.36}$$

За умовами (i_3) та (ii_3) існує стала $C>0$, яка не залежить від n і t, і така, що

$$\left|\frac{f(tw_n)}{tw_n}\right| \leq C$$

для всіх $n\in\mathbb{Z}$ і $t\in\mathbb{R}$. Отже, ряд в правій частині нерівності (1.36) збігається рівномірно по відношенню до $t\in\mathbb{R}$. Тому, згідно умови (ii_3), сума цього ряду збігається до $l\|w\|^2$, і нерівність (1.36) означає, що $I(tw)<0$ для всіх достатньо великих $t>0$. Зафіксуємо довільне t з такою властивістю. Оскільки послідовності зі скінченним носієм щільні в l^2, то існує вектор $\tilde{w}\in l^2$ зі скінченним носієм достатньо близький до tw і такий, що $I(\tilde{w})<0$. За наслідком 1.1 існує $t^*\in(0,1)$ таке, що $I(v)=0$, де $v=t^*\tilde{w}$. Оскільки v має скінченний носій, то $\operatorname{supp} v\subset Q_k$ для всіх достатньо великих k. Тоді для будь-якого такого k нехай $v^k\in l_k^2$ єдиний елемент такий, що $v_n^k=v_n$ для $n\in Q_k$. Легко бачити, що $I_k(v^k)=I(v)=0$ та $m_k\leq J_k(v^k)=J(v)$. Отже, послідовність $\{m_k\}$ обмежена.

Крок 2. Методом від супротивного доведемо, що $\left\{\|u^k\|_k\right\}$ також обмежена. Припустимо, що $\left\{\|u^k\|_k\right\}$ необмежена. Тоді, переходячи до підпослідовності (яку будемо так само позначати), можна вважати, що $\|u^k\|_k\to\infty$. Візьмемо $v^k=\dfrac{u^k}{\|u^k\|_k}$, тоді $\|v^k\|_k=1$ та виконується одна з таких двох умов:

(a) *послідовність* $\{v^k\}$ *задовольняє умову* $\|v^k\|_{l_k^\infty}=\|u^k\|_{l^\infty}\to 0$ *при* $k\to\infty$*;*

(b) *існують такі* $\delta > 0$ *та* $x_k \in \mathbb{Z}$*, що* $\left|v_{x_k}^k\right| \geq \delta$ *для всіх* k.

Розглянемо перший випадок (умова (a)). Оскільки оператор L невід'ємний та

$$0 = \frac{1}{\left\|u^k\right\|_k^2} I_k\left(u^k\right) = \left(L_k v^k + \omega^2 v^k,\, v^k\right)_k - \sum_{n \in Q_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2,$$

то

$$\omega^2 = \omega^2 \left\|v^k\right\|_k^2 \leq \left(L_k v^k + \omega^2 v^k,\, v^k\right)_k = \sum_{n \in Q_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2. \tag{1.37}$$

За умовою (i) існує $t_0 > 0$ таке, що $\dfrac{f(t)}{t} \leq \dfrac{\omega^2}{2}$ при $t < \left|t_0\right|$. Нехай

$$A_k = \left\{n \in Q_k : \left|u_n^k\right| < t_0\right\},$$

$$B_k = \left\{n \in Q_k : \left|u_n^k\right| \geq t_0\right\}.$$

Тоді

$$\sum_{n \in A_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2 \leq \frac{\omega^2}{2} \sum_{n \in A_k}\left(v_n^k\right)^2 \leq \frac{\omega^2}{2}\left\|v^k\right\|_k^2 = \frac{\omega^2}{2}.$$

Звідси, враховуючи нерівність (1.37), одержуємо

$$\liminf_{k \to \infty} \sum_{n \in B_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2 = \varliminf_{k \to \infty} \sum_{n \in B_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2 \geq \frac{\omega^2}{2}. \tag{1.38}$$

З іншого боку, $\left|f(t)\right| \leq C_0 |u|$ з деякою сталою $C_0 > 0$ і за нерівністю Гельдера

$$\sum_{n \in B_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2 \leq C_0 \left|B_k\right|^{\frac{p-2}{p}} \left\|v^k\right\|_{l_k^p}^{\frac{2}{p}} \tag{1.39}$$

для будь-якого $p > 2$, де $\left|B_k\right|$ – кількість елементів множини B_k. Легко перевірити, що

$$\|w\|_{l_k^p} \leq \|w\|_{l_k^\infty}^{\frac{p-2}{p}} \|w\|_k^{\frac{2}{p}}. \tag{1.40}$$

Тоді оскільки $\left\|v^k\right\|_{l_k^\infty} \to 0$, то нерівності (1.38), (1.39) і (1.40) показують, що $\left|B_k\right| \to \infty$. Нехай $\alpha_0 = \min\left\{\frac{1}{2} f\left(\pm t_0\right)\left(\pm t_0\right) - F\left(\pm t_0\right)\right\}$. Тоді з рівності (1.32) та зауваження 1.1 маємо

$$m_k = \sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2} f\left(u_n\right)u_n - F\left(u_n\right)\right) \geq \sum_{n\in B_k}\left(\frac{1}{2} f\left(u_n\right)u_n - F\left(u_n\right)\right) \geq$$

$$\geq \alpha_0\left|B_k\right| \to \infty.$$

Одержали суперечність.

Розглянемо другий випадок (умова (b)). Згідно інваріантності рівняння (1.23) відносно дискретних зсувів, кратних k, можна вважати, що $x_k = 0$. Оскільки $\left\|v^k\right\|_k = 1$, то можна також вважати, що знайдеться елемент $v = \left\{v_n\right\}$ такий, що $v_n^k \to v_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ (переходячи до підпослідовності, якщо потрібно). Крім того, очевидно, що $v \in l^2$, $\left\|v\right\| \leq 1$ і $\left|v_0\right| \geq \delta$. Отже, $v \neq 0$.

Оскільки u^k – k-періодичний розв’язок рівняння (1.23), то

$$Lv_n^k - \left(l - \omega^2\right)v_n^k = \frac{g\left(u_n^k\right)}{\left\|u^k\right\|_k}, \tag{1.41}$$

де $g\left(t\right) = f\left(t\right) - lt$ і за умовою $\left(ii_3\right)$ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{g\left(t\right)}{t} = 0.$ Якщо $v_n \neq 0$ для деяких $n \in \mathbb{Z}$, то $\left|u_n^k\right| \to \infty$. Переходячи до границі в рівності (1.41) при $k \to \infty$, маємо

$$Lv_n - \left(l - \omega^2\right)v_n = 0,$$

тобто $v \in l^2$ — ненульовий власний вектор оператора L з власним значенням $l - \omega^2$. Але спектр оператора L в просторі l^2 є абсолютно неперервним. Знову отримали суперечність. Отже, послідовність $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ обмежена. Лему доведено.

□

Основним результатом цього пункту є теорема:

Теорема 1.7. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iv_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді рівняння (1.23) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$. *Більше того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (1.23) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in l^2$, *один з яких невід'ємний.*

Доведення. Нехай $u^k \in l_k^2$ розв'язок рівняння (1.23). Тоді за лемою 1.12 послідовність $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ обмежена та $\left\{u^k\right\}$ задовольняє одну з двох умов (a) або (b). В першому випадку нерівність (1.40) означає, що $\left\|u^k\right\|_{l_k^p} \to 0$ при $k \to \infty$ для будь-якого $p > 2$. За умовою (i_3) для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $C_\varepsilon > 0$ таке, що

$$\left|f(t)\right| \le \varepsilon |t| + C_\varepsilon |t|^{p-1}.$$

Оскільки u^k – k-періодичний розв'язок рівняння (1.23), то

$$\omega^2 \left\|u^k\right\|_k^2 \le \left(L_k u^k + \omega^2 u^k,\, u^k\right)_k = \sum_{n \in Q_k} f\left(u_n^k\right) u_n^k \le \varepsilon \left\|u^k\right\|_k^2 + C_\varepsilon \left\|u^k\right\|_{l_k^p}^p.$$

Поклавши $\varepsilon = \dfrac{\omega^2}{2}$, одержуємо

$$\frac{\omega^2}{2} \left\|u^k\right\|_k^2 \le C_\varepsilon \left\|u^k\right\|_{l_k^p}^p \to 0$$

при $k \to \infty$. А це суперечить лемі 1.8 і, отже, виконання умови (a) неможливе.

Таким чином, виконується умова (b). Переходячи до підпослідовності і використовуючи інваріантність дискретних зсувів можна вважати, що $\left|u_0^k\right| \ge \delta$ з деяким $\delta > 0$. Переходячи знову до підпослідовності, ми також можемо вважати, що існує послідовність $u = \{u_n\}$ така, що $u_n^k \to u_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Легко бачити, що $u \in l^2$ та $u \ne 0$. Крім того, для рівняння (1.23) маємо поточкову збіжність і, отже, $u \in l^2$ – його нетривіальний розв'язок.

Друга частина теореми випливає з теореми 1.6. Теорему доведено. □

Зауваження 1.2. *Можна показати, що за виконання умов теореми 1.7, $m_k \to \overline{m}$. Крім того, розв'язок $u \in l^2$, одержаний у цій теоремі, є розв'язком задачі мінімізації (1.34), тобто $J(u) = \overline{m}$.*

Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. Розглянемо більш детально результати статті [39]. У даній статті розглянемо дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n - f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.42}$$

де $q_n = q_n(t)$ – узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t, $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Будемо вивчати рівняння (1) з нелінійностями вигляду

$$f(r) = d_n |r|^{2p} r, \quad \{d_n\} \subset \mathbb{R}, \ p \in \mathbb{N}.$$

Будемо шукати розв'язки системи (1.42) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \tag{1.43}$$

де $u_n \in \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ – частотою.

Підставляючи стоячу хвилю (1.43) в систему (1.42) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержимо систему

$$-\Delta u_n - (\omega^2 - m^2) u_n = d_n |u_n|^{2p} u_n, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.44}$$

Позначимо через $(Lu)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n$ і розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_n - \omega^2 u_n = d_n |u_n|^{2p} u, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.45}$$

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l_k^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків (див. [30]). Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються спектральними проміжками. Два з них напівскінченні. Якщо N=1, то скінченні проміжки не існують. Однак, у загальному випадку скінченні проміжки існують і найбільш цікавий випадок, коли ω^2 належить скінченному проміжку.

Всюди далі припускається, що виконується умова N-періодичності:

(i_4) *існує таке* $N \in \mathbb{N}$, *що коефіцієнти* a_n, b_n *і* d_n *є N-періодичними, тобто*

$$a_{n+N} = a_n,\ b_{n+N} = b_n \text{ і } d_{n+N} = d_n.$$

Будемо вивчати стоячі хвилі з kN-періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв'язки), тобто

$$u_{n+kN} = u_n, \tag{1.46}$$

де k – фіксоване натуральне число, та

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{1.47}$$

відповідно.

З системою (1.45) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(Lu - \omega^2 u, u\right) - \frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2},$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ із скалярним добутком

$$\left(u, v\right)_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n v_n\ .$$

Нагадаємо, що кожний елемент простору l^2 автоматично задовольняє умову (1.47).

Позначимо через l_k^2 скінченновимірний простір всіх kN-періодичних послідовностей зі скалярним добутком

$$\left(u, v\right)_k = \sum_{n\in Q_k} u_n v_n$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{n\in Q_k} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{kN}{2}\right] \le n \le kN - \left[\frac{kN}{2}\right] - 1 \right\},$$

і $\left[\frac{kN}{2}\right]$ – ціла частина $\frac{kN}{2}$.

На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\left(L_k u - \omega^2 u, u\right)_k - \frac{1}{2p+2}\sum_{n \in Q_k} d_n u_n^{2p+2},$$

де L_k – оператор L, який діє в просторі l_k^2.

За зроблених припущень функціонали J та J_k належать класу, а критичні точки цих функціоналів є розв'язками системи (1.45) з просторів l^2 та l_k^2 відповідно.

Таким чином, система (1.45) є системою рівнянь Ейлера-Лагранжа для функціоналів дії J та J_k у відповідних просторах. Ця система завжди має нульовий розв'язок, тому нас цікавлять нетривіальні критичні точки цих функціоналів.

Наступна лема дає нижні оцінки для критичних точок і відповідних критичних значень.

Лема 1.13. *Для будь-яких нетривіальних критичних точок функціоналів J та J_k правильні відповідно нерівності*

$$\|u\|^2 \ge \varepsilon_0,\ J(u) \ge \varepsilon,$$

$$\|u\|_k^2 \ge \varepsilon_0,\ J_k(u) \ge \varepsilon,$$

де $\varepsilon_0 = 2^{-\frac{1}{2p}} \delta^{\frac{1}{p}} l^{-\frac{1}{p}}$, $\varepsilon = 2^{-\frac{(8p+1)(p+1)}{2p(2p+1)}} \delta^{\frac{p+1}{p}} l^{-\frac{p+1}{p}} l_0$, $l = \sup\{d_n\}$ *і* $l_0 = \inf\{d_n\}$

Ще однією популярною мінімаксною теоремою є теорема про зачеплення.

Нехай H – гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z$ такий елемент, що $\|z\| = r$. Позначимо

$$M := \left\{ u = y + \lambda z : y \in Y,\ \|u\| \le \rho,\ \lambda \ge 0 \right\}$$

і

$$M_0 := \left\{ u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \ i\ \lambda \ge 0,\ або\ \|u\| \le \rho \ i\ \lambda = 0 \right\},$$

тобто M_0 – межа $M\left(\partial M\right)$. Нехай

$$N := \left\{ u \in Z : \|u\| = r \right\}.$$

Розглянемо C^1-функціонал I на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} I\left(u\right) > \alpha := \sup_{u \in M_0} I\left(u\right).$$

В такому випадку говорять, що функціонал I задовольняє *геометрію зачеплення.*

Сформулюємо тепер теорему про зачеплення ([23], [28], [32]).

Теорема 1.8 (про зачеплення). *Нехай I – функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, який задовольняє умову Пале-Смейла та геометрію зачеплення. Тоді існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I, що критичне значення*

$$I(u) := b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} I\left(\gamma(u)\right) \ge \beta,$$

де $\Gamma := \left\{ \gamma \in C\left(M, H\right) : \gamma\,|_{M_0} = id \right\}$. *При цьому*

$$I(u) \le \sup_{u \in M} I\left(u\right).$$

Виявляється, що функціонал J_k задовольняє умови теореми про зачеплення, а отже, має нетривіальні критичні точки, тобто правильна теорема:

Теорема 1.9. *Нехай виконується умова $\left(i_4\right)$, $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a,b)$ та $b \ne +\infty$. Тоді для будь-якого $k \ge 1$ система (1.45) має нетривіальний kN-періодичний розв'язок $u \in l_k^2$.*

Тепер за допомогою методу періодичних апроксимацій можна довести існування нетривіальних локалізованих розв'язків системи (1.45). Ці розв'язки є критичними точками функціоналу J. Однак цей функціонал не задовольняє умову Пале–Смейла і тому скористатися в даному випадку теоремою про зачеплення не вийде. Проте критичні точки функціоналу J можна побудувати за допомогою переходу до границі при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу J_k.

Теорема 1.10. *Нехай виконується умова* (i_4), $d_n > 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a,b)$ *та* $b \neq +\infty$. *Тоді система (1.45) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$.

Доведення. Нехай $u^{(k)} = \left(u_n^{(k)}\right) \in l_k^2$ нетривіальний kN-періодичний розв'язок рівняння (1.45), який існує за теоремою 1.9.

Зазначимо, що існують $\delta_0 > 0$ та $n_k \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$\left|u_{n_k}^{(k)}\right| \geq \delta_0. \tag{1.48}$$

Справді, у протилежному випадку $u^{(k)} \to 0$ в l^∞, а отже, $v^{(k)} = R_k u^{(k)} \to 0$ в l^∞. За теоремою 1, $\left\|v^{(k)}\right\|_{l^2} = \left\|u^{(k)}\right\|_k$ обмежена. Далі оскільки

$$\|v\|_{l^p}^p \leq \|v\|_{l^\infty}^{p-2} \|v\|_{l^2}^2, \quad p > 2, \tag{1.49}$$

то $v^{(k)} \to 0$ в l^p для всіх $p > 2$. А це означає, що $\left\|u^{(k)}\right\|_{l_k^p} \to 0$ для всіх $p > 2$. Тоді для відповідного критичного значення $b_k = J_k\left(u^{(k)}\right)$ маємо

$$0 < b_k = \frac{1}{4}\sum_{n \in Q_k} d_n \left(u_n^{(k)}\right)^4 \leq \frac{l}{4}\left\|u^{(k)}\right\|_{l_k^4}^4 \to 0,$$

що суперечить лемі 1.13.

В силу періодичності коефіцієнтів послідовність $\left\{u_{n+N}^{(k)}\right\}$ є також розв'язком рівняння (1.45). Тому можна вважати, що $0 \leq n_k \leq N-1$. Однак, таких значень скінченне число, тому, переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що всі ці номери співпадають, тобто $n_k = n_0$.

В силу обмеженості $\left\{u^{(k)}\right\}$, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), маємо $u_n^{(k)} \to u_n$ при $k \to \infty$ (для всіх $n \in \mathbb{Z}$). Крім того, за нерівністю (1.48),

$$\left|u_{n_0}\right| \geq \delta_0,$$

а отже, $u = \{u_n\}$ ненульова послідовність. Використовуючи граничний перехід, неважко показати, що $u = \{u_n\}$ є розв'язком рівняння (1.45).

Залишається показати, що $u = \{u_n\} \in l^2$. Справді, оскільки для будь-яких фіксованих $\tilde{n} \in \mathbb{Z}$ і достатньо великого k

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} \left|u_n^{(k)}\right|^2 \leq \left\|u^{(k)}\right\|_k^2 \leq C^2, \tag{1.50}$$

то переходячи в (1.50) до границі при $k \to \infty$, одержуємо

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} \left|u_n\right|^2 \leq C^2.$$

В силу довільності $\tilde{n}$, маємо, що $u \in l^2$. Теорему доведено. □

Зауважимо, що якщо $b = +\infty$, то рівняння (1.45) має тільки тривіальний розв'язок.

Оскільки спектр оператора $-\Delta + m^2$ є відрізком $[m^2, 4 + m^2]$, то з теореми 1.9 одержуємо наслідок:

Наслідок 1.1. Нехай $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ та $\omega^2 < m^2$. Тоді система (1.44) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.

Список використаних джерел

1. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
2. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75-87.

3. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Український математичний вісник*. 2021. Т. 18, № 4. С. 466-478.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Український математичний вісник*. 2022. Т. 19, № 4. С. 450-461.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Український математичний вісник*. 2020. Т. 17, № 3. С. 301-312.
6. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
7. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 260, № 5 (February). P. 619-629.
8. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, № 3 (February). P. 397-406.
9. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 4 (January). P. 453-462.
10. Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems. Nonlin. Diff. Eq. And Appl. 1995. Vol. 2. P. 553–572.
11. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen.* 2006. Vol. 39. P. 4955–4984.
12. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional hexagonal Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen*. 2007. Vol. 40. P. 1239–1264.
13. Drabek P., Milota J. Methods of nonlinear analysis. Applications to differential equations. Basel: Birkhäuser, 2007. 568 p.
14. Fermi E., Pasta J., Ulam S., Tsingou M. Studies of nonliniear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept*. LA-1940. 1955. Reprinted in *Lect. Appl. Math*. 1974. Vol. 15. 156 p.
15. Friesecke G., Wattis J. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Comm. Math. Phys*. 1994. Vol. 161 (2). P. 391-418.
16. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 2013. Vol. 33, №6. P. 2389-2401.
17. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys*. 2000. Vol. 211. P. 439–464.
18. Kreiner C. F., Zimmer J. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine–Gordon equation with linear pair interaction. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2009. Vol. 25, № 3 (November). P. 915–931.
19. Lions P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire*. 1984. Vol. 1. P. 223-238.
20. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205-211.
21. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*, 2006. Vol. 19. P. 27–40.
22. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*. 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.

23. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London – Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
24. Pankov A. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction. Disr. Cont. Dyn. Syst. Ser. S. 2019. Vol. 12, № 7 (November). P. 2097–2113.
25. Pankov A., Pflüger K. Traveling waves in lattice dynamical systems. Math. Meth. Appl. Sci. 2000. Vol. 23. P.1223–1235.
26. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A*, 2008. Vol. 464. P. 3219–3236.
27. Pankov A., Rothos V. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam lattices with saturable nonlinearities. Discr. Cont. Dyn. Syst. 2011. Vol. 30, № 3 (July). P. 835–840.
28. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence, R. I. : American Math. Soc. 1986. 100 p.
29. Smets D., Willem M. Solitary waves with prescribed speed on infinite lattices. *J. Funct. Anal*. 1997. Vol. 149. P. 266-275.
30. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. Providence, R. I. : American Math. Soc. 2000. 251 p.
31. Toda M. Theory of nonlinear lattices. Berlin: Springer–Verlag, 1989. 225 p.
32. Willem M. Minimax theorems. Boston: Birkhäuser Boston Inc. 1996. 162 p.
33. Xiang Y., Wattis J. A. D., Susanto H., Cummings L. J. Discrete breathers in a two-dimensional spring-mass lattice. *J. Phys. A: Math. And Theor.* 2009. Vol. 42. P. 1–26.
34. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of "solutions" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 15. P. 240-243.
35. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. *Математичні студії*. 2006. Т. 26, № 2. С. 140–153.
36. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії*. 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.
37. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. Вип. 16. С. 21-29.
38. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії*, 2010. Т. 33, №1. С. 78–84.
39. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика та інформатика.* 2021. Том 39, № 2. С. 7-21.
40. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник*, 2010. Т. 7, №2. С. 154–175.
41. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці : дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
42. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць*. 2021. Вип. 22. С. 5-19.

1.2. Асимптотичні розв'язки зчисленної системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами

Ковтонюк М. М.

На перших історичних етапах вивчення диференціальних рівнянь основною метою вчених було отримання точного розв'язку. Однак виявилось, що подати розв'язки через елементарні функції можливо лише у деяких випадках. Тому постало питання про способи побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь, наприклад у вигляді рядів, які рівномірно збігаються, або асимптотичних рядів.

Асимптотичні методи в інтегруванні диференціальних рівнянь використовували ще у 19 ст. учені Ж. Ліувіль, Ж. Фур'є, Ж. Штурм. Виявилось, що асимптотичні методи особливо ефективні при інтегруванні диференціальних рівнянь, у яких коефіцієнти є функціями так званого «повільного» часу $\tau = \varepsilon t$, де ε – деякий малий параметр. Ці рівняння називаються рівняннями з повільно змінними коефіцієнтами.

У 1807 р. Ж. Фур'є запропонував оригінальний метод розв'язування диференціальних рівнянь із частинними похідними, що приводить до звичайних диференціальних рівнянь з параметром, тому при його застосуванні виникають дві основні задачі: знаходження розв'язків (фундаментальних функцій) отриманих диференціальних рівнянь; розклад довільної функції в ряд за фундаментальними функціями. Обидві задачі в окремих випадках були розв'язані самим Ж. Фур'є.

Велику роль у розвитку асимптотичного подання розв'язків диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь відіграли праці учених Дж. Локка, К. Спарре, Р. Фаулера, В. Стєклова, Г. Біркгофа, Я. Тамаркіна, Л. Шлезінгера, В. Пугачова.

Істотні результати були отримані Н. Боголюбовим, В. Вазовим, Н. Криловим, Р. Лангер, Ю. Митропольським, Л. Чезарі [1, 4, 5, 6], які поклали початок новим асимптотичним методам у нелінійній механіці.

Базуючись на методах Н. Крилова і Н. Боголюбова український вчений Ю. Митропольський створив свій метод [12], який дозволив досліджувати нестаціонарні коливні процеси в системах із однією і багатьма ступенями вільності.

Багато відомих українських і зарубіжних математиків присвятили свої роботи знаходженню асимптотики за параметром при розв'язуванні диференціальних рівнянь, зокрема: К. Валєєв, А. Васильєва, В.Євтухов [7-8], І. Конет, Н.Кузьма [11], Л. Ніколенко, М. Перестюк, А.Самойленко [15], М.Сотніченко, А. Тихонов, М. Федорюк, С. Фещенко, М. Шкіль, В. Яковець та інші.

Систематичне вивчення диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами починається з 50-х роках XX ст, у цей період публікуються роботи С. Фещенка [18-20], які поклали початок вивченню цих рівнянь.

Було запропоновано метод асимптотичного подання розв'язків неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, у якому коефіцієнти є функціями так званого «повільного» часу $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$ − малий параметр.

Результати С. Фещенка були використані О. Горошко, А. Кніжним, Г. Савіним, В. Шавелло та іншими вченими для знаходження наближених розв'язків диференціального рівняння у прикладних задачах теоретичної фізики.

У 1955 р. С. Фещенко [18] доводить важливі теореми, які відносяться до розщеплення скінченної системи лінійних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \tag{1.51}$$

де x – n-вимірний вектор, $A(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(\tau)$, часу $\tau=\varepsilon t$, $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Випадок, коли серед коренів характеристичного рівняння неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt}=A(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon)+f(\tau,\varepsilon)e^{i\theta(a,\varepsilon)}, \qquad (1.52)$$

де $A(\tau,\varepsilon)$ – квадратна матриця порядку n, $f(\tau,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, які допускають асимптотичний розклад

$$A(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A^{(s)}(\tau),\ f(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s f^{(s)}(\tau),$$

де $0\le\tau=\varepsilon t\le L$, $\varepsilon>0$ – малий параметр, з’являються корені довільної кратності з кратними елементарними дільниками, досліджував український учений М. Шкіль [22-24]. Розроблені у цих роботах асимптотичні методи дозволили провести дослідження випадку кратних коренів як для однорідних, так і для неоднорідних систем диференціальних рівнянь вигляду (1.52). При цьому розглянуто так званий «резонансний» випадок, коли функція $i\nu(\tau)$ $\left(\nu(\tau)=\frac{d\theta(\tau,\varepsilon)}{dt}\right)$ при деяких $\tau\in[0,L]$ співпадає з одним із кратних коренів характеристичного рівняння

$$\det\left\|A^{(0)}(\tau)-\lambda E\right\|=0.$$

Цікавою є задача дослідження розв’язків у випадку зчисленних систем диференціальних рівнянь, оскільки останні застосовуються у розв’язуванні граничних задач математичної фізики. Зчисленні системи диференціальних рівнянь інтенсивно розвиваються у 50-70-х роках 20 ст. у роботах А. Тихонова і К. Персидського [13, 14], К. Валєєва [2, 3], В. Харасахала [21], зокрема формулюється і доводиться теорема існування розв’язку таких систем. Також їхня теорія розповсюджується на зчисленні системи диференціальних рівнянь, праві частини яких, крім шуканих функцій, містять ще й змінні параметри вигляду

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s\left(t, x_1, x_2, ..., \mu\right),\ s = 1, 2, ... \tag{1.53}$$

Ідеї А. Тихонова та К. Персидського полягають у тому, що деяка зчисленна система диференціальних рівнянь виду (1.53) «укорочується», тобто відкидаються по кількості функції, а також по кількості рівняння.

Потім розглядається «укорочена» система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f_i\left(\tau, x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ..., 0, \mu\right),$$

яка отримується із системи (1.53), якщо прирівняти до нуля всі шукані функції, починаючи з $n+1$-шої.

А до «укороченої» системи лінійних диференціальних рівнянь можна застосувати теорію, розроблену в працях С. Фещенка, М. Шкіля, М.Конета та інших учених. Зчисленні системи диференціальних рівнянь вигляду (1.51) досліджувалися у роботах М. Ковтонюк [9, 10].

Зазначимо, що побудова формальних розв'язків і дослідження їх асимптотичної поведінки для зчисленних систем диференціальних рівнянь (ЗСДР) суттєво відрізняється від побудови асимптотичного розв'язку систем диференціальних рівнянь в n-вимірному просторі того ж вигляду [9, 10]. Це пояснюється тим, що:

1. Для ЗСДР необхідно завжди досліджувати збіжність рядів і належність побудованих векторів до вибраного простору, чого не потрібно робити у випадку систем диференціальних рівнянь в n-вимірному просторі.

2. Для існування розв'язків скінченної системи вигляду (1.52) достатньо вимагати нескінченної диференційовності матриць $A_s\left(\tau\right)$, $s = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ У випадку ЗСДР необхідно дотримання додаткових умов: ряди

$\frac{d^s a_j(\tau,\varepsilon)}{d\tau^s} = \sum_{j=1} \frac{d^s |a_{ij}(\tau,\varepsilon)|}{d\tau^s}$ мають бути рівномірно збіжними $\forall \tau \in [0, L]$, $s = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ k$, де k – достатньо велике число і, крім того, $\left|\frac{d^s a_j(\tau,\varepsilon)}{d\tau^s}\right| \le \gamma_s$, $\forall j = 0,1,2,...$

3. При дослідженні нескінченної системи алгебраїчних рівнянь зустрічаються проблеми існування, які не мають аналогів у теорії скінченних систем. Наприклад, якщо розглянути дві нескінченні матриці A і B, то їх добуток може не існувати, оскільки ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} b_{ki}$ можуть бути розбіжними для всіх або для деяких значень j та i.

У цьому випадку дистрибутивний закон $A(B+C) = AB + AC$ має місце в тому розумінні, що якщо AB і AC існують, то існує і $A(B+C)$, що дорівнює $AB + AC$. Але $A(B+C)$ може існувати в той же час, коли AB і AC не існують.

4. У теорії скінченних матриць головну роль відіграють визначники, а в теорії нескінченних матриць їх значення в значній мірі втрачається.

Викладемо деякі, необхідні надалі, відомості з теорії функцій і теорії матриць. Розглянемо множину функцій $\{f_n(t)\}$, визначених на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Означення 1.1. *Множина функцій* $f_n(t)$ *називається рівномірно обмеженою на відрізку* $[\alpha, \beta]$, *якщо існує таке додатне число* L, *що для будь-якого* $t \in [\alpha, \beta]$ *має місце нерівність* $|f_n(t)| \le L$, *правильна для всіх функцій множини* $\{f_n(t)\}$.

Означення 1.2. *Множина функцій* $f_n(t)$ *називається одностайно неперервною на відрізку* $[\alpha, \beta]$, *якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\forall t', t'' \in [\alpha, \beta]$, *які задовольняють нерівність* $|t' - t''| < \delta$, *має місце* *нерівність* $\left|f_n\left(t'\right)-f_n\left(t''\right)\right|<\varepsilon$, *що виконується відразу для всіх функцій множини* $\{f_n(t)\}$.

Розглянемо множину всіх одностайно неперервних і рівномірно обмежених функціональних послідовностей $x(t)=\left(x_1(t), x_2(t), ...\right)$, t – дійсна змінна, $\left(t\in\left[\alpha, \beta\right]\right)$. Поклавши $d\left(x(t), y(t)\right)=\sup\limits_k\left|x_k(t)-y_k(t)\right|$, ми одержимо метричний простір, який позначимо через m, норма $\|x(t)\|:=\sup\limits_k\left|x_k(t)\right|$. Доведено, що цей простір m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей є лінійним, повним і нормованим, тобто банаховим простором [10].

Нехай $A=\left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{\infty}$ – нескінченна матриця. Норму її позначимо через $\|A\|$ і будемо розуміти число $\|A\|:=\sup\limits_j\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|a_{jk}\right|$, норму вектора b визначимо $\|b\|:=\sup\limits_k\left|b_k\right|$.

Для зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{\infty}P_{kj}(t)\cdot x_j(t),\ \left(k=1,2,...\right), \tag{1.54}$$

де t – незалежна змінна $\left(t\geq 0\right)$, $P_{kj}=P_{kj}(t)$ – дійсні або комплексні функції від t, нагадаємо деякі означення і теореми існування, виходячи з робіт К. П. Персидського [13, 14].

Означення 1.3. *Зчисленну систему функцій*

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ \ldots \tag{1.55}$$

будемо називати обмеженою на проміжку $t\geq 0$, *якщо існує таке число* $l<+\infty$, *для якого виконується умова*

$$\|x(t)\|=\sup_k\left\{\left|x_k(t)\right|\right\}\leq l,\ \left(k=1,2,...\right) \tag{1.56}$$

Означення 1.4. *Систему функцій (1.55) будемо називати розв'язком системи рівнянь (1.54), що проходить через точку* $\left(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots\right)$, *якщо* $x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0, \ldots$ *і якщо* $\dfrac{dx_k(t)}{dt}=\sum\limits_{j=1}^{\infty} P_{kj}(t)\cdot x_j(t)$, $\left(k=1,2,\ldots\right)$ *при всіх значеннях* $t \geq 0$, *причому, якщо система функцій (1.55) обмежена, то цей розв'язок будемо називати обмеженим.*

Якщо функції $P_{kj}(t)$ неперервні й на проміжку $t \geq 0$ задовольняють умовам

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|P_{kj}(t)\right| \leq \alpha(t),\ \left(k=1,2,\ldots\right), \tag{1.56}$$

де $\alpha(t)$ – деяка неперервна при всіх $t \geq 0$ функція, то має місце теорема:

Теорема 1. *Якщо праві частини системи лінійних диференціальних рівнянь (1.54) задовольняють умовам (1.56), то через кожну точку* $\left(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots\right)$ *області D;*

$$t \in \left[\alpha, \beta\right],\ \left\|x\right\| = \sup_k \left\{\left|x_k(t)\right|\right\},\ \left(k=1,2,\ldots\right) \tag{1.57}$$

проходить єдиний розв'язок $x_k = x_k(t)$, $\left(k=1,2,\ldots\right)$ *системи (1.56). Цей розв'язок буде обмеженим, одностайно неперервним і визначеним* $\forall t \in \left[\alpha, \beta\right]$.

Системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами розглядалися в роботах [25]. Зокрема, для систем виду

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t,\mu)x, \quad t \in [0;T] \tag{1.58}$$

у просторі R^n побудована фундаментальна система розв'язків, коли головна матриця $A_0(t)$ має прості власні значення, одне кратне власне значення. Крім того, для таких систем застосовано просторовий аналог систем лінійних диференціальних рівнянь з повільно- змінними коефіцієнтами, які залежать від двох малих параметрів виду

$$\frac{dx(\sigma,\varepsilon,\mu)}{dz} = A(\sigma,\varepsilon,\mu)x(\sigma,\varepsilon,\mu),$$

де $\sigma = \varepsilon^m \mu^p z, \quad m, p \in Z$ на системи меншої розмірності у випадку декількох груп коренів характеристичного рівняння. Аналогічні задачі у нескінченномірних просторах не розглядались.

Ми розглянемо зчисленні системи лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами вигляду (1.58) у просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей.

Мета дослідження: 1) визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами вигляду (1.58) має розв'язок; 2) побудувати формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь (1.58) у випадках, коли головна матриця має простий дискретний спектр або є нескінченною клітиною Жордана; 3) довести асимптотичний характер побудованих розв'язків.

Отож розглянемо у нескінченномірному просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей систему рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = A(\tau,\mu)x, \tag{1.59}$$

де $A(\tau,\mu) = \left\| a_{jk}((\tau,\mu)) \right\|_1^\infty$ - дійсна нескінченна матриця, елементами якої є функції $a_{jk}(\tau,\mu)$ дійсної змінної $\tau \in [0;T], x(\tau,\varepsilon,\mu)$ - нескінченномірний шуканий вектор, $\varepsilon,\mu > 0$ - малі дійсні параметри, для якої виконуються такі умови $(\tau = \varepsilon \cdot t)$:

1) матриця $A(\tau,\mu)$ має на відрізку $[0;T]$ рівномірне асимптотичне розвинення за степенями парамета μ:

$$A(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k(\tau;);$$

2) матриці $A_k(\tau), k=1,2,\dots$ - нескінченно диференційовні на відрізку $\left[0;T\right]$;

3) головна матриця $A_0(\tau)$ діагональна:

$$A_0(\tau)=\begin{pmatrix} \lambda_1(\tau) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2(\tau) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3(\tau) & \dots \\ . & . & . & \dots \end{pmatrix},$$

причому функції $\lambda_i(\tau), i=1,2,...$ залишаються простими (простий дискретний спектр), тобто $\forall\tau\in\left[0;T\right]$:

$$\lambda_i(\tau)\neq\lambda_j(\tau), i\neq j; i,j=1,2,...,\left|\lambda_i(\tau)-\lambda_j(\tau)\right|\geq d, j=2,3,...;$$

4) функції $\dfrac{d^k a_j(\tau,\mu)}{d\tau^k}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\left|a_{jm}(\tau,\mu)\right|}{d\tau^k}, k=0,1,2,\dots$неперервні і рівномірно обмежені на $\left[0;T\right]$:

$$\frac{d^k a_j(\tau,\mu)}{d\tau^k}\leq\gamma_k \quad \forall k=0,1,2,\dots$$

Зазначимо, що такого типу задачі досить детально вивчені для скінченних і зчисленних систем, які сингулярно залежать від одного малого параметра, а саме, коли $\mu=\varepsilon$ [10,16, 17, 22]. Системи з двома незалежними параметрами, незважаючи на їх практичне значення, досліджувалися менше і в скінченномірному просторі [24, 25].

Ми розглянемо аналогічну задачу у нескінченномірному просторі.

Частинні розв'язки системи (1.59) шукатимемо у вигляді:

$$x(\tau,\varepsilon,\mu)=u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma\right), \tag{1.60}$$

де $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ - невідомий нескінченно мірний вектор, який можна подати у вигляді рівномірного асимптотичного розкладу

$$u(\tau,\varepsilon,\mu)=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^r u_r(\tau,\varepsilon), \quad u_r(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_{rs}(\tau). \tag{1.61}$$

Знаходження розв'язку буде полягати у побудові алгоритму, за яким можна знайти невідомі члени розкладу (1.61). Підставимо вектор (1.60)–(1.61) у систему (1.59) і, врахувавши, що

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d(\sigma)+u(\tau,\varepsilon,\mu)\frac{1}{\varepsilon}\lambda_1(\tau)\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma),$$

отримаємо тотожність:

$$\varepsilon(\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma)+u(\tau,\varepsilon,\mu)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\lambda_1(\tau)\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma)=$$

$$=A(\tau,\mu)\cdot u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp(\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma)).$$

Винесемо у лівій частині рівності за дужки множник $\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d(\sigma))$ і скоротимо на нього, отримаємо:

$$\varepsilon u'(\tau,\varepsilon,\mu)+\lambda_1(\tau)u(\tau,\varepsilon,\mu)=A(\tau,\mu)u(\tau,\varepsilon,\mu),$$

або

$$\varepsilon(u_0'(\tau,\varepsilon)+\mu u_1'(\tau,\varepsilon)+\mu^2u_2'(\tau,\varepsilon)+\ldots)+\lambda_1(\tau)(u_0(\tau,\varepsilon)+\mu u_1(\tau,\varepsilon)+\mu^2u_2(\tau,\varepsilon)+\ldots)=$$

$$=(A_0(\tau)+\mu A_1(\tau)+\mu^2A_2(\tau)+\ldots)(u_0(\tau,\varepsilon)+\mu u_1(\tau,\varepsilon)+\mu^2u_2(\tau,\varepsilon)+\ldots).$$

В останньому співвідношенні прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях μ:

$$\mu_0: A_0(\tau)u_0(\tau,\varepsilon)-\lambda_1(\tau)u_0(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_0'(\tau,\varepsilon);$$

$$\mu^r: A_0(\tau)u_0(\tau,\varepsilon)-\lambda_1(\tau)u_r(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_r'(\tau,\varepsilon)-\sum_{j=1}^{r}A_j(\tau)u_{r-j}(\tau,\varepsilon), r=1,2,\ldots$$

і, враховуючи дистрибутивний закон для нескінченних матриць, отримаємо рекурентні співвідношення

$$(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_0A_0(\tau)u_0=\varepsilon u_0'(\tau,\varepsilon) \qquad (1.62)$$

$$(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_r(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_0'(\tau,\varepsilon)-\sum_{j=1}^{r}A_j(\tau)u_{r-j}(\tau,\varepsilon) \qquad (1.63)$$

Тепер у рівняннях (1.62) – (1.63) будемо прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε. Зокрема з рівняння (1.62) отримаємо:

$$\varepsilon^0 : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_{00}(\tau) = 0_\infty, \tag{1.64}$$

$$\varepsilon^s : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_{0s}(\tau) = u'_{0,s-1}(\tau). \tag{1.65}$$

У рівнянні (1.64) перейдемо до координатної форми запису:

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{00,j}(\tau) = 0,$$

Звідки бачимо, що $u_{00,j}(\tau) = 0, j = 2,3,...,$ а перший компонент вектор–функції $u_{00}(\tau)$ поки що невизначений. У рівнянні (1.65) покладемо $s = 1$, тоді

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{01,j}(\tau) = u'_{00,j}(\tau),$$

причому

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{01,j}(\tau) = 0, j = 2,3,...,$$

тому $u_{01,j}(\tau) = 0, j = 2,3,...,$ а якщо $j = 1$, то $0 = u'_{00,1}(\tau)$, звідки $u'_{00,1}(\tau) = const$, покладемо її рівною 1. Тепер вектор $u_{00}(\tau)$ стає визначеним, а перший компонент вектора $u_{01,1}(\tau)$ поки що невизначений.

Розглянемо рівняння (1.65) при $s = 2$:

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{02,j}(\tau) = u'_{01,j}(\tau), j = 1,2,...,$$

тому знову ж таки $u_{02,j}(\tau) = 0, j = 2,3,...,$ а якщо $j = 1,$ то $0 = u'_{01,1}(\tau)$, звідки $u_{01,1}(\tau) = 1$. Використовуючи метод математичної індукції можна довести, що вектори $u_{0s}(\tau), s = 0,1,2,...$ матимуть вигляд:

$$u_{0s}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, s = 0,1,2,... \tag{1.66}$$

Тобто вектор $u_0(\tau, \varepsilon)$ набере вигляду:

$$u_{0s}(\tau)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\.\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\.\end{bmatrix}+\varepsilon^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\.\end{bmatrix}+\ldots=\begin{bmatrix}1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots\\0\\0\\.\\.\\.\end{bmatrix}.$$

Розглянемо тепер другу частину рекурентних співвідношень (1.63), їх ми використаємо для визначення невідомих вектор – функцій $u_r(\tau,\varepsilon), r=1,2,...$

Нехай $r=1$, тоді:

$$(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_1(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_1'(\tau,\varepsilon)-A_1(\tau)u_0(\tau,\varepsilon),$$

де знову ж таки прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε:

$$\varepsilon^0:(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_{10}(\tau)=-A(\tau)u_{00}(\tau), \tag{1.67}$$

$$\varepsilon^s:(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_{1s}(\tau)=u_{1,s-1}'(\tau)-A(\tau)u_{01}(\tau), s=1,2,... \tag{1.68}$$

У рівнянні (1.67) перейдемо до координатної форми запису

$$(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau))u_{10,j}(\tau)=-a_{j1}^{(1)}(\tau), j=1,2,...,$$

звідки видно, що

$$u_{10,j}(\tau)=-\frac{a_{j1}^{(1)}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}, j=2,3,...,$$

а якщо $j=1$, то $0\cdot u_{10,1}(\tau)=a_{11}^{(1)}(\tau)$, звідки $a_{11}^{(1)}(\tau)=0$, а перший компонент $u_{10,1}(\tau)$ вектора $u_{10}(\tau)$ залишається поки що невизначеним.

Нехай $s=1$, тоді з рекурентних співвідношень (1.68) отримаємо:

$$(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau))u_{11,j}(\tau)=u_{10,j}'(\tau)-a_{j1}^{(1)}(\tau), j=1,2,...,$$

або

$$u_{11,j}(\tau)=-\frac{u_{10,j}(\tau)-a_{j1}^{(1)}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}, j=2,3,...,$$

$$u_{10,1}'(\tau)=a_{11}^{(1)}(\tau),$$

$$u_{10,1}(\tau)=\int_0^\tau a_{11}^{(1)}(\sigma)d\sigma$$

Отже, вектор – функція $u_{10}(\tau)$ набирає такого вигляду:

$$u_{10}(\tau)=\begin{bmatrix} \int_0^\tau a_{11}^{(1)}(\sigma)d\sigma \\ -\dfrac{a_{21}^{(1)}(\tau)}{\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau)}, \\ -\dfrac{-a_{31}^{(1)}(\tau)}{\lambda_3(\tau)-\lambda_1(\tau)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \tag{1.69}$$

Покажемо, що вектор $u_{10}(\tau)$ є елементом простору m. Дійсно, згідно з умовами 3)-4), накладеними на коефіцієнти системи (1.69), отримаємо

$$\left|u_{10,j}(\tau)\right|=\left|\frac{-a_{j1}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}\right|\le\frac{\gamma_0}{d},\, j=2,3,....,\left|u_{10,1}(\tau)\right|\le\gamma_0 T,\quad K=\max\left\{\frac{\gamma_0}{d};\gamma_0 T\right\},$$

тому функціональна послідовність $\left\{u_{1s,j}(\tau)\right\}, j=1,2,...$ є рівномірно збіжною на [0;T].

Вектори $u_{1s}(\tau)$ згідно з умовами 1)-2), накладеними на коефіцієнти системи (1.69), мають неперервні похідні по τ достатньо великих порядків. Функціональні послідовності $\left\{u_{1s,j}(\tau)\right\}$ також одностайно – неперервні на відрізку [0;T]. Дійсно, використовуючи теорему Лагранжа (теорему про середнє) і умови 3) - 4) отримаємо:

$$\left|u_{1s,j}(\tau_2)-u_{1s,j}(\tau_1)\right|=\left|\frac{-a_{j1}^{(1)}(\tau_2)}{\lambda_j(\tau_2)-\lambda_j(\tau_1)}-\frac{-a_{j1}^{(1)}(\tau_1)}{\lambda_j(\tau_1)-\lambda_1(\tau_1)}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{d^2}\left|a_{j1}^{(1)}(\tau_2)\lambda_j(\tau_1)-\lambda_1(\tau_1))-a_{j1}^{(1)}(\tau_1)\lambda_j(\tau_2)-\lambda_1(\tau_2))\right|=$$

$$=\frac{1}{d^2}\left|-a_{j1}^{(1)}(\tau_2)(\lambda_j(\tau_2)-\lambda_j(\tau_1))+\lambda_j(\tau_2)(a_{j1}^{(1)}(\tau_2)-a_{j1}^{(1)}(\tau_1))+\right.$$

$$+a_{j1}^{(1)}(\tau_2)(\lambda_1(\tau_2)-\lambda_1(\tau_1))-\lambda_1(\tau_2)(a_{j1}^{(1)}(\tau_2)-a_{j1}^{(1)}(\tau_1)) \ \Big| \le$$

$$\le \frac{\gamma_0}{d^2}\left(\left|\lambda_j'(\theta_1)\right|+\left|a_{j1}^{(1)}(\theta_2)\right|+\left|\lambda_1'(\theta_3)\right|+\left|a_{j1}'^{(1)}(\theta_4)\right|\right)\left|\tau_2-\tau_1\right| \le$$

$$\le \frac{4\gamma_0\gamma_1}{d^2}\cdot\left|\tau_2-\tau_1\right|, \tau \le \theta_i \le \tau_2, i=1,2,3,4.$$

Отже, послідовність функцій $\left\{u_{1s,j}(\tau)\right\}, j \ge 1$ задовольняє умові Ліпшиця зі сталою $\lambda = \dfrac{4\gamma_0\gamma_1}{d^2}$. А тому, за наслідком з теореми Арцела-Асколі випливає, що така функціональна послідовність є одностайно неперервною.

Нехай $r=2$, тоді

$$(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_2(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_2'(\tau,\varepsilon)-A_1(\tau)u_1(\tau,\varepsilon)-A_2(\tau)u_0(\tau,\varepsilon).$$

Продовжуючи міркування аналогічним чином, можна визначити всі останні вектори $u_r(\tau,\varepsilon)$, довести їх диференційовність по $\tau \in [0;T]$. Таким чином, буде побудований формальний розв'язок рівняння (1.60). Тобто нами доведена теорема:

Теорема 2. Якщо виконуються умови 1)–4), то зчисленна система диференціальних рівнянь (1.69) має формальний частинний розв'язок

$$x(\tau,\varepsilon,\mu)=u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda_1(\sigma)d\sigma\right),$$

де нескінченний вектор $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ визначається у вигляді формального степеневого ряду (1.61).

Зауваження. Аналогічно можна побудувати формальний частинний розв'язок, який відповідає іншим власним значенням $\lambda_i(\tau), j=2,3,\ldots$ головної частини $A_0(\tau)$ матриці $A(\tau,\mu)$.

Приклад. Розглянемо зчисленну систему диференціальних рівнянь у просторі m

$$
\begin{cases}
\varepsilon\dfrac{dx_1}{d\tau}=-\dfrac{x_1}{2}+\mu\sin\tau x_2+\mu\sin\tau x_3 \\
\varepsilon\dfrac{dx_k}{d\tau}=-\dfrac{x_k}{k\cdot 2^k}+\mu\sin\tau x_{k-1}+\mu\cos2\tau x_k+\mu\sin\tau x_{k+1}
\end{cases}
\tag{1.70}
$$

k=2, 3, 4, …, де $\tau\in[0;T]$ – незалежна змінна. Дана система диференціальних рівнянь задовольняє умови теореми 2. Дійсно, для матриці $A(\tau,\mu)$ правильний розклад в ряд за степенями μ, який у даному випадку вироджується у скінченну суму

$$A(\tau,\mu)=A_0(\tau)+\mu A_1(\tau)+\mu^2A_2(\tau),$$

де

$$
A_0=\begin{pmatrix}
-\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & -\frac{1}{2\cdot 2^2} & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & -\frac{1}{3\cdot 2^3} & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\cdot 2^4} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix},
$$

$$
A_1(\tau)=\begin{pmatrix}
0 & \sin\tau & \sin\tau & 0 & \dots \\
\sin\tau & cos2\tau & \sin\tau & 0 & \dots \\
0 & \sin\tau & cos2\tau & \sin\tau & \dots \\
0 & 0 & \sin\tau & cos2\tau & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix},
$$

і цей розклад є асимптотичним: $\left\|A(\tau,\mu)-\sum\limits_{s=0}^{m}\mu^sA_s(\tau)\right\|\le C\mu^{m+1}, m=0,1$.

Головна частина матриці $A(\tau,\mu)$ має простий точковий дискретний спектр, причому $\lambda_k\ne\lambda_m\quad\forall k\ne m,\ k,m=1,2,\dots,|\lambda_k-\lambda_1|\ge\dfrac{3}{8}\quad\forall k=2,3,4,\dots$. Похідні довільного порядку від сум, складені по рядках матриць $A_1(\tau)$ і $A_2(\tau)$, неперервні на відрізку $[0;T]$:

$$A_1(\tau): a_j(\tau) \le 2, \quad \frac{d^k a_j(\tau)}{d\tau^k} \le 1 + 2^k, k = 1,2,....$$

Тому формальний частинний розв’язок системи (1.70) можна подати у вигляді ряду за степенями параметрів ε і μ

$$u(\tau,\varepsilon,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r u_r(\tau,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r (\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_{rs}(\tau)) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mu^r \varepsilon^s u_{rs}(\tau),$$

а вектори $u_{rs}(\tau)$ мають вигляд:

$$u_{00} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, u_{0k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, k = 1,2,\ldots, \quad u_{1k}(\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sin 2\tau \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, k = 0,1,\ldots$$

$$u_{2k}(\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}\cos 4\tau \\ -\frac{3}{8}\sin\tau \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, k = 0,1,\ldots, \quad u_{3k}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{96}\sin 6\tau + \frac{1}{16}\sin 2\tau - \frac{6}{16}\tau \\ -\cos\tau - \frac{3}{8}\sin\tau \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли головна матриця $A_0(\tau)$ у розкладі $A(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k(\tau;)$ є нескінченною клітиною Жордана, тобто:

$$A_0(\tau)=\begin{pmatrix} \lambda(\tau) & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(\tau) & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(\tau) & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \qquad (1.71)$$

де $\lambda(\tau)$ неперервна на відрізку $\left[0;T\right]$ функція.

У цьому випадку можна побудувати точний розв'язок системи (1.59), а саме має місце теорема:

Теорема 3. Якщо виконуються умови 1) – 2), 4), накладені на коефіцієнти системи (1.59), умова (1.71), тоді існує розв'язок системи (1.59), який можна подати у вигляді

$$x(\tau,\varepsilon,\mu)=u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right), \qquad (1.72)$$

де $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ *- нескінченний вектор, який задовольняє рівняння*

$$\varepsilon\frac{du}{d\tau}=\tilde{A}(\tau,\mu)u, \qquad (1.73)$$

$$\tilde{A}(\tau,\mu)=\mu\sum_{s=1}^{\infty}\mu^{s-1}A_s(\tau)=\mu\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu) \qquad (1.74)$$

Доведення. Згідно з умовами 1) – 2), 4) у просторі m рівномірно обмежених і одностайно – неперервних функціональних послідовностей існує обмежений точний розв’язок нескінченної системи [5].

Підставимо вектор $x(\tau,\varepsilon,\mu)$, який визначається співвідношенням (1.72) у систему (1.59), отримаємо

$$\varepsilon\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right)+\varepsilon u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\lambda(\tau)=$$
$$=\left(A_0(\tau)+\mu\sum_{s=1}^{\infty}\mu^{s-1}A_s(\tau)\right)u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right),$$

або, після зведення подібних членів, маємо

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda(\sigma)d\sigma\right)\left(\varepsilon\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}-A(\tau,\mu)u(\tau,\varepsilon,\mu)+\lambda(\tau)u(\tau,\varepsilon,\mu)\right)=0.$$

Оскільки, згідно умови (1.73), виконується

$$\varepsilon\frac{du}{d\tau}=\tilde{A}(\tau,\mu)u,$$

то остання рівність є тотожністю. Таким чином, доведено, що вектор (1.72) є розв’язок зчисленної системи диференціальних рівнянь (1.59) з умовою (1.71).

Повернемось до умови (1.73), запишемо це рівняння в інтегральній формі

$$u(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0+\int_0^{\tau}\varepsilon^{-1}\tilde{A}(\tau_1,\mu)d\tau_1, \tag{1.75}$$

де $u_0=u(0,\varepsilon,\mu)$ - довільний вектор зі сталими елементами, який належить простору $\bar{m}$. Інтегральне рівняння (1.75) будемо розв’язувати методом послідовних наближень. Для цього покладемо:

$$\begin{aligned}
&u^{(0)}(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0,\\
&u^{(1)}(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0+\int_0^{\tau}\varepsilon^{-1}\tilde{A}(\tau_1,\mu)u^{(0)}d\tau_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.76)\\
&u^{(k+1)}(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0+\int_0^{\tau}\varepsilon^{-1}\tilde{A}(\tau_1,\mu)u^{(k)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Покажемо, що послідовність $\left\{u^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)\right\}$ векторних функцій $u^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)$ рівномірно збіжна по τ до деякої векторної функції $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ на відрізку $[0;T]$. Дослідимо на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_0+(u^{(n)}(\tau,\varepsilon,\mu)-u^{(n-1)}(\tau,\varepsilon,\mu))), \tag{1.77}$$

враховуючи (1.76), загальний член ряду (1.77) має вигляд

$$u^{(n)}(\tau,\varepsilon,\mu) = u_0 + \varepsilon^{-1}\int_0^{\tau} \tilde{A}(\tau_1,\mu)u^{(n-1)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1 =$$
$$= u_0 + \varepsilon^{-1}\int_0^{\tau} \tilde{A}(\tau_1,\mu)u_0 d\tau_1 + \frac{\mu^n}{\varepsilon}\int_0^{\tau} \tilde{\tilde{A}}(\tau_1,\mu)\int_0^{\tau_1} \tilde{\tilde{A}}(\tau_2,\mu)\cdot\ldots\cdot\int_0^{\tau_{n-1}} \tilde{\tilde{A}}(\tau_n,\mu)u_0 d\tau_n\cdot\ldots\cdot d\tau_2 d\tau_1 \tag{1.78}$$

а норми матриць $\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu)$ і вектора u_0 на відрізку $[0;T]$ задовольняють нерівностям

$$\left\|\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu)\right\| \le \gamma, \qquad \left\|u_0\right\| \le a \tag{1.79}$$

Використовуючи (1.78), (1.79), отримаємо оцінку

$$\left\|u^{(n)}(\tau,\varepsilon,\mu) - u^{(n-1)}(\tau,\varepsilon,\mu)\right\| \le \left(\alpha + \frac{\mu}{\varepsilon}\alpha\gamma T + \frac{\mu^2}{\varepsilon}\alpha\gamma^2\frac{T^2}{2!} + \ldots + \frac{\mu^{n-1}_{n-}}{\varepsilon}\alpha\gamma \;\; {}^{1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\mu^{n}_{n}}{\varepsilon}\alpha\gamma \;\; \frac{T^n}{n!}\right) -$$
$$-\left(\alpha + \frac{\mu}{\varepsilon}\alpha\gamma T + \frac{\mu^2}{\varepsilon}\alpha\gamma^2\frac{T^2}{2!} + \ldots + \frac{\mu^{n-1}}{\varepsilon}\alpha\gamma^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \frac{\mu^n}{\varepsilon}\alpha\gamma^n\frac{T^n}{n!}.$$

Звідки випливає, що для ряду (1.77) можна побудувати мажорантний збіжний ряд

$$\alpha\left(1 + \frac{\mu}{\varepsilon}\gamma T + \frac{\mu^2}{\varepsilon}\frac{\gamma^2 T^2}{2!} + \ldots + \frac{\mu^n}{\varepsilon}\frac{\gamma^n T^n}{n!} + \ldots\right).$$

На основі теореми Вейєрштрасса функціональний ряд (1.77) збіжний рівномірно по $\tau \in [0;T]$ і сума цього ряду $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ неперервна по τ. Тому у співвідношенні

$$u^{(k+1)}(\tau,\varepsilon,\mu) = u_0 + \int_0^{\tau}\frac{1}{\varepsilon}\tilde{A}(\tau_1,\mu)u^{(k)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1$$

можна перейти до границі під знаком інтеграла так, що гранична функція $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ задовольняє інтегральному рівнянню (1.75). Теорема доведена.

Згідно умов для матриці $\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu)$ запишемо асимптотичну формулу

$$\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu) = \sum_{s=1}^{m}\mu^{s-1}A_s(\tau) + O(\mu^m). \tag{1.80}$$

тоді для послідовних наближень можна отримати оцінку

$$u^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0+v_m^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)+O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right), \quad (1.81)$$

де $v_m^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)$ відомі векторні функції, які визначаються з рівнянь (1.76):

$$u^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0+\int_0^\tau\frac{\mu}{\varepsilon}\left(\sum_{s=1}^m\mu^{s-1}A_s(\tau_1)+O(\mu^m)\right)u^{(k-1)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1=$$

$$=u_0+\frac{\mu}{\varepsilon}\int_0^\tau\sum_{s=1}^m\mu^{s-1}A_s(\tau_1)u^{(k-1)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1+O(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon})=u_0+v_m^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)+O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right).$$

Зауважимо, що співвідношення $\frac{\mu}{\varepsilon}$ не може бути у даному випадку нескінченно – малою величиною при $\mu\to 0$ і $\varepsilon\to 0$. Отже, асимптотична формула для розв'язку системи диференціальних рівнянь набирає вигляду:

$$x(\tau,\varepsilon,\mu)=\left(u_0+v_m^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)+O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda(\tau_1)d\tau_1\right).$$

Доведемо, що побудовані раніше формальні розв'язки (1.60) – (1.61) при певних умовах мають асимптотичний характер у тому розумінні, що якщо обірвати відповідні ряди $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ на якомусь m-му члені

$$u_m(\tau,\varepsilon,\mu)=\sum_{r=0}^m\mu^r u_r(\tau,\mu)=\sum_{r=0}^m\mu^r\sum_{s=0}^m\varepsilon^s u_{rs}(\tau)=\sum_{r=0}^m\sum_{s=0}^m\mu^r\varepsilon^s u_{rs}(\tau) \quad (1.82)$$

і з отриманих таким чином часткових сум побудувати вектор $x_m(\tau,\varepsilon,\mu)$ (m-е наближення)

$$x_m(\tau,\varepsilon,\mu)=u_m(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda(\sigma)d\sigma\right), \quad (1.83)$$

то цей вектор при фіксованому m і при $\mu\to 0,\varepsilon\to 0$ прямує до точного розв'язку системи (1.59). Тобто має місце теорема:

Теорема 4. Якщо виконуються умови теореми 2 і:

5. Існують сталі r_1 і r_2 такі, що

$$\left\| \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \sum_{r=0}^m \mu^r A_r(\sigma) d\sigma \right) \right\| \le r_1 e^{r_2 \tau}, \qquad \tau \in [0;T],$$

6. $\operatorname{Re} \lambda_1(\tau) \le 0,$

7. $\| x(\tau,\varepsilon,\mu) - x_m(\tau,\varepsilon,\mu) \| = 0$ *при* $\tau = 0$, *то* $\forall \tau \in [0;T], \mu \in (0;\mu_0],$ $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0], \ldots \frac{\mu}{\varepsilon}$ *не є нескінченно малою величиною при* $\mu \to 0, \varepsilon \to 0$ *можна вказати таку сталу C, що має місце нерівність*

$$\| x(\tau,\varepsilon,\mu) - x_m(\tau,\varepsilon,\mu) \| \le C \frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}.$$

Доведення. Покажемо спочатку, що m-те наближення задовольняє системі (1.59) з точністю до величин порядку $O(\mu^{m+1})$. Оскільки для вектора $u_m(\tau,\varepsilon,\mu)$ виконується умова (1.71), то

$$x(\tau,\varepsilon,\mu) = x_m(\tau,\varepsilon,\mu) + \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^r \varepsilon^s u_{rs}(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d\sigma \right) =$$

$$= x_m(\tau,\varepsilon,\mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s u_{rs}(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d\sigma \right),$$

$$A(\tau,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r A_r(\tau) + \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^r A_r(\tau) = A(\tau,\mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau),$$

Підставимо такі подання вектора $x(\tau,\varepsilon,\mu)$ і $A(\tau,\mu)$ в систему (1.59), маємо:

$$\varepsilon \frac{dx_m(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau} + \varepsilon \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s u'_{rs}(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d\sigma \right) +$$

$$+ \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s \lambda_1(\tau) u_{rs}(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \lambda_1(\sigma) d\sigma \right) =$$

$$= \left(A(\tau,\mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau) \right) \cdot$$

$$\cdot\left(x_m(\tau,\varepsilon,\mu)+\mu^{m+1}\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{s=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}\varepsilon^s\lambda_1(\tau)u_{rs}(\tau)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right)\right),$$

або

$$\varepsilon\frac{dx_m(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=A_m(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu)+\mu^{m+1}f(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right), \quad (34)$$

де

$$f(\tau,\varepsilon,\mu)=\left(\sum_{r=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}A_r(\tau)\right)u_m(\tau,\varepsilon,\mu)+A_m(\tau,\mu)\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{s=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}\varepsilon^s u_{rs}(\tau)-$$
$$-\varepsilon\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{s=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}\varepsilon^s u'_{rs}(\tau)-\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{s=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}\varepsilon^s\lambda_1(\tau)u_{rs}(\tau), \quad (1.85)$$

Вектор $f(\tau,\varepsilon,\mu)$ рівномірно обмежений по τ на відрізку $[0;T]$ як сума векторів $A_s(\tau)u_{rs}(\tau),u'_{rs}(\tau),u_{rs}(\tau),$ які належать простору m (як видно з 10).

З рівності (1.85) видно, що вектор $\mu^{m+1}f(\tau,\varepsilon,\mu)$ має порядок малості $O(\mu^{m+1})$.

Розглянемо вектор

$$y(\tau,\varepsilon,\mu)=x(\tau,\varepsilon,\mu)-x_m(\tau,\varepsilon,\mu), \quad (1.86)$$

згідно умови 7 теореми 4 значення вектора $y(\tau,\varepsilon,\mu)$ у точці $\tau=0$ дорівнює нульовому вектору

$$y(0,\varepsilon,\mu)=0.$$

Використовуючи (1.85), систему (1.59) можна записати у вигляді

$$\varepsilon\frac{dx(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}-\varepsilon\frac{dx_m(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=$$

$$=A(\tau,\mu)x(\tau,\varepsilon,\mu)-A_m(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu)+\mu^{m+1}f(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right).$$

Вектори $A(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu)-A_m(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu)$ є елементами простору m, оскільки згідно з умовами теореми 2 і означенням норм вектора і матриці, маємо

$$\left\|A(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu)\right\|\le\left\|A(\tau,\mu)\right\|\cdot\left\|x_m(\tau,\varepsilon,\mu)\right\|=\gamma_0\cdot\sup\left\{\left|x_{mj}(\tau,\varepsilon,\mu)\right|\right\}=$$

$$=\sup\left\{\gamma_0\left|x_{mj}(\tau,\varepsilon,\mu)\right|\right\}$$

Використаємо дистрибутивний закон для нескінченних матриць, тоді вектор $y(\tau,\varepsilon,\mu)$ задовольняє такій системі диференціальних рівнянь

$$\varepsilon\frac{dy}{d\tau}=A(\tau,\mu)y(\tau,\varepsilon,\mu)+\mu^{m+1}\sum_{r=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}A_r(\tau)\cdot x_m(\tau,\varepsilon,\mu)+$$

$$+\mu^{m+1}f(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right). \tag{1.87}$$

Замінимо систему диференціальних рівнянь (1.87) еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$y(\tau,\varepsilon,\mu)=\int_0^{\tau}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\sum_{r=0}^{m}\mu^r A_r(\tau_1)d\tau_1\right)\tilde{A}(\tau_2,\mu)\,y(\tau_2,\varepsilon,\mu)d\tau_2+$$

$$+\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\sum_{r=0}^{m}\mu^r A_r(\tau_1)d\tau_1\right)\Phi(\tau_2,\varepsilon,\mu)d\tau_2, \tag{1.88}$$

де через $\tilde{A}(\tau,\mu)$ позначена нескінченна матриця і нескінченний вектор виду:

$$\tilde{A}(\tau,\mu=\sum_{r=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}A_s(\tau),$$

$$\hat{O}(\tau,\varepsilon,\mu)=\left(\sum_{r=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}A_r(\tau)u_m(\tau,\varepsilon,\mu)+f(\tau,\varepsilon,\mu)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right),$$

які також є елементами простору m. Тоді норма вектора $y(\tau,\varepsilon,\mu)$ задовольняє такій нерівності:

$$\left\|y(\tau,\varepsilon,\mu)\right\|\le\int_0^{\tau}\left\|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\sum_{r=0}^{m}\mu^r A_r(\tau_1)d\tau_1\right)\right\|\cdot\left\|\tilde{A}(\tau_2,\mu)\right\|\cdot\left\|y(\tau_2,\varepsilon,\mu)\right\|d\tau_2+$$

$$+\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\int_0^\tau\left\|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\sum_{r=0}^m\mu^r A_r(\tau_1)d\tau_1\right)\right\|\cdot\left\|\Phi(\tau_2,\varepsilon,\mu)\right\|d\tau_2;$$

$$\left\|y(\tau,\varepsilon,\mu)\right\|\le r_1e^{r_2T}M_1\int_0^\tau\left\|y(\tau_2,\varepsilon,\mu)\right\|d\tau_2+\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}r_1e^{r_2T}M_2T,$$

$$\left\|y(\tau,\varepsilon,\mu)\right\|\le\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}C.$$

Тоді $\left\|x(\tau,\varepsilon,\mu)-x_m(\tau,\varepsilon,\mu)\right\|\le\frac{\mu}{\varepsilon}\cdot\mu^m\cdot C,\quad C=\text{const}$. Теорема доведена.

Отже, у даному дослідженні нами показано особливості розв'язування зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами у просторі одностайно неперервних і рівномірно обмежених функціональних послідовностей; досліджено зчисленні системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами у випадках простого спектру головної матриці системи (1.59) і нескінченної клітини Жордана; побудовано формальні розв'язки і встановлено їх асимптотичний характер.

Використані методи дослідження: аналіз наявної літератури, порівняння результатів досліджень, проведених іншими науковцями, їх узагальнення і конкретизація для розв'язання математичної задачі. Серед математичних методів розв'язування диференціальних рівнянь використано наближені методи: послідовних наближень і асимптотичні.

Перспективи досліджень. Для зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами важливо продовжити дослідження побудови формальних розв'язків та їх асимптотичного характеру у випадку кратного дискретного спектру головної матриці у просторі рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей.

Ще один напрямок розвитку теорії зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами: побудова асимптотичних розв'язків зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь шляхом «укорочення».

Список використаних джерел

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний /за ред. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. М.: Наука, 1974. 504 с.
2. Валеев К. Г. Бесконечные системы дифференциальных уравнений / за ред. К. Г. Валеев, О. А. Жаутиков. Алма-Ата: Наука, 1974. 413 с.
3. Валеев К. Г. Применение метода малого параметра при исследовании устойчивости решений системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / за ред. К. Г. Валеев, Т. С. Султанбеков. К.: Институт нар. хоз-ва, 1987. 11 с.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
5. Wasow W. Linear turning point theory. New York: Springer, 1985. 243 p.
6. Перестюк М.О., О.В.Капустян О.В., Фекета П.В., Касімова Н.В. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь: навч. посіб. Київ: Київський університет, 2015. 125 с.
7. Евтухов В. М. Асимптотическое интегрирование некоторых классов систем линейных дифференциальных уравнений. Нелинейные колебания. 2000. Т. 3, № 3. С. 334-357.
8. Евтухов В. М. Некоторые вопросы асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. *Укр. мат. ж.* 2002. Т. 54, № 1. С. 20 - 42.
9. Ковтонюк М.М. Асимптотическое поведение решения одной бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн*. 1983. Т.35. С.630-636.
10. Ковтонюк М.М. О построении формального решения бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной дробного ранга. *Приближенные методы математического анализа.* К.: 1982. С.72-79.
11. Кузьма Н. Г. Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися и осцилирующими коэфициентами. *Укр. мат. журн*. 1990. Т. 40, № 5. С. 642 – 644.
12. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы математической физики / за ред. Ю. А. Митропольский. К. : Вища школа, 1988. С. 256 – 263.
13. Персидский К. П. О спектре характеристичесних чисел. *ПММ*. 1950. Т.14, вып.5. С. 3 – 18.
14. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений. *Известия АН Казах. ССР, сер. мат. и мех.,* 1948. Вып. 2. С. 2 – 35.
15. Самойленко А.М., Ключник І.Г. Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. *Нелінійні коливання.* 2009. Т.12, № 2. С. 208-234.
16. Сотниченко Н. А., Кузьма Н. Г. Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися и осцилирующими коэффициентами. К.: Киев, инжен. строит, ин-т, 1991. 30 с.

17. Сотниченко Н.А., Фешенко С.Ф. Об асимптотическом решений для дифференциального уравнения в банаховом пространстве при наличии конечной системы кратных собственных значений. *Укр. мат. журн*., 1976, т. 28, 5. С.655-663.
18. Фещенко С. Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн*. 1955. Т. 7, С. 163 – 179.
19. Фещенко С. Ф. Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. К.: Наукова думка, 1966. 252 с.
20. Фещенко С. Ф., Н. И. Шкиль, Ю. П. Пидченко, Н. А. Сотниченко. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / за ред.. С. Ф. Фещенко. К.: Наукова думка, 1981. 292 с.
21. Харасахал В. Х. О фундаментальных решениях сетных систем дифференциальныъ уравнений. *Известия АН Казах. ССР, сер. мат. и мех.* 1950. Вып. 4. С. 98 – 108.
22. Шкиль Н.И., Завизион Г.В. Асимптотическое представление решений системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной при наличии точки поворота. Доклады АН УССР, сер. А, 1988, 9. С. 21–25.
23. Шкиль Н. И. Системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. К.: Наукова думка, 1966. 252 с.
24. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. К. : Вища школа, 1971. 226 с.
25. Яковець В.П.Асимптотика общего решения линейной сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами. Дифференциальные уравнения, 1993, 29. №2. С.256–266.

РОЗДІЛ 2
ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ТА ІНФОРМАТИЧНОГО ОСВІТНЬОГО ПРОСТОРУ ЗАКЛАДУ ВИЩОЇ ОСВІТИ

2.1. Концептуальні засади форсайт моделювання синергетичного освітнього простору бакалавра математики

Ковтонюк М. М., Соя О.М., Косовець О. П., Леонова І. М.

Тенденції розвитку суспільства (як позитивні, так і негативні) вимагають від особистості здатностей адаптуватися і водночас змінюватися, привчатися жити і працювати в умовах невизначеності. Звичайно, ця проблема безпосередньо стосується і освітнього простору суспільства, зокрема підготовки бакалавра математики у закладах вищої освіти. Варто усвідомити, що в деякий момент часу під впливом мінливого зовнішнього середовища відпрацьовані алгоритми навчання студента можуть не працювати, а, отже актуальним є питання прогнозування моделі, методів навчання та мобільності студентів і викладачів.

Професійна підготовка бакалавра математики здійснюється у педагогічній системі «університет», яка включає підсистеми нижчого рангу: «факультет», «спеціальність», «кафедра», «навчальна дисципліна». Розвиток педагогічної системи може йти адаптивним і біфуркаційним шляхами. У випадку *адаптивного* типу розвитку відбувається адаптація (пристосування) педагогічної системи до змін зовнішнього і внутрішнього середовища зі збереженням характеру функціональної системи (відносно стійкий стан) (рис. 1) [12].

Зміна зовнішнього і внутрішнього середовища педагогічної системи (змінюються студенти, викладачі, підручники, форми, методи і засоби навчання, організаційні компоненти тощо) призводить до появи її нових властивостей: система переходить у новий якісний стан, який називають *біфуркаційним* (біфуркація – роздвоєння).

Біфуркаційний розвиток освітньої системи здійснюється за максимально ефективного використання (або невикористання) можливостей внутрішнього середовища і ресурсів. Для нього характерна нестійкість і значна множина можливих траєкторій розвитку освітньої системи (атракторів). З точки біфуркації розвиток педагогічної системи може йти вздовж одного з можливих атракторів (або система лишається на тому самому рівні розвитку, або прогресує, або регресує), і вибраний шлях еволюції системи, можливо, й не кращий, ніж ті, що були відкинуті випадковим чином. З погляду синергетичної методології біфуркаційні режими більш прийнятні для розвитку освітніх систем.

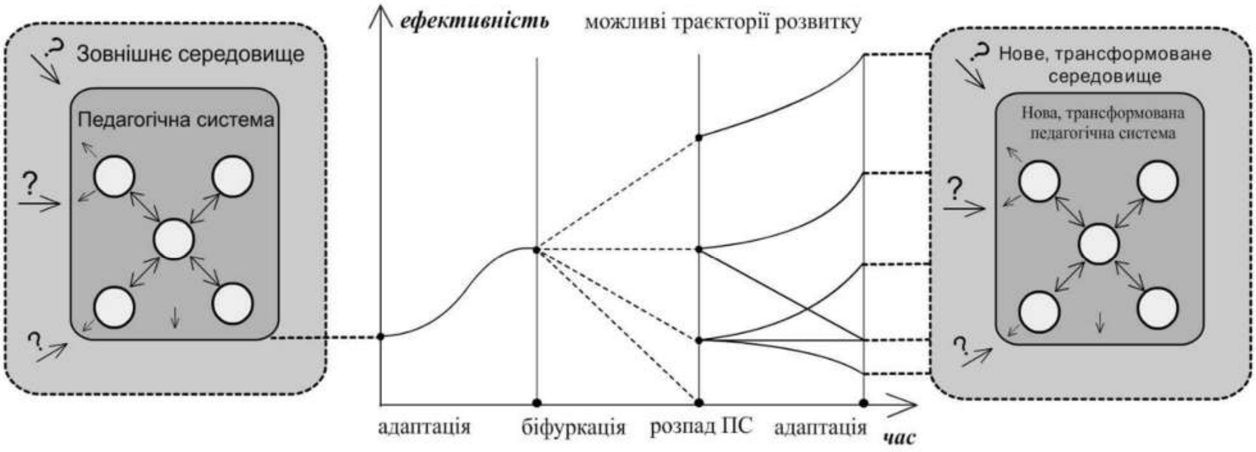


Рис.1. Синергетична модель професійної підготовки майдутнього вчителя математики

(за матеріалами М. Ковтонюк [12])

С. Гончаренко, В. Кушнір, Г. Кушнір нестійкість у *педагогічному процесі* з позицій синергетики розглядали як його можливі й природні ситуації. Саме в нестійкому стані порівняно зі стійким педагогічний процес набуває зовсім нових властивостей. Синергетика розглядає нестійкий стан педагогічного процесу як передумову порушення старих його структур і виникнення нових дисипативних структур (дисипація тлумачиться у фізичних системах як перехід частини енергії впорядкованого процесу в енергію невпорядкованого процесу; або як розсіювання [28, с. 6]).

Отже, можна констатувати, що з появою серйозних викликів у підготовці бакалавра математика постають принципово суперечливі проектні завдання, які неможливо розв’язати з позицій лише еволюційного підходу. Тут уже має бути спроба заглянути у майбутнє, тобто використати наукове передбачення, педагогічний прогноз та форсайт-технології для можливості моделювання освітнього середовища бакалавра математики вже сьогодні.

Наукове передбачення у плануванні підготовки бакалаврів математики у закладах вищої освіти забезпечує у майбутньому наявність кваліфікованих фахівців у сфері математики й статистики. Це особливо важливо в контексті розвитку технологій, де аналітика даних, машинне навчання, нейронні мережі, штучний інтелект та пов’язані з цим математичні дисципліни стають все більш потрібними для багатьох галузей економіки, таких як фінанси, страхування, технології, логістика тощо.

Якщо в країні є достатня кількість висококваліфікованих математиків, це сприяє розвитку інноваційних технологій та досліджень, що своєю чергою позитивно впливатиме на економіку держави в цілому.

Ці аспекти демонструють, що прогнозування та попереднє планування підготовки бакалаврів з математики сприяють розвитку інновацій, фінансового сектору, оптимізації стратегій та прийняттю рішень, а також забезпечують безпеку інформації. Такий розвиток математичної освіти матиме позитивний вплив на економічний добробут країни [23].

Зазначимо, що поняття «передбачення майбутнього», «прогноз» не є новим у науковій літературі, їм присвячені дослідження відомих учених Дж. Томсона (1958) [46], Г. Рейхенбаха (1959) [21], В. Ешбі (1962) [1], К. Руденка (1972) [44], С. Гончаренка (1997) [28], Л. Онищук (2016) [35], S. P. Sun, J. H. Fan, Q Wang [24], K. A. Piirainen, A. D. Andersen, P. D. Andersen [18], N. Yüksel, H. Çifci [17].

Учений К. Руденко тлумачить поняття «передбачення майбутнього» як результат пізнавальної діяльності людини, як «рису розумової діяльності, яка свідомо досліджує у формі ідеальної моделі предмети, явища чи умови їх існування, що ще не існують або чомусь недосяжні для досліду й перевірки. Основою наукового передбачення є пізнання об’єктивних внутрішніх зв’язків предметів і явищ, законів, що розкривають цей внутрішній, необхідний, істотний і сталий зв’язок явищ і конкретних умов їх існування. Все це дає можливість у процесі пізнання переходити від відомого до невідомого, від минулого і сучасного до майбутнього» [43].

Підсумком є прогноз як можлива модель майбутнього результату людської діяльності.

Довгострокове прогнозування розвитку науки та технологій у розвинених країнах (Японії, США, Великобританії, Німеччині, Франції та багатьох інших) на національному рівні здійснюється на основі методології форсайт, яка зарекомендувала себе як ефективний інструмент для визначення пріоритетів у цій галузі [5, 13, 22, 47]. Одержання найбільш об'єктивної картини майбутнього, яка відповідає інтересам всіх груп суспільства, забезпечується залученням у процес форсайту широких мас громадськості, представників науки та бізнесу, що дозволяє врахувати історичні, політичні, соціально-економічні і культурні особливості розвитку країни [40].

Термін «форсайт» (англ. foresight – передбачення) застосував Гастон Бергер (Gaston Berger) наприкінці 50-х років у відомому журналі «Два світи», але формування підходу до передбачення як окремої, самостійної проблеми відбулося лише на початку 90-х років XX ст. [29].

Єдиного консолідованого визначення вказаного поняття наразі у науковій літературі немає. У статтях [13, с. 8; 19; 24; 26] та інших, проаналізовано найбільш характерні погляди різних вчених та наукових інституцій на цю проектно-прогностичну технологію, а також подана хронологія виникнення форсайту як терміну та його еволюція у часі.

Форсайт – це інструмент, який добре себе зарекомендував в сучасних реаліях, і зокрема використовується для розробки спільного довгострокового бачення, визначення пріоритетів досліджень, сканування майбутніх загроз і можливостей, а також для формулювання довгострокових стратегій, орієнтованих на майбутнє [2].

Форсайт – добре відома та широко використовувана методологія для створення середньо- та довгострокових бачень технологічного, економічного та соціального розвитку [19].

Форсайт є одним із важливих наукових міркувань про майбутнє, що враховує умови невизначеності та розглядає об’єкти дослідження (країну, регіон, компанію, суспільство тощо) систематично [14].

У нашому дослідженні під форсайтом будемо розуміти «систематичний спільний процес побудови бачення майбутнього, націлений на підвищення якості прийнятих у цей момент рішень і прискорення спільних дій», що дозволяє застосовувати «спеціальну технологію формування пріоритетів розвитку різних сфер життя суспільства з метою мобілізації максимально великої кількості учасників для досягнення якісно нових результатів у розвитку країни, регіону, громади» [13, с. 9].

Науковцями N. Yüksel & H. Çifci запропоновано новий підхід до технологічного прогнозування під назвою Foresight Periscope Model (FPM). Представлено загальну функціональну модель форсайту з дев’ятьма послідовними фазами під назвою «Foresight». Авторами розроблено новий підхід до технологічного прогнозування, який складається з трьох взаємозалежних модулів: ресурси, методологія та стратегії майбутнього. «Модель використовує подібність перископа, тобто ресурси та методологія є основними частинами, які дозволяють організації бачити альтернативне майбутнє та надавати майбутні стратегії, яких слід дотримуватися, щоб вижити та конкурувати в навколишньому середовищі» [17].

Важливою є ефективність використання форсайту для розроблення стратегії розвитку університетів як трансфер інновацій в економічний простір держави.

S. P. Sun, J. H. Fan, Q. Wang (Китай) аналізують проблеми створення загального плану китайських університетів як у теорії, так і в практичній діяльності. Ними висувається основна концепція стратегічного плану foresight-development, вказуються необхідні умови та можливі шляхи з огляду на науковий розвиток вищої освіти та створення гармонійного середовища розвитку з метою досягнення характерного для університету розвитку [24].

Автори статті [19] (Данія – Фінляндія – Норвегія) вважають, що форсайт інноваційної системи (innovation system foresight – ISF) здійснює значний внесок у виконання третьої місії університетів шляхом створення активного діалогу між університетами, промисловістю та суспільством, сприяє реалізації дослідницько-конструкторських та інноваційних аспектів шляхом розвитку спільного розуміння порядку денного та майбутніх потреб зацікавлених сторін. Крім того, форсайт дає можливість спроектувати освіту відповідно до визначених потреб. Університети мають розуміти свою роль у ширшій інноваційній системі, щоб реалізувати потенціал економічного розвитку та, відповідно, свою третю місію.

Дослідження [3] має на меті представити основу для прогнозування в освіті, надає політикам, стратегам планування і стейкхолдерам можливість допомогти їм визначити можливе та бажане майбутнє освіти. Процес включає: a) етап попереднього прогнозування, на якому виконуються підготовчі дії для виконання початкового прогнозу; b) основний етап форсайту – здійснюються методи операціоналізації процесу форсайту; c) етап після прогнозування, на якому дії, пов'язані з поширенням результатів, відбуватимуться в різні часові рамки. При цьому три важливі здібності людей для Форсайту включають: концептуальне розуміння, здатність до розрахунків, дух прогнозування та методологію. Крім того, основними компонентами для вивчення майбутнього в галузі освіти є: філософія, цілі, теоретичні основи, виконавчі процеси з урахуванням розвитку освіти на національному та міжнародному рівнях.

Стаття [20] спрямована на обговорення правомірності застосування підходів форсайту для потреб розвитку компетенцій, орієнтованих на майбутнє. Автори акцентували увагу на ключових компетентностях майбутнього, відібраних у результаті аналізу проведених досліджень провідними науковцями й практиками. Обгрунтували правомірність застосування підходів форсайту для розвитку компетенцій, орієнтованих на майбутнє: потреба підготувати наступне покоління співробітників до роботи у світі мінливості, невизначеності, складності й неоднозначності; широкий спектр необхідних навичок із зростаючою роллю м’яких компетенцій; система освіти та навчання не реагують належним чином на формування компетенцій, орієнтованих на майбутнє; необхідно запропонувати підходи до формування компетентностей, необхідних у майбутньому; прогнозування та грамотність майбутнього розглядаються як відповідні підходи, однак їм потрібно більше зосередитися на індивідуальному рівні та нових методах й інструментах.

Основні дослідницькі проблеми, які розглядають автори [10], стосуються: 1) визначення компетенцій, які допоможуть науковцям, підприємцям і студентам справлятися з невизначеністю та 2) передачі компетенцій цільовим групам через навчальні теми, вибрані з досліджень майбутнього та репертуару підприємництва.

Форсайт, як один із технологічних аналізів, орієнтованих на майбутнє, розвивається протягом усього свого шляху в межах поколінь на основі різних концепцій у різних вимірах. Станом на сьогодні сучасники виділяють структуру генерації форсайтів нових технологій як шосте покоління. Форсайт 6.0 оцінюється за основними вимірами, учасниками, економічними основами та принципами. Зростання концепцій Індустрії 4.0, нетократії, кіберпростору, біотехнологій, етичних цінностей і розмитості ролей в економіці є основними чинниками цього нового покоління передбачення [8].

У статті [26] розкривається перспектива інституційної зрілості для розвитку спроможності форсайту в наукомістких організаціях. Пропонується сітка зрілості форсайту, структурована за п’ятьма вимірами: люди; складність методів, платформ та інфраструктур; складність областей застосування; організаційна структура і вплив на навколишнє середовище. Описані п’ять рівнів зрілості, які поступово розвиваються в організаційних можливостях і становлять еволюційну логіку, оперативно сформульовану в процесах, проектах і циклах передбачення. Наведено приклад застосування форсайту в Colombian public knowledge-intensive organizations, що надає докази його корисності та застосовності для створення можливостей передбачення.

Обґрунтовано, що розробка інноваційних технологій у сфері підготовки майбутніх фахівців як трансфер інновацій в економічний простір держави здійснюється на основі постмодерністського підходу до аналізу професійної освіти, який інтегрувався засобами особистісно-орієнтованого, діяльнісного, професійно-творчого та психолого-педагогічного підходів на системному універсальному рівні. Розглянуто професійні вимоги до педагогів-новаторів [7].

Ґрунтовний аналіз науково-дослідницьких праць та ресурсів, що містять матеріали про сучасні реалії та перспективні напрямки форсайт моделювання синергетичного освітнього простору підготовки майбутніх фахівців, дозволив у дослідженні використати різноманітні методи. Розгляд публікацій, присвячених питанню, що вивчається, у періодичних виданнях філософського, психолого-педагогічного та методичного спрямування є підґрунтям для визначення понятійно-категоріального апарату та аналізу, систематизації й узагальнення наявного досвіду, обґрунтування теоретичних засад дослідження.

Для практичної реалізації розробленої авторами моделі конкурентної системи підготовки бакалавра математики пропонуються методи наукового передбачення: метод спроб і помилок (trial andieror), індукція, дедукція, абстрагування, аналіз незнайомих предметів, синтез і як поєднання обох – експеримент [43, с. 167-174], сценарний метод тощо. Проаналізуємо деякі з них.

В основу методу «спроб і помилок» покладається експеримент або знання, які одержані на його основі. Такими знаннями, за переконаннями Г. Рейхенбаха, є висновки, одержані за інструкцією як «інструментом передбачаючого пізнання». Евристичність індуктивного методу полягає в тому, що він допомагає знайти серію подій, частота яких прямує до границі, якщо вона існує. Пошуки цього каскаду подій йдуть шляхом спроб і помилок. Встановивши певну частоту появи подій, робиться висновок, що ця ж сама повторюваність подій матиме місце і в майбутньому в аналогічній ситуації. За переконанням Г. Рейхенбаха «передбачення майбутніх дослідів може бути зроблене лише в розумінні спроби; ми враховуємо його (передбачення) можливу хибність і якщо передбачення виявляється помилковим, ми готові повторити нову спробу. Метод спроб і помилок – є ефективним інструментом передбачення. Очікуване ствердження є ставка (posit): замість того, щоб знати його істинність, ми знаємо його ступінь (rating), що вимірюється у термінах його ймовірності» [21].

Теоретичною основою цього виду передбачення є сукупність положень, виведених індуктивним шляхом. Тому кожний одержаний результат є лише ймовірним, бо «все знання ймовірне і може бути стверджене тільки у розумінні ставок (posits); індукція ж є інструментом для знаходження кращих ставок (posits)» [21, с. 246].

Метод спроб і помилок підтримував В. Ешбі, зокрема учений сформулював закон необхідної різноманітності (відомий як «закон Ешбі»), згідно з яким для досягнення стійкого наміченого результату різноманітність системи, яка управляє, повинна бути такою ж, як і різноманітність діяльності, якою управляють [1].

Метод спроб і помилок відомий також в науковій літературі як «метод перебирання варіантів».

Причинне передбачення – це спосіб виведення наслідків через екстраполяцію основних тенденцій системи причинних законів на нові явища дійсності, які до цього часу невідомі або ще не існують [44, с. 181]. Але не все можна передбачити на основі причинних зв'язків, зокрема між одиничними і випадковими явищами. Передбачення на основі причинних зв'язків можливе тоді і тільки тоді, коли ці зв'язки є не тільки необхідні, а й одночасно всезагальні й істотні, тобто мають характер закону.

Метод екстраполяції полягає у створенні нового абстрактного образу предмета на основі існуючих знань.

Ejdys J. та інші (Польща) стверджують, що застосування сценарного методу сприяє усвідомленню того, що, хоча майбутнє тільки одне, прийти до нього можна різними шляхами, вибір яких залежить від учасників Форсайт-процесу. Проект їх сценарного планування вбачав три завдання: формування образів майбутнього факультету з участю його співробітників; виявлення основних чинників, що визначають розвиток екосистеми факультету; складання сценаріїв, розроблених на основі оригінальної Форсайт-методології: S1 – «Успішний і заможний» (Outstanding and Wealth) – високий інтелектуальний капітал забезпечує ефективне залучення фінансування досліджень і розробок і за рахунок цих коштів отримує потенціал до подальшого нарощування; S2 – «Розумний, але бідний» (Skilled and Impoverished) – досягнутий рівень інтелектуального капіталу недостатній для припливу адекватного фінансування досліджень і розробок, проте факультет і університет в цілому продовжують інвестувати в розвиток цього активу. Завдяки чому при послідовних та рішучих діях з'являються шанси підвищити ефективність залучення коштів, тим самим нарощування інтелектуального капіталу дозволяє в перспективі перейти до сценарію 1, однак недостатньо послідовні кроки зроблять зворотний ефект, і в результаті реалізується сценарій 3; S3 – «Відчужений і покинутий» (Alienated and Abandoned) – низький рівень інтелектуального капіталу не дозволяє ефективно конкурувати за фінансування досліджень і розробок і тому не має коштів для свого підживлення, тільки зовнішні інтервенції або цілеспрямовані зусилля персоналу зможуть запобігти катастрофі та перейти до сценарію 2; S4 – «Обладнаний, але заблукалий» (Equipped and Lost) – наявний рівень інтелектуального капіталу поки що дозволяє ефективно конкурувати за фінансування досліджень і розробок, однак без постійної підтримки він може бути швидко втрачений, а працівники факультету перетворяться на ремісників від науки, у результаті чого знизиться конкурентоспроможність у залученні коштів на дослідження і розробки, потім настане деградація і поступове сповзання в сценарій 3 [4].

Зазвичай методи породжують технології (форсайт, аналіз взаємних впливів, експертні панелі, огляд наукової літератури, технологічні дорожні карти, математичне моделювання тощо).

Прогностичні ідеї вчених, висловлені ними у статтях, а також власні авторські наукові дослідження дають можливість запропонувати для обговорення конкурентну систему підготовки бакалавра математики у вигляді структурно-функціональної моделі (рис. 2).

Модель складається з трьох блоків: передпрогнозна ситуація, прогностичне моделювання і прогностичне анкетування.

Перший блок моделі фактично є цільовим, він вказує на дисипативний стан зовнішнього і внутрішнього середовища педагогічної системи підготовки бакалавра математики через збір даних прогнозного фону і необхідність реформування системи. Тому мета формулює завдання на прогноз і теоретичну концепцію дослідження.

Другий блок виражає прогностичне моделювання педагогічної системи. Тут ми враховуємо підходи (компетентнісний, системний, діяльнісний, особистісно орієнтований, синергетичний) і принципи прогнозування: загальні методологічні (об’єктивності, пізнання, детермінізму, розвитку, історичності, єдності теорії з практикою) і спеціального призначення (принципи дослідницької доказовості, понятійно-термінологічної однозначності та точності, цілісності та системності, неперервності, варіативності, дослідно-експериментальної верифікації, практичної спрямованості) [35, с. 17].

Рис. 2. Модель створення конкурентної системи підготовки бакалавра математики (авторська розробка)

Теоретична концепція дослідження реалізовується в побудованій базисній моделі освітнього середовища університету через систему «зміст освіти – викладачі – блок особистісних якостей – студенти».

Третій блок моделі забезпечує постійний моніторинг якості базової моделі через діагностику і коригування компетентностей бакалавра математики і пропонує вибір одного з біфуркаційних шляхів формування його професійних компетентностей.

Розглянемо форсайт-технології щодо можливостей моделювання процесу навчання бакалавра математики як прогнозування освітнього процесу в умовах дистанційного, змішаного та стаціонарного навчання для розвитку студента як майбутнього конкурентоспроможного фахівця (рис. 3).

Рис. 3. Форсайт-технології моделювання педагогічних систем: навчальна дисципліна, спеціальність (авторська розробка)

Технологія форсайтингу через методи аналізу взаємних впливів, експертних панелей, огляд джерел, технологічні дорожні карти [5], реалізується кафедрою математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. У статті ми виділимо декілька коротко- і середньострокових дорожніх карт, які можна залучати до прогностичного моделювання підготовки бакалавра математики:

1) популяризація математики як необхідної умови розвиненого суспільства;
2) розвиток змішаного навчання, зокрема можливість співпраці з іншими університетами України та зарубіжжя; активне використання дистанційного навчання: створення відкритих освітніх ресурсів: сайтів, YouTube-каналів тощо;

3) забезпечення інформатизації навчального процесу та доступ до міжнародних інформаційних систем у ЗВО;
4) творча співпраця викладача і студента, реалізація суб'єкт-суб'єктних взаємин викладача і студента за активної ролі студента;
5) регулярна модернізація освітніх програм, навчальних планів;
6) фундаменталізація професійної підготовки бакалавра математики, яка передбачає ретельний добір фундаментального ядра змістового, процесуального, управлінського блоків, блоку практичної підготовки;
7) в умовах синергетичного освітнього простору надзвичайно важливим є постійний моніторинг математичної освіти у різних країнах, дослідження інтеграційних процесів й моделювання на їх основі підготовки бакалавра.

Стосовно першої дорожньої карти зауважимо, що популяризація математики та інформатики має надзвичайно велике значення для розвитку сучасного суспільства. Щороку з 2018 року кафедрою математики та інформатики факультету математики, фізики і комп'ютерних наук Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського проводиться засідання круглого столу «Форсайт розвитку математичної та інформатичної освіти Вінниччини та України». На зустрічі запрошуються спікери-експерти сучасних напрямків з цифрових технологій, віртуальної реальності, тривимірного моделювання для обговорення, планування і прогнозування як спроба передбачити необхідні фахові компетентності студента, які будуть відповідати потребам сучасного і майбутнього ринку праці.

У 2018 році учасники Круглого столу обговорювали за тематичними напрямами питання щодо основних напрямів освітньої реформи Нової української школи в контексті розвитку математичної освіти на Вінниччині та в Україні (Мар'яна Ковтонюк), сучасні вимоги до підготовки вчителя математики, інформатики та фізики (Петро Пасіхов, Юрій Пасіхов), моніторинг якості підготовки старшокласників з математики, інформатики та фізики (Андрій Півторак).

У 2019 році експерти Круглого столу обговорювали особливості виконання проектів з розробки мобільних застосунків (Тарас Коломієць), засоби навчання інформатики учнів з порушеннями зору в інклюзивних класах (Олена Косовець), використання сервісів Microsoft в освітній діяльності (Сергій Пойда).

2020 року запрошені експерти запропонували розглянути математику як мистецтво життя (Ігор Клочко) і спілкувалися з випускниками намагаючись відповісти на питання «Чи є життя після фізмату?» (Олександр Музика).

У 2021-2023 роках експерти акцентували увагу на питанні «Навіщо вивчати математику та комп'ютерну математику?», роль математики та інформатики у професійній діяльності та в особистому житті (експерти Дмитро Мира, Яна Мельник, Олена Пугач). Експерти окреслили напрями своєї професійної діяльності, поділилися досвідом заснування освітнього простору для дітей, перспективами та планами на майбутнє, пролунали й запрошення для випускників факультету на вакантні посади до освітніх структур. Важливим напрямком у роботі випускників виділяється волонтерство.

Спікерами-експертами заходів є випускники факультету математики, фізики і комп'ютерних наук.

Запрошені експерти та стейкхолдери 2018-2022 років звертають увагу на потреби ринку праці у фахівцях з тривимірної графіки та доповненої реальності, потребу суспільства на освітні гуртки, школи та онлайн-курси з математики для підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання.

Прогнозуючи тенденції ринку праці на основі доповідей та пропозицій експертів-стейкхолдерів, викладачами кафедри математики та інформатики у 2019 році були розроблені навчальні програми «Комп'ютерна графіка», «Основи вебдизайну» і «Вебпрограмування».

Викладачі кафедри математики та інформатики є засновниками та членами редакційної колегії науково-популярного альманаху «Математика та інформатика навколо нас». В альманасі друкуються науково-популярні статті, які стосуються математики та інформатики, їх становлення, розвитку, вивчення, застосування, нових досліджень тощо. З 2018 року видано сім збірників, у яких опубліковано більше двохсот праць науково-популярного змісту.

З 2017 року колективом кафедри математики та інформатики започатковано проведення Міжнародної науково-практичної Інтернет-конференції «Математика та інформатика в науці й освіті: виклики сучасності».

Надзвичайно важливою дорожньою картою виступають **друга і четверта**, які пропонують розвивати змішане навчання, враховуючи суб'єкт-суб'єктні стосунки викладача і студента. У рамках дослідження форсайту розвитку математичної та інформатичної освіти на кафедрі математики та інформатики також функціонує STEM-центр «Навчально-науковий тренінг-центр з інформатики та комп'ютерної математики» для студентів молодших курсів та учнів, вчителів закладів загальної середньої освіти. Метою STEM-центру є розвиток мотивації до вивчення технічних, природничо-математичних наук; популяризація технічних та природничо-математичних спеціальностей; підготовка фахівців нової генерації, здатного приймати виклики майбутнього, перетворювати і виробляти нові знання як для свого професійного майбутнього, так і для особистого зростання в будь-якій самостійній та груповій діяльності.

У 2019-2022 р.р. тренінг-центр працював за такими сучасними напрямами інформатики і математики: Python: бібліотека tkinter, віконні додатки, construct 2, створення ігор, платформер, одновимірні (багатовимірні) масиви, сучасні методи розмітки Web-сторінки, способи використання графічних зображень у застосунках з графічним інтерфейсом (на прикладі Lazarus), задачі Без'є та Ерміта, практичне застосування знань і навичок з математики та інформатики до розв'язування реальних задач на прикладі задач компанії Google, криптографія: шифр Цезаря, Віженер та шифр RSA, створення циклічної анімації, імпорт зображень та аудіо.

Основними завданнями «Навчально-наукового тренінг-центру з інформатики та комп'ютерної математики» є залучення молоді до навчально-практичної та науково-дослідницької діяльності; поглиблення знань учнів, студентів із технічних та природничих дисциплін; створення умов для розвитку творчої діяльності молодого дослідника; сприяння професійному самовизначенню учнів; залучення студентів до викладацької діяльності, створення творчих наукових колективів, підготовка резерву студентів педуніверситету, виховання у студентів потреби постійно вдосконалювати знання з обраної професії.

У 2020-2021 роках під керівництвом завідувача кафедри математики та інформатики, доктора педагогічних наук, професора Мар’яни Ковтонюк викладачі кафедри розробили проєкт «3D-моделювання і його використання для протезування кінцівок» та стали переможцями Конкурсу проектів в рамках «Бюджету громадських ініціатив Вінницької міської об’єднаної територіальної громади». Заступник керівника проекту Андрій Чикішев наголосив, що основною його метою є проведення для жителів територіальної громади циклу популярних лекцій з 3D-моделювання, що дозволить наблизити освіту та наукові дослідження до соціальних потреб жителів громади й втілювати в життя на місцевому рівні засади Конвенції ООН «Про права інвалідів». Інклюзивна політика міста має сприяти повноцінній і рівноправній участі в житті всіх громадян, максимально враховувати потреби (інтереси) кожного, створюючи комфортне місто для всіх жителів без виокремлення певної категорії [15].

У межах реалізації цього Проекту на базі освітнього хабу «NotBox» у Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського авторами проведено цикл популярних лекцій з математичного і комп’ютерного тривимірного моделювання для створення прототипів зовнішньої форми протезу, ідентичного за формою до втраченої кінцівки. Спікер Олена Косовець, кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики та інформатики виступила з лекцією «Сканування. Робота в програмі (Artec studio). Принципи практичного сканування об'єктів в автоматичному режимі», яка наголосила, що створення 3D-моделей сьогодні незамінний процес не тільки в промисловості, але і в багатьох областях діяльності людини, таких як медицина, архітектура, будівництво, дизайн, освіта тощо. Виготовлення 3D-моделей дозволяє оцінити технічні та фізичні особливості об'єкта моделювання ще до створення його реального зразка. Спікер Ярослав Крупський, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математики та інформатики виступив з лекцією «Моделювання (Rhinoceros)» у якій зазначив, що завдяки 3D-моделі виробу можна проаналізувати його розмір, комплектацію та матеріал, з якого він має бути виготовлений. Створення моделі – невід'ємна частина у виготовленні реального виробу. Тривимірне моделювання є окремим видом комп'ютерної графіки, яке включає всі необхідні інструменти та прийоми, що застосовуються для побудови об'ємної моделі об'єкта.

У рамках реалізації цього Проекту проведено творчий конкурс з 3D-моделювання серед учнів та студентів Вінницької міської об'єднаної територіальної громади. Понад 30 учнів та студентів надіслали тривимірні моделі для участі у конкурсі. Оцінювання відбувалося за розробленими критеріями з урахуванням вимоги до конкурсних робіт, які були зазначені у Положенні Конкурсу. Переможців конкурсу нагороджено цінними призами, а саме: 3D-принтерами, графічними планшетами.

Що стосується **третьої дорожньої карти**, то у сучасному дисипативному стані освітнього простору метою науково-педагогічного форсайту є створення ефективної конкурентної методичної системи підготовки бакалавра математики, яку не можна пояснювати як звичайне продовження минулого, тому що нова педагогічна система можливо набуватиме принципово інших форм, засобів та методів. Реалізація оголошеної мети забезпечується методично виваженим застосуванням передових цифрових технологій.

Сучасний викладач вищої школи в умовах дистанційної та змішаної освіти навчається створювати та використовувати мультимедійний та інтерактивний освітній контент для підвищення його дидактичного потенціалу та зацікавлення цифрового покоління студентів. Цифрові технології дозволяють зробити процес навчання мобільним, диференційованим та індивідуальним. Таким заняттям властиві адаптивність, керованість, інтерактивність, поєднання індивідуальної та групової роботи, часова необмеженість навчання [27].

У 2020-2021 роках університети України у зв'язку із пандемією Covid-19 змушені були перейти на дистанційну форму навчання та повністю змінити методичну систему навчання та взаємодії учасників освітнього процесу.

Перехід на дистанційне навчання спричинив справжній «вибух» створення нових освітніх цифрових інструментів різного призначення. Щоб віртуальне заняття було максимально інтерактивним, педагогічно успішним, яке досягнуло поставленої мети, викладач має орієнтуватися та обирати відповідні цифрові засоби, які будуть вирішувати виконання певних етапів заняття в залежності від його типу.

Перехід на дистанційне навчання має ще один достатньо важливий аспект як для кожної особистості, так і для суспільства в цілому - економічний і безпековий. Глобальний світ непередбачуваний, але навчальний процес має та повинен відбуватися у таких складних екстремальних ситуаціях та подіях і в цих умовах потрібно готувати майбутніх фахівців у різних галузях економіки.

Прогнозування та успішне планування викладачем навчальної діяльності в умовах дистанційної освіти складається з двох етапів:

– перший етап: відповідно до виду запланованого заняття обрати цифровий інструмент, який забезпечує досягнення поставлених програмних результатів навчання;

– другий етап: вибір віртуального навчального середовища для забезпечення організаційних процесів, що супроводжують навчання.

Викладач має не просто знати цифровий інструментарій для проведення дистанційного навчання, а методично виважено застосовувати цифрові засоби для вирішення певних етапів заняття у залежності від його виду: застосовувати відповідний цифровий інструмент в залежності від обраних методів навчання на конкретному етапі заняття. Наприклад, для реалізації методів «Робота у парах» та «Мозковий штурм» у віртуальних відеоконференціях Zoom, Google Meet чи

Microsoft Teams радимо скористатися командою для створення окремих віртуальних кімнат із вказаною кількість студентів; метод «Мікрофон» реалізувати за допомогою команди «Підняти руку».

Для успішної взаємодії усіх учасників освітнього процесу варто врахувати чи вміють викладач і студент користуватися обраним застосунком, володіють навичками роботи з його відповідними функцій та командами, які будуть використані на занятті.

Серед розмаїття цифрових інструментів викладач має обрати, який саме застосунок буде використовувати на занятті. Наприклад, для проведення віртуальних відеоконференцій працюють такі додатки як Zoom, Google Meet, Microsoft Teams, WebEx, TrueConf, Webinar Meetings, GoToMeeting, Skype та ін. Під час такого непростого рішення важливо врахувати:

– простоту у встановлені та налаштуванні додатка;

– вимоги до швидкості роботи мережі Інтернет;

– чи підтримує кирилицю;

– наявність реєстрації та її етапи (можливо додаток є платним);

– скільки часу потрібно, щоб студенти навчилися користуватися цим додатком;

– чи містить додаток необхідні функція для організації навчання, наприклад, розподіл студентів на окремі кімнати, чат для спілкування та ін.;

– пройти «шлях студента» і врахувати необхідний час для налаштування технічних моментів;

– чи можна зберігати напрацювання для подальшої роботи і у якому форматі;

– чи можуть використовувати обраний інструмент люди з особливими освітніми потребами.

Успішне розв’язання завдань підготовки фахівців із вищою освітою значною мірою залежить від сформованості освітнього простору викладачів закладів вищої освіти. На викладача, згідно із Законом України «Про вищу освіту» (стаття 58), покладаються складні й відповідальні обов’язки: постійно підвищувати професійний рівень, педагогічну майстерність і наукову кваліфікацію; забезпечувати високий науково–теоретичний і методичний рівень викладання дисциплін у всьому обсязі освітньої програми відповідної спеціальності; додержуватися норм педагогічної етики, моралі, поважати гідність осіб, які навчаються у закладах вищої освіти, дотримуватися в освітньому процесі та науковій (творчій) діяльності академічної доброчесності та забезпечувати її дотримання здобувачами вищої освіти [42].

Освітній простір викладача є об’єднанням *особистісного, ціннісного, культурного, комунікативного, діяльнісного та інформаційного* підпросторів (рис. 4) і будується на компетентностях, що мають яскраво виражений діяльнісний характер і виявляються в умінні здійснювати вибір, виходячи з адекватної оцінки себе у конкретній ситуації.

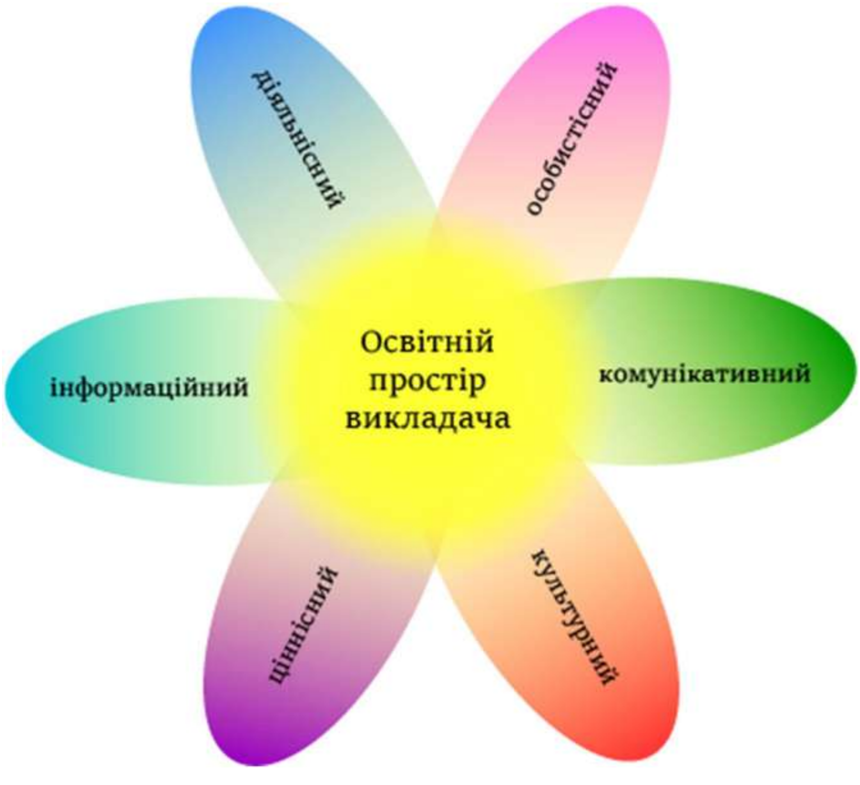


Рис. 4. Освітній простір викладача університету (авторська розробка)

Професійні компетентності викладача математики та інформатики ми розглядаємо як *унікальне поєднання професійних знань, умінь і якостей* *викладача, об'єднаних гуманно-ціннісним ставленням до студентів і колег, творчим підходом до праці, постійною спрямованістю на особистісне і професійне вдосконалення; використанням інноваційних і цифрових технологій, у процесі чого формуються нові авторські педагогічні системи, які сприяють освітньому та економічному розвитку держави*. Серед основних компетентностей викладачів математики та інформатики ми виокремлюємо такі: високі предметні компетентності, що включають науково-дослідницьку роботу; особистісні (креативність, динамічність, здатність до діалогу, дискусії); інноваційні (здатність використовувати у навчальному процесі різні інновації); проєктувальні, конструювальні; організаційно-практичні; комунікативні (в тому числі тьюторство, менторство, експертність).

Професійна компетентність викладача забезпечується комплексним поєднанням знань, діяльності та особистісних якостей. Ці структурні компоненти компетентності тісно пов'язані між собою і впливають один на одного. Знання відображаються та проявляються у діяльності, через діяльність знання можна отримати, осмислити, упорядкувати. З іншого боку знання впливають на діяльність.

Цінності, потреби, мотиви людини є рушійною силою для її діяльності. Особистісні якості в один період роботи викладача стимулюють, в інший – обмежують його діяльність, але в кінцевому випадку впливають на ефективність його роботи. З іншого боку за результатами діяльності можна зробити висновок про особистісні якості викладача, його здатність та готовність до професійної діяльності.

Знання та особистісні якості викладача також корелюють між собою. Знання можуть стимулювати розвиток особистісних якостей, збагачувати чи, навпаки, девальвувати цінності. З іншого боку, від цінностей, мотивації, здібностей, здатності та готовності викладача залежить спрямованість його знань та успішність оволодіння ними [31, с. 171].

Оскільки фундаментальні компетентності у викладача закладу вищої освіти вже сформовані, то він працює над своїм вдосконаленням, прямуючи за обраною траєкторією (рис. 5, маршрути 1 або 2).

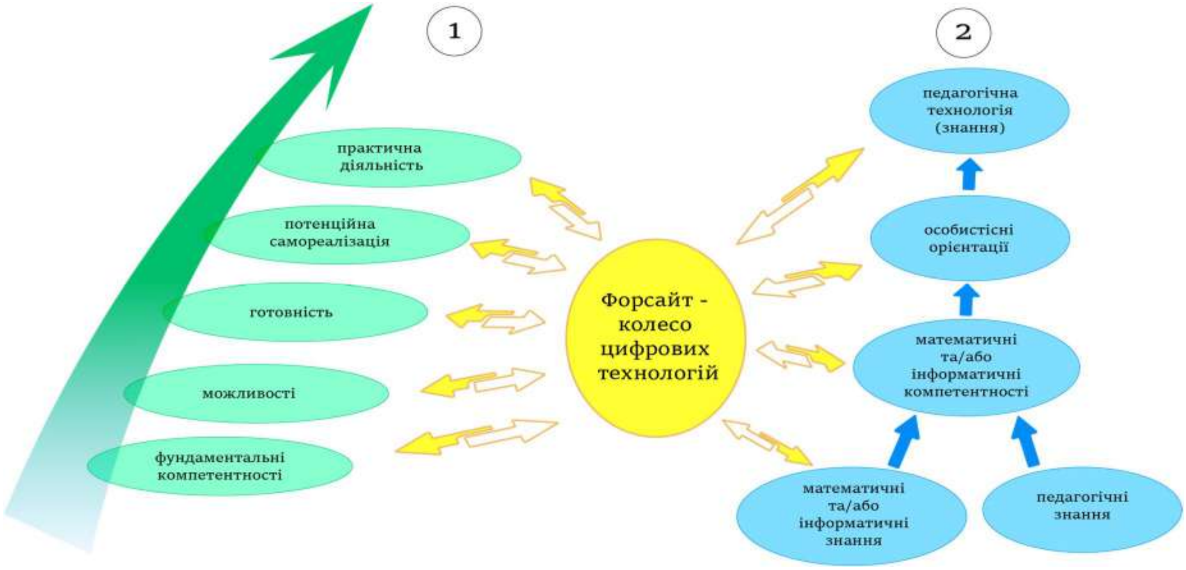


Рис. 5. Поле побудови маршрутів досягнень професійних компетентносте викладача університету (варіанти 1 (авторський) або 2 [25]).

Основні напрями роботи викладача в сучасних умовах: загальна характеристика (науково-педагогічний стаж, вчені звання та наукові ступені, звання); науково-дослідна робота (участь у держбюджетних, госпдоговірних, кафедральних наукових темах, грантові проєкти; публікація монографій, статей у Scopus, Web of Science, фахових виданнях України, науково-популярних журналах); науково-методична робота (видання підручників, навчальних посібників, методичних вказівок, розроблення та впровадження засобів контролю знань студентів, у тому числі й електронних; розроблення, модернізація та впровадження у навчальний процес цифрових технологій); організаційна робота включає широкий спектр обов'язків, які, з одного боку, стосуються основних напрямів науково-педагогічної діяльності, а з іншого – характеризують якості викладача як особистості (підготовка і проведення конференцій, олімпіад, конкурсів; підготовка студентів до участі у різних наукових та методичних заходах; участь у роботі комісій, рад тощо); міжнародна діяльність (отримання грантів від державних і недержавних грантодавців, активна співпраця із закордонними колегами та партнерами).

У компетенції викладача закладу вищої освіти входить розроблення та написання робочих програм, силабусів, активна участь у ліцензуванні й акредитації спеціальностей.

Таким чином, тріада «Навчатися – доучуватися – переучуватися!» сприймається викладачем як заклик до особистісного зростання, неперервної освіти, постійного підвищення професійної кваліфікації. А це можливо в умовах організації адаптивного навчання викладачів і студентів.

Елементами адаптації й моделювання діяльності студентів і викладачів виступають адаптивні навчальні системи, оскільки вони мають будувати освітню траєкторію здобувача освіти з урахуванням персоналізації та відображенням особливих освітніх потреб студента. Зазвичай персоналізація передбачає адаптивну взаємодію, адаптивний доступ до курсу, адаптивний контент навчального матеріалу, адаптивну підтримку співпраці. Витоки технологій адаптації, що застосовуються в навчальних адаптивних системах, виходять зі сфери інформаційних навчальних систем (адаптивне планування, інтелектуальний аналіз даних, підтримка інтерактивного виконання завдань, підтримка виконання завдань на готових прикладах і підтримка спільної роботи) або зі сфери адаптивних гіпермедіасистем, які відповідають трьом критеріям: гіпермедіасистема повинна бути гіпертекстовою або гіпермедійною, мати модель користувача й адаптувати свій гіпермедіапростір, використовуючи цю модель.

Основними дидактичними принципами адаптивного навчання в сучасній інформаційній системі є принципи: активності – передбачає, що діяльність студентів має сприяти розвитку не тільки умінь розв’язувати задачі за заданим алгоритмом, а й самостійно будувати алгоритми для виконання творчих завдань; самостійності – виражається в тому, що в студентів формується вміння самостійно орієнтуватися в нових розділах і темах, самостійно мислити й знаходити алгоритми для виконання нових завдань; індивідуальності – передбачає індивідуалізовані способи взаємодії студента й викладача, що сприяє формуванню у здобувачів освіти високого рівня інтелектуального розвитку; систематичності й послідовності – передбачає логічне, послідовне формування загальних і фахових компетентностей як з кожної теми, так і логічного зв’язку між різними темами [6, с. 14-19].

Принцип адаптивності навчання в інформатиці та математиці спрямований на побудову викладачами індивідуальних освітніх програм, націлений на психологічні коригування стереотипу дій особистості, її мислення й механізми реалізації.

Інформаційна навчальна система для адаптивного навчання інформатики та математики повинна забезпечувати умови для досягнення навчальних цілей; поєднувати різні типи подання навчальних матеріалів з урахуванням індивідуальних особливостей здобувачів освіти щодо сприйняття матеріалу (візуал, аудіал або кінестетик), бути адаптована під різні форми й методи навчання [9, 36].

Включення інформаційних систем в адаптивне навчання відбувається за такими моделями:

1. Інформаційно-навчальна модель націлена на отримання нових знань, формування умінь і навичок, застосування інноваційних педагогічних технологій, самопізнання.

2. Контрольно-коригуюча й діагностична модель передбачає застосування засобів контролю знань, експертних навчальних систем, діалогове вирішення практичних завдань.

3. Дослідницька модель пов’язана з формуванням дослідницьких здібностей здобувачів освіти й спрямована на набуття досвіду наукового дослідження.

4. Комунікативна модель спрямована на регулювання вибору режимів спілкування і взаємодії студентів й викладачів [11; 41].

Упровадження інноваційних технологій і дистанційного навчання у вищій освіті є однією з операційних цілей, завданнями якої є «створення індустрії інноваційних технологій та засобів навчання, що відповідають світовому науково-технічному рівню; унормування дистанційного навчання як форми здобуття вищої освіти» [45].

Забезпечення викладачем гнучкості освітнього процесу в умовах дистанційної освіти для реалізації адаптивного навчання здійснюється добором доцільного цифрового інструментарію у залежності від типу освітньої діяльності викладача, тобто від виду заняття: лекція, лабораторно-практичне заняття, контроль навчальних досягнень, залучення елементів неформальної освіти. Для вирішення проблеми вибору відповідного цифрового інструментарію нами розроблено форсайт-колесо цифрових технологій, як елементу прогнозування та підготовки викладача до заняття. Викладач під час підготовки до лекції чи лабораторно-практичного заняття обирає відповідні цифрові інструменти з форсайт-колеса з метою найбільш ефективного їх проведення (рис. 6).

Форсайт-колесо цифрових технологій демонструє подібність та відмінності у застосуванні додатків та онлайн ресурсів:

– перше зовнішнє кільце містить спільні для всіх видів освітньої діяльності цифрові інструменти;

– друге кільце розділено на спільні інструменти для лекцій та неформальної освіти, а також поєднано інструменти для лабораторно-практичних занять та здійснення контролю навчальних досягнень;

– третє кільце розмежовує інструменти для лекцій та лабораторно-практичних занять, та поєднує інструменти з контролю навчальних досягнень та неформальної освіти;

– четверте кільце демонструє інструменти, які доцільно застосовувати лише для відповідного типу занять [30].

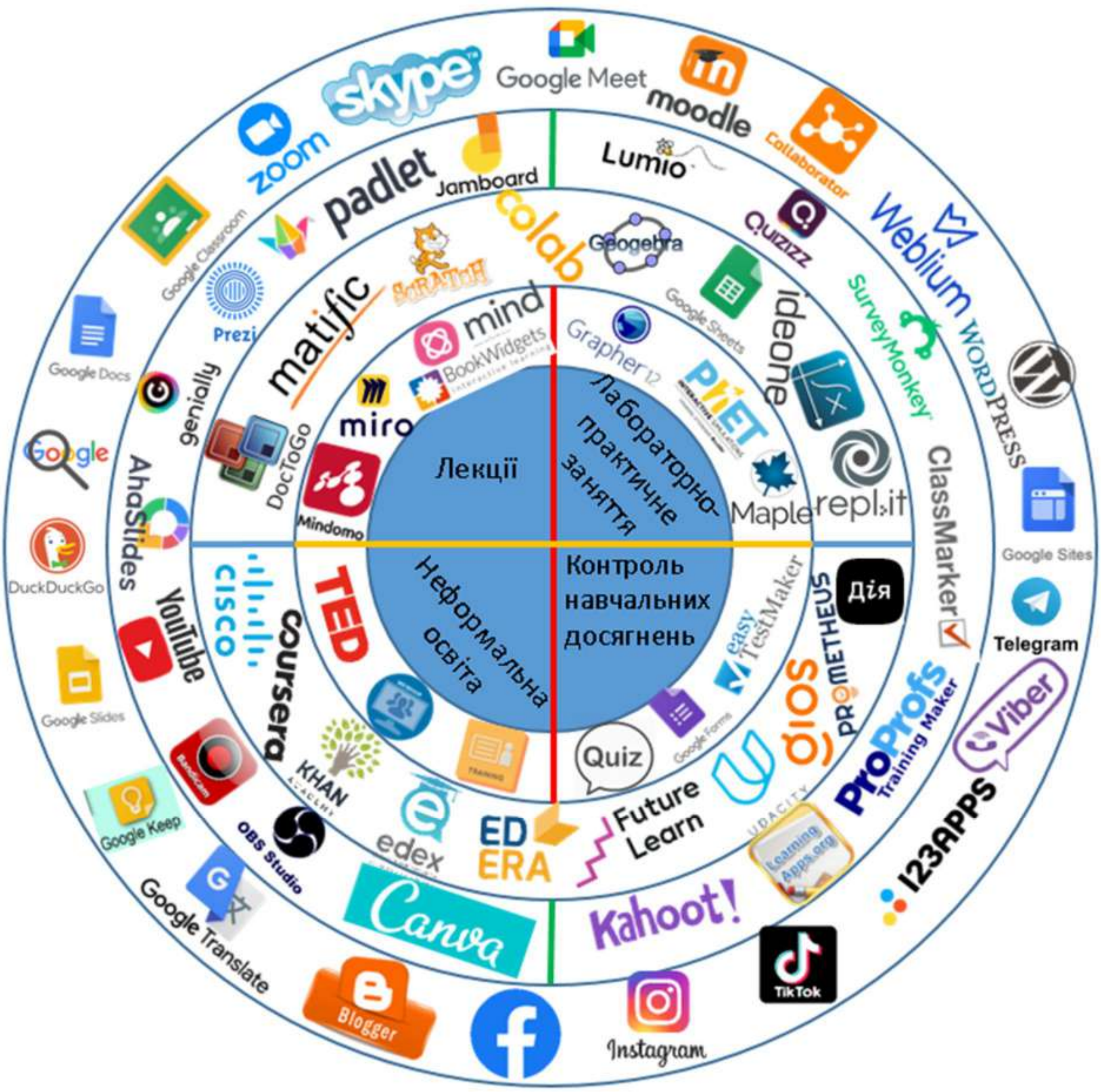


Рис. 6. Форсайт-колесо цифрових технологій (авторська розробка)

Опишемо розподіл цифрових інструментів, починаючи від першого зовнішнього кільця.

У першому кільці форсайт-колеса відображено цифрові технології, які є спільними для будь-якого виду освітньої діяльності:

– програми для проведення відеоконференцій під час організації дистанційного навчання формальної та неформальної системи освіти, такі як Zoom, Microsoft Teams, Google Meet, Skype. Це дозволяє студентам віддалено приєднатися до заняття, слухати викладача та бути активними учасниками навчального процесу в режимі реального часу;

– створення віртуального класу засобами систем керування навчанням (Learning Management Systems, LMS, наприклад, Moodle, Schoology, Blackboard, LMS «Collaborator”), освітні платформи (Google Class), які покращують ефективність навчання, збільшують доступність до навчального матеріалу здобувачам вищої освіти, які знаходяться у віддалених регіонах, мають фізичні обмеження або інші обставини, які перешкоджають навчанню в традиційних умовах; допомагають викладачам відстежувати прогрес студентів, підвищують ефективність управління навчальним процесом, дозволяють створювати індивідуальні освітні траєкторії;

– учасники освітнього процесу використовують соціальні мережі для обговорення матеріалів, діляться власними думками та ідеями, обмінюються інформацією, а також спілкуються з іншими студентами та викладачами. Наприклад, можна створити групу в Blogger, Facebook, Instagram, TikTok, Telegram, Viber, де студенти зможуть обговорювати різні організаційні моменти та ставити запитання;

– створення електронних підручників засобами Google Docs, Google Sites, Weblium, Wix, WordPress, за допомогою яких викладачі створюють та редагують навчальні матеріали, а студенти можуть отримувати до них доступ з будь-якого пристрою, в будь-який час та в будь-якому місці.

Друге кільце розділено на дві частини:

1) спільні інструменти для проведення лекцій та поєднання неформальної освіти:

– відеоредактори (OBS Studio, Bandicam, FastStone Capture, OpenShot Video Editor) для створення відео занять на YouTube (чи записи прямих/запланованих трансляцій) допоможуть студентам доповнити та розвинути математичні та інформатичні компетентності;

– підготовка презентацій для структурування навчального матеріалу і демонстрації схем, діаграм, таблиць та ілюстрацій засобами PowerPoint, Prezi, Google Slides, Canva, Genially, AhaSlides тощо;

– для створення та проведення мозкових штурмів, підсумкової рефлексії студентів варто скористатися можливостями електронних дошок Jamboard, Padlet, Microsoft Whiteboard, щоб виконати аналіз завдання, поділитися думками, враженнями та корисними ресурсами з іншими учасниками, які вони знайшли в процесі дослідження певної теми;

2) поєднання лабораторно-практичних занять та контролю навчальних досягнень:

– створення опитувань та тестових запитань з елементами ігрофікації засобами онлайн ресурсів Lumio, Quizizz, Kahoot, Quizlet, на певну тему із налаштуванням, щоб студенти могли бачити або не бачити правильні відповіді після проведення опитування/тестування;

– робота над власним портфоліо зі своїми роботами та проєктами, які студенти можуть додавати під час навчання, а викладач може оцінювати та коментувати роботи у портфоліо;

– створення та застосування інтерактивних вправ та ігор від LearningApps у процесі навчання математики та інформатики допомагають зосередити увагу студентів та зробити процес навчання гейміфікованим та зрозумілим, збільшити зацікавленість та мотивацію студентів, а також покращити їхні знання та розуміння навчального матеріалу.

Третє кільце – це поєднання:

1) лекцій та лабораторно-практичних занять:

– викладач поєднує теоретичний і практичний навчальний матеріал на конкретних прикладах з математики та інформатики через онлайн-ресурси, що дозволяють створювати та керувати математичними завданнями та іграми, містять графіки, таблиці та інші інтерактивні елементи, з якими можуть взаємодіяти студенти (Matific).

– створення та редагування електронних таблиць, виконання обчислень, аналіз, сортування даних та побудова графіків, діаграм, поверхонь засобами онлайн-інструмента Google Sheets;

– програмувати можна легко та просто на онлайн платформах візуального програмування (Scratch, Blockly, Code.org, Розумні блоки) та віртуальних середовищах (Ideone, Replit, Colab тощо) для вивчення популярних мов програмування.

2) контроль навчальних досягнень та неформальна освіта:

– освітні платформи електронного навчання, такі як Prometheus, Освіта.Дія, EdEra, Coursera, Gios, Khan Academy, Cisco, edX, Udemy, Future Learn забезпечують студентам доступ до якісних навчальних матеріалів: відеолекцій, текстових матеріалів, підручників та інших навчальних ресурсів високої якості, що розробляють викладачі провідних університетів та експерти з різних галузей науки. Усі ці платформи здійснюють оцінювання рівня знань студентів за допомогою тестів, опитувань, проєктів та інших методів контролю навчальних досягнень, що підтверджується сертифікатом чи дипломом.

Четверте кільце – це вузькоспеціалізовані інструменти для виконання навчальних дій на конкретному занятті.

1. Під час проведення лекцій це можуть бути ментальні карти, такі як Miro, Mindomo, Mind, які дозволяють створювати візуальні образи основних ідей та понять теоретичного навчального матеріалу, що охоплює основний зміст лекції. Розмістити підтеми навколо центральної ідеї та з’єднати їх з центральним елементом ментальної карти. Це допоможе студентам легше сприймати та поєднувати ключові поняття та зв’язки між темами, відстежувати та систематизувати отриману інформацію на лекції.

Інтерактивні підручники: такі як BookWidgets, Thinglink, Edpuzzle, дозволяють створювати інтерактивні матеріали для онлайн занять, що допомагають студентам взаємодіяти з матеріалом та отримувати зворотний зв’язок з викладачем.

2. На лабораторно-практичних заняттях в умовах дистанційної освіти можна організувати навчання у віртуальних лабораторіях та симуляторах, а саме: PhET, Virtual Labs, які дозволяють студентам проводити експерименти та

отримувати досвід у віртуальному середовищі максимально наближеному до реальних умов.

Можливості систем комп'ютерної алгебри, такі як Mathematica, Maple, Matlab чи Sage, допомагають студентам виконувати складні математичні розрахунки, створювати графіки та аналізувати дані, моделювати різні математичні функції, проводити чисельні експерименти та порівнювати результати.

Цифрові інструменти Desmos, GeoGebra чи Wolfram Alpha можуть бути корисними для побудови графіків та візуалізації математичних об'єктів. З допомогою таких інструментів можна демонструвати та розуміти геометричні та алгебраїчні зв'язки між математичними об'єктами.

На лабораторних заняттях, з іншого боку, цифрові технології можуть використовуватися для організації робочих місць, щоб студенти могли працювати з необхідним програмним забезпеченням та обладнанням.

Крім того, можна використовувати програмне забезпечення для збору, аналізу та відображення даних, що отримуються в процесі лабораторних досліджень. Це дозволяє студентам отримати практичні навички та досліджувати питання глибше.

3. На етапі контролю навчальних досягнень пропонуємо використовувати цифрові інструменти для створення інтерактивних завдань та тестів, які допоможуть викладачам здійснювати контроль знань студентів та отримувати відповідні результати (Google Forms, TestMaker).

4. Неформальна освіта – це не лише освітні онлайн-курси, а й також платформи для пошуку коучів та менторів (Mentorloop, Flash Mentoring, The Mentor Network), які дозволяють знайти наставників у різних галузях та отримати від них підтримку та поради; це спільноти та форуми (Reddit, Stack Exchange, LinkedIn Groups, Medium), що дозволяють обговорювати різні теми, ставити запитання та отримувати відповіді від експертів у різних галузях; це також віртуальні тури та екскурсії (Google Arts & Culture, AirPano, National Geographic)

для відвідування міжнародних університетів, музеїв, галерей, національних парків тощо.

Сукупність описаних цифрових інструментів форсайт-колеса в залежності від виду заняття, утворюють віртуальний освітній простір викладача, що допомагає спроєктувати та якісно подати навчальний матеріал з математики та інформатики, використовуючи сучасні можливості в умовах дистанційної освіти. Розподіл цифрових інструментів форсайт-колеса допоможе викладачу підготуватися до заняття у залежності від його виду, а саме: подання теоретичного навчального матеріалу на лекціях, розв'язування задач та створення програм на лабораторно-практичних заняттях, здійснити перевірку навчальних досягнень студентів та майстерно поєднати формальну освіту з неформальною.

Інтенсивні взаємні обговорення учасників Форсайту з багатьох сфер діяльності показують пряму зацікавленість у вирішенні проблем підготовки бакалавра математики та інформатики. Дорожні карти Форсайту зафіксовані у відповідних документах кафедри, спільних засіданнях стейкхолдерів і викладачів, прийняті відповідні рішення.

На етапі емпіричного дослідження форсайт-технологій системи підготовки бакалаврів факультету математики, фізики і комп'ютерних наук було використано анкетування щодо ставлення студентів до прогнозування та передбачення організації освітнього процесу як результат проведення зустрічі з експертами круглого столу «Форсайт розвитку природничо-математичної освіти Вінниччини та України».

На засіданнях круглих столів форсайту розвитку природничо-математичної освіти протягом останніх років було акцентовано увагу на стрімкі зміни сучасних реалій освітньої системи, що має потребу у вчителях, які вміють швидко адаптуватися, а саме:

1) організувати очне, змішане та дистанційне навчання;

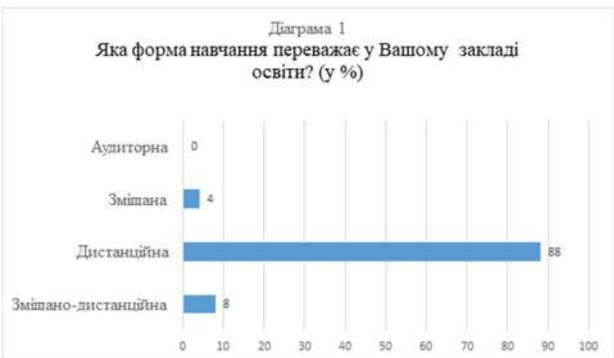
2) розробити онлайн-курс навчального предмету чи дисципліни з відеоматеріалами та інтерактивними завданнями, віртуальними лабораторіями та творчими кімнатами;

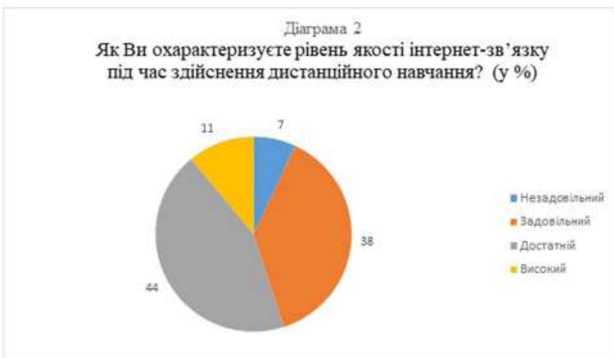
3) забезпечити взаємодію та зворотній зв'язок з учасниками освітнього процесу;

4) можуть самостійно опанувати нові цифрові технології та вміють доцільно їх застосувати у своїй педагогічній діяльності.

Авторами статті проведено опитування серед студентів і проаналізовано 96 анкет для аналізу цих основних питань. Анкета опитування складається з двох блоків питань. У першому блоці містяться питання для з’ясування ефективності дистанційного та змішаного навчання: обізнаність студентів із інструментарієм дистанційного навчання, як активно учасники освітнього процесу взаємодіють між собою в умовах дистанційного та змішаного навчання.

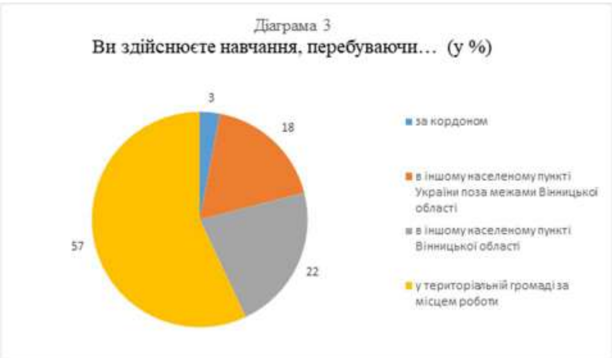
Відповідно до **другої дорожньої карти** організація дистанційного та змішаного навчання – це складний багатоетапний процес підготовки та подання навчального матеріалу різної форми студентам із застосуванням доцільних цифрових технологій для досягнення поставленої освітньої мети та програмних результатів навчання згідно освітньо-професійної програми. Якщо студенти користуються засобами дистанційного чи змішаного навчання і є його активними учасниками, то вони зможуть, за прикладом, самостійно організувати відповідну форму навчання.



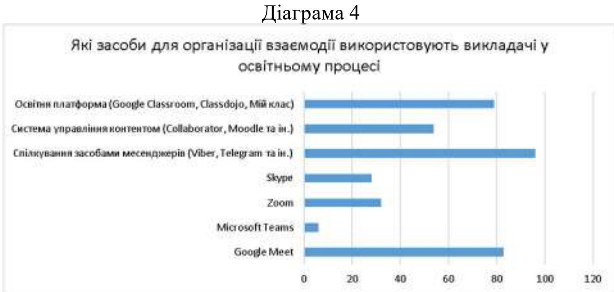


Як бачимо з діаграми 1, переважаюча більшість студентів навчається за дистанційною формою навчання, тому в межах дослідження нам важливо з'ясувати інші питання організаційного та методичного характеру.

Інформатизація навчального процесу (**третя дорожня карта**) є невід'ємною складовою процесу надання освітніх послуг в умовах сьогодення. Зокрема можемо бачити, що в учасників освітнього процесу переважає задовільний і достатній рівень якості інтернет-зв'язку під час здійснення дистанційного навчання (діаграма 2).

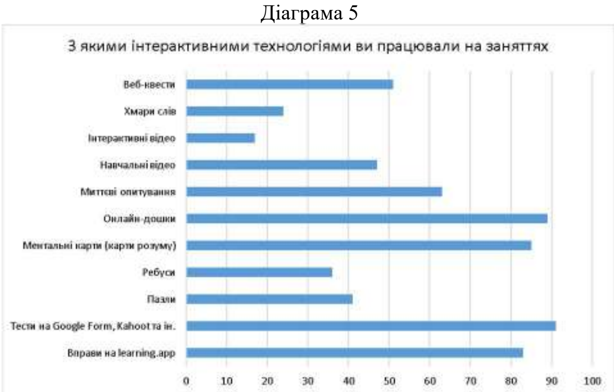


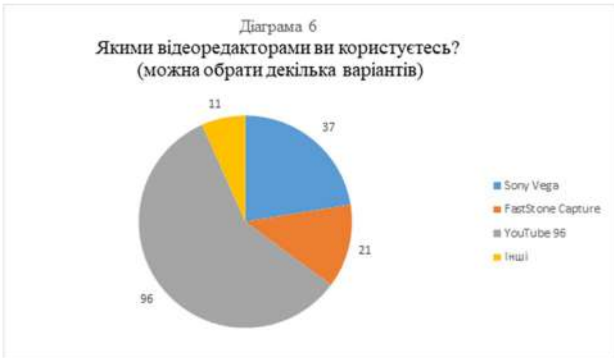
Діаграма 4



Більшість студентів поєднують навчання з трудовою діяльністю (діаграма 3) й активно взаємодіють та співпрацюють з викладачами в освітньому процесі на засадах суб'єкт-суб'єктних взаємин (діаграма 4), що повністю відповідає засадам реалізації **четвертої дорожньої карти**.

Діаграма 5



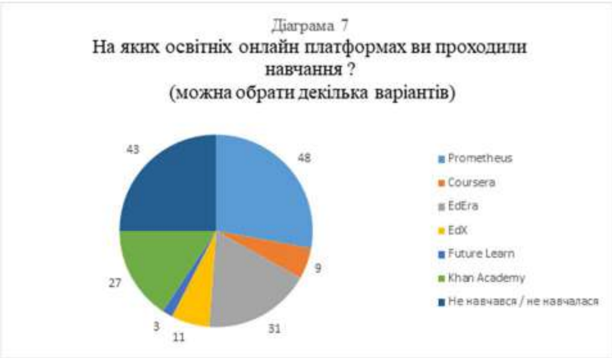


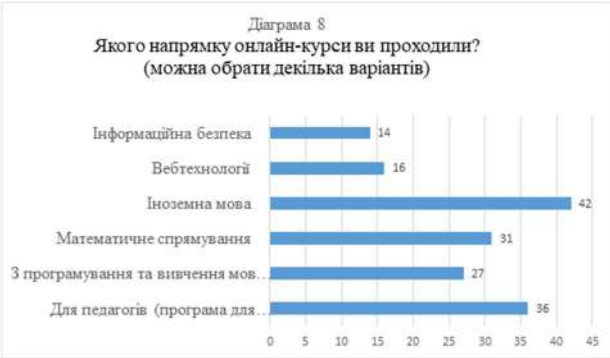
Учасники освітнього процесу для організації взаємодії застосовують низку засобів - Google Meet, Microsoft Teams, Zoom, Skype, спілкування засобами месенджерів (Viber, Telegram та ін.), систем управління контентом (Collaborator, Moodle та ін.) та освітніми платформами (Google Classroom, Classdojo, Мій клас) (діаграма 4). А також використовують вправи на learning.app, тести, пазли, ребуси, ментальні карти (карти розуму), онлайн-дошки, миттєві опитування, навчальні та інтерактивні відео, хмари слів і веб-квести (діаграма 5). Згідно нашого опитування 72% студентів вміють самостійно створювати відеоконтент і застосовують для цього різноманітні сучасні інструменти (Sony Vega, FastStone Capture, YouTube та інші) (діаграма 6).

Отже, викладачі й студенти реалізовують свій потенціал за допомогою цифрових технологій різного призначення. З одного боку, таким чином викладачі прагнуть урізноманітнити навчальний контент, зробити його максимально доступним, осучаснити методики навчання використовуючи інноваційні технології. З іншого боку, студенти мають можливість по-новому сприймати навчальний матеріал і, що важливо, отримують необхідний інструментарій для власної професійної діяльності відповідно до сучасних трендів в освіті. Забезпечення вищесказаного здійснюється через призму реалізації **дорожніх карт 2-4.**

У другому блоці нами з'ясовано чи здійснюють студенти самостійне навчання засобами освітніх онлайн-курсів для оволодіння новими компетентностями. Якщо студенти навчаються на сучасних відкритих онлайн-курсах, то зможуть самостійно здобувати нові знання і оволодіти новими компетентностями для того, щоб бути конкурентоспроможними на ринку праці.

Зауважимо, що студенти досить активно займаються самоосвітою. Більше половини опитаних проходили навчання на різних освітніх онлайн платформах (діаграма 7) відповідно до своїх особистих вподобань та захоплень, з метою професійного розвитку, рекомендацій стейкхолдерів, відпрацювання сценаріїв віддаленої роботи, набуття навичок роботи з відповідними продуктами тощо (діаграма 8), що забезпечується впровадженням технологій форсайтингу відповідно до **першої та другої дорожніх карт**.





Що стосується **шостої і сьомої** пропонованих нами **дорожніх карт**, то зазначимо, що в Україні постійно проводиться моніторинг освіти у різних країнах Європи, США та інших.

Таблиця 1. Порівняльний аналіз навчальних планів підготовки вчителя математики та інформатики

№ п/п	**Дисципліни циклів загальної та професійної підготовки**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1.	Елементи математичної логіки та дискретної математики	4+4		6	5			
2.	Теорія алгоритмів, матлогіки, алгоритмічні мови			9		4		7
3.	Математичний аналіз	17	17	18	24	15	24	17
4.	Комплексний аналіз	6	5	6	4	3	4	2
5.	Функціональний аналіз	4		3	6	4		5
6.	Диференціальні рівняння	8	4	6	7	4	5	2
7.	Рівняння математичної фізики	8		6	6			
8.	Алгебра та теорія чисел	6	4	6	3	8	10	7
9.	Лінійна алгебра	12	6	9	7	7	9	4
10.	Числові системи						3	
11.	Основи геометрії або конструктивна геометрія або проективна геометрія	4				4	4+5	
12.	Аналітична геометрія	8	6	6	6	4	9	4
13.	Диференціальна геометрія і топологія	7	4	9	4	3	5	3

14.	Теорія ймовірностей і математична статистика	4	3	6	8	6+4	6	6
15.	Методи обчислень		3			3		1
16.	Дискретна математика							2
17.	Елементарна математика	4	12	3		9	12	
18.	Методика навчання математики	4	15		7	18	14	
19.	Історія математики	4				3		
20.	Інноваційні технології навчання шкільного курсу математики		3			4		
21.	Методи розв’язування нестандартних задач з математики			3		9		
22.	Вступ до спеціальності						9	
23.	Вибрані питання математики							1
24.	Математичні пакети							1

У таблиці 1 подано перелік обов’язкових дисциплін циклів загальної та професійної підготовки вчителя математики та інформатики, на основі яких виконано порівняльний аналіз кількості кредитів відповідних навчальних планів закладів вищої освіти (Рис. 7), а саме: Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна (ОПП Математика та інформатика) (дані 1) [32], Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини (ОПП Математика та інформатика) (дані 2) [38], Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника (ОПП Математика) (дані 3) [33], Львівський національний університет імені Івана Франка (ОПП Математика) (дані 4) [39], Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського (ОПП Математика та інформатика) (дані 5) [37], Український державний університет імені Михайла Драгоманова (ОПП Математика, додаткова спеціальність 014 Середня освіта (фізика), 014 Середня освіта (інформатика), 2021 (дані 6) [34], Університет Марії Склодовської-Кюрі (Математика педагогічна) (дані 7) [16].

Рис. 7. Порівняльний аналіз навчальних планів підготовки майбутнього вчителя математики (СВО бакалавр, спеціальність 014.04 Середня освіта (Математика) і Математика педагогічна)

Методами математичної статистики порівняємо однорідність навчальних планів підготовки бакалавра галузі знань 01 Освіта / Педагогіка предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) – вчителя математики та інформатики в Українському державному університеті імені Михайла Драгоманова (м. Київ, Україна) й Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського (м. Вінниця, Україна). Для перевірки гіпотези про однорідність цих навчальних планів використаємо F −критерій Фішера та t −критерій Стьюдента для двох незв'язаних вибірок.

На початковому етапі використання статистичного аналізу відбулося планування експерименту та збір актуальних інформативних та повних даних стосовно функціонування систем надання освітніх послуг в різних закладах вищої освіти. На другому етапі відбулась попередня обробка та дослідження даних, формулювалися гіпотези. На третьому етапі – оцінювання необхідних статистичних параметрів та інших невідомих величин, параметрів математичних моделей, що підтверджуються відповідними статистичними параметрами якості. На четвертому етапі здійснена перевірка раніше сформульованих гіпотез з метою прийняття рішення стосовно управління процесами щодо відповідності апріорно висунутого припущення дійсній ситуації.

Статистика F-критерію Фішера має вигляд [43, с. 412]:

$$F_{\text{емп}} = \frac{s_1^2}{s_2^2},$$

де $s_1^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \overline{X})^2}{n_1}$ і $s_2^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i2} - \overline{X})^2}{n_2}$ – дисперсії вибірок, причому $s_1^2 \geq s_2^2$. Тому значення $F_{\text{емп}}$ завжди більше або дорівнює одиниці, тобто $F_{\text{емп}} \geq 1$. Число ступенів вільності визначається так: $df_1 = n_1 - 1$ для першої (тобто для вибірки, величина дисперсії якої більша) і $df_2 = n_2 - 1$ для іншої вибірки. Якщо $F_{\text{емп}} > F_\alpha(n_1 - 1;\ n_2 - 1)$, нульова гіпотеза відхиляється на користь альтернативної H_1.

Статистика t-критерію Стьюдента має вигляд [43, с. 185]:

$$t_{\text{емп}} = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

де $\bar{X}_1$ і $\bar{X}_2$, s_1^2 і s_2^2, n_1 і n_2 – середні, дисперсії та обсяги першої і другої вибірок відповідно.

Критичне значення критерію $t_{\text{кр}}$ для заданого рівня значущості α й числа ступенів вільності $df = n_1 + n_2 - 2$ можна отримати з таблиць розподілу Стьюдента. Якщо $t_{\text{емп}} > t_{\text{кр}}$, то гіпотезу однорідності H_0 (про відсутність розходження) відхиляють і приймають альтернативну гіпотезу H_1. Якщо $|t_{\text{емп}}| \leq |t_{\text{кр}}|$, то різниця середніх недостовірна.

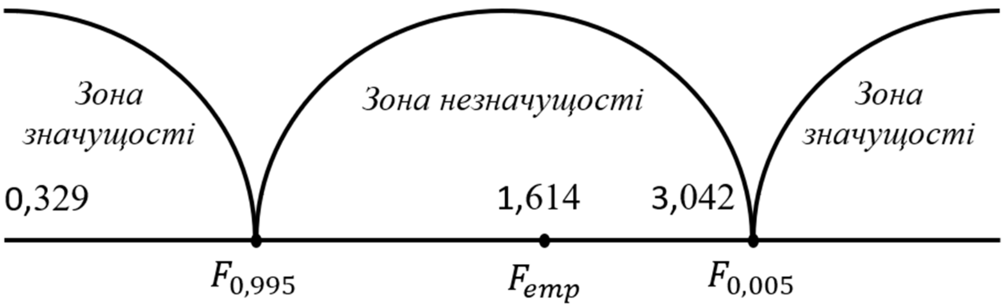
Нульова гіпотеза H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (μ_1 не відрізняється від μ_2) полягає у тому, що різниця між середніми значеннями двох вибірок (статистично) дорівнює нулеві, тобто відмінності між навчальними планами підготовки вказаних вище здобувачів вищої освіти в Українському державному університеті імені Михайла Драгоманова та Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського відсутні. Альтернативна гіпотеза H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (μ_1 відрізняється від μ_2) свідчить про те, що різниця відмінна від нуля, тобто йдеться про значимість відмінностей у вказаних навчальних планах, яка оцінюється рівнем значущості – ймовірністю того, що відмінності вважаються суттєвими.

Перевірка статистичних гіпотез		
Заклади освіти	ВДПУ імені Михайла Коцюбинського	Український державний університет імені Михайла Драгоманова
014.04 Математика		
Обов’язкові дисципліни циклів загальної та професійної підготовки (порівнюється кількість кредитів)		
Середні: $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$	4,67	4,96
Дисперсії: s_1^2, s_2^2	23,19	37,43

n	24	24
за F-критерієм Фішера		
$F_{\text{емп}} =$	1,614	
$F_{0,005} =$	3,042	$\alpha = 0{,}01$
$F_{0,995} =$	0,329	
$p_{\text{емп}} =$	12,9%	0,129

Для $\alpha = 0{,}01$ критичні значення $F_{0,005} = 3{,}042$ і $F_{0,995} = 0{,}329$. Оскільки значення $F_{\text{емп}}$ =1,614 не знаходиться в жодній критичній зоні ($F_{0,995} < F_{\text{емп}} < F_{0,005}$), приймається нульова гіпотеза H_0. Тому немає підстав стверджувати про те, що показники дисперсій відрізняються одне від одного.

Побудуємо вісь значущості.

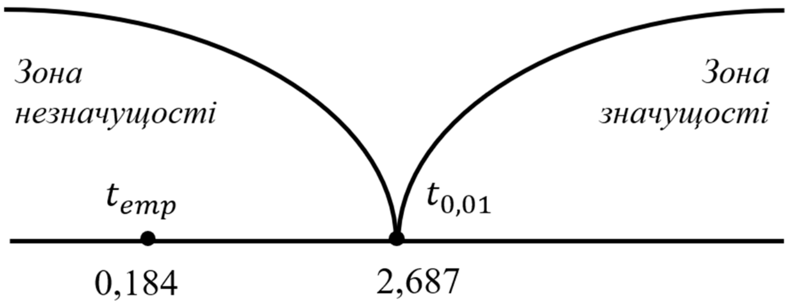


Нульова гіпотеза H_0 приймається за умови $p_{\text{емп}} > \alpha$. Для $\alpha = 0{,}01$ (1 %) ця умова викорнується: 12,9 %> 1 %. Це значить, що нульова гіпотеза H_0 повинна бути прийнята, як це було зроблено вище.

за t-критерієм Стьюдента для незалежних вибірок	
$t_{\text{емп}} =$	0,184
$t_{0,05} =$	2,687
$p_{\text{емп}} =$	85,52 %

Оскільки $t_{\text{емп}} < t_{0,01}$, тобто $0{,}184 < 2{,}687$ нульова гіпотеза H_0 приймається на рівні значущості 0,01. Таким чином, на рівні значущості 0,01 відсутні підстави стверджувати про неоднорідність незалежних вибірок. Проте слід мати на увазі, що статистика критерію Стьюдента перевіряє не збіг функцій розподілу вибірок, а збіг характеристик випадкових величин – математичних очікувань.

Побудуємо вісь значущості.



Перевірку гіпотез можна провести шляхом визначення ймовірності $p_{емп}$. Якщо $p_{емп} < \alpha$, нульова гіпотеза H_0 відхиляється. Як бачимо, ця умова не виконується: 85,52 % > 1 %, а це означає, що нульова гіпотеза H_0 повинна бути прийнята.

Як бачимо статистично значущі відмінності відсутні між навчальними планами підготовки здобувачів вищої освіти за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) в обох університетах. Це є запорукою мобільності студентів в їхній освітній траєкторії, забезпечує формування загальних і професійних компетентностей майбутніх фахівців незалежно від місця навчання. Інакше закладу вищої освіти, в навчальних планах якого є суттєві відмінності від складових підготовки в інших профільних установах надання освітніх послуг виникне необхідність проаналізувати розроблену ним освітньо-професійну програму з метою вироблення подальшої взаємоузгодженої стратегії форсайтингу процесу підготовки майбутніх фахівців: планування, моделювання, стандартизації, фундаменталізації та верифікації.

Висновки. Таким чином, підготовка бакалавра математики вимагає пошуку нових можливостей і нових підходів, а форсайт-технології дозволяють ухвалювати стратегічні рішення. Однак математична освіта в суспільстві стане затребуваною, коли саме суспільство в цілому і кожна людина зокрема усвідомить важливість такої підготовки для економічного процвітання країни.

На етапі емпіричного дослідження було здійснено анкетування студентів факультету математики, фізики і комп'ютерних наук з метою з’ясування фактичного стану організації дистанційного навчання в умовах пандемії та воєнного стану в Україні (або нестабільних соціальних та політичних умовах).

Нестійкість у *педагогічному процесі* з позицій синергетики розглядаємо як можливі й природні ситуації розвитку педагогічної системи, що може йти адаптивним і біфуркаційним шляхами. У випадку *адаптивного* типу розвитку відбувається пристосування педагогічної системи до змін зовнішнього і внутрішнього середовища зі збереженням характеру функціональної системи (відносно стійкий стан). Зміна зовнішнього і внутрішнього середовища педагогічної системи (змінюються студенти, викладачі, підручники, форми, методи і засоби навчання, організаційні компоненти тощо) призводить до появи її нових властивостей: система переходить у новий якісний стан, який називають *біфуркаційним.*

Синергетична модель професійної підготовки майбутнього вчителя математики розглядає нестійкий стан педагогічного процесу як передумову порушення старих його структур і виникнення нових дисипативних структур, які неможливо розв’язати з позицій лише еволюційного підходу. Тут уже має бути спроба заглянути у майбутнє, тобто використати наукове передбачення, педагогічний прогноз та форсайт-технології для можливості моделювання освітнього середовища бакалавра математики вже сьогодні.

У нашому дослідженні під форсайтом будемо розуміти «систематичний спільний процес побудови бачення майбутнього, націлений на підвищення якості прийнятих у цей момент рішень і прискорення спільних дій», що дозволяє застосовувати «спеціальну технологію формування пріоритетів розвитку різних сфер життя суспільства з метою мобілізації максимально великої кількості учасників для досягнення якісно нових результатів у розвитку країни, регіону, громади».

Автори статті розробили структурно-функціональну модель системи підготовки бакалавра математики, яка складається з трьох блоків: передпрогнозна ситуація, прогностичне моделювання і прогностичне анкетування. Перший блок моделі є цільовим, він вказує на дисипативний стан зовнішнього і внутрішнього середовища педагогічної системи підготовки бакалавра математики через збір даних прогнозного фону і необхідність реформування системи. У другому блоці подано прогностичне моделювання педагогічної системи. Третій блок моделі забезпечує постійний моніторинг якості базової моделі через діагностику і коригування компетентностей бакалавра математики і пропонує вибір одного з біфуркаційних шляхів формування його професійних компетентностей.

Для практичної реалізації розробленої авторами моделі конкурентної системи підготовки бакалавра математики розглянуто методи наукового передбачення: метод спроб і помилок (trial andieror), індукція, дедукція, абстрагування, аналіз незнайомих предметів, синтез і як поєднання обох – експеримент, сценарний метод тощо.

У статті детально описано сім коротко- і середньострокових дорожних карт, які залучені до прогностичного моделювання підготовки бакалавра математики викладачами кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського: популяризація математики як необхідної умови розвиненого суспільства; розвиток змішаного навчання, зокрема можливість співпраці з іншими університетами України та зарубіжжя; активне використання дистанційного навчання: створення відкритих освітніх ресурсів: сайтів, YouTube-каналів тощо; забезпечення інформатизації навчального процесу та доступ до міжнародних інформаційних систем у ЗВО; творча співпраця викладача і студента, реалізація суб’єкт-суб’єктних взаємин викладача і студента за активної ролі студента; регулярна модернізація освітніх програм, навчальних планів; фундаменталізація професійної підготовки бакалавра математики, яка передбачає ретельний добір фундаментального ядра змістового, процесуального, управлінського блоків, блоку практичної підготовки; в умовах синергетичного освітнього простору надзвичайно важливим є постійний моніторинг математичної освіти у різних країнах, дослідження інтеграційних процесів й моделювання на їх основі підготовки бакалавра.

Авторами статті здійснено аналіз наукової літератури за тематикою дослідження. Спроєктовано поле побудови маршрутів досягнень професійних компетентностей викладача університету та змодельовано форсайт-колесо цифрових технологій. Визначено основні напрямки реалізації архітектури цифрових технологій у професійній діяльності викладача [30].

1. Забезпечення доступу до інформації. Цифрові технології, такі як Інтернет та електронні бібліотеки, забезпечують студентам та викладачам доступ до великої кількості інформації, що допомагає у навчанні та дослідженні.

2. Підвищення ефективності навчання. Цифрові технології допомагають студентам засвоювати матеріал швидше та ефективніше. Наприклад, використання відеоуроків та інтерактивних матеріалів може зробити навчання більш цікавим та зрозумілим.

3. Забезпечення індивідуального навчання. Цифрові технології дозволяють студентам навчатися у своєму власному темпі та відповідно до власних потреб. Наприклад, використання онлайн-курсів та інтерактивних ігор дозволяє студентам навчатися індивідуально та у зручний для них час.

4. Покращення комунікації. Цифрові технології дають можливість студентам та викладачам комунікувати між собою швидше та ефективніше. Наприклад, використання електронних засобів спілкування та соціальних мереж може полегшити комунікацію між студентами та викладачами.

5. Зберігання та обробка даних. Цифрові технології забезпечують зберігання та опрац-ювання великих обсягів даних, що може допомогти викладачам та студентам відстежувати свій прогрес та аналізувати результати навчання.

6. Використання електронних дошок і комп'ютерів на заняттях. Викладачі мають можливість використовувати електронні дошки, щоб демонструвати матеріал і давати завдання студентам. Крім того, комп'ютери можна використовувати для проведення досліджень, написання есе та виконання інших завдань.

Проведено моніторинг освіти у різних країнах Європи, США та України.

З метою верифікації результатів порівняльного аналізу навчальних планів підготовки вчителя математики та інформатики використано методи прикладної статистики (F-критерій Фішера та t-критерію Стьюдента). На початковому етапі використання статистичного аналізу відбулося планування експерименту та збір актуальних інформативних та повних даних стосовно функціонування систем надання освітніх послуг в різних закладах вищої освіти. На другому етапі відбулась попередня обробка та дослідження даних, формулювалися гіпотези. На третьому етапі - оцінювання необхідних статистичних параметрів та інших невідомих величин, параметрів математичних моделей, що підтверджуються відповідними статистичними параметрами якості. На четвертому етапі здійснена перевірка раніше сформульованих гіпотез з метою прийняття рішення стосовно управління процесами щодо відповідності апріорно висунутого припущення дійсній ситуації.

Методами математичної статистики виконано перевірку однорідність навчальних планів підготовки бакалавра галузі знань 01 Освіта / Педагогіка предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) – вчителя математики та інформатики в Українському державному університеті імені Михайла Драгоманова (м. Київ, Україна) й Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського (м. Вінниця, Україна). Для перевірки гіпотези про однорідність цих навчальних планів використано $F-$критерій Фішера та $t-$критерій Стьюдента для двох незв'язаних вибірок.

Як бачимо статистично значущі відмінності відсутні між навчальними планами підготовки здобувачів вищої освіти за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) в Українському державному університеті імені Михайла Драгоманова та Вінницькому державному педагогічному університеті імені Михайла Коцюбинського. Це є запорукою мобільності студентів в їхній освітній траєкторії, забезпечує формування загальних і професійних компетентностей майбутніх фахівців незалежно від місця навчання. Інакше закладу вищої освіти в навчальних планах якого є суттєві відмінності від складових підготовки в інших профільних установах надання освітніх послуг виникне необхідність проаналізувати розроблену ним освітньо-професійну програму з метою вироблення подальшої взаємоузгодженої стратегії форсайтингу процесу підготовки майбутніх фахівців: планування, моделювання, стандартизації, фундаменталізації та верифікації. Перспективи подальших досліджень вбачаємо в аналізі ефективності використання форсайт-технологій для розроблення стратегії розвитку університету, формування пріоритетів розвитку освітньої галузі у житті суспільства для досягнення якісно нових результатів розвитку країни, регіону, громади.

Список використаних джерел

1. Ashby W. R. Design for a brain; the origin of adaptive behavior. Calculators, Central nervous system Mathematical models, Behavior, Brain -- physiology. New York, Wiley, 286 p. 1960. URL: Design for a brain; the origin of adaptive behavior : Ashby, William Ross : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive
2. Barré, R., & Keenan, M. Revisiting foresight rationales: What lessons from the social sciences and humanities? In C. Cagnin, M. Keenan, R. Johnston, F. Scapolo, & R. Barré (Eds.), Future-oriented technology analysis. 2008. pp. 41–52. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-68811-2_4
3. Beni, N. N. Presenting a framework for foresight in education. In F. Uslu. *Proceedings of 5th International Conference on Education and Social Sciences (INTCESS 2018).* 2018, February, pp. 1072–1078. Istanbul, Turkey. URL: http://www.ocerint.org/intcess18_e-publication/papers/511.pdf
4. Ejdys J., Gudanowska A., Halicka K., Kononiuk A., Magruk A., Nazarko J., Nazarko Ł., Szpilko D., Widelska U. Foresight in Higher Education Institutions: Evidence from Poland. Foresight and STI Governance, 2019. vol. 13, no 1, pp. 77–89. DOI: 10.17323/2500-2597.2019.1.77.89
5. Filippova V. D. Foresight-technology as a tool for the formation and implementation of state policy in the field of pedagogical education. *Teoria ta praktyka dershavnogo upravlinnya I miscevogo samovryaduvannya: electron. nauk. fach. vyd.*, 2020. №1. http://el-zbirn-du.at.ua/2020_1/30.pdf.

6. Fiuza, P., Mocelin, R. R. Systematic Review of Literature: The Contributions to the Learning Process by Digital Technologies and Pedagogical Architectures. In: Rocha, Á., Correia, A., Adeli, H., Reis, L., Mendonça Teixeira, M. (eds) *New Advances in Information Systems and Technologies. Advances in Intelligent Systems and Computing.* Vol 445. pp. 225-235. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-31307-8_23.

7. Haidamaka, O.; Kolisnyk-Humeniuk, Y.; Storizhko, L.; Marchenko, T.; Poluboiaryna, I.; Bilova, N. Innovative Teaching Technologies in Postmodern Education: Foreign and Domestic Experience. *Postmodern Openings.* 2022, Volume 13, Issue 1. Sup1, pages: 159-172| https://doi.org/10.18662/po/13.1Sup1/419

8. Hasan Çifci, Nurdan Yüksel. Foresight 6.0: The New Generation of Technology Foresight. 2018 IEEE International Conference on Engineering, Technology and Innovation (ICE/ITMC). Stuttgart, Germany. 17-20 June 2018. DOI: 10.1109/ICE.2018.8436350].

9. Hyun Joo, Jongchan Park, Dongsik Kim. Visual representation fidelity and self-explanation prompts in multi-representational adaptive learning. *Journal of Computer Assisted Learning*. 2021. Vol. 37, Issue 4. pp. 1091–1106. URL: https://doi.org/10.1111/jcal.12548.

10. Kononiuk, A.; Sacio-Szymanska, A.; Ollenburg, S.; Trivelli, L. Teaching Foresight and Futures Literacy and Its Integration into University Curriculum. Foresight and Sti Governance. Volume 15. Issue 3. Page 105-121. DOI 10.17323/2500-2597.2021.3.105.121

11. Kosovets, O. P., Soia, O. M., Krupskyi, Y. V., Tyutyun, L. A. Digital technologies as a means of adaptive learning for higher education informatics and mathematics. *Фізико-математична освіта*. 2022. Vol. 33(1). pp. 14–19. URL: https://doi.org/10.31110/2413-1571–2022-033-1-002.

12. Kovtonyuk M.M. Fundamentalisation of professional preparedness of future teachers of mathematics - bachelor level: a monograph. Vinnytsia: TOV firma «Planer», 2013. 424 p.

13. Kvitka S.A. Foresight as the technology of the future: the latest mechanisms of interaction of public authorities, business and civil companies. *Aspekty publichnogo upravlinya.* 2016. № 8 (34). P. 5-15.

14. Magruk, A. Concept of uncertainty in relation to the foresight research. Engineering Management in Production and Services, 2017. 9(1), 46–55. https://doi.org/10.1515/emj-2017-0005

15. Kovtoniuk Mariana M., Kosovets Olena P., Soia Olena M., Pinaieva Olga Yu., Ovcharuk Vira G., Mukhsina Kuralay. Modeling the Development Process of Inclusive Education in Ukraine. IAPGOŚ. 2022. Vol. 68, P. 48-59 DOI : https://doi.org/10.15804/tner.22.68.2.03 https://czasopisma.marszalek.com.pl/10-15804/tner/1128-tner2022/tner68/8590-tner2022203

16. Matematyka (specjalności nauczycielskie), I stopień [6 sem], stacjonarny, ogólnoakademicki, rozpoczęty w: 2016. Plan studiów: Cały kierunek http://syjon.umcs.lublin.pl/merovingian/sgroup/4003/plan/

17. Yüksel N., Çifci H. A new model for technology foresight: Foresight periscope model (FPM), *2017 International Conference on Engineering, Technology and Innovation (ICE/ITMC)*, 2017, pp. 807-817, doi: 10.1109/ICE.2017.8279967

18. Piirainen, K.A.; Andersen, A.D.; Andersen, P.D. Foresight and the third mission of universities: the case for innovation system foresight.Volume 18. Issue 1. Page 24-40. Special Issue SI. DOI: 10.1108/FS-04-2014-0026

19. Poteralska, B., Sacio-Szymańska, A. Evaluation of technology foresight projects. European Journal of Futures Research, 2014 2(1), 26. https://doi.org/10.1007/s40309-013-0026-1

20. Poteralska, B., Labedzka, J., Brozek, K. Identification and development of future-oriented competences. *12TH International Scientific Conference Business and Management 2022. P.* 1072-1078. DOI 10.3846/bm.2022.854

21. Reichenbach H. The Rise of Scientifing Philosophy. The University of Calefornia Press, 1959.

22. Reshetnyak O.I. Foresight methods in the management of scientific and technologigal development. *Efektyvna ekonomica*. 2019. № 12. – URL: http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=7492. DOI: 10.32702/2307-2105-2019.12.67.

23. Soia Olena, Kosovets Olena, Kovtoniuk Mariana, Leonova Ivanna, Pinaieva Olga, & Koval Natalia. Foresite modeling of synergetic educational space of the acquirent of higher education as a transfer of innovations into the economic space of the state. *Informatyka, Automatyka, Pomiary W Gospodarce I Ochronie Środowiska*. 2023, № 13 (4).

24. Sun, SP (Sun, Shengping); Fan, JH (Fan, Jianhua) ; Wang, Q (Wang, Qing). Foresight-development Research on Working Out University's Strategic Development Plan. 2011 *International Conference on Economic, Education and Management (ICEEM2011)*, VOL III. Page 261-263

25. Thomas, M. O. J., Palmer, J. Teaching with digital technology: Obstacles and opportunities. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, N. Sinclair (Eds.). The mathematics teacher in the digital era: An international perspective on technology focused professional development. Dordrecht: Springer. 2014. pp. 71–89.

26. Vasquez, J.E.M.;Pazos, L.S.; Arias, L.F.S. Foresight Capability and Maturity for Knowledge-Intensive Organizations. *Rae-Revista de Administracao de Empresas*. Volume 2. Issue 1. DOI 10.1590/S0034-759020220411x

27. Генсерук Г. Р. Цифрова компетентність як одна із професійно значущих компетентностей майбутніх учителів. *Open educational e-environment of modern University*, 2019. № 6. С. 8-16.

28. Гончаренко С. У., Кушнір В., Кушнір Г. Методологічні особливості наукових поглядів на педагогічний процес. *Шлях освіти*. 2008, №4 (50). С.2-9.

29. Згуровський М.З. Сценарний аналіз як системна методологія передбачення. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/50211/01-Zgurovsky.pdf?sequence

30. Ковтонюк М. М., Косовець О П., Соя О. М., Леонова І. М. Архітектура цифрових технологій в освітньому середовищі викладача як трансфер інновацій в економічний простір держави. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми* : збірник наукових праць. Вінниця: ТОВ «Друк плюс», 2023. Вип. 68. С. 93–106. DOI: https://doi.org/10.31652/2412-1142-2023-68-93-106

31. Ковтонюк М. М. Теоретичні і методичні основи фундаменталізації загальнопрофесійної підготовки майбутнього вчителя математики: дис. … доктора пед. наук: 13.00.04. Вінниця, 2014. 386 с.

32. Навчальний план на 2020-2024 рр. підготовки бакалавра з галузі знань 01 Освіта / Педагогіка за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) за освітньо-професійною програмою Математика та інформатика. Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна. URL: https://drive.google.com/drive/folders/1svDxobmyye5fBLZuQvKXSXqJpcKkv6l5

33. Навчальний план підготовки бакалавра з галузі знань 01 Освіта / Педагогіка освітньо-професійна програма Середня освіта (математика) за спеціальністю 014 Середня освіта (за предметними спеціалізаціями) спеціалізацією Середня освіта (математика) ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника". URL: https://mif.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/23/2020/02/NP_SOM_2016.pdf

34. Навчальний план підготовки бакалавра з галузі знань 01 Освіта / Педагогіка за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика). Український державний університет імені Михайла Драгоманова. URL: https://fmf.npu.edu.ua/navchalni-plany

35. Онищук Л.А. Концепція прогнозування розвитку загальної середньої освіти. К.: Інститут педагогіки НАПН України, Педагогічна думка, 2016. 32 с.

36. Опалюк Т. Л. Дидактичні умови реалізації адаптивної функції навчання студентів у процесі професійної підготовки вчителя : автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.09. Терноп. нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка. Тернопіль, 2015. 20 с.

37. Освітньо-професійна програма другого рівня вищої освіти за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика, інформатика) галузі знань 01 Освіта. Вінницький державний

педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. (перевірити і додати покликання). 2022, 20 с.

38. Освітньо-професійна програма першого рівня вищої освіти за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) галузі знань 01 Освіта. Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини. URL: http://surl.li/fwycz

39. Освітньо-професійна програма першого рівня вищої освіти за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) галузі знань 01 Освіта. Львівський національний університет імені Івана Франка. URL: https://new.mmf.lnu.edu.ua/wp-content/uploads/2023/03/OPP_014.04_2022.pdf

40. Полякова О.Ю., Шликова В.О. Короткий огляд досвіду прогнозування науково-технічного розвитку : аналітична довідка. Науково-дослідний центр індустріальних проблем розвитку Національна Академія наук України. Харків, 2018. URL: https://ndc-ipr.org/media/posts/presentations/Досвід_прогнозування_НТР_vG3PAKa.pdf

41. Прийма С. М. Особливості функціонування інтелектуальних адаптивних навчальних систем відкритої освіти дорослих. *Вісник Національної академії Державної прикордонної служби України*. Хмельницький. 2012. № 3. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vnadps_2012_3_21.

42. Про вищу освіту: Закон України від 01.07.2014 р. № 1556-VII. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text.

43. Руденко В. М. Математична статистика. Навч. посіб. К.: Центр учбової літератури, 2012. 304 с.

44. Руденко К.П. Логіка і наукове передбачення. Видавництво Київського університету, 1972. *228*.

45. Стратегія розвитку вищої освіти в Україні на 2021–2031 роки, 2020. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/rizne/2020/09/25/rozvitku-vishchoi-osviti-v-ukraini-02-10-2020.pdf.

46. Томсон Дж. Предвидимое будущее. М, Издательство иностранной литературы, 1958.

47. Форсайт в Україні. Офіційний сайт Українського інституту науково-технічної та економічної інформації. URL: http://www.uintei.kiev.ua/foresight/ua/foresight.php?id=1&id97223.

2.2. Системи комп'ютерної математики як складові освітнього середовища у навчанні математичних дисциплін

Туржанська О. С.

Сучасна цифрова трансформація та цифровізація освіти України визначально впливає на характер наукових досліджень, культуру та освіту. Це зумовлює прямий вплив на зміст освіти і, як наслідок, на зміну форм і методів навчання [1]. У Національній доповіді «Про стан і перспективи розвитку освіти в Україні» [15] одним із напрямів цифровізації освіти України є насичення науково-освітнього простору комп'ютерно орієнтованими засобами, електронними освітніми ресурсами. Одним із напрямів впровадження комп'ютерно орієнтованих засобів в освіту є використання предметно-орієнтованих програмних середовищ у навчанні математики. І саме предметно-орієнтовані програмні середовища можуть бути покладені в основу саморегуляції математичних знань молоді – від побудови моделі задачі, розуміння її математичної суті до отримання відповіді шляхом експерименту.

Теоретичними основами дослідження є:

- концепція цифрової трансформації та цифровізації освіти в Україні (В. Ю. Биков [2; 3], О. Ю. Буров [3], О. О. Гриб'юк [5], Р. С. Гуревич [6; 27], М. І. Жалдак [8], М. М. Козяр [11], Н. В. Морзе [13; 14], С. А. Раков [16], О. М. Спірін [26], С. О. Семеріков [28]);

- теоретичні та практичні аспекти комп'ютерно орієнтованих засобів візуалізації навчального контенту у вищій школі (В. І. Клочко [9; 10], В М. Михалевич [7; 12], О. В. Семеніхіна [17; 18], К. І. Словак [19; 20], О. В. Співаковський [21]), Ю. В. Триус [22; 23], О. І. Тютюнник [25]).

Використання математичних середовищ у навчанні математики розглядалось нами у роботах [4; 24; 29; 30].

В освітньому середовищі програми для підтримки навчання математики розділяють на два класи [18]: програми математичного і загального призначення (рис. 1).

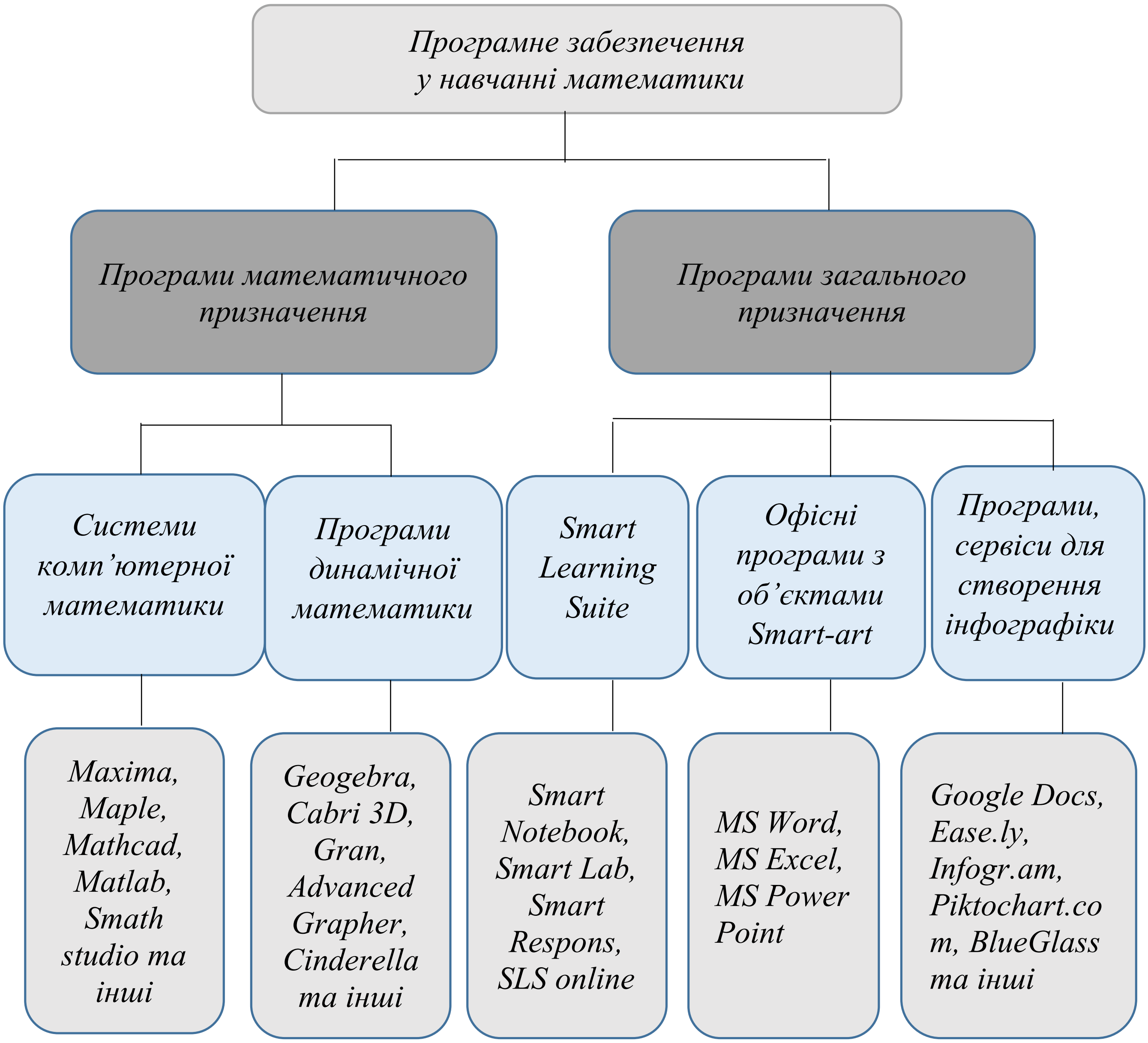


Рис. 1. Комп'ютерні засоби візуалізації математичних знань в освітньому середовищі

У вищій школі програмні математичні середовища використовують як для індивідуального навчання, так і для фронтальної демонстрації. Науковці пов'язують із використанням програмних засобів математичного призначення можливості істотного підвищення математичної культури, навчально-пізнавальної та дослідницької діяльності студентів. Важливу роль відіграють програми математичного призначення і у дистанційному навчанні.

Однак, при використанні предметно-орієнтованих програм у навчанні математичних дисциплін може виникати проблема підміни навчального матеріалу навчанням роботи з програмами.

Отже, виникає суперечність між необхідністю використання предметно-орієнтованих програмних середовищ у навчанні математичних дисциплін та недостатньою розробленістю методичних засад використання таких програм.

До сучасних програмних математичних середовищ відносять системи комп’ютерної математики. Системи комп’ютерної математики попри деякі відмінності в функціях та архітектурі, мають схожу структуру [18]:

1) центральне місце займає обчислювальне ядро системи – коди великої кількості скомпільованих функцій та процедур;

2) зручний інтерфейс, завдяки якому користувач може з легкістю звертатись до обчислювального ядра;

3) потужний графічний інструментарій;

4) пакети розширень;

5) бібліотеки процедур та функцій;

6) довідкова система.

Сьогодні, все більшої популярності набувають мобільні математичні середовища, серед яких програми Maxima та Mathcad. Ці системи комп’ютерної математики мають зручний для користувача інтерфейс, реалізують стандартні і спеціальні математичні операції та функції, мають графічні засоби, власні мови програмування, можливість створення текстових звітів, дозволяють імпортувати дані в інші програми та експортувати з них інформацію для обробки. Основне призначення систем комп’ютерної математики (СКМ) – це чисельне та символьне розв’язування типових задач вищої математики, чисельних методів, проектування навчальних задач, проведення інженерних обчислень.

Система Maxima ідеально підходить для використання в старшій профільній та вищій школі, її можуть використовувати професійні математики для проведення складних розрахунків і досліджень. Основними перевагами програми є:

1. Можливість вільного використання.

2. Можливість функціонування під керівництвом різних операційних систем (зокрема, Linux, Windows).

4. Широкий клас вирішуваних завдань.

5. Можливість роботи як в консольної версії програми, так і з використанням одного з графічних інтерфейсів (xMaxima, wxMaxima).

6. Розширення wxMaxima (входить в комплект поставки) надає користувачеві зручний і зрозумілий інтерфейс, позбавляє від необхідності вивчати особливості введення команд для вирішення типових завдань.

8. Наявність довідки та інструкцій по роботі з програмою.

Програма Mathcad відрізняється легкістю використання і застосування у навчанні математичних дисциплін, оскільки відкрита архітектура її застосунків у поєднанні з підтримкою технологій NET і XML дозволяють інтегрувати програму в будь-які IT-структури. В Mathcad обчислення відображаються графічно, на противагу текстовому запису за допомогою програмного кода, що використовується в інших СКМ, зокрема Maxima. Mathcad має простий і інтуїтивний для використання інтерфейс користувача. Mathcad орієнтований на підготовку інтерактивних обчислювальних документів. Але Mathcad, на відміну від Maxima, є комерційною системою комп’ютерної математики.

Mathcad є математичним редактором, що дозволяє проводити різноманітні наукові та інженерні обчислення, починаючи з елементарної арифметики і закінчуючи складними реалізаціями чисельних методів. Mathcad простий у використанні, має наочність математичних дій, велику бібліотеку вбудованих функцій та чисельних методів, можливість символьних обчислень, а також чудовий апарат представлення результатів.

До складу Mathcad входять кілька інтегрованих між собою компонентів:

- потужний текстовий редактор для введення та редагування тексту і формул;
- обчислювальний процесор для проведення розрахунків згідно введених формул;
- символьний процесор, який фактично є системою штучного інтелекту.

Сполучення цих компонентів реалізує зручне обчислювальне середовище для різноманітних математичних розрахунків та, одночасно, оформлення результатів.

При виконанні чисельних обчислень в Mathcad необхідно пам'ятати про можливі обмеження та неточності обчислень, що обумовлені:

- обмеженнями використовуваних чисельних методів;
- наявністю початкових умов, необхідних для збіжності певних чисельних методів;
- обмеженістю обчислювальних можливостей комп'ютера, що залежить від параметрів комп'ютера, операційної системи, тощо.

Розглянемо методичний аспект використання СКМ Maxima та Mathcad для розв’язування деяких класів математичних задач вищої математики.

СКМ Maxima та Mathcad мають стандартизовані засоби для побудови двовимірних і тривимірних функцій, заданих в явному, параметричному вигляді, у вигляді таблиці та в полярній системі координат. Для цього використовуються команди plot2d та plot3d з різноманітними опціями. Доцільним є використання СКМ для побудови та дослідження методом перерізів поверхонь другого порядку. Відмітимо, що в прикладних задачах часто зустрічаються ситуації, коли рівняння поверхні задано в каконічному виді, але з нестандартним розташуванням осей. Значна частина студентів робить помилки в розпізнаванні поверхні і її схематичному зображенні. На рис.2 наведено приклад побудови гіперболічного параболоїда, який видозмінюється в інтерактивному режимі.

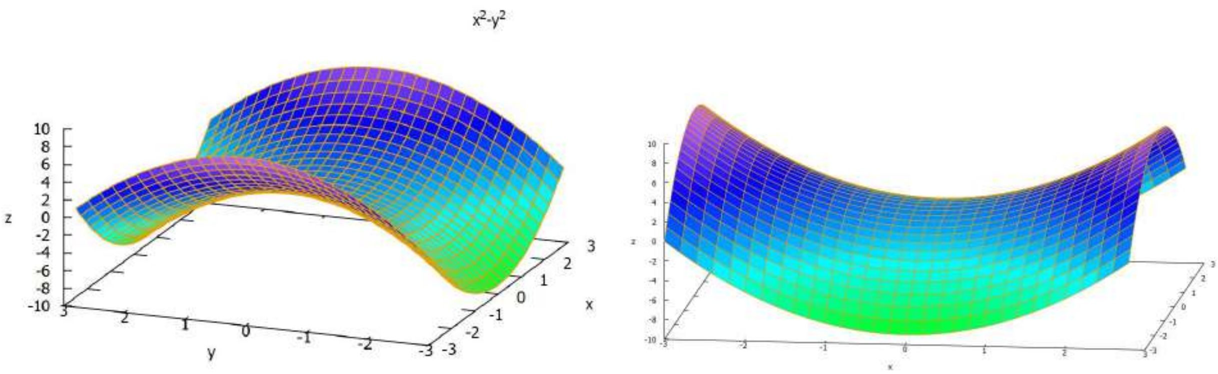


Рис. 2. Гіперболічний параболоїд, отриманий за допомогою стандартних засобів СКМ Maxima

Ефективним є використання СКМ при розв’язуванні задач, пов’язаних із застосуванням визначеного інтеграла, а саме коли виникає проблема побудови плоских областей, обмежених кривими, які задано в параметричній або полярній системі координат (рис. 3).

$x(t) := 4\cos(t) - 2\cos(2t)$

$y(t) := 4\sin(t) - 2\sin(2t)$

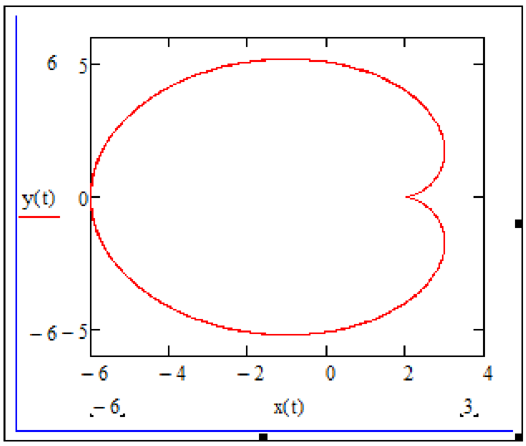


Рис. 3. Кардіоїда, отримана за допомогою стандартних засобів програми Mathcad

СКМ надають можливість, уникаючи рутинних обчислень, засвоїти та зрозуміти сутність математичних методів і алгоритмів, створити звіти з текстовими регіонами. Так, при розв’язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера, за допомогою оберненої матриці, у задачах оптимізації, дослідження функцій, застосування визначеного інтеграла, математичної статистики студентам доводиться прописувати весь алгоритм розв’язання, виконуючи в СКМ лише проміжні обчислення.

Розглянемо програмну реалізацію розв’язання завдань такого типу в СКМ.

Приклад. 1. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + 10z = -15, \\ 2x + 4y - z = 12, \\ x + y - 3z = 9. \end{cases}$$

Розглянемо програмну реалізацію розв’язання в Maxima:

Обчислимо основний визначник системи:

(%i1)D:matrix([1,2,10],[2,4,-1],[1,1,-3])) ('ввести матрицю');

D:determinant(D) (‘обчислити визначник’);

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$;

(%o2)-21;

Обчислимо додаткові визначники

(%i3)D:matrix([-15,12,9],[2,4,-1],[1,1,-3]);

Dx:determinant(Dx);

$x = Dx / D$; (‘знайти розв’язок’)

(%o3) $\begin{bmatrix} -15 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & -1 \\ 9 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(%o4)-21

(%o5)x=1

Аналогічно визначаються розв'язки y,z системи.

Приклад. 2. Знайти екстремуми функції $y = f(x)$.

Програмна реалізація в Maxima:

(%i1) $diff\ (f(x), x, 1)$ (‘знайти похідну першого порядку функції $f(x)$’);

(%i2) $solve\ (diff = 0)$ (‘знайти стаціонарні точки’)

(%i3)) $diff\ (f(x), x, 2)$ (‘знайти похідну другого порядку функції $f(x)$’);

(%i4) $at\ (diff(f(x), x, 2, x_0)$ (‘знайти значення похідної другого порядку функції $f(x)$ в стаціонарних точках’);

(%i5) $f(x_0)$ (‘знайти значення функції в точках екстремуму’).

Розглянемо приклад використання програмного алгоритму в Maxima: знайти екстремуми функції $f(x) = x(x-1)^3$.

```
(%i4)   f(x):=x*(x-1)^3;
(%o4)   f(x):=x (x-1)^3

(%i5)   solve(diff(f(x),x,1)=0);
(%o5)   [x= 1/4 , x=1 ]

(%i6)   diff(f(x),x,2);
(%o6)   6 (x-1) x+6 (x-1)^2

(%i7)   at(%o6,x=1/4);
(%o7)   9/4

(%i9)   at(%o6,x=1);
(%o9)   0
```

В точці $x = \dfrac{1}{4}$ друга похідна більше нуля, отже, це точка мінімума, в точці $x = 1$ друга похідна дорівнює нулю, отже, це точка перегину.

```
(%i10)  f(1/4);
(%o10)  - 27/256

(%i11)  f(1);
(%o11)  0
```

Точка $\left(\dfrac{1}{4}; -\dfrac{27}{256}\right)$ є точкою мінімуму.

Студенти мають можливість перевірити одержаний результат, побудувавши графік функції $f(x)=x(x-1)^3$ в Maxima.

Розглянемо типові задачі аналітичної геометрії.

Приклад 3. Знайти координати вектора $\vec{a}\,(-1,2,5)$ в базисі $V=\{\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3\}$, якщо вектор $\vec{a}$ задано в базисі $V_1==\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Старий і новий базиси пов'язані співвідношенням $\begin{cases}\vec{e}'_1=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2-\vec{e}_3,\\ \vec{e}'_2=6\vec{e}_1+4\vec{e}_2-4\vec{e}_3.\\ \vec{e}'_3=2\vec{e}_2+\vec{e}_3\end{cases}$

Одним з етапів розв'язування задачі є розв'язання системи рівнянь відносно $\{\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3\}$. У таких випадках, для того, щоб зекономити час та зосередитись на розумінні математичної суті задачі, можна автоматизувати розв'язання системи рівнянь засобами СКМ.

Для повного розв'язання задачі у програмі Mathcad необхідне розуміння його математичної суті та правильної побудови алгоритму за допомогою вбудованих функцій:

1. Ввести матрицю *A* коефіцієнтів зі співвідношень зв'язку старого і нового базисів.

2. Ввести вектор $\vec{a}$.

3. Знайти координати вектора $\vec{a}$ у новому базисі.

Приклад 4. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+1}{2}$ та площини $2x+3y-5z+11=0$.

Програмна реалізація розв'язання задачі в Maxima:

1. Ввести рівняння прямої у параметричному вигляді та рівняння площини:

$X:-2*t+3;$

$Y:-t+5;$

$Z:2*t-1;$

$F:2*x+3*y-5*z+11;$

2. Підставити параметричні рівняння прямої у рівняння площини:

$f:ev(F,x=X,y=Y,z=Z);$

3. Прирівняти до нуля та розв'язати одержане рівняння відносно параметра t.
$solve(f = 0, t)$;

4. Знайти координати точки перетину прямої та площини, підставивши одержане значення параметра t у рівняння прямої:
$ev(X, t = 2)$;
$ev(Y, t = 2)$;
$ev(Z, t = 2)$;

Приклад 5. Знайти кут (в градусах) між площинами: $Nx + 2y - (N + 2)z = 0$, $(N - 1)x + Ny + 2Nz = 0$.

Програмна реалізація розв'язання задачі в Maxima:

1. Ввести вектори нормалей до площин $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
2. Знайти косинус кута між цими векторами: c: a.b/(sqrt(a.a)*sqrt(b.b));
3. Знайти величину кута в градусах: acos(c)*180/%pi;
4. Якщо необхідно спростити одержане значення за допомогою команди: float(%), numer.

Отже, розв'язання задач такого типу в СКМ не тільки ілюструє можливості програми, а і вимагає від студентів знань сутності математичних методів і алгоритмів, умінь аналізувати одержані результати. У завданнях такого типу СКМ надають можливість студентам досліджувати математичні об'єкти, приймати рішення без рутинних проміжних обчислень.

СКМ використовують і у випадку, коли розв'язання задачі демонструє суто конструктивний підхід і має на меті перевірку отриманого результату розв'язання задачі.

До завдань такого типу можна віднести задачі елементарної математики, зокрема обчислення і перетворення арифметичних виразів, аналітичної геометрії, диференціальних рівнянь. Розглянемо основні вбудовані функції програми Maxima щодо розв'язування задач елементарної математики.

rat – ця функція перетворює раціональний вираз до канонічної форми.

(%i1)(x-1)^2/(x^2+x)+1/(x+1);

(%o1) $\frac{(x-1)^2}{x^2+x}+\frac{1}{x+1}$

(%i2)rat(%o1);

(%o2) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x}$

Якщо необхідно обчислити числове значення отриманого виразу, то можна застосувати функцію *at*, вказавши в дужках вираз або його адрес і значення змінної.

(%i3) at(%o2,x=-2);

(%o3) $\frac{7}{2}$.

Divide – знаходження частки і остачі від ділення одного многочлена на інший.

(%i1)divide(x^3-2,x-1);

(%o1)($x^2+x+1,-1$).

Перший елемент отриманого масива – частка, інший остача від ділення.

Factor – розкладання на множники.

(%i1)factor(4*x^2+4*x+1);

(%o1) $(2x+1)^2$.

Expand – розкриття дужок.

(%i1)expand(2+3*x)*(3*y+5*x);

(%o1)9xy+6y+15x^2+10x.

gcd – найбільший спільний дільник многочленів.

(%i1) gcd(x^3-1,x^2-1,x-1);

(%o1)x-1.

ratsimp – спрощення виразів.

fullratsimp – використовується для більш складних спрощень виразів.

partfrac – розкладає дріб на прості дроби.

(%i1) partfrac(-x/(x^3+4*x^2+5*x+2,x);

(%o1) $\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$.

radcan – перетворює вирази, які містять логарифмічні, показникові і степеневі функції.

trigsimp – тригонометричне спрощення.

Trigexpand – розкриття дужок в тригонометричних виразах.

Приклад 6. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках $A(2,-1,3), B(-1,3,4), C(0,2,1), D(-3,1,5)$, опущеної з вершини D на грань ABC.

Програмна реалізація розв'язання задачі в Maxima:

1. Для виконання завдань необхідно завантажити пакет «vect»:

Load (“vect”)

2. Ввести координати вершин піраміди.

Наприклад, $A:[2,-1,3];$

3. Знайти координати векторів.

Наприклад, вектора $\overrightarrow{AB}$, $AB:B-A;$

4. Знайти площу основи за формулою: $S=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$:

$AB\times AC:\exp ress(AB \sim AC);$

$S: sqrt(AB\times AC.AB\times AC)/2;$

5. Знайти об'єм піраміди за відомою формулою: $V=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{6}$:

$V:abc(AB\times AC.AD)/6;$

6. Знайти висоту піраміди за формулою: $h=\dfrac{3V}{S}$.

До задач такого типу можна і віднести розв'язання звичайних диференціальних рівнянь I-го і II-го порядків. Для розв'язання диференціальних рівнянь в Maxima використовується такий синтаксис: ode2 (eqn, dvar,ivar), де eqn – вираз диференціального рівняння, dvar – залежна змінна, ivar – незалежна змінна.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x^2y''+xy'=1$.

```
(%i10) ode2(x^2*'diff(y,x,2)+x*'diff(y,x)=1,y,x);
```

(%o10) $y=\dfrac{\log(x)^2}{2}+\%k2\log(x)+\%k1$

де %k1,%k2 – сталі інтегрування для рівняння другого порядку.

Якщо необхідно розв'язати задачу Коші $y(1)=1$, $y'(1)=2$, то

```
(%i13) ic2(%o10,x=1,y=1,diff(y,x)=2);
```

(%o13) $y=\dfrac{\log(x)^2}{2}+2\log(x)+1$

Отже, СКМ доцільно використовувати на практичних заняттях з математичних дисциплін з метою перевірки отриманих розв'язків та виконання громіздких проміжних обчислень.

Більшість СКМ створювались для того, щоб позбавити користувача від програмування при розв'язуванні математичних задач. Вбудовані функції у таких системах різноманітні, так що значну кількість математичних задач можна розв'язати без їх програмування. Але існують математичні задачі, де відмова від звичайного процедурного програмування призводить до ускладнення їх розв'язання. Тому практично всі СКМ підтримують функцію програмування.

Розглянемо програмну реалізацію задачі з використанням процедурного програмування в Maxima: Протабулювати функцію $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ з кроком h і по точках побудувати графік функції.

Покроковий алгоритм розв’язання задачі в Maxima:

1. Описати масиви x та y за допомогою функції ‘array’.
2. Значення цих масивів обчислити у циклі ‘for’.
3. Вивести значення масивів за допомогою функції ‘listarray’.
4. За допомогою функції ‘wxplot2d’ побудувати по точках графік функції.

Приклад 8. Протабулювати функцію $f(x) = x \cdot \sin(2x)$, $x \in [0; \pi]$ з кроком $h = 0{,}1\pi$.

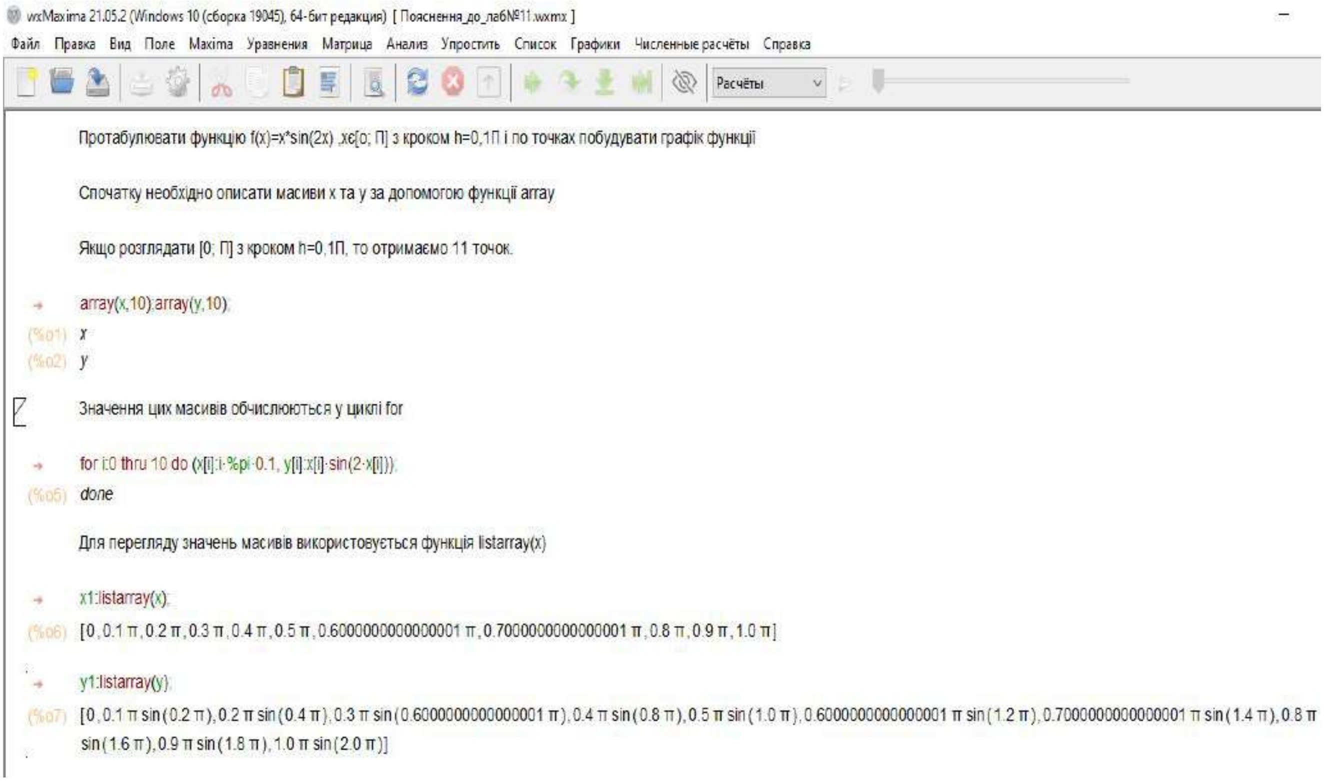


Рис. 4. Копія екрана програми Maxima щодо розв’язання задачі

Якщо розглядати програмну реалізацію розв’язання цієї задачі в Mathcad, то можна обмежитись лише вбудованими функціями. Наприклад, затабулювати функцію $f(x) := x^2 \cdot \cos(2 \cdot x)$; $x \in [0; \pi]$ з кроком $h = 0{,}1\pi$.

Програмна реалізація розв’язання в Mathcad: визначити масив абсцис точок табуляції x_i і масив F_i значень функції в точках x_i. Визначити діапазон зміни індексу і вузлів сітки: *i=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.* Це виконується за допомогою трьох команд: $i := 0..10 \quad x_i := i \cdot \frac{\pi}{10} \quad F_i := f(x_i)$. Перша команда задає діапазон зміни індексу *і*. Друга команда обчислює вектор абсцис вузлів табуляції. Для виведення вектору *x*, необхідно ввести з клавіатури: **x=**. Аналогічно, для виведення значень функції використовуємо команду: **F=**.

Побудова графіків функцій в СКМ, які складаються з кількох аналітичних виразів неможливе без використання елементів програмування.

Приклад 9. Побудувати графік функції:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ 2+x^2, & x>0 \end{cases}$$

Програмна реалізація в Maxima:

(%i1) g(x):=if x>0 then x else x (ввести перший аналітичний вираз функції);

(%i2) g(x):=if x<0 then x else x^2+2 (ввести другий аналітичний вираз функції);

(%i3) wxplot2d ([g], [x,a,b]) (побудувати графік функції).

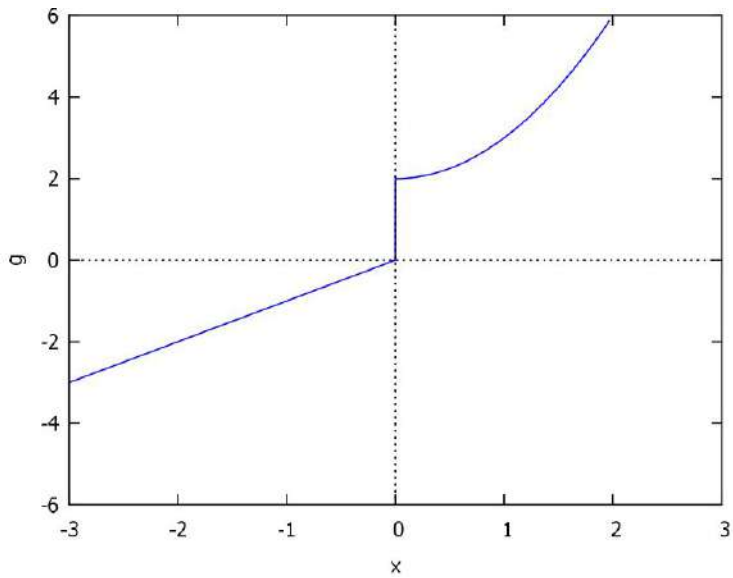


Рис. 5. Графік функції $f(x)$, побудований в Maxima

Одним із методичних напрямів використання СКМ у навчанні математичних дисциплін є створення навчальних тренажерів.

Під навчальним тренажером розв'язування математичних задач розуміємо програми-тренажери з покроковою деталізацією етапів розв'язування математичної задачі, що надає можливість студентам здійснити детальну перевірку кожного кроку виконання завдання. Навчальні програми-тренажери призначені для засвоєння студентами знань щодо алгоритмів розв’язування математичних задач. У процесі створення навчального тренажеру особливу увагу слід приділити вибору математичного середовища.

Постановка задачі: зобразити на комплексній площині число $z = a + i \cdot b$.

Пропонується навчальний тренажер в системі комп’ютерної математики Maxima, який призначений для покрокового відтворення розв’язування вказаної задачі. Основними напрямами методичної складової навчального комп’ютерного тренажера в Maxima є:

1) текстове представлення алгоритму;

2) автоматизація обчислень;

3) підтримка самостійної роботи;

4) генерація практичних завдань;

5) графічна інтерпретація розв’язку.

Тренажер для геометричного зображення комплексних чисел представлений таким алгоритмом в Maxima:

z:a+b*(%i) (задати комплексне число);

realpart (z) (виділити дійсну частину комплексного числа);

imagpart(z) (виділити уявну частину комплексного числа);

arg(z) (обчислити головне значення аргументу комплексного числа);

arg(z)·180/(%pi), numer (знайти у градусах кут між віссю абсцис та вектором);

load(“draw”) (завантажити пакет “draw” для зображення комплексних чисел);

wxdraw2d(xrange, yrange, head_lengh, head_angle) (зобразити вектор),

де xrange, yrange – відрізки на осях абсцис та ординат, в межах яких відображається вектор;

head_lengh – модуль комплексного числа;

head_angle – кут між віссю абсцис та вектором.

Навчальний тренажер для геометричного зображення комплексних чисел протестований на конкретних прикладах. Розглянемо один із них.

Приклад 10. Зобразити на комплексній площині число z=5+2·i.

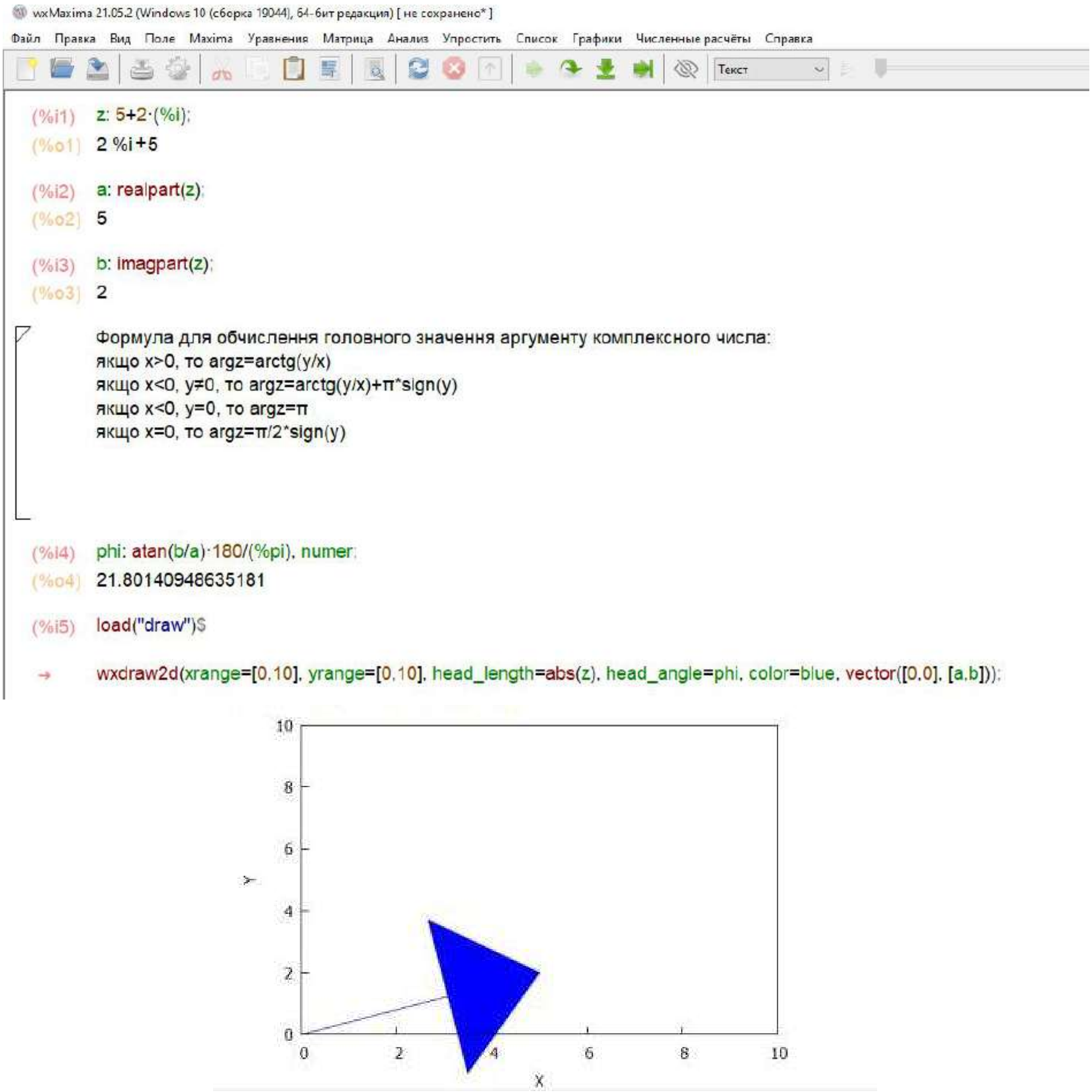


Рис. 6. Копія екрана навчального тренажера в Maxima щодо геометричного зображення числа z=5+2·i

Розглянемо навчальний тренажер щодо знаходження екстремуму функції двох змінних у математичному середовищі Mathcad.

Копія екрана навчального тренажера для знаходження екстремуму функції двох змінних у середовищі Mathcad представлена на рис. 7. Основними напрямами методичної складової навчального комп’ютерного тренажера у Mathcad є:

1) текстове представлення;

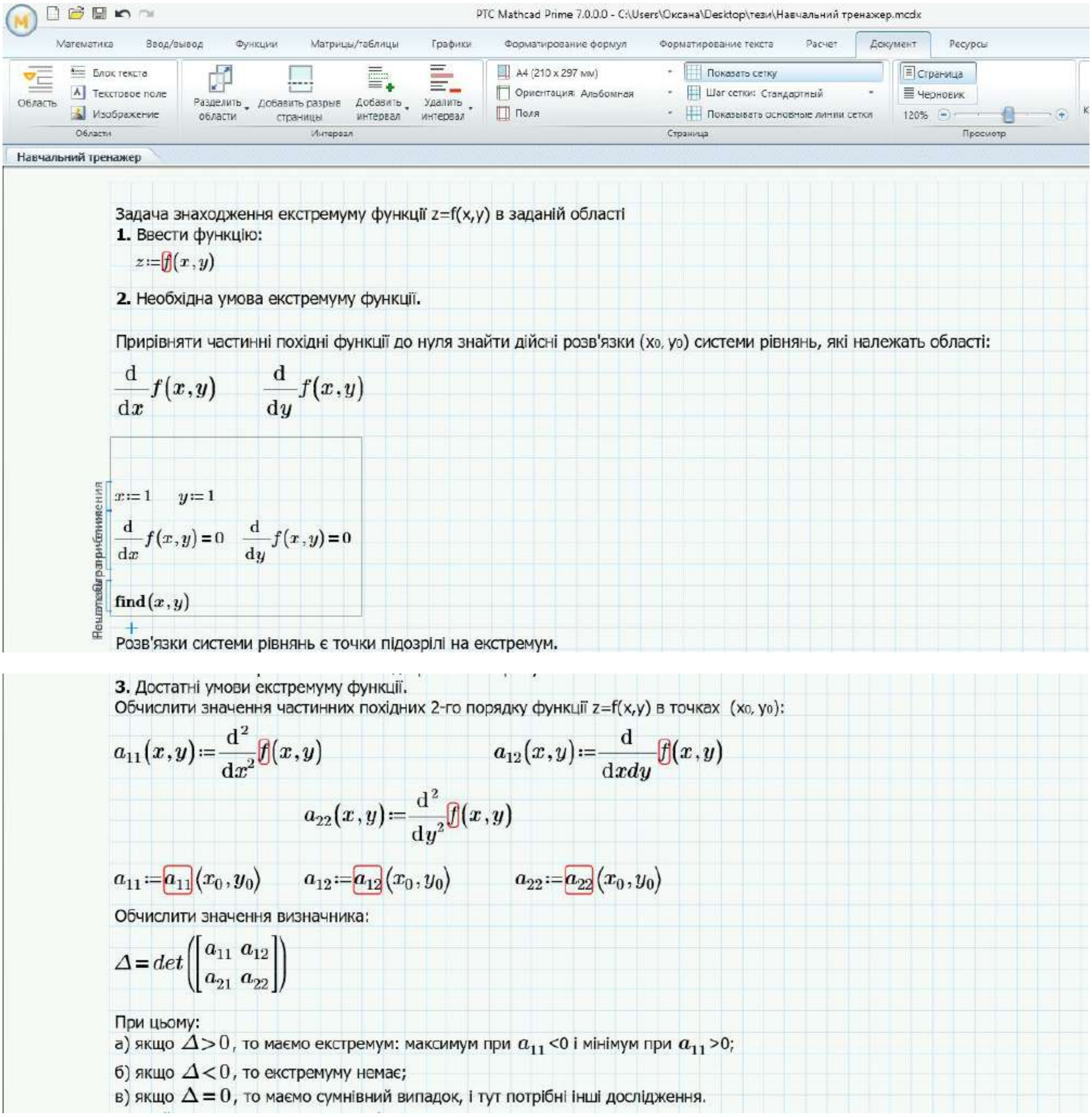
2) автоматизація та графічне відображення проміжних обчислень;

3) книжковий вигляд формул;

4) підтримка самостійної роботи;

5) генерація практичних завдань;

6) графічна інтерпретація розв’язку.



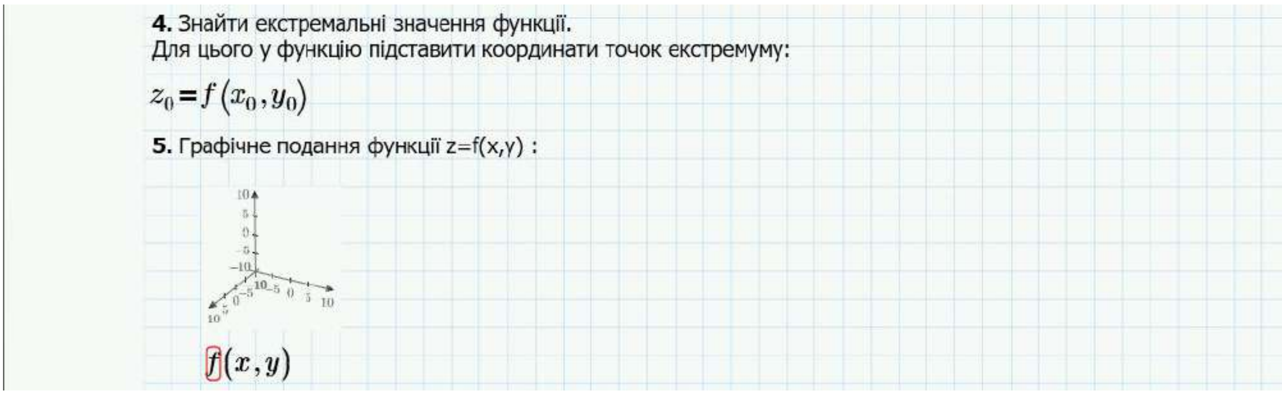


Рис. 7. Копія екрана навчального тренажера для знаходження екстремуму функції двох змінних у середовищі Mathcad

Навчальні тренажери у математичних середовищах використовують у навчанні математики у двох основних напрямках: як засіб подання, ілюстрації навчального матеріалу та як засіб розв'язування задач, дослідження математичних моделей.

Проведено анкетування студентів щодо використання СКМ у навчанні математичних дисциплін на базі Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. В анкетуванні взяли участь 65 студентів першого курсу.

Анкета містила такі питання:

1. Чи використовуєте Ви системи комп'ютерної математики при вивченні математичних дисциплін?
2. Для яких цілей Ви використовуєте системи комп'ютерної математики при вивченні математичних дисциплін?
3. Які переваги та недоліки використання систем комп'ютерної математики при вивченні математичних дисциплін Ви бачите?

Відповідно до результатів анкетування, 70% студентів першого курсу використовують системи компютерної математики при вивченні математичних дисциплін.

Найчастіше системи комп'ютерної математики використовуються студентами для розв'язування задач, перевірки правильності розв'язків, візуалізації математичних об'єктів.

До переваг використання систем комп'ютерної математики при вивченні математичних дисциплін студенти відносять: автоматизація рутинних обчислень, графічне відображення математичних об'єктів, краще засвоєння математичних методів та алгоритмів, доступність програм та інформації.

Серед недоліків студенти відзначають: залежність від комп'ютера, необхідність оволодіння навичками роботи з системами комп'ютерної математики, більшість програм є комерційними.

Загалом, результати анкетування свідчать про те, що студенти позитивно ставляться до використання систем комп'ютерної математики при вивченні математичних дисциплін. На думку студентів, роль програм математичного призначення у навчанні має бути допоміжною.

Отже, поєднання навчального матеріалу з математичними середовищами має базуватися на виваженій математичній ідеї. Головним критерієм ефективності використання програм математичного призначення у навчанні математики є наявність методичної системи їх використання.

Використання СКМ у навчанні математичних дисциплін сприяє інтеграції інформатики та математики, активізації самостійної роботи, саморегуляції математичних знань молоді, підвищенню їхньої математичної та інформатичної культури. У таких випадках, збільшується роль використання СКМ у дистанційному навчанні та самостійної роботи студентів.

Список використаних джерел

1. Биков В. Ю., Спірін О. М., Пінчук О. П. Проблеми та завдання сучасного стану інформатизації освіти. Наукове забезпечення розвитку освіти в Україні: актуальні проблеми теорії і практики. Київ : Вид. дім «Сам», 2017. С. 191- 198.

2. Биков В. Ю. Технології хмарних обчислень – провідні інформаційні технології подальшого розвитку інформатизації системи освіти України. Комп'ютер у школі та сім'ї. 2011. № 6. – С. 3–11.

3. Биков В. Ю., Буров О. Ю. ЦИФРОВЕ НАВЧАЛЬНЕ СЕРЕДОВИЩЕ: НОВІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА ВИМОГИ ДО ЗДОБУВАЧІВ ЗНАНЬ. Проблеми використання інформаційних технологій у сучасних закладах освіти. 2020. Вип. 55. С. 11–22.

4. Галецький С. М., Туржанська О. С., Галецька Т. І. НАВЧАЛЬНИЙ ТРЕНАЖЕР ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО ЗОБРАЖЕННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ У СИСТЕМІ MAXIMA ЯК ЕЛЕМЕНТ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ. Актуальні проблеми фізики, математики, інформатики та методики їх навчання: матеріали Всеукраїнської науково-практичної

конференції, 18-20 січня 2023 року. К. : Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023. С. 177-180.

5. Гриб’юк О. О. Рівнева модель дослідницького навчання учнів математики з використанням комп’ютерно орієнтованої методичної системи. Інформаційні технології і засоби навчання. 2020. Том 77. № 3. С. 39-62.

6. Гуревич Р. С., Коношевський Л. Л., Опушко Н. Р. Цифровізація освіти сучасного суспільства: проблеми, досвід, перспективи». 2022. Вип. 3-4. С. 22–46.

7. Добранюк Ю. В., Михалевич В. М., Коломієць А. А. ЗАСТОСУВАННЯ СКМ MAPLE ДЛЯ ПОБУДОВИ 3D ГРАФІКІВ В ЗАДАЧАХ ОБЧИСЛЕННЯ ОБ’ЄМУ ФІГУР. Інформаційні технології та комп’ютена інженерія. Вип. 2, с. 115–123.

8. Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. Математика з комп’ютером : посіб. для вчителів. К. : НПУ ім. Драгоманова, 2009. 282 с.

9. Клочко В. І., Бондаренко З. В. Деякі аспекти методики застосування нових інформаційних технологій під час вивчення теми «Диференціальні рівняння» у вищому технічному навчальному закладі. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. № 1(8). С. 92–98.

10. Клочко В. І., Бондаренко З. В. Вища математика. Звичайні диференціальні рівняння (з комп’ютерною підтримкою) : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2013. 248 с.

11. Козяр М. М. МОДЕРНІЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНО-ВИХОВНОГО ПРОЦЕСУ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ЄДИНОГО ІНФОРМАЦІЙНОГО ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА. Теорія і практика управління соціальними системами. Харків: НТУ „ХПІ”, 2011. № 1. С. 3-9.

12. Михалевич В. М., Тютюнник О. І. Використання систем комп’ютерної математики у процесі навчання лінійного програмування студентів ВНЗ : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2016. 208 с.

13. Морзе Н.В., Вембер В.П., Гладун М.А. 3Д картування цифрової компетентності в системі освіти в Україні. Інформаційні технології і засоби навчання: Теорія, методика і практика використання ІКТ в освіті. 2019. Том 70, № 2. С.28-42.

14. Морзе Н. В. Основи методичної підготовки вчителя інформатики : монографія / Н. В. Морзе. К. : Курс, 2003. 372 с.

15. Національна доповідь про стан і перспективи розвитку освіти в Україні: монографія / Нац. акад. пед. наук України ; за заг.ред. В.Г.Кременя. Київ : КОНВІ ПРІНТ, 2021. 384 с.

16. Раков С. А. Математична освіта: компетентісний підхід з використанням ІКТ : Монографія. Х. : Факт, 2005. 360 с.

17. Семеніхіна О. В., Білошапка Н. М. Про використання вчителями математики засобів комп’ютерної візуалізації. Гуманізація навчально-виховного процесу. 2018. №1. С. 289-301.

18. Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г. Комп’ютерно орієнтовані системи навчання математики : Навчальний посібник. Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2017. 144 с.

19. Словак К. І. Застосування ММС Sage у процесі навчання вищої математики. Вісник Черкаського університету. Серія педагогічні науки. Черкаси : ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2010. Вип. 191, частина 1. С. 106–111.

20. Словак К. І. Методика побудови окремих компонентів мобільного математичного середовища «вища математика».Інформаційні технології і засоби навчання. 2012. № 4 (30). С. 59-67.

21. Співаковський О. В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей. Херсон : Айлант, 2003. 229 с.

22. Триус Ю. В. Комп’ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у ВНЗ: проблеми, стан і перспективи. Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2010. № 9(16). С. 16–29.

23. Триус Ю. В. Розв'язування екстремальних задач за допомогою пакету Matlab 6.5. Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : зб. наук. праць. К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова. 2005. № 2(9). С. 61–79.

24. Туржанська О. С. Використання комп'ютерних програм математичного призначення при викладанні курсу вищої математики у педагогічному університеті. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців : методологія, теорія, досвід, проблеми : зб. наук. пр. Київ-Вінниця: ТОВ «Планер», 2018. С. 396-400.

25. Тютюнник О. І. Використання систем комп'ютерної математики для створення програмних засобів навчального призначення. Міжнародна науково-методична інтернетконференція «Інноваційні педагогічні технології у підготовці майбутніх фахівців з вищою освітою : досвід, проблеми, перспективи» (8–10 жовтня 2013 р.). Вінниця : ВНТУ, 2013. Режим доступу до журналу : http://conf.vm.vntu.edu.ua/inpedtex2013/materialy.html.

26. Vakaliuk T. A., Spirin O. M., N M Lobanchykova, L A Martseva, I V Novitska, V V Kontsedailo Features of distance learning of cloud technologies for the organization educational process in quarantine. Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1840. С. 1-11.

27. Gurevych R., Silveistr A., Mokliuk M, Shaposhnikova I., Gordiichuk G., Saiapina S. Using Augmented Reality Technology in Higher Education Institutions. *Postmodern Openings*. 2021. № *12*(2). С. 109-132.

29. Tkachuk V., Semerikov S., Kislova M., Khotskina V. Exploring Student Uses of Mobile Technologies in University Classrooms: Audience Response Systems and Development of Multimedia [Electronic resource]. ICTERI 2020: ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer 2020 : Proceedings of the 16th International Conference on ICT in Education, Research and Industrial Applications. Integration, Harmonization and Knowledge Transfer. Volume II: Workshops. Kharkiv, Ukraine, October 06-10, 2020. Vol. 2732. Pp. 1217-1232. – Access mode : http://ceur-ws.org/Vol-2732/20201217.pdf.

30. Turzhanska O., Galetskyi S., Biloshytska T., Topishko N, Galetska T. Computer-oriented technologies in teaching mathematics as a means of self-regulation of young people`s mathematical knowledge. Youth Voice Journal. INEQUALITY, INFORMATIONAL WARFARE, FAKES AND SELF-REGULATION IN EDUCATION AND UPBRINGING OF YOUTH. March, 2023. Vol. I, Pages 90-102. DOI: 10.13140/RG.2.2.29637.73441

2.3. Застосуванням систем комп’ютерної математики при проведенні інтегрованих уроків з інформатики

Крупський Я. В.

Проблема інтеграції шкільних предметів, у контексті історії розвитку науки, є однією з найдавніших і досліджувалася у різних аспектах. Розкриття концепції інтеграції шкільного матеріалу як складного, багатогранного та суперечливого процесу вимагає аналізу філософських принципів і категорій, які виступають як засоби об'єднання всієї системи людського знання. Вони функціонують як загальні принципи для всіх галузей науки.

З погляду педагогічних наук та літературних джерел, інтеграція - це процес зближення та взаємодії, спрямований на розуміння учнем єдиної наукової картини світу. Ця необхідність інтеграції виникає не лише через значний обсяг наукових знань, але також через центральну мету освіти - розвиток і саморозвиток сутнісних сил дитини в їхній єдності та цілісності.

У розвитку сучасних систем освіти, інтеграція виступає як провідний принцип, проявляючись як спосіб і процес створення багатовимірної картини світу, що об'єднує різні способи відображення дійсності. Інтеграція розглядається як необхідний дидактичний інструмент, який надає можливість створити цілісну картину світу в навчально-виховному процесі, об'єднуючи різні частини та елементи.

Мета навчання за допомогою інтеграції полягає у формуванні цілісного розуміння навколишнього середовища, сприянні підвищенню рівня розумової активності учнів, а також у забезпеченні їх самовираження, самореалізації та розвитку гармонійної особистості з властивими їй загальнолюдськими цінностями.

Проблематика формування особистості, базуючись на інтеграції шкільного та позашкільного навчання, а також в рамках урочної та позаурочної діяльності, була предметом досліджень відомих науковців, таких як Джон Дьюї, який досліджував інтеграцію шкільного навчання з акцентом на соціальний взаємозв'язок, Жан Піаже – вніс вагомий внесок у розуміння розвитку когнітивних здібностей дітей, Лінда Дарлінг-Геммонд –зосереджувалася на питаннях якісної освіти та методів поліпшення, включаючи інтеграцію.

Аналіз наукової літератури, матеріалів конференцій та науково-методичного забезпечення, щодо формування інтегрованих знань про людину і світ учнів, висвітлено у дослідженнях науковців та практиків інноваційної діяльності, таких як Г. М. Андрєєва в роботах досліджено методи формування інтегрованих знань в контексті гуманітарних наук; роботи Н. М. Бібік фокусуються на питаннях інтеграції знань в галузі природничих наук та математики. Її дослідження можуть стосуватися розробки інноваційних методів викладання для покращення зрозуміння матеріалу учнями; роботи К. Ж. Гузя спеціалізуються на вивченні інтеграції наукових та художніх знань в процесі освіти. Також її роботи присвячені розвитку творчих методів навчання; В. Р. Ільченко досліджує інтеграцію знань в галузі соціальних наук та педагогіки; Н. С. Коваль фокусується на аспектах інтеграції знань в освіті загалом. Її роботи можуть включати аналіз тенденцій розвитку інтеграції в сучасних системах освіти; Н. М. Свєтловська вивчає питання формування інтегрованих знань в рамках міжпредметних зв'язків та педагогічних інновацій; О. Я. Савченко досліджує використання технологій у навчальному процесі і може досліджувати, як інтеграція знань може підтримуватися сучасними педагогічними технологіями.

Перегляд наукових джерел свідчить про активність у проведенні досліджень з впровадження інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема, комп'ютерно-орієнтованих систем навчання. Цю інформацію висвітлено у працях В. Ю. Бикова [13], В. М. Глушкова, М. І. Жалдака [14], Ю. С. Рамського, І. О. Теплицького [19], А. П. Єршова. В основному в даних роботах мова йде по використання таких програмних продуктів як Gran, DG, ТерМ та ін..

Із огляду іноземних джерел [1, 7, 10], можна зробити висновок, що системи комп'ютерної математик є ефективним засобом навчання інформатики та математики учнів в США, Японії, Франції і т.д. На жаль, в нашій шкільній системі учні недостатньо знайомі з сучасними системами комп'ютерної математики, що суттєво сповільнює вирішення ряду проблем входження вітчизняної освітньої системи у світову, де СКМ активно використовуються.

Взаємодія між загальноосвітніми школами та вищими педагогічними навчальними закладами сприяє створенню умов для виявлення та розвитку навчальних здібностей молоді. Ефективність цього процесу залежить від постійної взаємодії, де учні відіграють активну роль. Використання ресурсів дистанційного навчання з урахуванням гнучкості для стимулювання творчого та активного навчання суттєво впливає на учнів і студентів в їхній навчально-пізнавальній діяльності. Хоча комп'ютерні технології сприяють підвищенню якості освіти, важливо відзначити, що вони не можуть замінити важливу роль вчителя або викладача.

Під час проведення інтегрованих уроків з інформатики використання систем комп'ютерної математики або комп'ютерно-орієнтованих систем є не тільки корисним, але й необхідним завдяки чіткої візуалізації графіків та малюнків, використанню засобів візуального програмування і мультимедійних засобів. автоматизації математичних обчислень і т.д.

Програмні засоби, спрямовані на виконання чисельних та аналітичних розрахунків різного рівня складності та призначені для розв'язання задач, які можуть бути коректно висловлені за допомогою термінів математики, отримали назву систем комп'ютерної математики. Однією з характерних особливостей СКМ є їхня гнучкість, що дозволяє користувачам втручатися в процес обчислень та впливати на розв'язання задачі за необхідними параметрами. Це відрізняє СКМ від більшості пакетів прикладних програм. Окрім того, СКМ володіють високим рівнем візуалізації результатів обчислень.

Сучасний прогрес у галузі комп'ютерних технологій, спрямованих на створення інтегрованих пакетів мультимедійних технологій, призвів до розробки різноманітних систем комп'ютерної математики. До цього виду систем належать, зокрема, Maple [5] від компанії Waterloo Maple Software Inc., Mathematica від Wolfram Research Inc., Macsima, WolframAlpha, а також інші визнані платформи у цій області. Ці системи комп'ютерної математики відрізняються високими показниками, перевищуючи характеристики систем Derive, REDUCE, Macsyma, MatLab та MathCAD і водночас вони дотримуються встановлених стандартів. Однією з основних їхніх відмінностей від даних систем є наявність вбудованої розвиненої мови програмування, що робить їх ефективними і гнучкими інструментами для виконання різноманітних обчислень та математичних операцій.

Вибір систем комп'ютерної математики (СКМ) залежить від остаточної мети використання програм, конкретного класу завдань та їх призначення. Дидактичні функції таких систем включають:

- Представлення матеріалу у вигляді наочних засобів (електронні довідники з гіпертекстовою системою допомоги та інтуїтивним інтерфейсом, анімаційні приклади, звуковий і відео супровід).

- Розв'язання практичних задач, дослідження складних моделей, аналіз варіантів розв'язання задач, розвиток практичних навичок математичного мислення.

Системи комп'ютерної математики можна класифікувати на сім основних класів: системи для чисельних розрахунків; табличні процесори; матричні системи; системи для статистичних розрахунків; системи для спеціальних розрахунків; системи для аналітичних розрахунків (комп'ютерна алгебра); універсальні системи.

Застосування систем комп'ютерної математики можна успішно інтегрувати у процес інтегрованих уроків з інформатики, надаючи учням можливість використовувати ці інструменти для вирішення математичних завдань та виконання інтерактивних вправ. Це створить зв'язок між інформатикою та математикою, сприяючи комплексному розвитку обох навичок.

Головною метою інтеграції шкільних уроків є створення у школяра цілісного уявлення про навколишній світ, або, іншими словами, формування світогляду. Цей підхід відкриває широкий спектр можливостей для якісного вирішення завдань навчання і виховання учнів:

1. Зв'язок предметів. Інтегрований підхід надає можливість ефективно поєднувати різні предмети, щоб учні бачили взаємозв'язок між ними. Наприклад, об'єднання інформатики та математики може допомогти учням уявити, як математичні концепції використовуються в розв'язанні інформаційних завдань. Або ще цей пункт можна назвати перехід до міжпредметних зв'язків. А сааме, що перехід від внутрішньо-предметних зв'язків до міжпредметних надає можливість учневі ефективно переносити стратегії та способи дій з одних об'єктів на інші, сприяючи полегшенню навчання та формуванню уявлення про цілісність світу. Зазначимо, що успішний перехід вимагає наявності певної бази знань внутрішньо-предметних зв'язків, оскільки без неї перенесення може стати поверховим і механічним.

2. Практична спрямованість. Інтеграція дозволяє забезпечити більше практичних завдань, де учні використовують знання з різних предметів для розв'язання реальних проблем. Це сприяє практичному застосуванню отриманих знань.

3. Розвиток критичного мислення. Інтегрований підхід сприяє розвитку критичного мислення учнів, оскільки вони повинні аналізувати і взаємодіяти з різними концепціями та ідеями, що входять в різні предмети.

4. Розвиток творчого мислення. Інтеграція навчального матеріалу надає можливість не лише сприяти взаємодії різних дисциплін, але й стимулює розвиток творчого мислення учнів. Даний підхід надає можливість застосовувати отримані знання у реальних ситуаціях та умовах, що є ключовим

фактором виховання культури та важливим засобом формування особистісних якостей учнів, орієнтованих на позитивне ставлення до природи, до співлюдення етичних норм та загального добробуту.

5. Сприяння творчості. Інтеграція стимулює творчий підхід до вивчення, оскільки вона дозволяє учням розвивати свої творчі здібності через поєднання різних аспектів знань.

6. Широкий погляд на проблему. Інтеграція допомагає учням дивитися на проблеми з різних точок зору, сприяючи більш повному і глибокому розумінню теми.

7. Інтеграція є засобом мотивації навчання школярів, який надає можливість викладачу активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів та сприяє зняттю перенапруги та втоми.

На уроках інформатики при вивченні розділу програмування у школі з 8 по 11 клас, інтеграція СКМ може бути особливо корисною, враховуючи потреби учнів на різних етапах їхнього навчання. Наведемо основні моменти, як можна використовувати СКМ для інтеграції при вивченні курсу інформатика:

1. Створення мультимедійних презентацій. Учні мають можливість використовувати довільні СКМ для створення мультимедійних презентацій, де вони демонструють вирішення математичних задач використовуючи різні функції та можливості обраної системи комп'ютерної математики.

2. Дослідницькі проекти. Завдання на дослідження геометричних властивостей фігур чи інші явища за допомогою СКМ може стати частиною інтегрованого уроку. Учні мають можливість досліджувати математичні концепції, використовуючи функції та інструменти СКМ.

3. Візуалізація даних. СКМ можна використовувати для створення графіків та візуалізації даних у програмах учнів. Це допоможе їм краще розуміти та представляти результати своїх програм.

4. Вивчення систем комп'ютерної математики. Інтеграція СКМ може допомогти у ознайомленні та вивченні таких програмних продуктів як: *Derive, REDUCE, Macsyma, MatLab, MathCAD, Maple, Mathematic* яка включає в себе використання СКМ для символічних обчислень та розв'язання математичних завдань.

5. Моделювання математичних задач: Учні можуть використовувати СКМ для моделювання та розв'язання математичних задач, що допоможе їм зрозуміти взаємозв'язок між математикою та програмуванням.

6. Розв'язання символьних задач. Учні мають можливість використовувати системи комп’ютерної математики для розв'язання символьних математичних задач, таких як обчислення або спрощення математичних виразів, знаходження похідних та інтегралів. Це допоможе їм легше розуміти та застосовувати математичні концепції у програмуванні.

7. Створення електронних завдань або довідників. Учні мають можливість використовувати СКМ для створення або генерування різноманітних завдань з математики, які можна вирішувати та перевіряти в електронному форматі.

8. Розв'язання практичних задач. Використання СКМ надає можливість учням ефективно розв'язувати практичні задачі та моделювати різні сценарії, які вимагають математичних розрахунків.

Інтеграція СКМ у інтегровані уроки з інформатики може сприяти більш глибокому розумінню математичних концепцій та розвитку навичок роботи з інформаційними технологіями.

Зупинимо свій вибір на застосуванні СКМ Maple, а для цього розглянемо загальні відомості про систему Maple, її структуру й принципи роботи та надамо короткі характеристика системи Maple.

Системи класу *Maple* були створені корпорацією Waterloo Maple, Inc. (Канада) як системи комп’ютерної математики з розширеними можливостями в галузі символьних обчислень. Уже перші версії системи *Maple* V показали себе лідерами в галузі символьних обчислень. Ядро й вбудовані пакети розширення цих систем нараховували до 3000 убудованих функцій для виконання різних обчислень і символьних перетворень. Надалі число функцій, правда досить повільно, збільшувалося від версії до версії й у останніх версіях *Maple* уже перевищує 3800.

Maple позиціонується як універсальна система комп'ютерної алгебри, що розрахована на широке коло користувачів. Система містить засоби для виконання швидких чисельних розрахунків, що лежать в основі математичного моделювання різних явищ навколишнього світу, систем і пристроїв всілякого призначення. Все це сполучається з новітніми й досить ефектними засобами візуалізації обчислень. У силу цього системи перейшли в категорію універсальних систем комп'ютерної алгебри.

Maple – типова інтегрована програмна система. Вона поєднує в собі:

- потужну мову програмування (вона ж мова для інтерактивного "спілкування" із системою);
- редактор для підготовки й редагування документів і програм;
- сучасний багатовіконний користувальницький інтерфейс із можливістю роботи в діалоговому режимі;
- потужну довідкову систему з багатьма тисячами прикладів;
- словник математичних понять і термінів з алфавітною організацією;
- ядро алгоритмів і правил перетворення математичних виразів;
- чисельні й символьний програмні процесори;
- систему діагностики;
- бібліотеки вбудованих і додаткових функцій;
- пакети розширення як вбудованих, так і сторонніх виробників;
- засоби підтримки деяких мов програмування й інтеграції із широко розповсюдженими програмами.

До всіх цих засобів є повний доступ прямо з вікна програми, реалізований *командним режимом* роботи. Система *Maple* пройшла довгий шлях розвитку й апробації.

Основою для роботи з символьними перетвореннями в *Maple* є ядро системи. Воно містить сотні базових функцій і алгоритмів символьних перетворень. Є також основна бібліотека операторів, команд і функцій. Багато вбудованих в неї функцій, як і функції ядра, можуть використовуватися без будь-якого оголошення, інші ж потребують оголошення. Крім того, є ряд пакетів (packages), що підключаються. Додаткові функції з пакетів можуть застосовуватися після підключення пакету за допомогою команди with(name), де name - ім’я необхідного пакету. Загальне число функцій, з урахуванням вбудованих в ядро і розміщених у пакетах системи *Maple*, перевищує 3000. Це означає, що більшість задач може розв’язуватися в режимі прямого діалогу з системою без використання будь-яких засобів програмування.

Перерахуємо основні можливості системи Maple.

Інтерфейс: робота з багатьма вікнами; представлення графіків у окремих вікнах або у вікні документа; представлення вихідних і вхідних даних у природному вигляді математичних формул; представлення текстових коментарів різними шрифтами; можливість використовування гіперпосилань і підготовки електронних документів; зручне управління за допомогою клавіатури через головне меню та інструментальну панель; управління за допомогою мишки.

Символьні і чисельні обчислення: числова та аналітична інтеграція; диференціювання функцій; обчислення границь функцій; обчислення сум і добутків.

Робота з рівняннями в чисельному і символьному вигляді: розв’язання систем лінійних і нелінійних рівнянь; робота з рекурентними функціями; розв’язання систем з нерівностями.

Робота з функціями: обчислення значень всіх елементарних функцій; обчислення значень більшості спеціальних математичних функцій; перерахунок координат точок відносно різних координат системам; побудова функцій користувача.

Лінійна алгебра: понад сто операцій з векторами та матрицями; розв'язання систем лінійних рівнянь.

Графічна візуалізація результатів обчислень: побудова графіків довільних функцій; різні типи осей (з лінійним і логарифмічним масштабом); графіки функцій у декартовій і полярній системах координат; спеціальні види графіків (точкові масиви, векторні графіки, діаграми рівнів, та ін.); системи координат, визначені користувачем; графіки тривимірних поверхонь з функціональним забарвленням; побудова у просторі геометричних об'єктів; анімація графіків; створення і програвання анімаційних файлів.

Програмування: вбудована мова процедурного програмування; простий і типовий синтаксис мови програмування; широкий набір типів даних; типи даних, що задаються користувачем; бібліотеки функцій; надання зовнішніх функцій і процедур; підтримка мови програмування С.

Основою для роботи із символьними перетвореннями в Maple є ядро системи (Рис 1.). Воно містить багато сотень базових функцій й алгоритмів символьних перетворень. Ядро системи поліпшується від версії до версії.

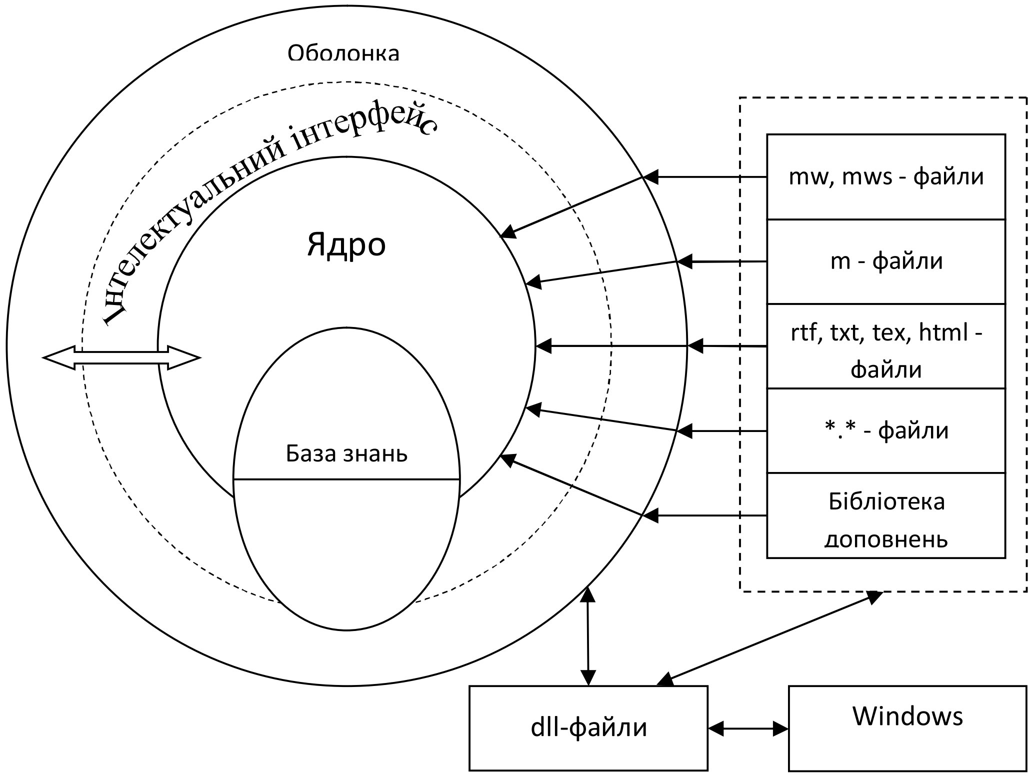


Рис 1. Структурна схема СКА Maple.

Наведемо фрагменти інтегрованих уроків з інформатики із застосуванням системи комп'ютерної математики Maple.

10-й клас. Розділ «Аналіз і візуалізація даних» із застосуванням СКМ Maple для розв'язування економічних задач.

Тема уроку: Аналіз і візуалізація даних. Економічні задачі.

Мета уроку: формувати у учнів вміння розв'язувати економічні задачі на оптимізацію за допомогою СКМ Maple.

ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Завдання 1. Знайти найменше значення прибутку, який виражається цільовою функцією, якщо параметри аргумента лежать в межах 1..5 та зробити схематично малюнок:

$$f(x)=(3x^4+4x^3-35x^2+11)cos(x) \to \ min \text{ якщо } 1 <= x <= 5$$

Хід роботи

Для розв'язання поставленого завдання можна скористатись диференціальним численням для знаходження мінімального значення функції, але ми сьогодні будемо використовувати СКМ Maple для розв'язання поставленого завдання.

Для початку запускаємо СКМ Maple. Та в діалогове вікно змінній *f* задаємо нашу цільову функцію. І використовуючи вкладену функцію *minimize* для пошуку мінімуму функції вводимо наші параметри використовуючи шаблон:

mimimize (< *функція*>, **x=** <*числовий проміжок*>*,location***);**

Звертаємо увагу, що формат обмежень записується у формі числових проміжків. В результаті виконання процедури отримаємо мінімальне значення заданої функції (Рис. 2.)

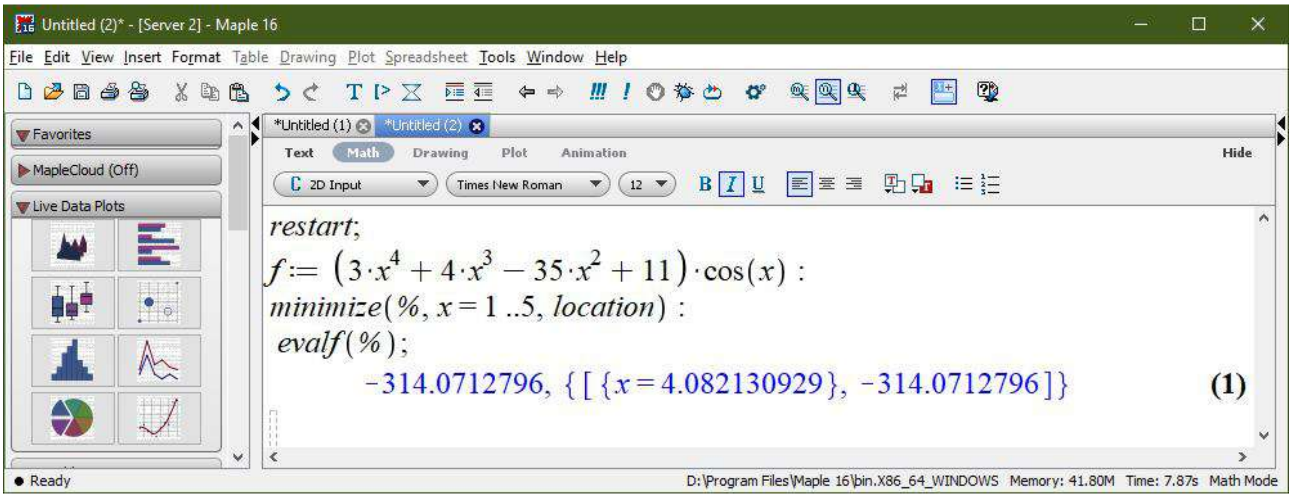


Рис. 2. Введення цільової функції та пошук мінімального значення

Пропонуємо учням, для наглядності отриманого значення побудувати графік нашої функцію. Для цього нам необхідно скористатись наступним шаблоном для побудови графіка функції: **plot (** <*функція*> **, x=**<*числовий проміжок*>**).** В результаті виконання якого отримаємо наш графік (Рис. 3).

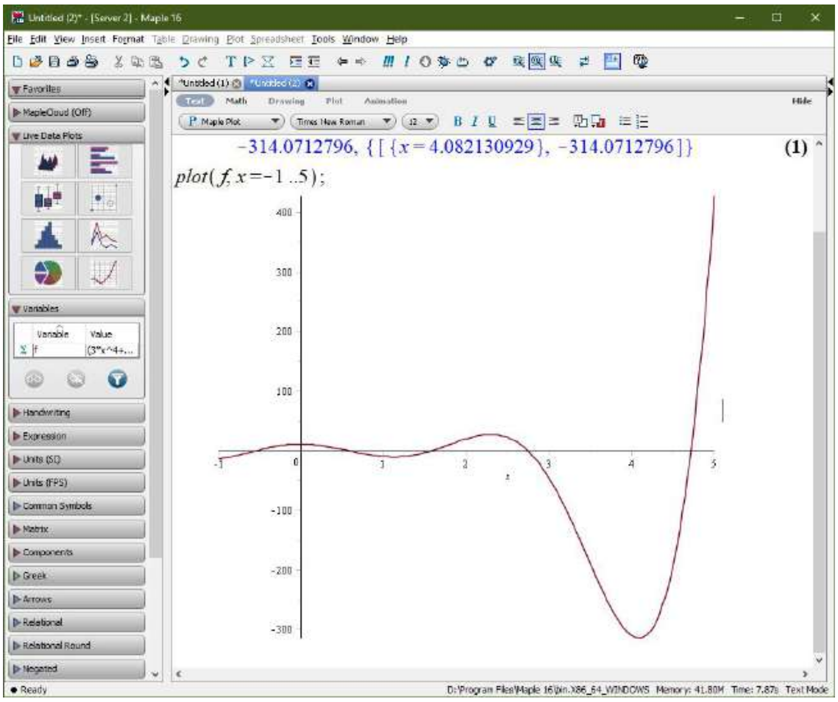


Рис. 3. Maple, графік функції *$(3x^4+4x^3-35x^2+11)cos(x)$*

Так як учні уже знайомі із темою похідна, тому запропонуємо учням написати алгоритм знаходження найменшого значення функції на відрізку використовуючи вбудовану функцію *diff*. Продемонструємо відповідний алгоритм. (Рис. 4)

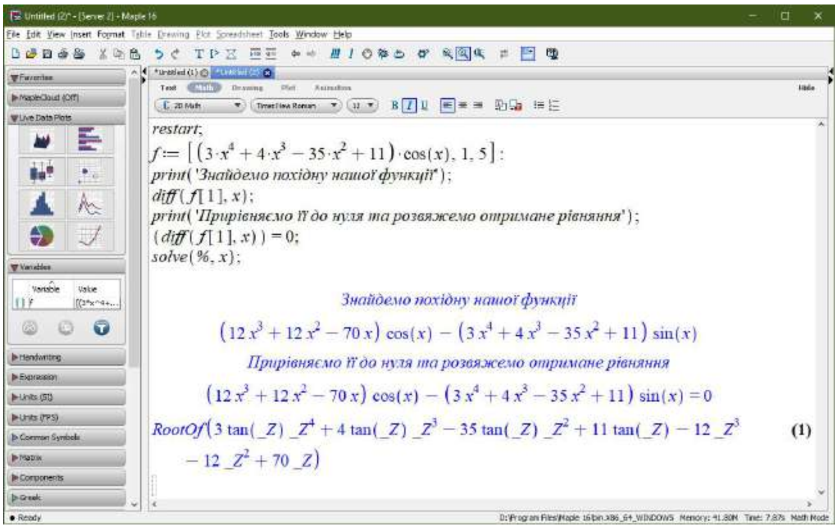


Рис. 4. Пошук екстремуму функції

Як бачимо система не може розв'язати отримане рівняння із похідною, а тому ми застосуємо метод наближеного розв'язку. Наприклад метод Ньютона. Для цього скористаємось наступним алгоритмом:

restart;

```
f := (3*x^4+4*x^3-35*x^2+11)*cos(x);
diff_eq := diff(f, x);
eq := expand(diff_eq) = 0;
x0 := 5;          #Вибір початкового наближення
numeric_sol := fsolve(eq, x = x0);    #Використання методу Ньютона для знаходження кореня
numeric_sol;            #Виводимо результат
evalf(subs(x = numeric_sol, f))      #Підставляємо та знаходимо значення функції
```

результат роботи якого представлено на рис. 5:

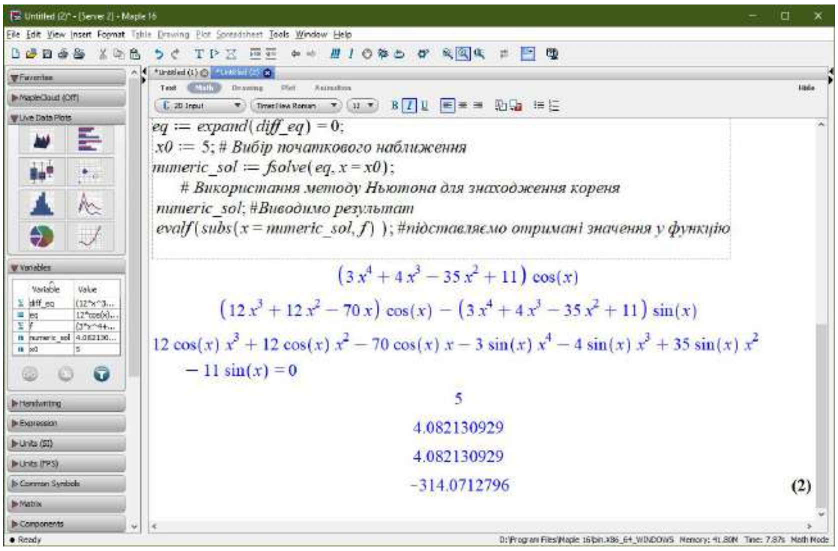


Рис. 5. Пошук мінімального значення через похідні

Переконалися, що для двох різних методів отримали однакове значення мінімального значення цільової функції.

Наступне завдання пов’язане із графічним методом пошуку оптимального розв’язку задач на оптимізацію.

Завдання 2. Нехай маємо цільову функцію:

$$z = 8x_1 + 6x_2$$

та обмеження:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 - 10x_2 \le 3 \\ 6x_1 - 3x_2 \le 75 \\ -2x_1 + 13x_2 \le 241 \\ x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 7x_1 - x_2 \ge -1 \end{cases}$$

За допомогою СКМ Maple потрібно побудувати область, опорну лінію, вектор нормалі та знайти точки на схемі, у яких цільова функція набуває найбільшого та найменшого значень.

Хід роботи

Для початку потрібно побудувати шукану область, для цього задаємо цільову функцію та обмеження (Рис. 6)

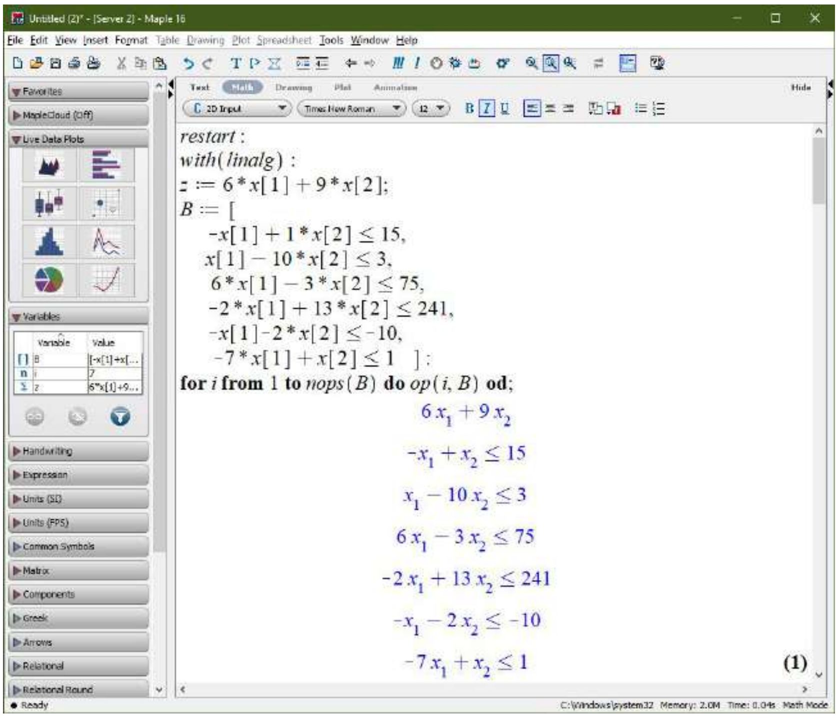


Рис. 6. Цільова функція та обмеження

Для побудови шуканої області скористаємось вбудованою функцією *inequal*. В яку прописуємо наші обмеження, та область побудови, результат виконання представимо на Рис. 7.

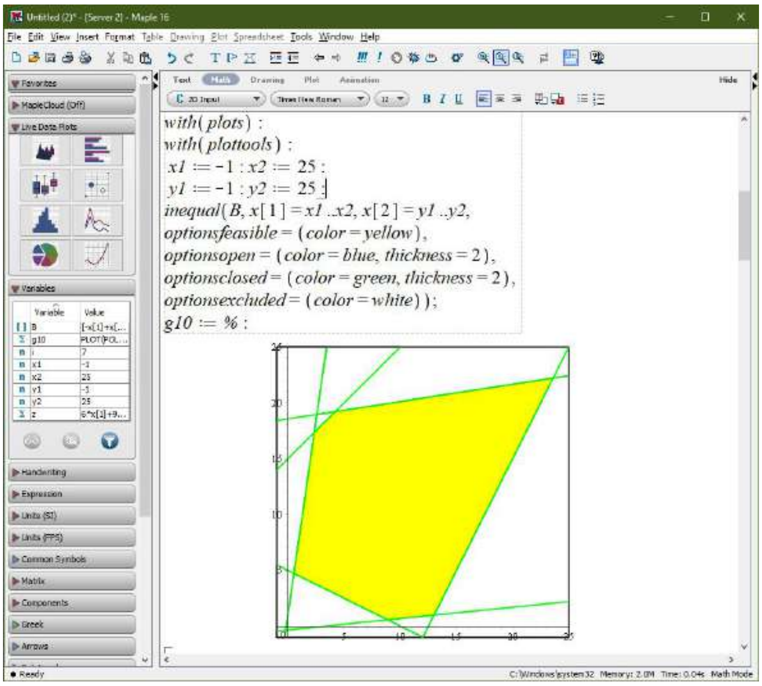


Рис. 7. Область обмеження

Для побудови цільової функції та вектора нормалі задаємо значення коефіцієнтів цільової функції c_1 та c_2. Будуємо пряму лінію, яка паралельна градієнту цільової функції. Рівняння прямої матиме вигляд $y = \frac{c_2 x}{c_1}$. Та додатково будуємо опорну, яка перпендикулярна до градієнта цільової функції. Рівняння прямої матиме вигляд $y = -\frac{c_1 x}{c_2} + b$. Значення b для опорної лінії необхідно підібрати таким чином, щоб опорна лінія перетинала побудовану область допустимих значень. (Рис. 8)

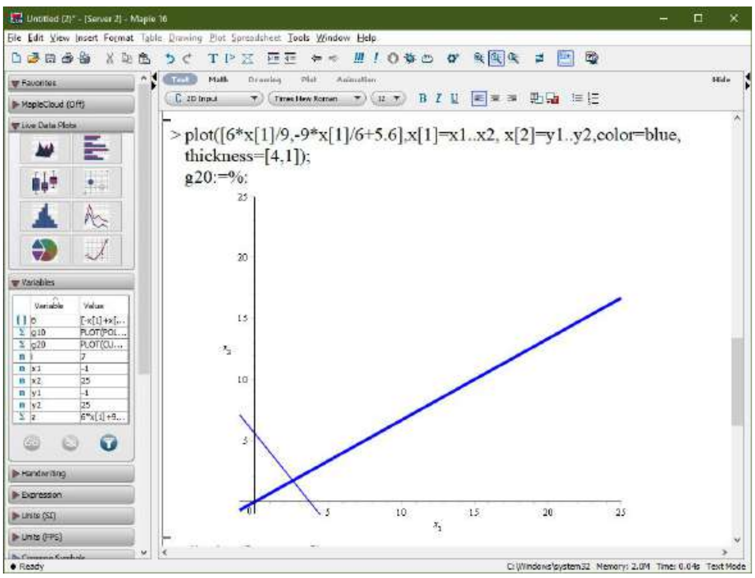


Рис. 8. Опорна лінія та вектор нормалі

Для накладання двох схем використовуємо вбудовану процедуру *display(<області які обєднуємо>, inseq, options)*, в яку прописуємо попередні дві області. Результат виконання зображено на рис. 9

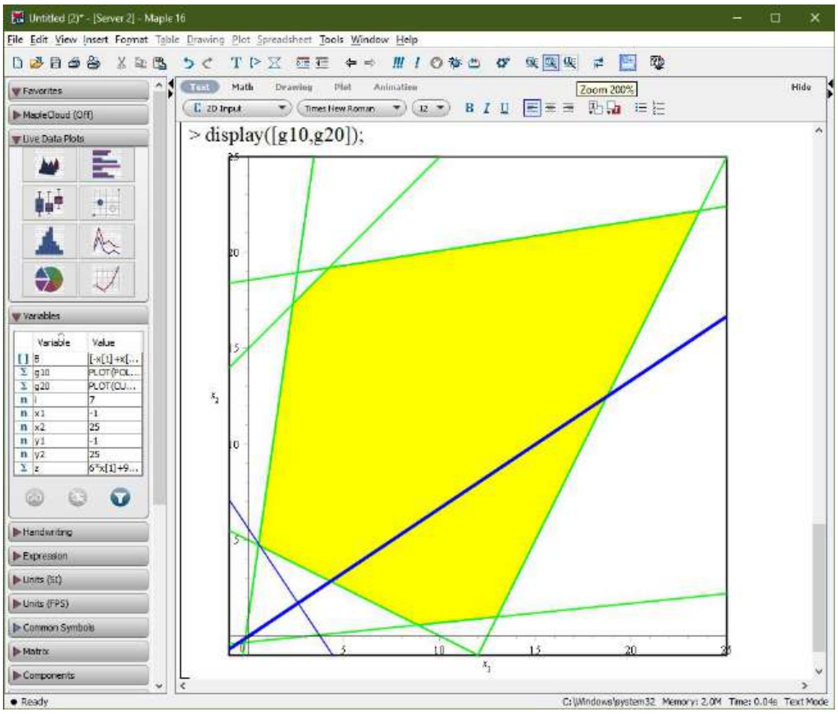


Рис. 9. Опорна лінія та вектор нормалі

На самостійну роботу пропонуємо учням виконати такі задачі.

Завдання 1. Знайти максимальне або мінімальне значення функції:

1) *f(x)= 4x + 3 sin(0.3x+Pi/3)* → *min* при *x є [1, 7];*

2) *f(x)= 2cox*^{2} *x - sin*^{3} *x+cos(x)-4sin(x)* → *max* при *x є [-2, 2];*

3) *f(x)=*$\dfrac{3x^2-4x+9}{(x+3)^2}$ → *min* при *x є [-1, 2];*

4) *f(x)=*$(2x-3)\sqrt[6]{3x-7}$ → *max* при *x є [10,15].*

Завдання 2. Побудувати область та знайти найменше та найбільше значення, якщо цільова функція має вигляд $z = 3x_1 + 7x_2$, а обмеження

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 5 \\ -2x_1 + 10x_2 \le -9 \\ 3x_1 + x_2 \le 35 \\ -6x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$

Як бачимо такі інтегровані уроки сприяють розвитку творчого, логічного мислення учнів, що є важливими навичками для їхнього подальшого освітнього й життєвого успіху.

Ще одним прикладом впровадження інтегрованого підходу до навчання інформатики є синтез інформатики, фізики та алгебри в рамках єдиного уроку.

Програмування в системі Maple для вивчення відбиття світла від кривих поверхонь.

10-й клас. Розділ «Креативне програмування».

Тема уроку: Програмування в системі Maple для вивчення відбиття світла від кривих поверхонь.

Мета уроку: формувати у учнів вміння застосовувати творчий підхід до вирішення завдань, що вимагають аналізу, проектування та впровадження рішень у відповідному програмному середовищі.

Хід уроку

І. Організаційний момент

Повідомлення теми, мети уроку.

ІІ. Мотивація навчання

Чи зустрічали ви поняття «реформа». Поясніть його. Якщо б у вас була можливість, які реформи ви провели б у школі. Реформа – закономірне явище. Підніміть руки ті хто зустрічав це твердження (на екрані з’являються визначення поняття «реформа», взяті з 3-х різних джерел – словників та енциклопедії, учні обирають одне, пояснюють та записують його у зошит).

ІІІ. Актуалізація опорних знань. (Бесіда.)

Фізика світла та відбиття:

1. Які закони відбиття світла ви пам'ятаєте?
2. Як виглядає математичний опис відбиття світла від плоских поверхонь?

Математика і алгебра:

1. Які математичні концепції вам відомі для роботи з кривими поверхнями?
2. Як ви використовуєте алгебру у ваших наукових обчисленнях?

Maple та середовище програмування:

1. Які інструменти ви знаєте для символьного обчислення?
2. Які функції вам доцільно використати для розв'язання завдання пов'язаного із темою уроку?

Зв'язок між інформатикою та фізикою:

1. Які можливості ви бачите у використанні інформатики для моделювання фізичних процесів?
2. Як програмування може допомогти в розв'язанні фізичних задач?

IV. Вивчення нового матеріалу.

Завдання 1. Розробити математичну модель, алгоритм та програму для побудови відбиття променя від довільної заданої кривої поверхні.

Для початку учні мають вибрати довільну точку на площині та промінь світла який виходить з неї. Нагадуємо що пряму вони мають побудувати через кут та точку яка належить нашій прямій. Для цього необхідно згадати тему з геометрії за 9-й клас: «Рівняння прямої на площині». Програмна реалізація матиме вигляд (Рис. 10). Де g1 це початкова точка, а g2 – шукане рівняння прямої через кут.

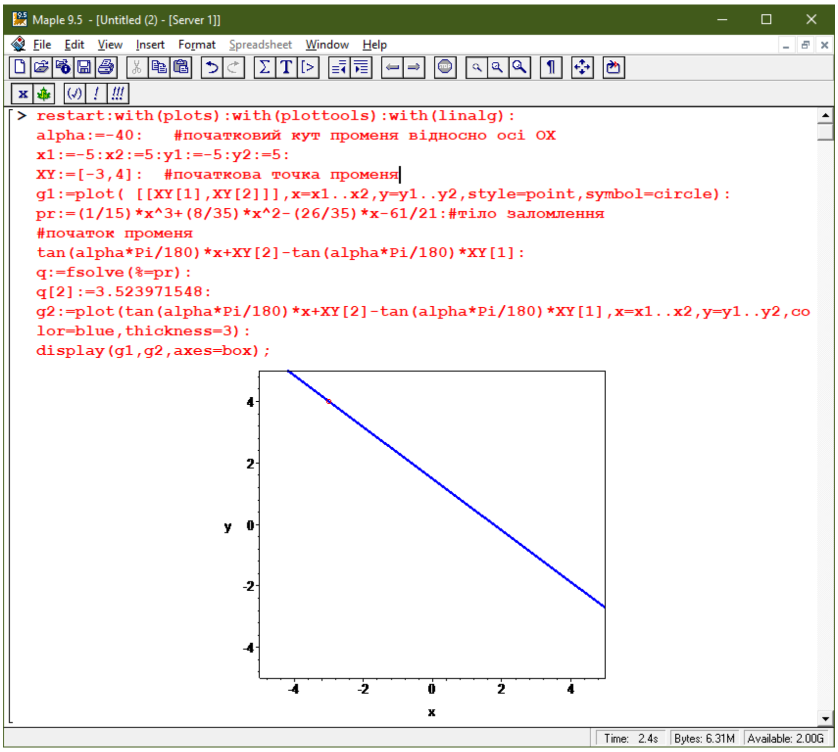


Рис. 10. Початкова точка та пряма світлового променя

Наступним кроком є побудова нашої поверхні від якої відбиватиметься світло. Для цього просто задаємо деяку функцію та будуємо її графік. Та суміщаємо усі наші побудови. (Рис. 11)

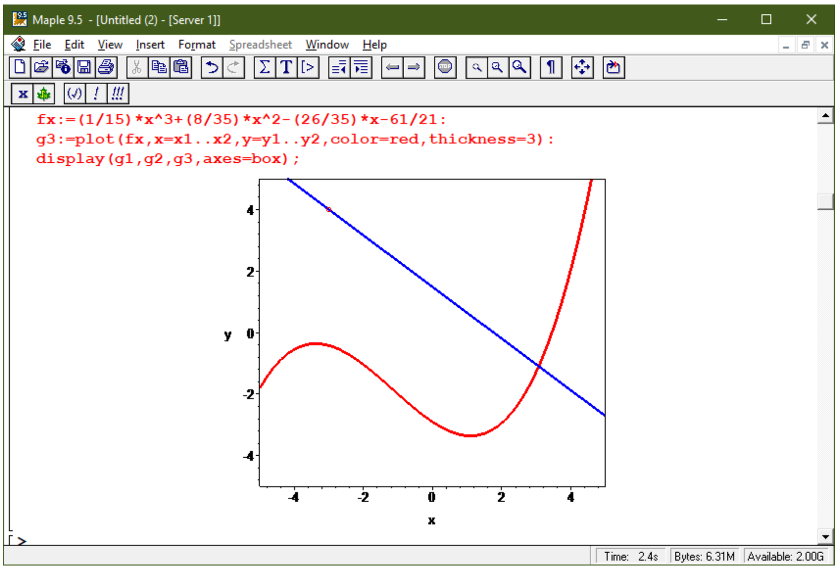


Рис. 11. Функція відбиття

Для подальшої побудови необхідно побудувати дотичну до функції у точці перетину променя (попередньо необхідно обмежити наш промінь поверхнею), а для цього необхідно знайти точку їх перетину. Провести саму дотичну, за можливістю перпендикуляр в точці дотику. Та розрахувати промінь відбиття.

Для пошуку точки перетину скористаємось вбудованою функцією fsolve, в яку вписуємо наш промінь та поверхню. Функція та результат матиме вигляд:

*fsolve(fx = tan((1/180)*alpha*Pi)*x+XY[2]-tan((1/180)*alpha*Pi)*XY[1], x);*

3.523971548

У змінну g4 задаєм кординати точки перетину:

g4:=plot([[%,evalf(subs(x=%,fx))]], x = -a .. a, y = -a .. a, style = point, symbol = circle):

Через похідну функції у точці робимо математичні розрахунки та будуємо дотичну, код дотичної та результат представлено на (Рис. 12):

kk:=evalf(subs(x=q[2],diff(pr,x))):

*bb:=evalf(subs(x=q[2],pr)-kk*q[2]):*

*g5:=plot(kk*x+bb,x=x1..x2,y=y1..y2,color=green,thickness=1):.*

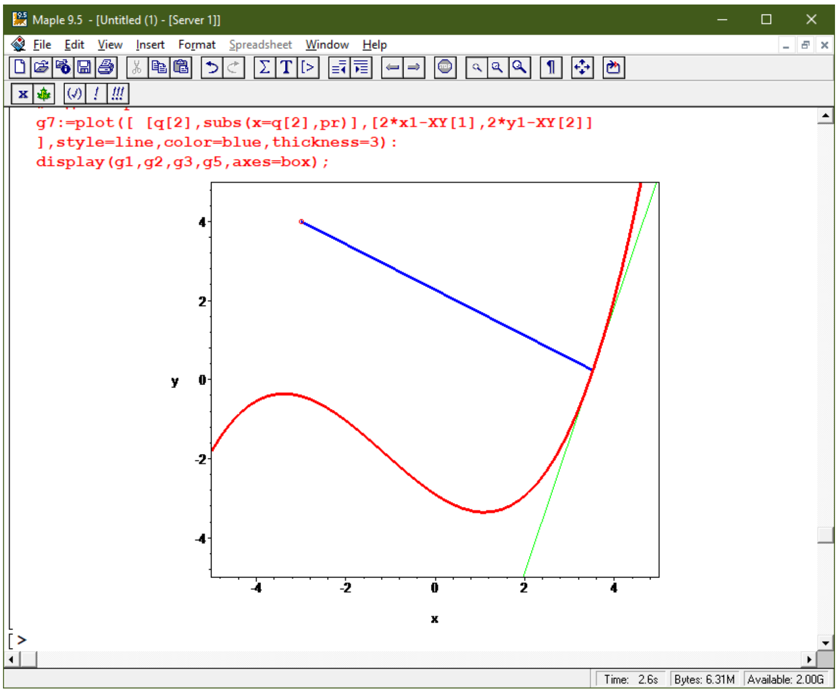


Рис. 12. Дотична пряма до точки перетину променя та поверхні

І нарешті через математичні розрахунки з точки перетину променя та функції відбивання будуємо промінь відбиття (Рис. 13.).

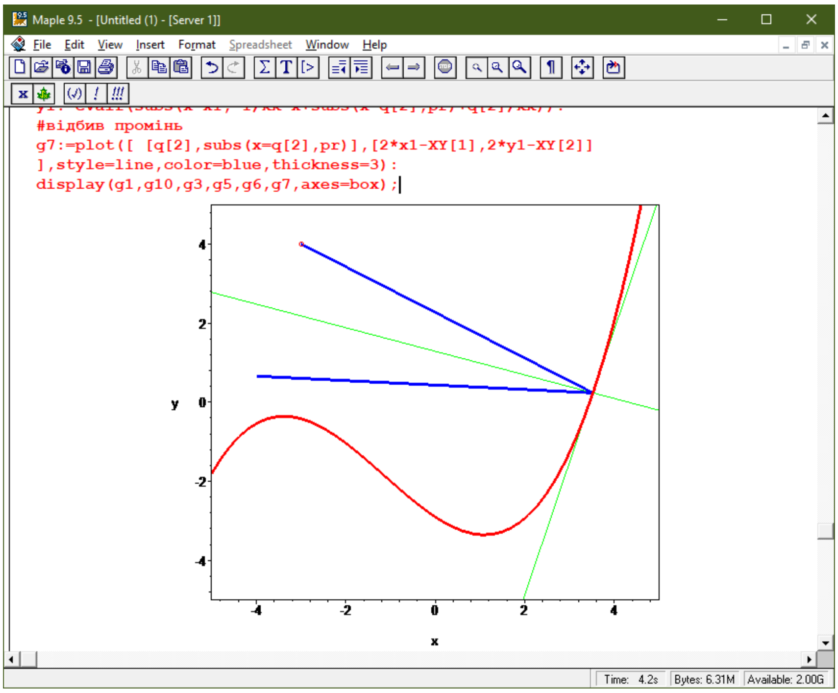


Рис. 13. Відбиття променя від довільної заданої поверхні

Інтегровані уроки з інформатики із елементами фізики та алгебри, які використовують традиційні та мультимедійні технології, створюють унікальні можливості для розвитку учнів. Такий підхід сприяє не лише засвоєнню глибоких та міцних знань, але і розвитку інтелектуальних та творчих здібностей, а також вміння самостійно набувати нові знання та працювати з різними джерелами інформації.

Використання СКМ при проведенні інтегрованих уроків має кілька важливих переваг: активізація інтересу, адже використання систем комп’ютерної математики надає можливість вчителю привертати увагу учнів, активізує їхній інтерес до предмету та процесу навчання. Досліди із візуалізацією складних фізичних явищ може робити навчання більш доступним та цікавим; розвиток самостійності,тому що інтеграція СКМ сприяє розвитку навичок самостійної роботи учнів, особливо в знаходженні та аналізі наукової інформації. Вони можуть використовувати не лише системи комп’ютерної математики але і електронні ресурси та інші засоби для вдосконалення своїх знань та умінь; використання СКМ при проведенні інтегрованих уроків надає можливість викладачу ефективно обробляти великі обсяги математичної інформації, що сприяє ефективнішому процесу навчання. Це також дозволяє зекономити час як учня, так і викладача; СКМ надають можливість моделювати та реалізовувати віртуальні експерименти, сценарії таких інтегрованих уроків можуть включати як реальні, так і віртуальні експерименти. Використання систем комп’ютерної математики для моделювання фізичних явищ надає можливість учням бачити або навіть взаємодіяти з явищами, які можуть бути важко реалізувати у класі; підвищення якості знань, адже поєднання "живих" дослідів з використанням інформаційних технологій може підняти рівень зрозуміння та усвідомлення навчального матеріалу. Уроки, які використовують цей підхід, зазвичай викликають більший інтерес та стимулюють активну участь учнів.

Але зауважимо, що інтеграція СКМ у сценарії уроків вимагає від вчителя додаткової підготовки та уміння органічно поєднувати реальні та віртуальні елементи. Такий підхід, однак, може допомогти створити навчальний процес, який враховує сучасні реалії та відповідає вимогам сучасного світу науки та техніки.

Монотонність уроків призводить до втоми у дітей, особливо якщо вчитель виступає головним джерелом інформації. Це може призвести до втрати зворотного зв'язку. Тому важливо впроваджувати інноваційні, нестандартні методи навчання, такі як змагання або гри, де дитина виступає основним учасником уроку. Це дозволяє вчителю різноманітити форми роботи, поглиблювати знання і залучати до активної участі якнайбільше учнів.

Інтегровані уроки надають можливість різноманітити методи та форми навчання, уникаючи стандартних шаблонів. Вони створюють середовище для розвитку творчих здібностей учнів, розширюють функції вчителя та дозволяють враховувати специфіку навчального матеріалу та індивідуальні особливості кожної дитини.

Використання інтегрованих уроків сприяє розвитку пізнавальних інтересів школярів, оскільки діти стають активними учасниками навчального процесу. Колективний характер пізнавальної діяльності учнів створює умови для взаємодії між суб'єктами навчання, що сприяє обміну інтелектуальними цінностями, порівнянню та узгодженню різних точок зору на об'єкти, які вивчаються на уроці.

Підготовка і проведення інтегрованого уроку визнається важливою функцією, яка вимагає значних зусиль, як у часовому, так і в змістовному аспектах педагогічної діяльності. Ця діяльність є продуманою, спланованою і, що найважливіше, систематичною роботою. Педагогічне проектування інтегрованого уроку сприяє постійному самоаналізу власної діяльності вчителя, сприяє творчому і професійному зростанню.

Практика показує, що методично правильна побудова і проведення інтегрованих уроків впливають на результативність процесу навчання :

• знання набувають якості системності;

• посилюється світоглядна спрямованість пізнавальних інтересів учнів;

• досягається творчий розвиток особистості;

• уміння стають узагальненими, комплексним;

• ефективніше формують їхні переконання;

Переваги інтегрованого уроку :

• дозволяє учням здійснити засвоєння знань з предмета в сукупності з іншими науками;

• сприяє формуванню пізнавального інтересу;

Елементами змісту інтегрованих уроків є знання уміння і навички – лінійні та пересічні; досвід творчої діяльності; досвід емоційно-ціннісного ставлення до дійсності – світу, суспільства, людини. Інтегративна цілісність уроку потребує наявності однакового рівня спільності взаємодіючих елементів спільної мети для всіх процесів взаємодії, спрямованої на досягнення кінцевого результату.

Таким чином, ми переконалися, що внаслідок врахування класифікації, дотримання технології проведення інтегрованих уроків забезпечується висока ефективність навчально-виховного процесу.

Інтегровані уроки інформатики дають учневі реальні можливості вільного і свідомого вибору змісту навчання і, отже, індивідуальної траєкторії розвитку; знімається вантаж непосильних навчальних вимог; створюються умови для позитивної мотивації навчання.

Список використаних джерел

1. Cowie B. A Mode of Formative Assessment in Science Education / Bronwen Cowie, Beverly Bell //Assessment in Education: Principles, Policy and Practice. – 1999. – Vol. 6, n. 1 (1 March). – P. 101–116.
2. Maple 9 / Advanced Programming Guide / M. B. Monagan, K. O. Geddes, K. M. Heal, G. Labahn, S. M. Vorkoetter, J. McCarron, P. DeMarco. Canada. Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc. 2003. 444 p.
3. Maple 9 / Introductory Programming Guide / M. B. Monagan, K. O. Geddes, K. M. Heal, G. Labahn, S. M. Vorkoetter, J. McCarron, P. DeMarco. Canada. Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc. 2003. 388 p.
4. Maplesoft [Електронний ресурс] // Web site of Maple Product History. – Режим доступу : http://www.maplesoft.com/products/maple/history/ . – Назва з екрана.
5. Maplesoft [Електронний ресурс] // Web site of Maple. – Режим доступу : http://www.maplesoft.com . – Назва з екрана.
6. Maplesoft Aplication Center [Електронний ресурс] // Web site of Maple Aplication Center. – Режим доступу : http://www.mapleapps.com/ . – Назва з екрана.
7. Morrison, Judith, et al. Teachers' Role in Students' Learning at a Project-Based STEM High School: Implications for Teacher Education. International Journal of Science and Mathematics Education, 2020, 1-21.
8. Murphy, Steve. Achieving STEM education success against the odds. Curriculum Perspectives, 2020, 40.2: 241-246.
9. Perrenoud P. Pour un approche pragmatique de l'evaluation formative / Philippe Perrenoud // Mesure et evaluation en education. – 1991. – Vol. 13, No. 4. – P. 49–81.
10. Smith, A., Lovatt, M. and Wise, D. (2003) Accelerated Learning: A User's Guide, Network Educational Press Ltd, ISBN 978-1855391505.
11. WATERS, Carol. Foundations of a Successful STEM School. 2021.
12. Биков В. Ю., Лапінський В. В. Методологічні та методичні основи створення і використовування електронних засобів навчального призначення. Комп'ютер у школі та сім'ї. 2012. №2(98). С.3-6.
13. Биков В. Ю., Спірін О. М., Пінчук О. П. Проблеми та завдання сучасного етапу інформатизації освіти. URL: https://lib.iitta.gov.ua/709026
14. Жалдак М.І., Набочук Ю.К., Семещук І.Л. Комп'ютер на уроках фізики: Посібник для вчителів. – Рівне: ТЕТІС, 2004. – 230 с.
15. Кравченко І. В., Микитенко В. І. навчальний посібник "Інформаційні технології : системи комп'ютерної математики" електронний ресурс: http://ooep.kpi.ua/downloads/disc/inf_t/posibn_Krav_Myk.pdf

16. Павлова О. Д. Особливості та закономірності формування інтегрованих знань у учнів. *Інтеграція знань з предметів природничо-математичного циклу: проблеми та шляхи їхвирішення. Збірник матеріалів інтернет-семінару.* Черкаси, 2012 р.

17. Семеріков С.О., Теплицький І.О., Шокалюк С.В. Нові засоби дистанційного навчання інформаційних технологій математичного призначення // Вісник. Тестування і моніторинг в освіті. – 2008. – №2. – С. 42-50.

18. Соловйов В.М., Семеріков С.О., Теплицький І.О. Інструментальне забезпечення курсу комп'ютерного моделювання // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2000. – №2. – С. 28–32.

19. Теплицький І.О. Елементи комп'ютерного моделювання: Навч. посібник. – Кривий Ріг: КДПУ, 2005. – 208 с.

20. Щербакова Н. О. Інтегровані уроки інформатики: Сутність, ефективність, методика. Комп'ютер у школі та сім'ї №6, 2012 с.26-28. Режим_доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/komp_2012_6_6

2.4. Аналіз та стратегії використання цифрових технологій в освіті

Соя О. М., Тютюн Л. А., Косовець О. П.

Сучасний етап розвитку суспільства прийнято розглядати в контексті широкої інформатизації всіх його сфер. Актуальна й достовірна інформація є основним джерелом і ресурсом розвитку особистості. А прискорення темпів зростання обсягів інформації та забезпечення вільного доступу до неї позитивно впливає на становлення високотехнологічного ринку інформаційних продуктів і послуг, розширення меж застосування комп'ютерних інформаційних технологій у всіх галузях життєдіяльності людини, зміну способу її життя, включаючи сферу освіти.

У сучасних умовах перед освітою постало завдання надати кожному члену суспільства відкритий доступ до освітніх технологій протягом усього життя з урахуванням інтересів і здібностей особистості, забезпечуючи при цьому можливість якнайшвидшої адаптації до мінливих життєвих обставин та умов, що залежать, зокрема, від ситуації на ринку праці.

Забезпечення якісної професійної освіти, що дозволяє здобувачу освіти вільно конкурувати на ринку праці, диктує необхідність безпосередньої взаємодії громадянського суспільства й системи освіти, пошуку нових форм і технологій навчання. Вирішенню цієї проблеми сприяє впровадження в навчальний процес дистанційних технологій, які нині активно впроваджуються в закладах загальної середньої та вищої освіти в Україні та за кордоном. Надання освітніх послуг за допомогою спеціалізованих інформаційно-освітніх середовищ відбувається завдяки використанню сучасних засобів передачі та зберігання інформації, за умови оптимальної організації та наявності необхідного методичного забезпечення навчального процесу, готовності науково-педагогічних кадрів до використання дистанційних технологій.

Дистанційне навчання не є інноваційною освітньою моделлю. Однією з перших систему дистанційної освіти ввела Франція, заснувавши в 1939 році

Національний центр дистанційної освіти CNED (Centre national d'enseignement à distance), який організовує підготовчі курси й курси підвищення кваліфікації за різними напрямами, надає допомогу щодо засвоєння основних програм підготовки в закладах середньої загальної або вищої освіти. Водночас центр не є замінником традиційної системи освіти. Також у Франції організований перший online-університет, де студенти отримують знання з різних напрямків підготовки, використовуючи можливості відеозв'язку. У системі освіти Німеччини функціонує віртуальний інститут – Virtuelle Fachhochschule, що пропонує отримати вищу освіту за низкою прикладних наук. Наприклад, у відкритому університеті німецького міста Хаген дистанційно можна отримати не тільки вищу освіту, але і підвищити кваліфікацію та навіть отримати ступінь доктора наук. У Фінляндії дуже популярні Центри дистанційного навчання, а також «літні університети». Національний університет дистанційної освіти Іспанії заснований з метою надання вищої освіти всім, хто з різних причин не може навчатися за програмами традиційних університетів. Університети Великобританії практикують постдипломні програми отримання ступенів за допомогою методів дистанційної освіти. Найбільший з них – Відкритий університет (The Open University). Передову позицію займає також Відкрита школа бізнесу Британського відкритого університету.

Відкриті університети часто фінансуються урядовими програмами. Зокрема Національний відкритий університет Індіри Ганді (IGNOU) в Індії був заснований в 1985 році. Його основними завданнями є – поліпшити якість викладання засобами комунікаційних технологій. Відкритий університет Ізраїлю спеціалізується лише на дистанційних методах навчання громадян Ізраїлю та пропонує курси в галузі природничих наук, математики, обчислювальної техніки, управління, іудаїстики, музики та мистецтв тощо.

У Китаї в 1979 р. була заснована Національна мережа радіо- та телевізійних університетів (CRTVU), щоб забезпечити зростаючі запити для терміново необхідних кваліфікованих трудових ресурсів і для освіти дорослих, котрих традиційна система освіти не задовольняє. CRTVU пропонує курси на одержання ступеня й на продовжений рівень освіти (новітні технології, фінансова реформа, принципи й практика зовнішньої торгівлі Китаю, облік та аудит, громадський транспорт тощо). Організацію освітнього процесу здійснюють тьютори. Вони також реєструють студентів, збирають студентські внески й розподіляють матеріали курсів.

У США в середині 60-х років XX ст. в декількох американських коледжах стали використовувати телебачення для професійного навчання працівників найближчих корпорацій. Все це призвело в 1984 р. до утворення Національного Технологічного Університету (NTU), який до 1991 р. перетворився в консорціум з 40 університетських інженерних шкіл зі штаб-квартирою в м. Форт-Коллінз, штат Колорадо. За програмами дистанційної освіти в США працює сьогодні й телебачення (PBS-TV). Програма дистанційного навчання дорослих з кінця XX ст. взаємодіє з 1500 коледжами та місцевими станціями, пропонуючи курси з різних галузей науки, бізнесу, управління тощо, які транслюються щонайменше на чотирьох TV-освітнім каналах й доступні по всій країні, а через супутник в інших країнах світу.

Розвиток дистанційної освіти в Україні відбувається з урахуванням уже існуючих досягнень в цій галузі. В 1997 році було створено Асоціацію користувачів телекомунікаційною мережею закладів освіти і науки України з координуючим «Центром Європейської інтеграції» у м. Києві, який в подальшому отримав офіційну назву Українська науково-освітня телекомунікаційна мережа «УРАН». Затверджено «Концепцію розвитку дистанційної освіти в Україні», яка передбачає створення системи освіти, що забезпечує розширення кола споживачів освітніх послуг, реалізацію системи безперервної освіти «впродовж життя» та індивідуалізацію навчання при масовості освіти. На державному рівні відбулося створення організаційної структури, регіональних і локальних центрів системи дистанційної освіти; розроблено її правові основи й стандарти, засади фінансування; впровадження системи ліцензування, атестації та акредитації закладів дистанційного навчання; інтеграція системи дистанційної освіти України у світову систему [33].

Нині технології дистанційного навчання активно впроваджуються й використовуються у всіх закладах освіти. Інтернет-простір активно сприяє об’єднанню зусиль в сфері розвитку як педагогічних й інформаційних технологій дистанційної освіти, так і обміну досвідом в області прийняття ефективних управлінських рішень. «Особливе значення у процесі впровадження сучасних інформаційних, електронних технологій в освітній процес має педагогічна змістовність навчального матеріалу та створення умов для самонавчання й саморозвитку особистості. Маємо на увазі не тільки відбір змісту матеріалу для навчання, а й структурну організацію навчального матеріалу, включення в навчання не просто автоматизованих навчальних програм, а й інтерактивних інформаційних середовищ, цілісне взаємопов’язане функціонування всіх процесів пізнання та управління ним. Іншими словами, ефективність і якість навчання більшою мірою залежать від ефективної організації процесу самонавчання та дидактичної якості використовуваних матеріалів» [52, с. 30].

Саме з появою нових педагогічних інструментів – комп’ютерних технологій та мобільних освітніх середовищ – суттєво змінюють не тільки форми й методи навчання, а й підходи до виховання особистості. Процес використання мобільних освітніх середовищ та сучасних комп’ютерних технологій у повсякденному житті готує здобувачів освіти до прогресивного майбутнього у високотехнологічному інформаційному суспільстві, формує в неї позитивне ставлення до новітніх інформаційних технологій, переконаність в ефективності цих технологій навчання та виховання. Загальновідомо, що чим раніше особа починає працювати з комп’ютерними засобами, тим швидше вона долає психологічний бар’єр, що виникає між традиційними формами, методами й засобами організації освітнього процесу й навчанням із застосуванням комп’ютерних технологій. [57]

Нині вебпортали, які активно розробляються й використовуються в сучасних закладах вищої освіти, сприяють впровадженню елементів дистанційного навчання для студентів як очної, так заочної форм навчання. Чинником, що визначає успішне їх застосування, є робота викладачів над електронним науково-методичним забезпеченням. Технологічний компонент цього процесу включає доступні електронні ресурси, мережеві технології й сервіси, програмне забезпечення освітнього процесу.

У довгостроковій перспективі розвиток дистанційних форм навчання в світовому освітньому просторі спрямований на те, щоб надати можливість всім бажаючим засвоїти освітню програму будь-якого навчального закладу як в середині країни, так і закордоном. Про актуальність такого підходу щодо отримання освіти свідчить і те, що в розробленні програмного забезпечення для найбільших освітніх мереж світу беруть участь такі відомі комп'ютерні компанії, як Microsoft, IBM, Apple та інші. Мобільність закладів освіти щодо надання освітніх послуг, зокрема з використанням технологій дистанційного навчання, є об'єктом пильної уваги з боку державних структур й очолює списки інвестиційних проектів у багатьох країнах світу.

Водночас впровадження дистанційних технологій в навчальний процес в Україні наштовхується на низку проблем і перешкод, пов'язаних з переважанням традиційних підходів в освіті, її недостатньою динамічністю; зі специфікою використання дистанційних технологій в регіонах, зокрема, нерівномірним доступом до мережі Інтернет, із вмотивованістю, готовністю та здатністю вчителів та учнів, викладачів та студентів використовувати дистанційні технології надання й отримання освітніх послуг. Тому наразі дистанційне навчання не може повністю замінити традиційних методів і форм засвоєння освітніх програм. У будь-якому випадку використання технологій дистанційного навчання дає широкі можливості поповнити багаж знань і підвищити свою професійну кваліфікацію.

Професійна мобільність педагога в контексті становлення фахівця

Міжнародні зобов’язання України в сфері освіти передбачають, зокрема, активізацію академічної мобільності студентів (як майбутніх фахівців) та професійної мобільності педагогічних і науково-педагогічних працівників. У Законі України «Про освіту» (2017) [34] задекларовані права педагогічних працівників на перепідготовку, підвищення кваліфікації, стажування, атестацію та умови реалізації міжнародної академічної мобільності (розроблення спільних освітніх програм із іноземними навчальними і науковими закладами, участь педагогів у програмах двостороннього та багатостороннього міжнародного обміну) тощо. У Стратегії розвитку вищої освіти в Україні на 2021-2031 роки [62] серед основних стратегічних та операційних цілей, визначені: відкриття міжфакультетських спеціалізацій, сертифікатних програм з метою забезпечення мобільності в межах ЗВО (п. 3.1.5); підтримка внутрішньої та зовнішньої академічної мобільності студентів (п. 3.6.5); підтримка та заохочення до кооперації між українськими ЗВО щодо студентської та викладацької мобільності, формування спільних міжвишівських освітніх програм і наукових проєктів (п. 4.3.7); розбудова системи академічної мобільності викладачів (п. 5.2.5) тощо. Тому сподіваючись на активну позицію держави варто не забувати, що професійна мобільність педагога належить до особистісних якостей особистості. І підтримка держави допоможе її розкрити й реалізувати. Проте першочергово цього повинен прагнути суб’єкт освітнього процесу (студент, вчитель, викладач та ін.), щоб відповідати сучасному етапу розвитку педагогічної науки й освіти.

Дослідження [14] доводить, що проблема професійної мобільності майбутніх учителів є високоактуальною з точки зору перспектив її вирішення; це створює передумови для розроблення нового покоління програм професійної підготовки, а також підвищення кваліфікації педагогів. Затребуваним у сучасному суспільстві є універсальний зміст професійної підготовки вчителя, серед завдань якого є формування педагогічної мобільності, вміння варіативно змінювати хід і зміст педагогічної діяльності, що дозволяє гнучко долати труднощі та штампи в педагогічних ситуаціях, обрати найвдаліше вирішення поставлених педагогічних завдань і вимагає принципово нового погляду на професіоналізм педагогічної підготовки майбутніх учителів у системі вищої педагогічної освіти.

Відповідно до чинного законодавства, навчання майбутніх викладачів, відбувається в стислі строки у магістратурі на педагогічних спеціальностях. у контексті їхньої підготовки професійно-педагогічну мобільність розглянемо за О. Ієвлєвим [36] як сукупність особистісного та діяльнісного складників. «Особистісний містить такі компетентності, як *мотиваційна* (установка на професійне вдосконалення, здатність пізнати власну мотивацію до професійної діяльності), *рефлексивна* (здатність до осмислення власних професійних і особистісних можливостей), *адаптивна* (здатність пристосовуватися до умов професійної діяльності), *творча* (творче ставлення до професійної діяльності, здатність до оволодіння способами творчості в неї). Діяльнісний – *педагогічна* (здатність організовувати власну професійну діяльність і навчальну діяльність студентів), *фахова* (сукупність спеціальних знань та вмінь, що визначаються переважно базовою освітою, здатність використовувати у професійній діяльності), *проектна* (здатність проектувати власну професійно-педагогічну діяльність, навчально-пізнавальну діяльність студентів), *психологічна* (знати закономірності психічних процесів і станів особистості, здатність використовувати ці знання в освітньому процесі)» [36, с. 95].

Професійна мобільність учителів та викладачів формується в системі методичної роботи в закладах загальної середньої і вищої освіти. Наприклад, через шкільні методичні комісії, районні об’єднання професійних спільнот педагогів, центри професійного розвитку педагогічних працівників, академії післядипломної освіти здійснюється координація роботи учителів-початківців, обмін передовим педагогічним досвідом, залучення мобільних учителів до різних освітніх проєктів і конкурсів, перепідготовка та/або підвищення кваліфікації тощо. Загалом професійна мобільність педагогічних і науково-педагогічних працівників реалізовується за рахунок співпраці і партнерства в різноманітних міжнародних грандах / проєктах, короткотривалих і довготривалих стажуваннях, участі в конференціях, вебінарах, форсайтах та інших заходах, передбачених законодавством, що запропоновані суб'єктом освітньої діяльності або самостійно визначені особою. [58]

Таким чином професійна мобільність має особистісні риси й формується як в процесі професійної підготовки фахівця, так і в процесі професійної діяльності педагога. У психолого-педагогічному аспекті вона включає активність, креативність, цілепокладання; розвиток мотивації до самоосвіти та досягнення успіху, здатність до самоаналізу й рефлексії, самоорганізації та самоконтролю в професійно-педагогічній діяльності; загальнопрофесійні й фахові знання; «компетенції професійної мобільності» – загальнонаукові, професійні, соціально-особистісні, інструментальні [32, с. 66], здатність адаптуватися до швидкоплинних змін в професійній сфері діяльності, спроможність до сприйняття нових педагогічних методик і технологій; «готовність результативно діяти в проблемних ситуаціях, здатність планувати власну навчально-пізнавальну діяльність й оцінювати результати своєї праці, спроможність організувати особистий освітній простір» [54, с. 30]; реалізацію засад самоменеджменту, професійного зростання та якісних змін у сфері надання освітніх послуг.

Успішність інноваційних змін в освіті визначається готовністю педагогів до мобільного реагування на виклики сучасного суспільства, необмежений потік інформації, розвиток технологій тощо. За таких умов професійна мобільність є механізмом створення середовища активної освіти й творчої реалізації педагогів, дозволяє з успіхом реалізовувати професійне призначення й бути конкурентоздатними на ринку праці.

Застосування віртуальних навчальних середовищ у закладах вищої освіти

Нині заклади вищої освіти (ЗВО) в Україні здобули широкі повноваження щодо принципів своєї діяльності. Згідно Закону України «Про вищу освіту», вони отримали права, що становлять зміст їх автономії та самоврядування, зокрема, «розробляти та реалізовувати освітні (наукові) програми в межах ліцензованої спеціальності; … самостійно розробляти та запроваджувати власні програми освітньої, мистецької, наукової, науково-технічної та інноваційної діяльності; самостійно запроваджувати спеціалізації, визначати їх зміст і програми навчальних дисциплін» тощо [50]. Тому науково-педагогічні працівники ЗВО мають можливість самостійно визначати пріоритети в науковій, навчальній і дослідницькій діяльності, обирати оптимальні програмні засоби, розробляти та впроваджувати в освітній процес інноваційні технології й методики в межах затверджених навчальних планів підготовки фахівців.

Суперечності між необхідністю використання цифрових технологій та віртуальних навчальних середовищ у ЗВО та недостатністю науково обґрунтованих методик їх застосування, потребою формування інформатичної та інформаційно-комунікаційної компетентностей щодо їх використання у підготовці майбутніх учителів математики та інформатики й необхідністю розроблення ефективних моделей їх реалізації окреслюють проблему дослідження.

Водночас, встановлено, що проблемам і перспективам розвитку й інтеграції інформаційно-комп’ютерних технологій, Internet-технологій та засобів телекомунікації в освітній процес ЗВО приділяється значна увага в науково-педагогічній літературі. Актуальними проблемами залишаються наукове обґрунтування принципів створення й систем підтримки віртуального освітнього середовища в ЗВО загалом, й особливо саме того середовища, яке сприяє формуванню й розвитку природничо-математичної освіти, яка є ключем до пізнання навколишнього світу, базою науково-технічного прогресу і посідає пріоритетні позиції в професіях, зокрема пов’язаних з природничими науками, технікою й комп'ютерними технологіями, економікою тощо.

Інноваційний підхід до впровадження цифрових технологій навчання в сучасних ЗВО суттєво змінив освітній простір і дозволяє вирішувати низку дидактичних проблем. Комп'ютерні технології не тільки допомагають організувати навчальний процес, але й постійно аналізувати його зворотній зв'язок, що позитивно впливає на результативність навчання студентів.

Виступаючи як інтегруючий чинник, інформаційно-комунікаційні технології повинні насамперед бути спрямовані на те, щоб допомогти студентам в умовах переносу знань і вмінь із однієї галузі в іншу, з відомих умов – в незнайомі ситуації.

Електронний спосіб отримання навчальної інформації для сучасного покоління студентів є звичною нормою організації їхньої навчальної діяльності. E-learning, на нашу думку, є одним з тих можливих інструментів, що надає практично необмежені можливості розміщення, зберігання, регенерації, обробки й доставки інформації будь-якого обсягу й змісту на будь-які відстані. Вказані процеси є надзвичайно важливими для нинішнього здобувача вищої освіти за умов стрімких змін в освітньому середовищі.

Електронне навчання дозволяє поєднувати різні засоби, форми й методи взаємодії викладача зі студентами, передбачає мобільність майбутніх учителів математики та інформатики в навчанні, забезпечує реалізацію принципів індивідуалізації, свідомості й активності, візуалізації, доступності навчання, набуття компетенцій щодо використання програмних засобів для вирішення професійних задач. Створення електронних освітніх ресурсів з активним використанням сучасних можливостей інноваційних технологій стимулює самостійну навчально-пізнавальну діяльність студентів, забезпечує перехід до самоосвіти та дистанційного навчання, активізує використання пошукових та дослідницьких методів у ЗВО. [63]

E-learning забезпечує широкі можливості щодо мобільності студентів у навчанні з урахуванням їхніх особистих потреб і вподобань. Використання електронного контенту дозволяє студенту обрати також зручний час і місце для навчання, працювати за індивідуальним графіком, планувати розпорядок роботи, будувати власну освітню траєкторію.

Як показує досвід, проблема формування в майбутніх учителів математики та інформатики професійної компетентності тісно пов'язана з формуванням їхньої інструментальної компетентності. Адже йдеться про становлення самостійних і відповідальних членів сучасного суспільства, здатних взаємодіяти у вирішенні соціальних, виробничих та економічних завдань, у яких сформовані навички самостійної роботи в навчальній, науковій та професійній діяльності, готові до самовдосконалення, котрі здатні приймати на себе відповідальність, вміють самостійно вирішувати проблеми, знаходять конструктивні обґрунтовані рішення проблемних ситуацій, які мають високий професійний рівень і практичні навички роботи з комп'ютером, із інформаційними засобами, які можуть професійно організувати та проводити заняття з учнями на новітніх засадах педагогічного досвіду, з упровадженням сучасних технологій.

Особливе значення у процесі впровадження сучасних цифрових технологій в освітній процес має педагогічна змістовність навчального матеріалу та створення умов для самонавчання і саморозвитку особистості. Маємо на увазі не тільки відбір змісту матеріалу для навчання, а й структурну організацію навчального матеріалу, включення в навчання не просто автоматизованих навчальних програм, а й інтерактивних інформаційних середовищ, цілісне взаємопов'язане функціонування всіх процесів пізнання та управління ним. Іншими словами, ефективність і якість навчання більшою мірою залежать від ефективної організації процесу самонавчання та дидактичної якості використовуваних матеріалів. Тому ми вбачаємо ефективним використання у навчальному процесі педагогічного ЗВО відповідного електронного навчально-методичного комплексу. Створення проекту «Персональний сайт викладача» та його відповідне навчально-методичне наповнення і практична реалізація «приватної хмари» на платформі надає користувачам Інтернету доступ до мережевих ресурсів і підходить для цього чи не якнайкраще.

Особливість підготовки майбутнього вчителя математики та інформатики полягає в тому, що сучасний студент, постійно перебуваючи в швидкозмінному інформаційному суспільстві, здатний самостійно отримувати інформацію з електронних ресурсів. Проте, виникає неабияка необхідність навчити його не лише оперативно шукати потрібну інформацію, а й опрацьовувати, засвоювати та використовувати її для кращого розуміння навчального матеріалу з математичних дисциплін. Готовність результативно діяти в проблемних ситуаціях, здатність планувати власну навчально-пізнавальну діяльність й оцінювати результати своєї праці, спроможність організувати особистий освітній простір, ініціативність, мобільність та креативність у питаннях щодо сучасних тенденцій в розвитку математики та інформатики сприяють формуванню професійної компетентності майбутнього вчителя.

Самостійна робота студентів відпрацьовує навички дослідження інформації, навчання та засвоєння нових понять, втілення вивчених теоретичних понять у практичних розробках. Наразі відсоток навчального матеріалу та завдань на самостійне опрацювання студентами збільшується. Зі збільшення кількості інформації, що вивчається студентами, та розвитком мобільних засобів зв’язку виникає потреба у засобах дистанційного розповсюдження інформації та контролю виконання робіт студентами. Тобто існує потреба в створенні віртуального навчального середовища з віддаленим доступом для обміну інформацією між викладачем та студентами.

Нині вебпортали активно розробляються й використовуються у сучасних ЗВО. Чинником, що визначає успішне їх застосування, є робота викладачів над електронним науково-методичним забезпеченням.

Під час організації навчального процесу у віртуальному університеті важливим є віртуальний колектив, який об’єднаний спільною задачею і взаємодіючий за допомогою цифрових технологій. До такого колективу можуть увійти викладачі, студенти, які взаємодіють у межах віртуального освітнього середовища. При цьому, віртуальне навчання – це процес і результат комунікації учасників навчального процесу у віртуальному середовищі. [37, с. 191]

Кожен викладач та кожен студент має доступ до персонального вебкабінету (рис. 1).

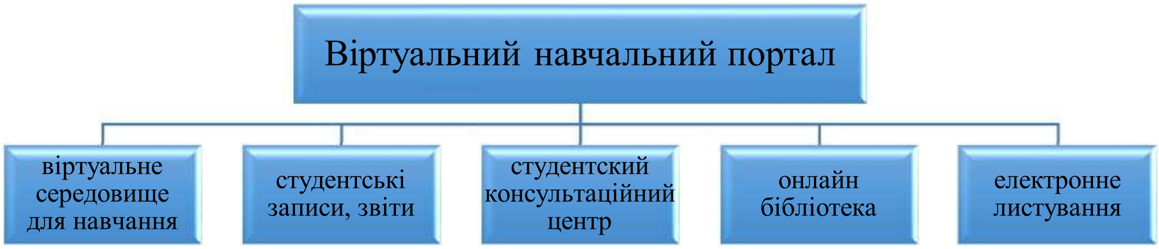


Рис. 1. Структура віртуального навчального порталу (авторська розробка)

Необхідною складовою частиною навчального процесу сучасного університету є вебкабінет студента, який надає інформацію про курси, що вони відвідують, розклад занять, доступ до лекційних матеріалів, контролює терміни здачі практичних та самостійних завдань. Зазвичай, вебкабінет надає можливість отримати завдання для самостійної роботи та завантажити результати роботи для перевірки в електронному вигляді. Такий спосіб роботи розвиває у студентів самостійність та відповідальність за процес навчання.

Одним із ключових моментів у розвитку всесвітньої павутини відіграє веброзробка віртуального університету – процес створення вебсайта або вебдодатку. Термін включає розробку додатків електронної комерції, вебдизайн, програмування для веб на стороні клієнта і серверу, а також конфігурування вебсерверу. Основними етапами веброзробки є:

- проектування сайту або вебдодатку;
- створення макетів сторінок;
- наповнення;
- обслуговування працюючого сайту або його програмної основи;
- подальше просування сайту в мережі та підняття його рейтингу. [23]

Розглянемо та порівняємо існуючі технології для створення сайтів. вебсайти за складністю поділяються на три групи:

- статичні вебсайти, що представляють користувачеві текстову, графічну або відео інформацію без можливості взаємодії з сайтом у будь-якому вигляді;

- інтерактивні вебсайти, що надають можливість користувачеві взаємодіяти з сайтом для зміни представлення або набору інформації сайту, без додаткового завантаження даних із вебсерверу;

- вебдодатки, що надають можливість динамічного формування змісту сайту залежно від запиту користувача або його ідентифікації.

Вебпортали є складними веб-додатками, що змінюють свою структуру та зміст залежно від ідентифікації користувача. Вигляд сайту буде залежати від того, хто зайшов на сайт: студент або викладач, студент якої спеціальності та курсу, поточного семестру, способу навчання студента, тощо. Вебдодатки складаються з двох обов'язкових частин: зовнішня або передня частина (frontend) та внутрішня або задня частина (backend). Ці дві складові у взаємодії є динамічним вебдодатком: frontend – це частина яку бачить користувач, що представляє собою інтерфейс сайту за засоби взаємодії з користувачем; backend – це джерело даних та програмні модулі, що опрацьовують запити користувача.

Технології, що використовуються для створення frontend, включають всі технології статичних та інтерактивних вебсайтів такі як HTML, CSS, XML, JavaScript, VBScript, JScript та інші [53]. Для розробки backend використовуються бази даних та програмні платформи високого рівня. Серед баз даних для Вебдодатків найчастіше використовуються MySQL, Oracle або MS SQL server. Велике різноманіття являють собою програмні платформи: ASP.Net Framework, PHP, Joomla!, Ruby-on-Rails, Drupal, Java та багато інших. Вибір технологій для створення веб-порталу заснований на його точних специфікаціях.

Успішне використання віртуального навчального середовища передбачає необхідність оволодіння студентами відповідними знаннями та уміннями, зокрема:

- уміння самостійно працювати з різноманітними інформаційними джерелами та Інтернет-ресурсами (пошук, сприйняття, розуміння, відбір, аналіз, опрацювання, організація і представлення, збереження і передавання інформації);

- знання технологій роботи з програмним забезпеченням загального призначення (сучасними пакетами математичних програм; системи обробки текстової, табличної і графічної інформації; базами даних, мережевими програмами створення презентацій; електронними підручниками і посібниками; електронними бібліотеками тощо);

- знання алгоритмів, методів, прийомів і способів ефективного розв'язання математичних задач за допомогою комп'ютера (володіння навичками алгоритмізації, усвідомлення комп'ютера як універсального виконавця математичних задач);

- уміння користуватися електронними засобами зв'язку (знання способів передавання інформації на відстані, використання електронної пошти, функціонування комп'ютерних мереж тощо).

Вказані знання та уміння є важливими не лише у процесі професійної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики, а й для забезпечення доступності та неперервності освіти впродовж усього життя.

Використання навчального контенту онлайн середовищ у професійній підготовці майбутніх учителів інформатики та математики

Нині шляхи вирішення проблеми інтеграції традиційних педагогічних і нових інформаційних технологій організації освітнього процесу формують один із найактуальніших напрямків дослідження інноваційних методів комплексної освітньої діяльності в закладах вищої освіти. «Електронний спосіб отримання навчальної інформації для сучасного покоління студентів є звичною нормою організації їхньої навчальної діяльності». [64, с. 247]. Тому в умовах студентоцентрованого навчання професійна підготовка майбутніх учителів математики та інформатики повинна відбуватися в особливим чином організованому інформаційному освітньому середовищі, яке покликане забезпечувати інформаційно-методичні умови реалізації освітньої програми з використанням новітніх технологій навчання.

Якщо традиційними методами організації освітнього процесу навчальний матеріал подається лінійно за обсягом і послідовністю, то в сучасних умовах індивідуалізації та диференціації навчання, що опирається на інтеграцію традиційних педагогічних та новітніх інформаційно-комунікаційних технологій, виникає необхідність організувати освітній процес за модульним принципом. Це дозволяє забезпечити повноцінне функціонування сучасного навчального середовища закладу вищої освіти відповідно до пізнавальних інтересів студентів, їхньої особистої освітньої траєкторії в контексті неперервної освіти. Саме такий підхід здатний в межах навчальних дисциплін освітніх програм підготовки фахівців забезпечити інтеграцію мультимедійних, інтерактивних, мережевих технологій, що відкриває принципово інші способи організації освітнього процесу: побудову закладом власного віртуального навчального середовища, наприклад на платформі Moodle, створення викладачами власних вебсайтів або використання програмних середовищ і мережевих сервісів відкритих систем. Шляхи й перспективи використання такого інструментарію залежать від наявних компонентів онлайн-середовищ і мережевих сервісів та інтерактивних інструментів для організації колективної розподіленої роботи й обміну навчальними матеріалами. Його компонентами є навчальний контент, колекції навчальних об’єктів, інструменти їх створення й публікації, інструменти комунікації, оцінювання та зворотного зв’язку, співпраці й створення спільнот тощо.

У системі вищої педагогічної освіти це дозволяє забезпечити мобільність і динамічність освітніх ресурсів, можливість без додаткових витрат використовувати сучасну комп’ютерну інфраструктуру, програмні засоби та сервіси, що постійно оновлюються та вдосконалюються. Зацікавити студентів, перетворити навчання на захоплюючий процес, забезпечити мобільність кожному, посилити інформаційну насиченість занять, розширити можливості використання сучасних мультимедійних засобів навчання, спонукати самостійно опановувати та раціонально використовувати функціональні можливості програмних засобів загального та прикладного спрямування, використовувати електронні засоби обміну даними – усе це і не тільки можливо завдяки різноманітним безкоштовним та умовно безкоштовним онлайн-середовищам, мережевим ресурсам і сервісам. Головне завдання викладача – обрати програмні засоби й сервіси з відповідним навчальним контентом, на платформі яких студенти зможуть реалізовувати свої навчально-дослідницькі проєкти, зробити постановку конкретних завдань, здійснити моніторинг досягнення програмних результатів навчання окремих освітніх компонент професійної підготовки майбутніх учителів інформатики та математики. [56]

Наразі знайшов своє застосування й добре себе зарекомендував навчальний контент таких онлайн-середовищ, мережевих програмних засобів та сервісів:

- Google-сервіси (Blogger, Google Classroom, Google Drive, Gmail, Google Mobile, Google Talk, Google Sites, Google Voice, YouTube та інші) – для комунікації та спільної роботи з документами;
- Bookvar.net, Bubbl.us, Coogle, FreeMind, Gliffy, Graphsy, Mindmeister, Mind42, Mindomo, Text2mindmap, Xmind, Webbing tools, WiseMapping, Zoho та інші інструменти для побудови карт знань;
- Cacoo, Glogster, Linoit, Prezi, Projeqt, SlideRosket, Thinglink, WikiWall, Educreations, LIno it, Padlet, Popplet, Realtimeboard, Twiddla та інші – онлайн сервіси для створення інтерактивних плакатів і презентацій [59, с. 256];
- Facebook, Twitter, Instagram, Pinterest, Youtube – соціальні мережі для створення спільнот, проведення консультацій, обговорень, баттлів, поширення оголошень тощо;
- електронні бібліотеки, освітні (На Урок, Освіторія, Wolfram|Alpha, Prometheus) та науково-популярні (Wikipedia) інформаційні мережі, онлайн-перекладачі, електронні підручники у відкритому доступі (http://pidru4nik.com/);
- веббраузери, пошукові та геоінформаційні сервіси;

- Skype, Viber, Telegram, Signal – засоби інтернет-телефонії;
- GeoGebra, Photomath, MalMath, FreeGraCalc, Desmos, QuckGraph+, GeometryPad, TriangleSolve, iCrosss, ToolKitPro, SmartMeasure – мобільні додатки математичного спрямування тощо.

Таким чином, використання навчального контенту онлайн-середовищ у фаховій підготовці майбутніх учителів інформатики та математики дозволяє генерувати нестандартні ідеї щодо опрацювання великих об’ємів інформації, подання й візуалізації змісту освітніх компонент; формує в студентів навички колективної діяльності над навчальними проектами, розширює форми взаємодії та співпраці учасників освітнього процесу, дозволяє раціонально організувати особистий освітній простір. Активність, самостійність і мобільність студентів у навчанні сприяє вибору подальшої освітньої траєкторії та закладає фундамент готовності до подальшої професійної діяльності в умовах нової української школи.

Розвиток цифрових технологій зумовлює удосконалення форм і методів взаємодії учасників освітнього процесу. Особливого значення набувають мобільні технології, у педагогічно-виваженому використанні яких вбачаємо можливості інтеграції мобільних освітніх середовищ у традиційне інформаційно-освітнє середовище закладу вищої освіти.

Особливість підготовки майбутнього вчителя математики та інформатики полягає в тому, що сучасний студент, постійно перебуваючи в швидкозмінному інформаційному суспільстві, здатний самостійно отримувати інформацію з електронних ресурсів. Проте, виникає неабияка необхідність навчити його не лише оперативно шукати потрібну інформацію, а й опрацьовувати, засвоювати та використовувати її для кращого розуміння навчального матеріалу з математичних дисциплін. [22, с. 30]

Схематично модель використання мобільних освітніх середовищ у вивченні дисциплін циклу професійної підготовки здобувачів вищої освіти визначаємо як системне поєднання структурних блоків (цільовий, змістовий, технологічний, результативний), сутність яких характеризує особливості та специфіку організації освітнього процесу, передбачає зважений підхід до формування стійкої мотивації до навчання та вибору форм контрольних заходів та критеріїв оцінювання навчальних досягнень студентів (рис. 2).

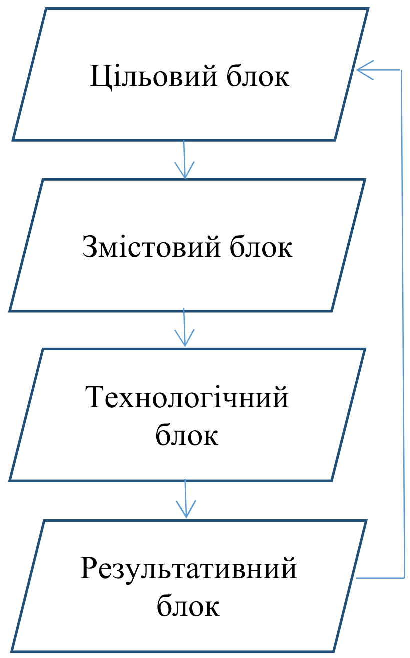


Рис. 2. Модель використання мобільних освітніх середовищ

Цільовий блок використання мобільних освітніх середовищ базується на:

– меті та основних завданнях вивчення навчальної дисципліни;

– формуванні загальних і фахових (спеціальних) компетентностей здобувачів вищої освіти для досягнення програмних результатів навчання з кожної освітньої компоненти відповідно до освітньо-професійної програми підготовки фахівців;

– тріаді цілей навчання (освіта, розвиток, виховання), що випливає з загальної дидактики і конкретизується відповідно до конкретних освітніх компонентів.

Змістовий блок містить інформаційний обсяг кожної навчальної дисципліни відповідно до її місця в освітньо-професійній програмі (кількості кредитів ЄКТС, загального обсягу, співвідношення кількості годин аудиторних занять та самостійної роботи до загальної кількості годин, розподілу кредитів ЄКТС на тиждень за курсами і семестрами, форм контрольних заходів та критеріїв оцінювання навчальних досягнень здобувачів вищої освіти.

Технологічний компонент використання мобільних освітніх середовищ передбачає можливість застосування в освітньому процесі сучасних методів і технологій навчання, необхідність оволодіння студентами відповідними знаннями та уміннями роботи з сучасними інформаційними ресурсами:

- уміння поєднувати традиційні й сучасні технології навчання у процесі навчально-пізнавальної діяльності;
- уміння самостійно працювати з різноманітними інформаційними джерелами, зокрема з електронними підручниками, посібниками, довідниками, конспектами (розуміти прочитане, систематизувати матеріал, конспектувати, роботи тези, опорні схеми, таблиці, тощо) та Інтернет-ресурсами (пошук, сприйняття, розуміння, відбір, аналіз, опрацювання, організація і представлення, збереження і передавання інформації);
- знання технологій роботи з програмним забезпеченням загального призначення (сучасними пакетами математичних програм, текстовими і графічними редакторами, електронними таблицями для опрацювання числових даних, програмами створення презентацій, базами даних, електронними підручниками і посібниками);
- знання алгоритмів, методів, прийомів і способів ефективного розв'язування задач за допомогою комп'ютера та мобільних за стосунків (володіння навичками алгоритмізації, усвідомлення мобільних освітніх середовищ як універсального виконавця задач);
- уміння користуватися електронними засобами зв'язку (знання способів передавання інформації на відстані, використання електронної пошти, впровадження технологій віддаленого спілкування й навчання, функціонування комп'ютерних мереж тощо).

В умовах змішаного й дистанційного навчання значимість мобільних освітніх середовищ значно зростає. Основна причина цього – можливості, які вони надають: організація взаємодії студентів між собою, з викладачами, адміністрацією; спільна робота учасників освітнього процесу над завданнями аудиторно та в поза аудиторний час; миттєвий обмін інформацією тощо.

Науково-технічний прогрес істотно сприяє розширенню та вдосконаленню використання мобільних освітніх середовищ, оскільки сучасні портативні девайзи стають легшими, дешевшими, з більшою роздільною здатністю екрана, більшим ресурсом акумулятора, підтримкою різного покоління передачі даних (3G, 4G, 5G Інтернету) та можливістю встановлення різноманітного програмного забезпечення. Тому мобільне навчання, як галузь, що стрімко розвивається, розглядається деякими науковцями як навчання майбутнього, що дозволяє незалежно від місця перебування, в комфортних умовах опрацьовувати новий матеріал, працювати над закріпленням нових знань, самостійно перевіряти програмні результати навчання тощо.

Можливості й особливості використання сучасних цифрових технологій, зокрема вільного програмного забезпечення, різнобічно досліджуємо, аналізуємо та порівнюємо. А також активно використовуємо їх під час упровадження змішаної та дистанційної форм організації освітнього процесу.

Модель використання мобільних освітніх середовищ також забезпечує реалізацію принципів універсального дизайну у процесі навчання студентів інклюзивних груп педагогічних закладів вищої освіти [13, с. 15].

Таким чином, реалізація технологічного блоку передбачає забезпечення продуктивного зворотного зв’язку між науково-педагогічними працівниками та здобувачами вищої освіти у процесі навчання; ефективну комунікацію між викладачем і студентами; конструктивну реакцію викладача на освітні запити та потреби студентів.

Результативний блок містить форми і методи онлайн-оцінювання, що забезпечують валідність оцінювання успішності студентів та встановлення факту досягнення результатів навчання; критерії оцінювання, що описують те, що здобувач освіти здатний виконувати для демонстрації здобутого результату навчання. Форми (методи) та критерії оцінювання узгоджуються з результатами навчання і з видами навчальної діяльності, що реалізовувалися в процесі навчання. Форми проведення контрольних заходів у межах навчальних дисциплін обираються викладачами залежно від особливостей вивчення освітніх компонентів та прогнозованих програмних результатів навчання. [61]

Отже, створення й використання мобільних освітніх середовищ у процесі навчання студентів педагогічних закладів вищої освіти вимагає правильного відбору змісту навчання відповідно до дидактичних властивостей і можливостей засобів цифрових технологій навчання; прогнозу можливого їх впливу на характер мислення і поведінки учасників освітнього процесу тощо.

Використання мобільних технологій та засобів навчання у методичній підготовці майбутніх учителів математики

Під час підготовки до уроку з використанням мобільних технологій учитель має організовувати його виходячи з цілей та дотримуючись основних дидактичних принципів (систематичності та послідовності, доступності, диференційованого підходу, науковості та інші). Використання мобільних телефонів є доповненням до уроку, а не заміною учителя, тому використання смартфонів та інших девайсів не має займати більше половини уроку. [25]

Розглянемо, які мобільні додатки можна застосувати на уроці математики, наприклад під час вивчення теми «Лінійна функція, її графік та властивості» в закладах загальної середньої освіти в Україні. Лінійна функція найпростіша і, можна сказати, найважливіша серед всіх функцій. Багато фізичних законів виражаються за допомогою лінійної функції. Наприклад, пройдений з постійною швидкістю шлях. Тому важливо, щоб учні добре зрозуміли і запам’ятали цей навчальний матеріал.

Перший етап є мотиваційним, що включає вступне слово вчителя, актуалізацію знань та умінь учнів, постановку завдання, мотивацію навчальної діяльності. У цій частині заняття доцільно обговорити з учасниками навчального процесу мету та завдання уроку, використовуючи презентацію, розроблену в PowerPoint. А також допомогою мобільного застосунку ClassDojo [6]. Його застосування допомагає вчителям підвищити мотивацію пізнавальної діяльності учнів та інтерес до навчання, стимулювати їхню навчальну діяльність, роботу в групах та парах, відстежувати і створювати дані про поведінку та види учнівської діяльності, налагоджувати зворотній зв'язок та контролювати їхню діяльність під час уроку. А батьки зможуть перевірити прогрес їхньої дитини в школі.

Перевірку домашнього завдання та актуалізацію наявного і потрібного навчального досвіду можна здійснювати з допомогою мобільних телефонів. Для актуалізації знань можна використовувати освітній онлайн-ресурс LearningApps [6], у якому є можливість спільного розв'язування учнями деяких видів завдань. Присутня можливість створення облікових записів для своїх учнів і використання своїх ресурсів для перевірки їхніх знань прямо на сайті. Якщо зареєструватись на сайті як учитель, то з'являється додаткова вкладка – «Мої класи». У цьому розділі можна створити облікові записи учнів. Кожному з учнів буде автоматично присвоєно логін і пароль, під якими вони будуть заходити на сайт і виконувати вправи. Вчитель можете контролювати процес їхньої роботи, писати свої коментарі, натиснувши на значок конверта напроти імені учня. При наявності інтерактивної дошки вправи можна виконувати на ній, це ще більше зацікавить дітей навчальним матеріалом. За допомогою смартфона можна зчитувати QR-код, який містить покликання на вправу, завантажувати його як графічний файл і вставляти в презентацію. Якщо у дітей не має можливості швидко зчитати QR-код, то покликання на вправу варто надсилати в спільний чат будь-якої системи миттєвих повідомлень (Viber, Telegram тощо).

Також можна використовувати різні платформи для опитування, щоб швидко та ефективно провести актуалізацію опорних знань, наприклад використовувати сайт «На урок» [5]. Його переваги в тому, що даний освітній проект має уже готові тести, які створили інші користувачі, та можливість створювати свої. Для того щоб дитина виконала тест достатньо надіслати покликання join.naurok.ua та код. З тестом можна працювати у режимі реального часу або як з домашньою роботою, вказавши терміни виконання. За допомогою вкладки «Результати тестувань» переглядаються результати проходження тесту учнями.

Другий етап є практичною частиною заняття, що також передбачає роботу з мобільними технологіями і виконання різних типів завдань з теми «Функції». Найпопулярніша математична програма MS Excel доступна, як мобільний застосунок. Програма має зручний інтерфейс, дозволяє легко оперувати з числами, швидко здійснювати необхідні розрахунки, наприклад, будувати таблицю значень функції, графіки. Саме тому її застосування в математиці вельми ефективне і дає великі можливості вчителю математики. У процесі викладання математики MS Excel може використовуватися у вивченні таких тем: розв'язування рівнянь n-го степеню, розв'язування систем лінійних рівнянь, побудова графіків функцій, графічне розв'язування рівнянь та їх рівнянь тощо.

Також гарно посилює візуалізацію вивчення функцій застосунок GeoGebra [8]. За його допомогою можна аналізувати функції, будувати графіки, розв'язувати завдання, працювати з функціями тощо. Використання програми GeoGebra прискорює процес навчання, дозволяє точно і наочно зображувати перетворення графіків різних функцій і надає можливість учням брати активну участь в процесі навчання, при цьому економлячи час на зайві побудови.

Під час навчання теми «Функції» зручно використовувати Desmos [10] – це графічний калькулятор, реалізований як онлайн-калькулятор та мобільний застосунок. Створення зв'язку між графічним та алгебраїчним уявленнями забезпечує візуальне зображення, на якому можна посилити розуміння та динамічний аспект бачення того, як змінюються обидва уявлення, допомагає вчителям описати математичні зв'язки. За допомогою застосунка учні можуть будувати та досліджувати динамічні об'єкти, що допомагає їм краще розуміти математичні зв'язки та розвиває візуальне бачення. Окрім низки корисних інструментів для вивчення функцій в ньому також можна організовувати клас, скориставшись спеціальним інструментом для вчителів teacher.desmos.com. Для використання доступні вже наявні курси з вивчення функцій (лінійна, квадратична, показникова та інші, з графічного розв'язування лінійних рівнянь і систем лінійних рівнянь, а також з моделювання) або спробувати створити свій власний курс. Для створення власних вправ у Teacher Desmos потрібно перейти на вкладці «activitybuilder» і натиснути на кнопку «Start Bullding an Activity», та ввести назву теми завдання. Далі потрібно обрати елементи які будуть включені до запитання, такі як графік, зображення, таблиця, текст тощо (рис. 3).

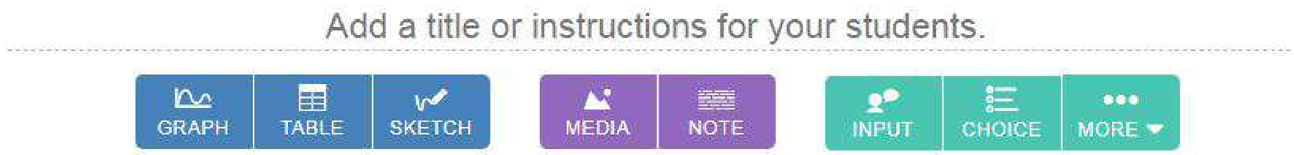


Рис. 3. Панель інструментів для створення завдання у Teacher Desmos

Можна будувати графік та просити учнів проаналізувати його, знайти розв'язок відповідного рівняння. Також можна побудувати таблицю значень функції та аналізувати таблицю, додавати картинки та створити інтерактивну вправу, де учням потрібно співставити правильні відповіді та додавати зображення до самого графіка. Авторизуватись у курсі учневі потрібно з дійсним обліковим записом Google перейшовши за покликанням на курс, тобто учень може увійти в систему під своїм ім'ям, лише на сторінці учня і тільки на свої завдання. Учень не бачить робіт інших учасників, за винятком тих випадків, коли про таку можливість в завданнях з введенням відповіді подбав учитель. Він спостерігає, що відбувається в учнів, у всіх відразу і у кожного окремо, зайшовши у конкретне завдання учня, де бачить ступінь його завершеності.

Desmos краще використовувати на початку вивчення теми, оскільки він більшою мірою є інструментального, ніж контролюючого характеру, і тому найбільш ефективний при ознайомленні з новим матеріалом, перевірці домашнього завдання та при розв'язуванні задач дослідницького характеру (рис. 4).

Використання сучасних програм динамічної геометрії у навчанні математики дає учням мотивацію для вивчення і пізнавання нового не в готовому вигляді, а самостійним пошуком. Школярі аналізують отримані візуалізаційні моделі, вчаться зазначати важливі і другорядні ознаки математичних об’єктів, узагальнюють і структурують матеріал.

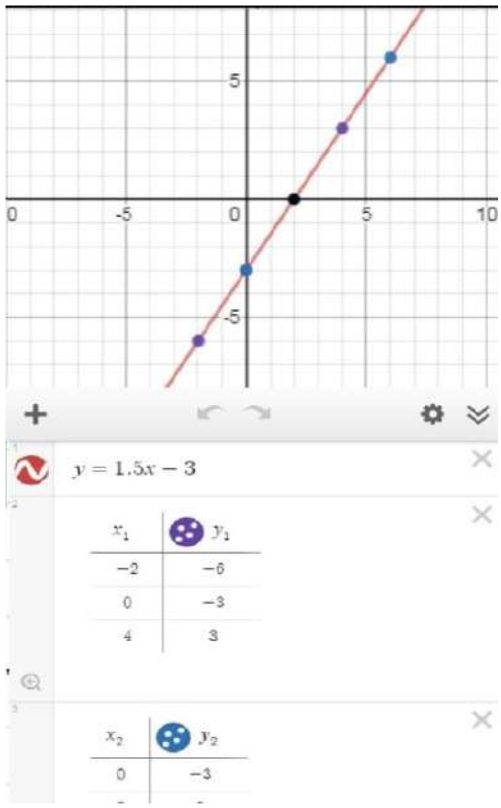


Рис. 4. Завдання у мобільному застосунку Desmos

Наявність мобільних технологій і засобів навчання математиці дозволяє реалізовувати технологію «bring your own devices», при якій для занять активно використовуються смартфони та планшети, що є в учнів. Перевага такої організації навчального процесу полягає в тому, що вчителі і адміністрація шкіл не забороняє, а дозволяє і всіляко мотивує учнів на те, щоб вони приносили в школу свої пристрої, та з їх допомогою навчались.

Професія вчителя вимагає постійного підвищення рівня професійної педагогічної майстерності, оновлення, доповнення та удосконалення процесу навчання сучасними та доступними технологіями. Використання на уроках середовищ динамічної математики, таких як Desmos, змінює традиційні методики навчання, дозволяючи підвищити інтерес учнів до предмету. Поєднання програм, як ClassDojo, LearningApps та На урок під час організації та проведення уроків сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу учнями.

Використання мобільних технологій і засобів навчання у процесі моніторингу навчальних досягнень здобувачів освіти

Становлення суспільства на сучасному етапі еволюції відбувається в контексті широкої інформатизації всіх його сфер. Швидкий розвиток сучасних мобільних засобів зв'язку задовольняє нагальну необхідність та спровоковану COVID-19 вимушену потребу в засобах дистанційного розповсюдження серед здобувачів освіти продуктів навчального контенту та здійснення контролю щодо засвоєння ними програмного матеріалу, виконанням діагностичних робіт, здійснення контрольних заходів тощо.

Наразі в умовах інформаційного суспільства людство все активніше рухається до того, що сучасні гаджети замінять паперові зошити й підручники. Можливо, все що потрібно буде брати з собою в заклад освіти в недалекому майбутньому – це планшет чи смартфон або інший девайс, що міститиме необхідний мінімум ресурсів навчального контенту, необхідний для успішного засвоєння програмного матеріалу, з максимальною можливістю використовувати мобільних технологій та засобів навчання математики та інформатики як безпосередньо в освітньому середовищі закладу освіти, так і в процесі моніторингу навчальних досягнень здобувачів освіти. [60]

Наведемо перелік сервісів, що стануть у нагоді під час оцінювання навчальних досягнень здобувачів освіти та здатні урізноманітнити навчальний процес й зробити його цікавішим, інтерактивнішим тощо.

Kahoot – сервіс для створення онлайн-вікторин, тестів і опитувань, який можна ефективно використовувати в дидактичних цілях та з метою встановлення зворотного зв'язку з аудиторією [35]. Для цього знадобиться учительський комп'ютер чи ноутбук, проектор та наявність смартфонів у здобувачів освіти. Процес розуміння, обговорення або моніторингу перетвориться в справжню захоплюючу гру. Учні (студенти) можуть відповідати на створені вчителем (викладачем) тестові завдання з планшетів, ноутбуків, смартфонів, тобто пристроїв, що має доступ до мережі Інтернет.

Створені в Kahoot завдання, що містять фото й відео фрагменти, варто транслювати проектором на екран або надати здобувачам освіти доступ до них. Темп виконання вікторин, тестів регулюється шляхом уведення часової межі для кожного запитання. За бажання педагог може ввести бали за відповіді на поставлені запитання: за правильні відповіді та за швидкість. Табло результатів відображається на моніторі вчительського комп'ютера. Для участі в тестуванні здобувачі освіти повинні відкрити сервіс і ввести PIN-код, який надає вчитель (викладач) зі свого комп'ютера. Доки на комп'ютері відображається запитання, учень (студент) бачить лише колір варіантів відповідей. Використання цього сервісу може бути хорошим способом оригінального отримання зворотного зв'язку від учнівської аудиторії.

Plickers – це безкоштовний, абсолютно інноваційний вебінструмент, який скорочує час проведення фронтальних опитувань у формі тестування [29]. Програма дозволяє педагогові легко підтримувати зворотній зв'язок з учнівською (студентською) аудиторією за допомогою мобільного пристрою вчителя (викладача), карток з QR-кодом та наявності доступу до мережі Інтернет. У програмі можна створити папки класів (груп) з темами й тестами, а для учнів (студентів) роздрукувати листки з QR-кодом, де у формі кожній картці присвоюється ім'я здобувача освіти. Він використовує одну й ту ж особисту картку відповідей протягом року, щоб відповідати на запитання. Унікальний квадратний візерунок можна порівняти з відбитком пальця, що використовує програмне забезпечення Plickers для ідентифікації кожного здобувача освіти під час сканування карт. Здобувачі освіти відповідають на запитання тримаючи картки та обертаючи їх так, щоб правильна відповідь була вгорі. Педагог сканує картки всі відразу, повертаючи камеру на мобільному пристрої у напрямку до класу. Коли система розпізнає кожну карту, результати відображаються миттєво на мобільному пристрої вчителя (викладача) для моментального або відкладеного аналізу. Завершивши тест він також може відразу на дошку вивести правильні і неправильні відповіді учнів, натиснувши Reports.

Цікавим для оцінювання навчальних досягнень здобувачів освіти стане *ClassDojo* – це зручний і простий інструмент для оцінки роботи класу в режимі реального часу. Насамперед розрахований на учнів початкової та середньої школи – яскраві кольори, симпатичні аватари, кумедні персонажі виразно привертають увагу дітей молодшого та середнього шкільного віку [47]. У закладах вищої педагогічної освіти варто використовувати з метою відпрацювання практичних навичок на заняттях з методики навчання математики та інформатики. Сервіс допомагає у створенні зручної, наочної, легко керованої системи заохочення з різними ролями й рівнями доступу. У ClassDojo можна зареєструватися як: вчитель (який і буде створювати бейджи, ставити цілі, збирати статистику і робити групові розсилки); учень (якому надсилається персональний код для доступу до свого профілю, де він може змінити свій аватар і налаштувати профіль під себе); батько/мати (які мають доступ до профілю своєї дитини). Відображати прогрес класу можна за допомогою проектора прямо під час уроку, якщо вчитель вважатиме це досить ефективним і мотивуючим. Мета сервісу – надати учням швидкий відгук про їхню роботу в класі й мотивувати їх на ефективну навчальну діяльність за допомогою бейджів двох категорій: позитивних і негативних. Серед стандартних позитивних бейджів – «Відмінна робота!», «Спасибі за участь», «Гарно потрудився»; серед негативних – «Перебиває», «Не підготувався», «Не виконав домашнє завдання». Таким чином журнал вчителя перетворюється в інтерактивний сервіс.

Socrative – це інтерактивна система веб-відповідей здобувачів освіти (доступна через додатки для iOS, Android або Chrome), яка може допомогти вчителям (викладачам) розпочати навчання за допомогою створених користувачем опитувань та вікторин [11]. Учні (студенти) отримують доступ до питань на своєму мобільному пристрої за допомогою коду кімнати, а відповіді відразу з’являються на комп’ютері педагога. Коли всі відповіли, вчителі (викладачі) можуть відображати результати, використовуючи кнопку «Як ми це зробили?». Вони можуть створювати вікторини, швидкі запитання. На додаток до цих основних стратегій оцінювання, учні (студенти) можуть об’єднатися в космічну гонку, задля спільної діяльності, яка дозволяє командам відповідати на запитання якомога швидше; педагог може отримати доступ до результатів цієї гонки в режимі реального часу, а також визначати команди. Наприкінці вчителі (викладачі) можуть переглянути результати вікторини та завантажити їх через аркуш Excel або надіслати електронною поштою для подальшого планування. Socrative є простим, гнучким і працює практично на будь-якому пристрої, що підтримує Інтернет або додатки. Правильно реалізований, цей інструмент моніторингу дозволяє педагогам створювати насичений вміст для вікторини та повністю залучати аудиторію за допомогою питань швидкого формального оцінювання чи командних змагань, тому здобувачі освіти, які неохоче піднімають руки в аудиторії, оцінять можливість відреагувати цифровими відповідями. Використовуючи Socrative, як первинне місце, вчителі (викладачі) можуть розвивати ефективні навички спілкування, заохочуючи молодь критично мислити та ретельно обдумувати й обговорювати відповіді.

Таким чином, мобільні технології стають у нагоді не лише в процесі пояснення й візуалізації навчального матеріалу, але і осучаснюють представлення й подання роздаткового матеріалу під час перевірки та контролю знань учнівської (студентської) молоді. Система мобільного опитування є ефективним засобом для організації та проведення контрольних робіт, тестувань та реалізації інших методів моніторингу навчальних досягнень здобувачів освіти.

Візуалізація навчальних матеріалів засобами сучасних цифрових технологій для студентів закладів вищої освіти

Використання сучасних цифрових технологій у навчанні є однією з найважливіших і стійких тенденцій освітнього процесу. В системі освіти комп’ютерна техніка та засоби цифрових технологій застосовуються у процесі вивчення дисциплін природничо-математичного циклу. Інноваційні методи навчання, в тому числі з використанням сучасних цифрових технологій, є предметом роздумів багатьох науковців. При традиційному підході до навчання цілі освіти моделюють результат, який можна описати, відповівши на питання – що нового дізнався студент? Розвивальне навчання передбачає побудову відповіді на питання – чому навчиться студент за роки навчання у вищому навчальному закладі? Раніше пріоритетною метою було «засвоєння всієї суми знань, яке виробило людство», сьогодні на перший план виходить особистість студента, його здатність до самовизначення і самореалізації, до самостійного прийняття рішень, до рефлексивного аналізу і власної діяльності.

В умовах модернізації освіти, в процесі введення нових державних освітніх стандартів, оновлення змісту освіти, можна виділити декілька проблем. По-перше, існує набір певних технологій, які дозволяють проводити класичні заняття в супроводі мультимедійних презентацій, тестів і програмного забезпечення, що допомагають студентам не тільки поглибити знання, отримані в навчальному процесі, а й розвивати візуальне мислення та візуальну пам’ять.

По-друге, цифрові технології (зокрема, класичні презентації) для сучасного студента виглядають «застарілими». Найчастіше викладач ґрунтується на своїх власних перевагах в сфері викладання та коли ці переваги не збігаються з навчальними уподобаннями студентів, виникає конфлікт стилів. Бетті Лу Лівер зазначає, що «орієнтована на студента система навчання, вимагає від нього уважного ставлення до стилів навчання, виходить за рамки методу, за рамки аудиторії і навіть за рамки викладача, так як орієнтована на джерело успіху або успіху в навчанні – на самого студента» [46]. Постає проблема: як зробити навчання природничо-математичних дисциплін таким, щоб воно будувалося на збалансованій роботі логічного і наочно-образного мислення студентів. Поява спеціалізованого програмного забезпечення призводить до нових схем розуміння, менш пов’язаних з промовою, але в більшій мірі орієнтованих на зорові образи, форму і колір навчального матеріалу.

Ми пропонуємо будувати процес навчання природничо-математичних дисциплін на основі візуального підходу до формування професійних компетентностей, що дозволить максимально використовувати потенційні можливості візуального мислення студентів. [45]

Роль візуалізації навчального матеріалу в розвитку професійних здібностей студента, різноманіття її функцій в цьому процесі і способи застосування для вирішення дидактичних завдань широко досліджуються в педагогічній науці і практиці. Саме завдяки візуальним каналам сприйняття студент отримує близько 80-90% інформації, і переміщення акценту в навчанні на вербальні форми вивчення навчального матеріалу зробили цей найважливіший етап у становленні особистості студента недостатньо ефективним. У зв’язку з цим зростає роль візуальних моделей подання навчальної інформації, що дозволяють подолати труднощі, пов’язані з навчанням, що спирається на абстрактно-логічне мислення.

До візуальних способів подання навчального матеріалу сучасними цифровими засобами навчання можна віднести створення та використання інтелект-карт або ментальних карт [30], стрічок часу, інтерактивних плакатів і вправ, інтерактивні відео із вбудованими питаннями, кросворди, ребуси, пазли тощо.

В українських закладах вищої освіти стандартними засобами навчання математики є набір геометричних фігур, креслярських інструментів (циркуль, транспортир, лінійка, трикутник тощо), поліграфічні матеріали (стенди, таблиці, плакати тощо). Сукупність цих об’єктів повністю або частково замінює поняття, що вивчається, надає загальну інформацію про нього, дозволяє візуалізувати основні характеристики, досліджувати властивості, перевіряти достовірність правил, аксіом і теорем, здійснювати моніторинг досягнення учнями результатів навчання (компетентностей). Нині всі ці засоби навчання можна доповнити та/або замінити сучасними цифровими технологіями та мобільними застосунками [55].

Викладачі часто зауважують, що студенти не можуть зосередитися, сприймати довгі тексти, заглиблюватися в суть, мають низький коефіцієнт засвоєння знань. Фахівці це пояснюють тим, що у студента сформовано кліпове мислення (від «clip» (анл.) – фрагмент тексту, уривок з відео або фільму). Подача інформації від викладача до студента найчастіше носила прямий усний характер. Кліпове мислення сучасних студентів ставить викладача в інші умови подання інформації. Завдання викладача – залучити студенів до активної творчої діяльності, де учасники процесу навчання взаємодіють один з одним, будують діалоги і самостійно отримують знання.

Робота з опорними конспектами, складання структурно-логічних схем полегшують сприйняття великого обсягу навчального матеріалу, налаштовують студентів на вдумливу і зосереджену роботу на лекційному та лабораторному занятті. У студентів активно задіюється зорова пам'ять, логічне, аналітичне, просторове мислення, досягається високий ступінь засвоєння навчального матеріалу, формуються стан «можу і вмію» і почуття відповідальності не тільки за себе, але і за своїх товаришів.

Систематичне і цілеспрямоване використання сучасних цифрових інструментів візуалізації в процесі навчання студентів природничо-математичних дисциплін сприяє усвідомленому вмінню вирішувати складні завдання, підвищує рівень ефективності навчання, сприяє розвитку і підтримці інтересу до науки.

Використання скрінкастів для візуалізації цифрового освітнього контенту

Розвиток індустрії цифрових технологій та необхідність їх використання в закладах освіти спонукає учасників освітнього процесу налагоджувати взаємодію за допомогою інноваційних технологій та засобів навчання. Semenii N. [24, с. 229] визначила найефективніші, найпростіші у використанні та найфункціональніші цифрові інструменти: Kahoot, Quizizz, Formative, Online Test Pad, Screencast-O-Matic, Camtasia, Windows Live Movie Maker, Avidemux, Crello, Storyjumper, Bookemon, Kindlebookmaker, Trello, Strides, Goal Tracker: Making Habits, Coach.me, Bliss Gratitude Journal, Habitica, YouTube, MindMeister, MindMup, Mindomo, Coggle, Draw.io, Blogger, Tilda, Google Site, що дають можливість оновити та осучаснити навчальний процес, урізноманітнити методи надання освітніх послуг та побудувати траєкторії індивідуального розвитку учасників освітнього процесу.

Скрінкастинг є сучасною тенденцією використання засобів візуалізації в закладах освіти. «Скрінкастінг – це метод цифрового запису екрану комп’ютера / мобільного пристрою, з аудіорозповіддю або без неї» [12, с. 169].

Завдяки використанню скрінкастів в освітньому процесі здійснюється урізноманітнення видів діяльності на заняттях; відбувається поєднання зорових та слухових образів; надається можливість організації освітнього процесу в зручному темпі; з’являється перспектива багаторазового використання відеофайлу в навчальних цілях тощо. [41]

Використовуючи програмне забезпечення для захоплення екрану, можна записати екран будь-якого електронного пристрою, наприклад, смартфона, планшета, ноутбука чи персонального комп’ютера. Отриманий скрінкаст, зазвичай, показує відео з екрана з будь-яким вмістом, що відображається на ньому, а також з будь-якою діяльністю, яка мала місце.

Опишемо вимоги до створення скринкастів освітнього змісту [26]:

1) наявність відповідного технічного забезпечення та навичок роботи з ним;
2) чіткий лаконічний виклад матеріалу, зрозуміла мова, помірний темп голосового супроводу;
3) відео має бути коротким, неперевантаженим і обмежуватися однією чітко визначеною навчальною метою [9, с. 1];
4) висвітлений матеріал має містити початок, основну частину та завершення, подібно до структури традиційного заняття;
5) відео слід супроводжувати навчальними заходами, а не пасивно дивитися [9, с. 1];
6) тривалість відеоскрінкасту максимум 6-9 хвилин тощо.

Використання відеоскрінкастів в педагогічних системах надає ключові перспективи для впровадження перевернутого та змішаного навчання з метою розроблення новітніх педагогічних підходів, що використовують особливі можливості візуалізації цифрового освітнього контенту в закладах освіти.

Способи створення скринкастів:

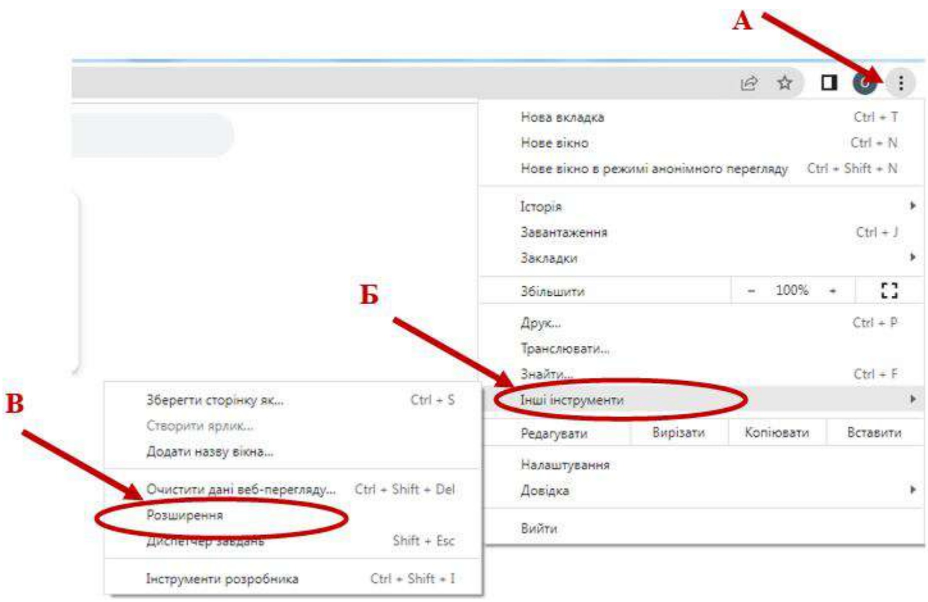
- використання розширення Screenity із вебмагазину Chrome за адресою https://bit.ly/3Dgfbil;
- використання програм для запису екрану (Screen Recorder, OBS Studio, Bandicam, Screencast-O-Matic тощо);
- використання можливостей операційних систем (Екранна Камера).

Прикладами використання скринкастів в освітньому просторі закладу освіти є записи вебінарів, алгоритмів роботи, пояснень нового навчального матеріалу тощо.

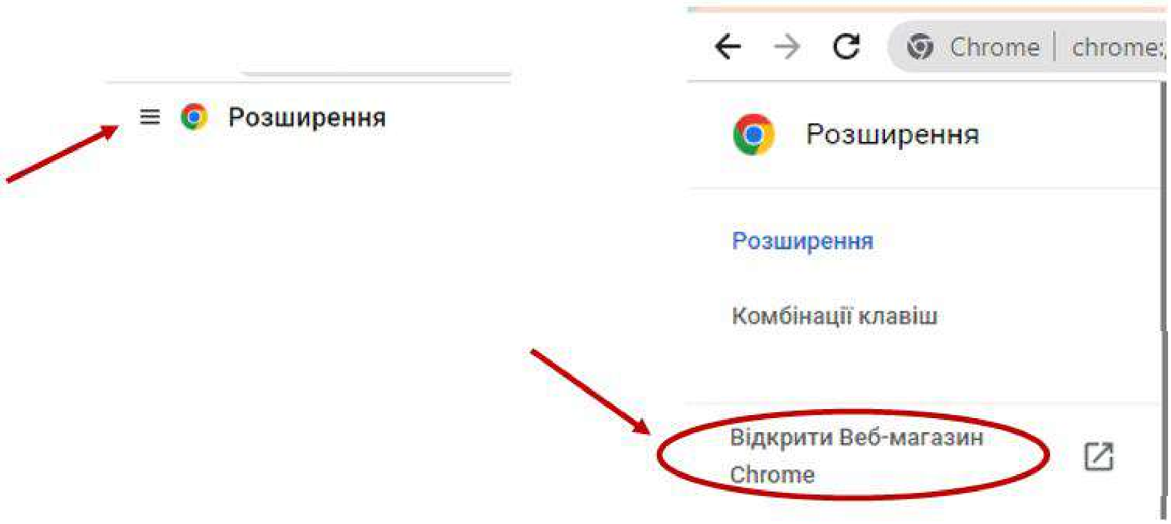
Пропонуємо алгоритм створення скрінкасту за допомогою розширення Screenity для браузера Google Chrome.

І етап. Додати розширення на панель швидкого запуску з вебмагазину

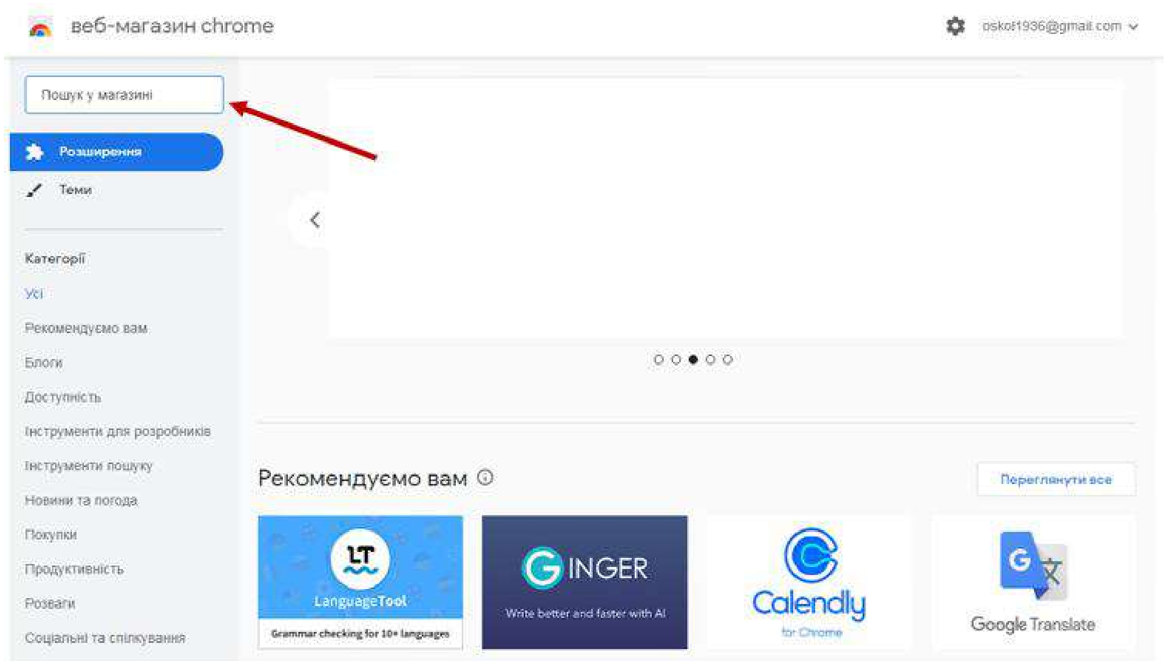
1) Відкрити вебпереглядач Google Chrome
2) Активувати кнопку *Налаштування та управління* (праворуч угорі кнопка з зображенням трьох крапок). У списку, що розгорнеться, обрати *Інші інструменти.* Серед можливостей, що відкриються, обрати *Розширення.*



3) У лівому верхньому куті вікна натисніть *Меню* (має вигляд кнопки з трьома рисками). Далі *Відкрити вебмагазин* (унизу лівої бічної панелі).

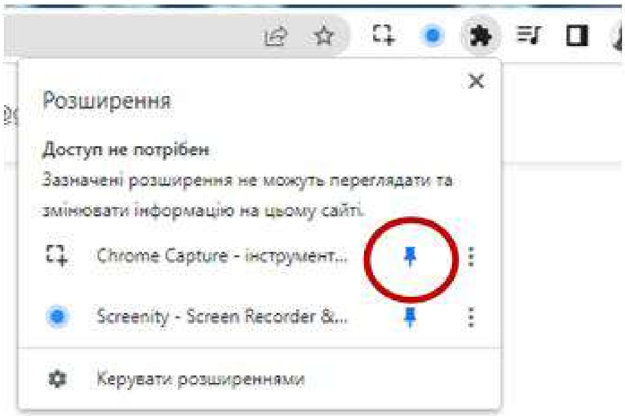


4) Здійснити пошук розширення Screenity – Screen Recorder & Annotation Tool (шукати потрібне серед усіх запропонованих чи ввести назву розширення в стрічку пошуку).



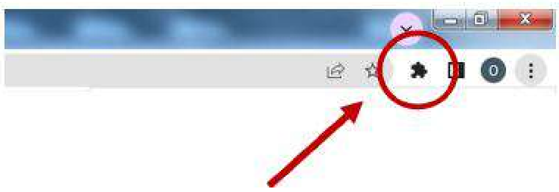
5) Встановити знайдене розширення до вашого браузера *Google Chrome,* натиснувши *Додати у Chrome,* далі *Додати розширення.*

6) Для зручності можна зафіксувати кнопку запуску розширення на панелі (зображення кнопки біля назви розширення має бути блакитним).

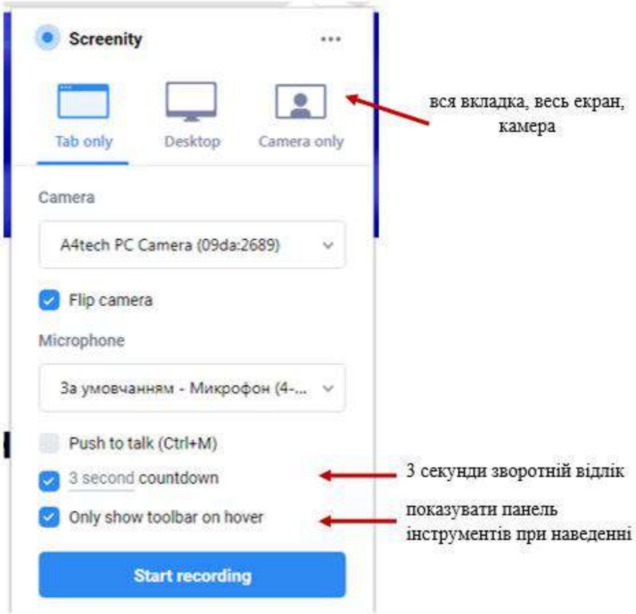


II етап. Створення та збереження скрінкасту

1) Підготувати все для запису (відкрити потрібні файли / програми, продумати звуковий супровід до запропонованого освітнього контенту). Матеріали мають бути завантажені на Google Drive.
2) Відкрити Google Chrome. У верхній правій частині вікна активізувати кнопку *Розширення*.



3) Запис може здійснюватися у трьох режимах: вся вкладка, весь екран, камера. Вибрати потрібний. Перевірити чи обрана камера і мікрофон. Натиснути *Почати запис.* Все, що далі відбувається на екрані / вкладці / камері записується у відеофайл.



4) Для роботи можна використовувати панель інструментів (зліва внизу сторінки, активується при наведенні).

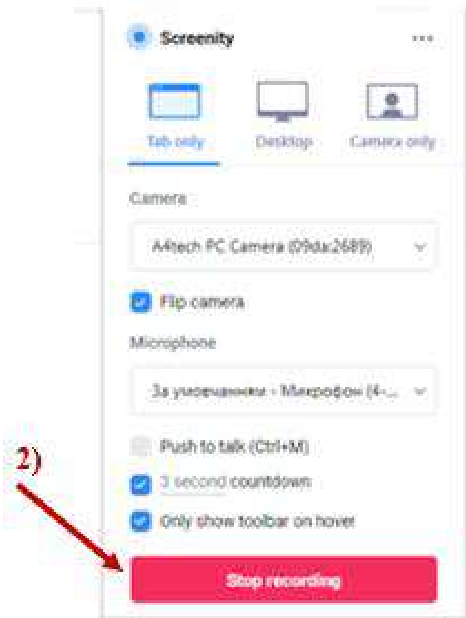
А – призупинити запис;

Б – стрілки для виділення;

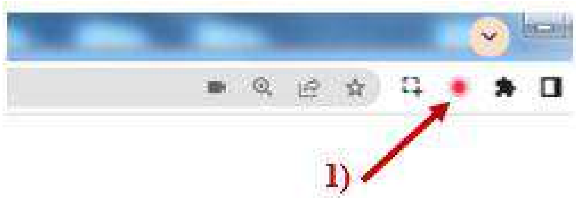
В – олівець;

Г – мікрофон;

Д – системні звуки.



5) Для завершення запису натиснути *Зупинити запис* (спочатку кругла червона кнопка справа вгорі вікна, потім – *Stop recording*).



ІІІ етап. Збереження матеріалів

1. Після зупинки запису завантажується *вікно попереднього перегляду відео.* Тут відео можна переглянути, обрізати за потреби, завантажити на комп'ютер чи зберегти на диск *(Меню справа).*

Потенційна інформація, отримана завдяки цьому цифровому методу, може революціонізувати наше розуміння та погляд на онлайн-досвід [12, с. 184]. Однак результати дослідження [28] свідчать про те, що можливість запису лекцій може негативно вплинути на відвідуваність і поведінку деяких здобувачів освіти на заняттях. Крім того ефективність скрінкасту, як навчального медіаконтенту, може бути спричинена індивідуальними особливостями учасників освітнього процесу щодо обробки інформації та стилю їхнього навчання. Невідповідний дизайн скрінкасту спричинить навантаження на когнітивний процес здобувачів освіти, що може перешкодити навчанню. Когнітивний стиль зрештою вплине на те, як інформація обробляється в структурі їхньої пам'яті. Учні / студенти також легко опрацюють надану інформацію, якщо вона подається відповідно до їх домінуючого стилю навчання [21, с. 74].

Отже дистанційна та змішана форми навчання реалізовують конституційне право людини на здобуття освіти, професійної кваліфікації чи підвищення кваліфікації. Створюють можливість організації навчання у зручний для учасників освітнього процесу час, скрізь і завжди за умови стабільного інтернет-з'єднання. А скрінкастинг як сучасна тенденція використання засобів візуалізації на заняттях, сприяє використанню синхронного та асинхронного форматів навчання; забезпечує доступність навчальних матеріалів; індивідуалізації та диференціації освітнього процесу в питаннях темпу навчання, оцінювання рівня засвоєння навального матеріалу, особливостей його сприйняття тощо.

Використання цифрових технологій комунікації та співпраці учасниками освітнього процесу в умовах дистанційного навчання у закладах загальної середньої освіти

Використання цифрових технологій в освіті наразі є одним із найважливіших і стійких трендів розвитку світового освітнього процесу. Вони можуть активізувати навчальний процес, підвищити швидкість і якість сприйняття, розуміння і засвоєння знань. За допомогою медіа та інтерактивних засобів педагогічним працівникам легше використовувати методи навчання, засновані на інноваційних підходах, зокрема застосовувати «кейси», навчально-дослідницькі роботи, проєктні методи, розвивальні навчальні ігри в освітньому просторі закладу освіти [31]. Завдяки цьому учні краще засвоюють інформацію перебуваючи в середовищі емоційного комфорту та не втрачають бажання вчитися, створювати нові знання та інновації. Цифрові технології дозволяють зробити процес навчання мобільним, диференційованим та індивідуальним. При цьому технології не замінюють вчителя, а доповнюють його. Таке навчання характеризуються адаптивністю, керованістю, високою інтерактивністю, поєднанням індивідуальної та групової роботи, необмеженим навчальним часом тощо [39].

Застосування цифрових технологій у дистанційному навчанні дозволяє ефективно організувати освітній процес, забезпечуючи зручність, доступність та інтерактивність для всіх учасників. Вони розширюють можливості для навчання і сприяють розвитку цифрової грамотності здобувачів освіти, яка є важливою в сучасному інформаційному суспільстві.

Найважливішим критерієм вибору інструменту організації дистанційного навчання має бути відповідність встановленим методичним цілям, тобто наскільки певний сервіс чи ресурс може досягти бажаних результатів дистанційного навчання. Водночас необхідно враховувати універсальність цих інструментів, щоб зменшити кількість різних платформ, що використовуються для налагодження комунікації та співпраці між учасниками освітнього процесу.

Комунікація є процесом обміну й передачі інформації між учасниками освітнього процесу. У контексті дистанційного навчання це означає використання електронних засобів комунікації, таких як електронна пошта, чати, форуми, відеоконференції тощо для взаємодії між адміністрацією школи, класним керівником, вчителями й учнями, батьками або між самими учнями. Комунікація відіграє важливу роль у створенні сприятливого освітнього простору та досягненні позитивних результатів навчання й розвитку учнів.

Співпраця учасників освітнього процесу означає взаємодію, обмін думками, ідеями та ресурсами між зацікавленими особами. В умовах дистанційного навчання вона може застосовуватися в процесі колективного розв'язування завдань, у проєктній діяльності, під час обговорення у групах або спільної роботи з навчальними матеріалами. Застосування цифрових технологій, таких як спільний доступ до документів у хмарі, колективне редагування файлів, відеоконференції тощо, полегшує співпрацю між учасниками освітнього процесу, незалежно від їх географічного розташування.

Виокремимо основні форми взаємодії між учасниками освітнього процесу:

- *Комунікація і співпраця адміністрації закладу освіти з учасниками освітнього процесу та.* Адміністрація відіграє ключову роль у керуванні закладом освіти та створенні сприятливого середовища для навчання. Комунікація між учасниками освітнього процесу та адміністрацією може включати повідомлення щодо адміністративних питань, запитання про організацію освітнього процесу, пропозиції, скарги тощо, тобто все, що стосуються життя школи. Взаємодія може відбуватися через особисті зустрічі, електронне листування, телефонні дзвінки, вебсайт школи та інші засоби спілкування.
- *Комунікація і співпраця між учнями та вчителями*. Педагогічні працівники відіграють ключову роль у навчанні й розвитку учнів. Вони забезпечують освітній процес, виконання інструкцій, надають пояснення, відповідають на запитання та сприяють розумінню матеріалу. Взаємодія

між учнями та вчителями може відбуватися через особисті бесіди, віртуальні консультації, електронне листування, спільні чати або платформи для навчання в режимі реального часу.

- *Комунікація між адміністрацією (учителями) та батьками.* Залучення батьків до освітнього процесу є важливим елементом успішного навчання здобувача освіти. Вони можуть отримувати інформацію про академічний прогрес своїх дітей, взаємодіяти з вчителями та отримувати повідомлення про події, консультації та батьківські збори. Взаємодія може відбуватися через зустрічі в школі, електронну пошту, телефонні дзвінки, платформи для спільної комунікації, а також за допомогою цифрових звітів та інформаційних систем.
- *Комунікація і співпраця здобувачів освіти.* Учні взаємодіють один з одним в процесі навчання та поза ним. Це може включати обговорення уроків, спільне вирішення завдань, проєктну роботу, спільні заходи та інтерактивну діяльність. У цифрову епоху ця взаємодія може відбуватися через електронні спільноти, чати, форуми, соціальні мережі тощо. [65]

Таким чином використання цифрових технологій для комунікації та співпраці між учасниками освітнього процесу відображає основні закономірності впровадження інновацій у закладах загальної середньої освіти та підкреслює важливість планування, підготовки, навчання, взаємодії, моніторингу та підтримки, що забезпечує успішну реалізацію засад дистанційного навчання.

Асинхронне навчання інформатики студентів з особливими освітніми потребами

Для ефективного використання інформаційних та телекомунікаційних технологій викладач повинен професійно володіти сучасними методами та формами навчання. Особливо це стосується викладачів інформатики, які навчають студентів з особливими освітніми потребами. Активно впроваджуючи передові технології у навчанні таких студентів, викладач постає провідником у світ знань, особистісної, професійної та соціальної адаптації. Пропонуємо традиційні форми навчання доповнювати сучасними цифровими технологіями для забезпечення якісного навчання студентів з особливими освітніми потребами. Однією з таких форм є організація синхронного та асинхронного навчання.

Студенти нерідко пропускають заняття через стан здоров'я, що погано позначається на засвоєнні навчального матеріалу та призводить до психологічного дискомфорту. Для подолання таких проблем, радимо використовувати у навчанні інформатики асинхронні форми навчання, які надають можливість навчатися за межами класу, повторювати навчальний матеріал у зручний для студента час.

Наприклад, використання на заняттях як синхронних так і асинхронних форумів та месенджерів допоможуть студентам із порушеннями мови та слуху брати активну участь в обговоренні навчальної проблеми, спілкуватися з одногрупниками та почувати себе включеними у загальний процес навчання не в ролі пасивного спостерігача, а як активний учасник навчального процесу, дослідження та пізнання [44].

Проблеми використання цифрових технологій у навчанні учнів та студентів з особливими освітніми потребами досліджують вітчизняні (Н. Тализіна, Г. Нікуліна, П. Таланчук, М. Кадемія, М. Чайковський) та зарубіжні (Ф. Вейша-ар, Д. Макнотон, Л. Сідлескі) науковці. В окремих дослідженнях проведено огляд спеціалізованого програмного забезпечення для навчання студентів із порушеннями зору та частковою втратою слуху. Інститут психології ім. Г. С. Костюка АПН України проводить дослідження, спрямовані на виявлення психологічних засад, що проектують навчання з використанням комп'ютера [42, с. 423].

Асинхронне навчання – це навчання, в якому контакт між викладачем і слухачем здійснюється з певною затримкою в часі; це форма навчальної телекомунікації, коли кожний студент групи знайомиться з навчальними матеріалами або виконує завдання не разом з усіма, а у зручний для нього час.

Кожен студент має можливість:

– запропонувати викладачеві свій варіант виконання завдання;

– здобувати нові знання самостійно з електронного конспекту;

– підключатися до форуму для обговорення й уточнення набутих знань;

– налагодити контакти з іншими студентами групи.

Асинхронне навчання базується на особистісно-орієнтованому підході, який підкреслює важливість взаємодії між викладачем і студентом. Такий підхід поєднує в собі самостійне навчання з асинхронною взаємодією для забезпечення результатів навчання, вдосконалення та розширення можливостей традиційних форм навчання з поєднанням інноваційних технологій [15].

Асинхронне навчання вимагає від викладача спрямованості на особистісно-орієнтовний підхід та персоналізоване навчання студентів. Конструктивістська теорія пропонує викладачеві бути не лише дозатором знань, а стати навчальним дизайнером, посередником та експертом методів і форм навчання [16].

Особистісно-орієнтовний характер асинхронного навчання потребує від студентів з особливими освітніми потребами прийняти відповідальність за здобуття знань, а саме:

– опанувати цифрові освітні технології для повноцінного залучення в асинхронний режим навчання;

– використовувати нові методи спілкування з одногрупниками та викладачем.

Розглянемо основні інструменти викладача для організації асинхронного навчання студентів.

Електронні підручники. Сучасне програмне забезпечення надає можливість створити універсальний адаптований електронний підручник для студентів з особливими освітніми потребами. За допомогою програм для читання студент має можливість налаштувати розмір тексту, дизайн підручника, інтенсивність і яскравість екрана монітора.

В електронних підручниках текстові пояснення супроводжуються графічними й динамічними зображеннями, які сприяють активному опануванню навчального матеріалу.

Пошук інформації відбувається швидко, а електронний зміст дає змогу переходити на різні розділи. Студент створює закладки на окремих частинах тексту чи графічних об’єктах для переходу в зазначене місце.

Озвучення підручника допомагає студентам із порушеннями зору прослухати текст. Такі електронні підручники легко транспортуються та мають малий об’єм.

Виключно високий ступінь наочності представленого навчального матеріалу, взаємозв’язок різних компонентів курсів, комплексність і інтерактивність електронного підручника роблять його незамінним помічником не лише для студентів з особливими освітніми потребами.

Завдяки комплексу різноманітних мультимедійних можливостей (відеосюжети, анімація, звук, якісні ілюстрації, інтерактивні завдання тощо), процес навчання стає ефективнішим і цікавішим.

Переваги електронних мультимедійних підручників:

1) можливість компактного збереження великого обсягу інформації;

2) програма для читання швидко налаштовується на конкретного слухача;

3) легко доповнюється та розширюється;

4) має широкі можливості пошуку;

5) можливість виконання інтерактивних вправ і тестів;

6) високий ступінь наочності: побудова візуальних моделей, використання графічної і мультимедійної інформації;

7) структурованість (гіпертекстова організація інформації).

Відеоуроки. Для демонстрації виконання завдання ми пропонуємо використовувати відеоуроки. Перегляд відеолекцій, практичних завдань допоможуть пригадати навчальний матеріал у будь-який зручний для студента час. За допомогою медіапрогравачів студенти налаштовують темп перегляду: зупиняють урок у потрібному місці, переходять назад чи вперед, зменшують розмір екрана для того, щоб одразу виконувати завдання.

Переваги відеоуроків:

1) викладач конструює повний і чіткий виклад навчального матеріалу;

2) студент точно знає, скільки часу займе перегляд уроку;

3) навчальний матеріал структурований і послідовний;

4) забезпечення максимальної наочності;

5) полегшення роботи викладача: непотрібно повторювати кожного разу одне і те саме, досить буде включити потрібний урок із поясненням;

6) відеоуроки можна використовувати де завгодно і коли завгодно;

7) переглядати матеріал можливо будь-яку кількість разів.

Недоліки відеоуроків:

1) при демонстрації частково втрачається зворотний зв’язок;

2) необхідно періодично поновлювати уроки;

3) створення якісного відеоуроку вимагає багато зусиль і часу.

Презентації розглядаємо як самостійний спосіб оформлення навчального матеріалу та як доповнення традиційних форм навчання.

Використання сучасних програм для створення презентацій не потребує значної підготовки для опанування, а також не займає багато часу для розроблення заняття. При цьому презентації забезпечують представлення інформації в будь-якій формі – текст, таблиці, діаграми, відео- та аудіофрагменти. Викладач може сортувати матеріал відповідно до свого бачення: змінювати порядок і час перегляду слайдів. Презентація є певною послідовністю слайдів – електронних сторінок. Викладач демонструє слайди на екрані монітора комп’ютера чи на великому екрані за допомогою мультимедійного проектора. Найчастіше демонстрація супроводжується коментарями викладача. При здійсненні показу об’єкти можуть одразу відображатися на слайдах, а можуть з'являтися на них поступово, через певний час, визначений викладачем для підсилення наочності навчального матеріалу й акцентування на особливо важливих моментах змісту.

Залежно від цілей застосування навчальну презентацію класифікуємо так:

– для супроводу лекцій;

– демонстрація: перегляд слайдів без допомоги викладача зі звуковим супроводом, які відкриваються та переходять між слайдами автоматично, за певний проміжок часу, або керування здійснює студент;

– комбінована – з поясненнями викладача і частина слайдів зі звуковим супроводом.

Переваги презентацій:

– зацікавити студентів: заняття стають більш емоційними, яскравими, наочними;

– індивідуальний перегляд у зручний час;

– повторення навчального матеріалу;

– простий і зручний застосунок для створення навчальних презентацій.

Крім того, такі презентації легко тиражуються, розповсюджуються та займають малий об'єм.

Форум. Виступає як інтерактивний елемент навчального вебсайту. Його мета полягає у забезпеченні обміну завданнями та результатами роботи, обговоренні навчального матеріалу між студентами та викладачем.

Інструменти, які використовуються на форумах, надають змогу переходити у потрібні місця для повторного перечитування цитат і діалогу. Ці інструменти надають можливість створити закладки на важливому місці для швидкого повернення, підтримують гіперпокликання на інші сторінки чи теми форуму. Збереження історії форуму дає можливість повертатися до матеріалу через певний проміжок часу. На форумах застосовується надзвичайно гнучке розмежування доступу до повідомлень. Так, на одних форумах створити нові повідомлення може будь-який випадковий відвідувач – такі форуми є відкритими всім слухачам без винятку, на інших – необхідна попередня реєстрація (найпоширеніший варіант). Існує і змішаний варіант – коли деякі теми можуть бути доступні всім студентам, а інші – тільки зареєстрованим. Окрім відкритих, існують закриті форуми, доступ до яких визначається персонально для кожного адміністраторами (викладачем). На практиці також нерідко трапляється варіант, коли деякі розділи форуму загальнодоступні, а решта доступна тільки вузькому колу.

Під час реєстрації на форумі студент створює профіль – сторінку з відомостями. У профілі студент може подати інформацію про себе, встановити своє фото та підпис, що буде автоматично відображатися на його повідомленнях. Підпис може бути статичним текстом або містити графічні зображення.

На форумах при формуванні нової теми є можливість приєднання до неї голосувань чи опитувань. При цьому студенти голосують або відповідають на запропоновані запитання. Навчальний форум має свою тематику – достатньо широку, щоб в її межах можна було вести багатопланове обговорення. Часто також декілька форумів об’єднують (це форуми у широкому сенсі). Наприклад, об’єднання форумів з тем вивчення прикладних програм: текстового редактора, електронних таблиць, баз даних тощо.

За методом наповнення форуми можна створити з динамічним списком тем і з постійним списком тем. У форумах з динамічним списком тем студенти можуть створювати нові теми у межах навчального матеріалу. З постійним списком тем студенти не мають можливості щось змінювати – це лише текст та графічні зображення для читання.

У повідомленнях форуму відображаються дата та час розміщення інформації, підпис студента та його фото. Відповіді та пропозиції можна розташувати як у хронологічному порядку, так і в порядку безпосереднього відношення до конкретної теми, на яку посилається студент. Це зручно для підбиття підсумків, обговорення теми навчання, розгляду пропозицій й аналізу результатів навчання.

У статті [44] досліджувалось синхронне навчання інформатики студентів з особливими освітніми потребами. Синхронність розуміється як спільна робота студентів над однією проблемою одночасно. Асинхронність – це індивідуальна робота студентів, коли навчання відбувається у зручний час, незалежно від інших членів групи.

Аналіз різних форм синхронної і асинхронної організації навчального процесу вказує на низку переваг і недоліків. Наприклад, форум відрізняється від чату розділенням тем і можливістю спілкування у зручний для слухача час. Це схиляє до серйозніших обговорень, оскільки надає слухачам більше часу на обмірковування відповіді. Форуми забезпечують можливість вставлення малюнків, графіків та фото для форматування навчального матеріалу.

Студент, який перебуває на лікарняному, має можливість брати активну участь у навчанні й обговоренні проблеми, звітуватися викладачеві за допомогою синхронного й асинхронного спілкування. Такі комунікативні форми не вимагають обов’язкової присутності в аудиторії: навчальний матеріал також можна розмістити на форумі у відповідній темі. Для самостійної роботи студенту достатньо скористатися електронним підручником, відеоуроком, презентацією, відвідати освітній вебсайт для перегляду форуму.

Для роботи з електронними підручниками, відеоуроками, презентаціями та форумами *студенти мають оволодіти технологіями,* а саме: програмами для читання тексту з екрана, медіапрогравачами, прикладними програмами, браузерами, месенджерами тощо.

Забезпечення *синхронного й асинхронного зв’язку* надають змогу підвищити якість навчання, йдеться, зокрема, про:

– реалізацію самостійної роботи студентів з особливими освітніми потребами;

– здійснення групового навчання з підтримкою цифрових технологій, що є важливим для студентів, які мають порушення мови чи слуху;

– створення різних груп для спілкування та навчання;

– створення форумів на різну тематику;

– використання форумів для додаткового розміщення навчального матеріалу;

– загальну доступність навчальних матеріалів для всіх студентів групи.

Отже синхронне й асинхронне спілкування допоможе не лише в оволодінні новими знаннями, а й у спілкуванні з одногрупниками, знаходженні нових друзів, що є важливим для студентів з особливими освітніми потребами. Такі програми відкривають перед студентами нові можливості для професійної й особистої реалізації як повноправних членів суспільства.

Інформаційна безпека здобувачів освіти у цифровому освітньому просторі

У сучасному світі, де цифрові технології входять у всі сфери життя, освітній простір також перетворився на цифровий. Це створює нові можливості для організації змішаного та дистанційного навчання учнів, але також приносить загрози їхній інформаційній безпеці.

Однією з основних проблем, яка виникає у цифровому освітньому просторі закладу загальної середньої освіти, є недостатня свідомість учнів щодо безпечного користування Інтернетом. Здобувачі освіти часто не зважають на ризики, пов’язані з соціальними мережами, онлайн-іграми та використанням інших мережевих ресурсів. Учні можуть стати жертвами кібербулінгу, кіберзлочинності, шахрайства та інших загроз. Також важливо забезпечити безпеку даних учнів, оскільки цифрові технології дозволяють збирати та опрацьовувати велику кількість особистої інформації. Зловмисники можуть використовувати цю інформацію для шахрайства, крадіжки особистих даних та інших злочинних дій.

Для вирішення цих проблем необхідно розробити систему заходів, які б забезпечували інформаційну безпеку учнів у цифровому освітньому просторі. Серед таких заходів є: проведення навчання з питань безпеки в Інтернеті, застосування спеціальних програм та інструментів для захисту даних учнів, залучення кваліфікованих фахівців для надання підтримки вчителям та учням. Тому проблема інформаційної безпеки учнів у цифровому освітньому просторі є досить складною та вимагає комплексного підходу до її розв'язання. Дослідження цієї проблеми дозволить визначити основні проблеми та шляхи їх вирішення, а також розробити рекомендації щодо забезпечення інформаційної безпеки учасників освітнього процесу в цифровому освітньому просторі закладу освіти. [48]

Процес забезпечення інформаційної безпеки учнів у цифровому освітньому просторі закладів загальної середньої освіти включає етапи.

1. Аналіз потенційних небезпек та ймовірних ризиків у цифровому освітньому просторі – проводиться оцінка потенційних загроз та ризиків, що можуть виникнути у цифровому освітньому просторі, таких як віруси, шкідливі програми, хакерські атаки, крадіжка даних тощо.

2. Розробка стратегії забезпечення інформаційної безпеки – визначаються основні напрямки заходів забезпечення інформаційної безпеки, такі як встановлення антивірусного програмного забезпечення, захист мережевого трафіку, шифрування даних тощо.

3. Впровадження заходів забезпечення інформаційної безпеки – здійснюється впровадження заходів забезпечення інформаційної безпеки, які були розроблені на попередньому етапі.

4. Моніторинг та аналіз ефективності заходів забезпечення інформаційної безпеки – відбувається моніторинг та аналіз ефективності заходів забезпечення інформаційної безпеки, щоб виявити можливі проблеми та недолік та вжити необхідні заходи для їх усунення.

5. Навчання учнів про безпеку в цифровому просторі – організовуються освітні заходи для учнів про безпеку в цифровому просторі, які містять роз'яснення основних правил безпеки, використання безпечних паролів, захист від шкідливих програм тощо.

6. Обмін досвідом та знаннями між різними освітніми установами –

здійснюється налагодження комунікації між освітніми установами з метою визначення та апробації якнайкращих практик та підходів до забезпечення інформаційної безпеки учасників освітнього процесу.

Ці поетапні заходи дозволяють забезпечити надійний захист здобувачів освіти від можливих мережевих загроз та ризиків; підсилити безпеку їхніх особистих даних та інформації, що зберігається на комп’ютерах та мобільних пристроях; сприяють підвищенню рівня їхньої культури безпечної поведінки у цифровому освітньому просторі.

Інформаційну безпеку учасників освітнього процесу забезпечить використання різних інструментів та заходів, зокрема:

- ✓ захист мережі та комп’ютерів від зловмисних програм та кібератак;
- ✓ захист особистих даних учнів та їхньої інформації від несанкціонованого доступу;
- ✓ використання безпечних паролів та авторизація доступу до ресурсів;
- ✓ навчання здобувачів освіти з питань безпеки в Інтернеті та цифровому просторі;
- ✓ контроль за використанням учнями комп’ютерів та мобільних пристроїв;
- ✓ створення політики безпеки та її виконання;
- ✓ розробка плану дій у разі кібератаки або порушення безпеки даних;
- ✓ постійне оновлення програмного та апаратного забезпечення;
- ✓ використання захисту від DDoS-атак та інших шкідливих дій;
- ✓ проведення аудиту безпеки та виявлення потенційних загроз.

Крім того значну увагу варто приділяти постійному розвитку інформаційної компетентності педагогів щодо попередження можливих загроз та створення безпечних умов роботи в цифровому просторі під час організації змішаного та дистанційного навчання. Важливою є співпраця з батьками та опікунами учнів. Вони мають бути обізнані щодо потенційних загроз та знати, як захистити дітей від них.

Пропонуємо до розгляду добірку програмного забезпечення, яке може забезпечити інформаційну безпеку учасників освітнього процесу в цифровому освітньому просторі закладу загальної середньої освіти.

1. Системи фільтрації веб-контенту – програмне забезпечення, що дозволяє контролювати доступ учнів до різних веб-ресурсів та блокувати небажані сайти, що містять шкідливий контент.

- Norton Family [19] – програма для контролю доступу до вебресурсів, яка дозволяє батькам встановлювати обмеження на використання Інтернету дітьми.
- Qustodio [20] – програма для контролю доступу до вебресурсів, яка дозволяє батькам блокувати небажані сайти та контролювати час, проведений дитиною в Інтернеті

2. Антивірусне програмне забезпечення – програми, що допомагають захистити комп'ютери від вірусів та інших шкідливих програм, які можуть пошкодити систему або викрасти персональну інформацію.

- Norton AntiVirus Plus [18]– програма для захисту комп'ютера від вірусів та інших шкідливих програм з можливістю автоматичного сканування системи.
- Bitdefender Antivirus Plus [3]– програма для захисту комп'ютера від вірусів та інших шкідливих програм з високим рівнем захисту та швидким скануванням.

3. Системи контролю доступу – програмне забезпечення, що дозволяє обмежувати доступ учнів до певних даних та ресурсів, щоб забезпечити конфіденційність та безпеку інформації.

- Cisco Identity Services Engine [4] – програмне забезпечення для контролю доступу до мережі та захисту від несанкціонованого доступу.
- Microsoft Azure Active Directory [17] – програмне забезпечення для керування доступом до ресурсів хмарних сервісів та мереж.

4. Шифрування даних – технологія, OJ дозволяє захистити дані від несанкціонованого доступу шляхом перетворення їх у незрозумілий для сторонніх користувачів код.

- VeraCrypt [27] – програмне забезпечення для шифрування даних на комп’ютері з операційною системою Windows, macOS та Linux.
- AES Crypt [2] – програмне забезпечення для шифрування файлів на комп’ютері з операційною системою Windows, macOS та Linux.

5. Системи резервного копіювання – програмне забезпечення, що дозволяє створювати резервні копії даних, щоб у разі втрати або пошкодження оригінальних даних можна було відновити їх.

- Acronis True Image [1] – програмне забезпечення для створення резервних копій даних на комп’ютері з операційною системою Windows та macOS.
- EaseUS Todo Backup [17] – програмне забезпечення для створення резервних копій даних на комп’ютері з операційною системою Windows та macOS.
- Carbonite [4] – програмне забезпечення для створення резервних копій даних в хмарі з можливістю автоматичного резервного копіювання.

Отже створення безпечних умов для учнів у цифровому просторі закладу загальної середньої освіти під час організації змішаного та дистанційного навчання є однією з найважливіших завдань сучасної освіти. Варто пам’ятати, що це постійний процес, що потребує стабільного оновлення та аналізу. Тому освітні установи потребують відповідних встановлених процедур та механізмів для моніторингу та оцінки ефективності заходів безпеки. Це є спільною відповідальністю школи, батьків, опікунів та учнів. Співпраця та взаємодія всіх зацікавлених сторін є надзвичайно важливою для створення безпечних умов у цифровому освітньому просторі та має включати різноманітні заходи та інструменти, використання яких дозволить попередити можливі загрози та гарантувати безпеку учасникам освітнього процесу.

Вплив STEM-освіти на інноваційний розвиток природничо-математичної освіти в Україні

Україна прагне інтегруватись до європейського та світового освітнього простору, де вектором в освітньому процесі є формування особистісних цінностей та компетентностей учнів. Досягнення цієї мети спонукає науковців і освітян країни до реформування вітчизняної системи освіти, суттєвого оновлення змісту і методик навчання. Стрімкий розвиток ІТ-галузі, робототехніки, нанотехнологій виявляє потребу у досвідчених фахівцях, а значить, виникає гостра освітня потреба у якісному навчанні сьогоднішніх учнів технічним дисциплінам – математиці, фізиці, інженерії, програмуванню [38]. Освіта повинна бути випереджувальною, відповідати тенденціям розвитку суспільства в майбутньому. Впровадження інформаційно-комунікаційних технологій у навчальний процес закладів освіти вимагає перегляду традиційних освітніх концепцій.

Інформатизація сьогодні – це не тільки процес, пов’язаний з функціонуванням і подальшим покращенням техніки, а насамперед, соціокультурний процес, що змінює свідомість, світогляд людини, її психологію, мораль і ціннісні орієнтири [43]. Тому соціальним замовленням сучасного суспільства є розвиток особистості, яка зможе навчатися і працювати в умовах постійного зростання інформаційного потоку, людини з високим інтелектуальним потенціалом. У зв’язку з цим невід’ємною частиною загальної освіти особистості, поряд з культурою економічних, соціальних, екологічних відносин, стає інформаційна культура, яка набуває особливої актуальності в умовах інформатизації.

Сучасний школяр має усвідомлювати, наскільки важливо володіти інформацією, зберігати її, систематизувати і передавати. Освічена людина повинна вміти знаходити необхідну інформацію для професійної та повсякденної діяльності, користуватися нею, аналізувати, синтезувати, оцінювати як її, так і джерела інформації, використовуючи при цьому новітні цифрових технологій.

Одним із напрямків інноваційного розвитку природничо-математичної освіти є система навчання STEM, завдяки якій діти розвивають логічне мислення та технічну грамотність, вчаться розв'язувати поставлені задачі, стають новаторами, винахідниками. STEM-освіта дозволить вирішити найактуальніші проблеми майбутнього [43]. Головна мета впровадження STEM-освіти полягає у реалізації державної політики з урахуванням нових вимог Закону України «Про освіту» щодо посилення розвитку науково-технічного напряму в навчально-методичній діяльності на всіх рівнях [40].

Метою повної загальної середньої освіти є всебічний розвиток, виховання і соціалізація особистості, яка здатна до життя в суспільстві та цивілізованої взаємодії з природою, має прагнення до самовдосконалення і навчання впродовж життя, готова до свідомого життєвого вибору та самореалізації, відповідальності, трудової діяльності та громадянської активності.

Здобуття сучасних професій потребує всебічної підготовки та отримання знань із різних освітніх областей природничих наук, інженерії, технологій та програмування. А реалізація провідного принципу STEM-освіти – інтеграції, дозволяє здійснювати модернізацію методологічних засад, змісту, обсягу навчального матеріалу предметів природничо-математичного циклу, технологізацію процесу навчання та формування навчальних компетентностей якісно нового рівня. [66]

Зрозуміло, що така система освіти навчає дитину жити у реальному швидкоплинному світі, який постійно змінюється, вміти реагувати на ці зміни, критично мислити, бути загально розвиненою творчою особистістю. Діти, що проходять навчання за такою системою, беззаперечно стають лідерами соціуму, легко адаптуються та знаходять своє місце в житті.

Спеціалісти майбутнього повинні мати відповідну систему знань з природничих наук, математики, технологій, інженерії, бути досвідченими фахівцями, а значить, виникає гостра освітня потреба у якісному навчанні сьогоднішніх учнів технічним дисциплінам.

У Проєкті Концепції STEM-освіти в Україні зазначається «STEM-освіта – категорія, яка визначає відповідний педагогічний процес (технологію) формування і розвиток розумово-пізнавальних і творчих якостей молоді, рівень яких визначає конкурентну спроможність на сучасному ринку праці. STEM-освіта здійснюється через міждисциплінарний підхід у побудові навчальних програм закладів освіти різного рівня [49].

Основне завдання – викликати у дитини стійку цікавість до природничо-математичних наук, дати сукупність практично важливих знань, необхідних для подальшого життя людини у техносфері, глибокого розуміння екології і природи в цілому.

Важливо формувати в учнів основні компетентності з кожного предмету, адже вони спрямовані на формування саме практичних навичок. Кожний школяр розвиває своє системне, критичне мислення, вбачає зв’язок конкретного з абстрактним. Виходить нова система освіти, коли знання плавно переходять в уміння, вміння – в навички, навички – в компетентність, компетентність – в особистісний ріст, особистісний ріст – в розум, кмітливість і перспективу успішного життя. Тому, в порівнянні з традиційною освітою, при впровадженні в освітній процес STEM-навчання змінюється звична для нас форма викладання, що передбачає зміну ролі вчителів, які змінюють свої передові позиції на користь більш тісної співпраці та спільного внеску в навчальний процес [49].

Серед основних чинників, що впливають на якість життя, не тільки визначають рівень життя, а й інколи виживання людини, є здатність приймати стратегічні рішення в ситуаціях невизначеності, тобто здатність знайти інформацію потрібну для правильної оцінки ситуації, вміти її опрацювати, прийняти рішення і довести це рішення до виконавців. Реалізувати це з швидкістю, необхідною в сучасному суспільстві можливо лише за допомогою цифрових технологій. Саме розв’язання проблем і завдань, з якими учні можуть стикатися у своєму побуті, є запорукою того, що випускник школи буде пристосований до життя, підвищиться його мотивація до навчання, оскільки він бачитиме навіщо він навчається. До того ж реалізація засад STEM-освіти сприяє профорієнтації учнів, скеровує їх на здобуття затребуваних в державі професій.

Таким чином нами зроблено аналіз дистанційного та змішаного навчання як форм сучасної системи освіти. Розкрито зміст актуальних стратегій використання цифрових технологій в освіті. Розглянуто питання професійної мобільності педагога в контексті становлення фахівця. Акцентовано увагу на застосування віртуальних навчальних середовищ у закладах вищої освіти. Продемонстровано можливості використання навчального контенту онлайн-середовищ у професійній підготовці майбутніх учителів інформатики та математики. Зокрема побудовано модель використання мобільних освітніх середовищ. Описано потенціал використання мобільних технологій та засобів навчання у методичній підготовці майбутніх учителів математики, а також у процесі моніторингу навчальних досягнень здобувачів освіти. Важливу роль у світі цифровізації освіти відіграє візуалізація навчальних матеріалів засобами сучасних цифрових технологій для студентів закладів вищої освіти. Тому нами досліджено питання щодо застосування скрінкастів для візуалізації цифрового освітнього контенту. Невід'ємною складовою організації асинхронного навчання є використання цифрових технологій комунікації та співпраці учасниками освітнього процесу в умовах дистанційного навчання у закладах загальної середньої освіти. Особливу увагу звертаємо на асинхронне навчання інформатики студентів з особливими освітніми потребами. Дбаємо про безпеку здобувачів освіти, тому окремо досліджено проблеми інформаційної безпеки учнів у цифровому освітньому просторі закладу загальної середньої освіти. Серед новітніх засобів реалізації ключових векторів розвитку сучасної загальної середньої освіти є STEM-освіта, тому нами досліджено її вплив на інноваційний розвиток природничо-математичної освіти в Україні як одну із стратегій використання цифрових технологій в освіті. Аналіз сучасного інформаційного освітнього простору та досвід забезпечення електронного навчання свідчить про надзвичайну потребу та актуальність використання цифрових технологій в освіті. Діджиталізація освітньої галузі перетворює діяльність і спілкування викладачів та студентів, змінює методичні системи вивчення навчальних дисциплін, сприяє: оптимізації навчального навантаження студентів; засвоєнню ними основного змісту навчальної дисципліни; об’єктивності в оцінюванні знань і умінь; формуванню у них вміння здійснювати самоосвіту заздалегідь складеним планом, виходячи з певних умов; формуванню вміння здійснювати самоконтроль і самооцінку навчальної діяльності. Однак при цьому не варто перебільшувати можливості Вебпорталів, мобільних застосунків тощо, адже цифрова передача інформації ще не забезпечує передачі знань, культури, мислення і є лише важливим допоміжним засобом навчання. Це, в свою чергу, вимагає правильного відбору змісту навчання відповідно до дидактичних властивостей і можливостей засобів цифрових технологій навчання; прогнозу можливого впливу інформаційних технологій навчання на характер мислення і поведінки учасників освітнього процесу тощо.

Список використаних джерел

1. Acronis True Image. URL: https://www.acronis.com/en-us/products/true-image/
2. AES Crypt. URL: https://www.aescrypt.com/
3. Bitdefender Antivirus Plus. URL: https://bitdefender.ua/ru/forhome/solution-antivirus-plus/
4. Cisco Identity Services Engine. URL: https://www.cisco.com/site/us/en/products/security/identity-services-engine/index.html
5. Educational project "On Lesson" for teachers. URL: https://naurok.com.ua
6. Educational technology company ClassDojo. URL: https://classdojo.com
7. Free online service LearningApps. URL: https://learningapps.org/about.php
8. Freely distributed dynamic geometric environment GeoGebra. URL: https://www.geogebra.org
9. Fyfield M., Henderson M., Heinrich E., Redmond P. Videos in higher education: Making the most of a good thing. *Australasian Journal of Educational Technology.* 2019. No. 35(5). pp. 1–7. URL: https://doi.org/10.14742/ajet.5930
10. Graphic calculator Desmos. URL: https://www.desmos.com
11. Socrative. . URL: https://www.socrative.com/
12. Kawaf F. Capturing digital experience: The method of screencast videography. *International Journal of Research in Marketing.* 2019. Vol. 36. Issue 2. pp. 169–184. URL: https://doi.org/10.1016/j.ijresmar.2018.11.002
13. Kosovets O. P. Principles of a universal design in a methodical system of teaching computer science students in inclusive groups. *Scientific Vector of the Balkans.* 2020. T.4. 2(8). p. 14-17.
14. Lutsan, N., Bulgakova, O., Kuznetsova, O., Babchuk, O., Bykova, S. Professional mobility of the future teacher. *AD ALTA-JOURNAL OF INTERDISCIPLINARY RESEARCH.* № 11 (2), pp.110–114.

15. *Mayadas F.* Asynchronous learning networks: a sloan foundation perspective *I/* Journal of Asynchronous Learning Networks, 1. – 1997.
16. *McQuiggan C. A.* The role of faculty development in online teaching's potential to question teaching beliefs and assumptions // Online Journal of Distance Learning Administration. – 2008. http://www.westga.edu/~distan-ce/ojdla/falll03/mcquigganl03.htm.
17. Microsoft Azure Active Directory. URL: https://azure.microsoft.com/en-us/products/active-directory/
18. Norton AntiVirus Plus. URL: https://ru.norton.com/products/norton-360-antivirus-plus
19. Norton Family. URL: https://family.norton.com/web/?sr=https://www.google.com/
20. Qustodio. URL: https://www.qustodio.com/en/
21. Razak M. R. A., Ali A. Z. M. Instructional screencast: A research conceptual framework. *Turkish Online Journal of Distance Education*. 2016. Vol. 17. Issue 2. pp 74–87. URL: https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/222607
22. Semenets D. A., Soia O. M., Tyutyun L. A. Functioning of virtual educational environments in higher education in context of continuous education. *Progressive Science Journal*. 2019. № 1. p. 28-32.
23. Semenets D. A., Soia O. M., Tyutyun L. A. Using of electronic educational content in higher education institutions. *Фізико-математична освіта.* Суми, 2020. Вип. 1 (23). С. 6–11. DOI: 10.31110/2413-1571-2020-023-1-2-001.
24. Semenii N. O. Digital tools as a means for increasing motivation of future teachers' professional activity. *Information Technologies and Learning Tools.* 2022. Vol. 88. No. 2, pp. 229–238. URL: https://doi.org/10.33407/itlt.v88i2.4815
25. Soia Olena. Use of mobile technologies and learning tools in methodical training of the future mathematics teachers. *Інформаційні технології та менеджмент у вищій освіті та науці :* Міжнар. наук. конф., присвячена 5-річчю ISMA University of Applied Sciences in Uzbekistan (м. Фергана, Республіка Узбекистан, 28 листопада 2022 р.). Фергана, 2022
26. Soia Olena, Kolomiiets Olha. Screencasting as a current trend in the use of visualization tools in educational institutions. *Математика та інформатика в науці й освіті: виклики сучасності* : матеріали IV Міжнарод. наук.-практ. Інтернет-конф. (присвячена 90-річчю кафедри математики та інформатики) (м. Вінниця, Україна, 25–26 травня 2023 р.). Вінниця, 2023.
27. VeraCryp. URL: https://www.veracrypt.fr/code/VeraCrypt/
28. Voelkel S., Bates A., Gleave T., Larsen C., Stollar E. J., Wattret G.,Mello L. V. Lecture capture affects student learning behaviour. *FEBS Open Bio.2023.* Vol. 13, Issue 2. pp. 217–232. URL: https://doi.org/10.1002/2211-5463.13548
29. Wilkins K. Plickers! My new obsession! URL: http://toengagethemall.blogspot.com/2014/03/plickers-my-new-obsession.html?m=1
30. Бабійчук І., Соя О.М. Ментальні карти як засіб інтерактивної візуалізації навчальних матеріалів в умовах дистанційного навчання. Актуальні проблеми математики, фізики і комп'ютерних наук. Вінниця, 2020. Вип. 18. С. 4–9.
31. Використання цифрових технологій у процесі змішаного навчання в закладах загальної середньої освіти: метод. рекоменд. / Коваленко В. В., Мар'єнко М. В., Сухіх А. С. / За ред. М. В. Мар'єнко, А. С. Сухіх. Київ: ІІТЗН НАПН України, 2021. 87 с. URL: https://lib.iitta.gov.ua/728506/1/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%96%20%D1%80%D0%B5%D0%BA%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B4%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%97%20ISBN%20978-617-95182-5-6.pdf
32. Горбачова І. І. Професійна мобільність вчителя в мінливому освітньому середовищі. *Теорія та методика навчання та виховання*. № 43 С. 59–68.
33. Дистанційна освіта. URL: http://www.osvita.org.ua/distance/world/
34. Закон України «Про освіту». *Відомості Верховної Ради (ВВР)*. 2017. № 38-39. ст. 380.

URL: http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/2145-19

35. Використання Web-інструментів в освіті : вебсайт. URL: https://iokot.wordpress.com/category/полезные-инструменты
36. Ієвлєв О. М. Формування професійно-педагогічної мобільності майбутнього викладача засобами інноваційних педагогічних технологій. *Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах*. 2019. № 62. Т. 2. С. 93–97.
37. Кадемія М. Ю. Організація навчального процесу у віртуальному університеті. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми.* Київ – Вінниця, 2016. Вип. 46. С. 191–197.
38. Коваленко О., Сапрунова О. STEM- освіта: досвід упровадження в країнах ЄС та США. *Рідна школа*. 2016. № 4. С. 46-49.
39. Ковальова Н. М. Застосування цифрових технологій. URL: https://naurok.com.ua/zastosuvannya-cifrovih-tehnologiy-pid-chas-distanciynogo-navchannya-uchniv-pochatkovo-shkoli-v-osvitnomu-procesi-205566.html
40. Ковтонюк М. М., Соя О. М., Туржанська О. С. STEM-центр як освітній ресурс для організації навчання в контексті розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти). *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми* : збірник наукових праць. Вінниця : ТОВ «Друк плюс», 2021. Вип. 61. С. 46–55. DOI: 10.31652/2412-1142-2021-61-46-55
41. Коломієць О., Соя О. Використання скрінкастів для візуалізації цифрового освітнього контенту. *Актуальні проблеми математики, фізики і комп'ютерних наук*. Вінниця, 2023. Вип. 20. С. 40–48.
42. Комісарова О. Ю., Депутат В. В. Специфіка інтерфейсу при навчанні людей з особливими потребами. *Актуальні проблеми навчання та виховання людей з особливими потребами*: зб. наук. пр. К.: Університет «Україна». С.423-430.
43. Корнієнко О. Р. Про актуальність запровадження STEM-навчання в Україні: URL: http:elenakornienko.blogspot.com/2016/02/stem.html.
44. Косовець О. П. Принципи синхронного навчання інформатики слухачів з особливими потребами. *Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.* Вінниця, 2010.
45. Косовець О. П., Соя О. М. Візуалізація навчальних матеріалів засобами сучасних цифрових технологій для студентів вищих навчальних закладів. *Science, innovations and education: problems and prospects* : The 2nd International scientific and practical conference (Tokyo, Japan, September 15–17, 2021). Tokyo: CPN Publishing Group, 2021. P. 220–223.
46. Лівер Б. Л. Навчання всього класу / пер. с англ. О.Є. Биченковой, 1995. 48 с.
47. Лютинська М. О. Використання ClassDojo в навчально-виховному процесі. URL: http://timso.koippo.kr.ua/hmura12/2016/10/21/vykorystannya-class-dojo-v-navchalno-vyhovnomu-protsesi/
48. Нич О. В., Соя О. М. Дослідження проблеми інформаційної безпеки учнів у цифровому освітньому просторі закладу загальної середньої освіти. *Теорія і практика використання інформаційних технологій в умовах цифрової трансформації освіти*: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. (м. Київ, 29 червня 2023 р.). Київ, 2023. С. 109–112.
49. Ночевчук М. В. STEM-освіта – шлях до майбутнього. *Інформатика в школах України*. 2017. № 27 (543). С. 32-35.
50. Про вищу освіту : Закон України від 01.07.2014 р. № 1556-VII. URL: http://zakon0.rada.gov.ua/laws/show/1556-18/page3
51. Про схвалення Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) : Розпорядження Кабінету Міністрів України від 5 серпня 2020 р. № 960-р URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-p#Text
52. Семенець Д. А., Соя О. М., Тютюн Л. А. Функціонування віртуальних навчальних середовищ у закладах вищої освіти в контексті неперервної освіти. *Progressive Science*

Journal. 2019. №. 1, С. 28-32.
53. Семенець Д. А., Мороз Д. С. Програмування сайтів. Бази даних для сайтів. Як захистити сайт від злому? *Математика та інформатика навколо нас*. Вінниця, 2018. Вип. 2. С. 152–158.
54. Семенець Д. А., Соя О. М., Тютюн Л. А. Функціонування віртуальних навчальних середовищ у закладах вищої освіти в контексті неперервної освіти. *Progressive Science Journal*. 2019. № 1. С. 28–32.
55. Soia O. M. Mobile technologies and learning tools in mathematics: modern trends in the use of educational institutions. Innovative paradigm of the development of modern physical-mathematical sciences : Collective monograph. Riga, Latvia : “Baltija Publishing”, 2022. pp. 156–180. DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-26-200-5-7
56. Соя Олена. Використання навчального контенту онлайн-середовищ у професійній підготовці майбутніх учителів інформатики та математики. *Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця (НПК–2019)* : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. у 2 частинах (м. Суми, 5–6 грудня 2019 р.). Суми, 2019. Ч. 2. С. 156–158.
57. Соя Олена. Дистанційне навчання як одна з технологій сучасної системи освіти. *Актуальні проблеми математики, фізики, комп’ютерних наук і технологій*. Вінниця, 2020. Вип. 17. С. 101–104.
58. Соя Олена. Професійна мобільність педагога в контексті становлення фахівця. *Професійний розвиток педагога в умовах інтеграції до європейського освітнього простору: міжнародна академічна та професійна / професійно-педагогічна мобільність* : зб. наук. праць Міжнар. наук.-практ. конф. (м. Львів, 26–27 листоп. 2021 р.). Львів, 2021. С. 229–232
59. Соя О. Інтеграція мобільних освітніх середовищ у навчальний процес з інформатики. *Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності* : зб. наук. праць за матеріалами ІІ Всеукр.наук.-практ. інтернет-конф., Вінниця, 15–16 травня 2019 р. Вінниця , 2019. С. 253–257.
60. Соя О. М., Косовець О. П. Використання мобільних технологій і засобів навчання математики та інформатики у процесі моніторингу навчальних досягнень здобувачів освіти. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи* : зб. наук. праць VIII Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. (м. Тернопіль, 11–12 листоп. 2021 р.). Тернопіль, 2021. С. 231–234. URL: http://conf.fizmat.tnpu.edu.ua/media/2021/%D0%A1%D0%BE%D1%8F_%D0%9A%D0%BE%D1%81%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%86%D1%8C_%D0%A2%D0%B5%D0%B7%D0%B8.pdf
61. Соя О. М., Тютюн Л. А., Косовець О. П. Модель використання мобільних освітніх середовищ. *Сучасні тенденції та фактори розвитку педагогічних та психологічних наук в Україні та країнах ЄС* : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф. (м. Люблін, Республіка Польща, 25–26 вересня 2020 р.). Люблін, С. 105-109. DOI https://doi.org/10.30525/978-9934-588-80-8-2.27
62. Стратегія розвитку вищої освіти в Україні на 2021–2031 роки. Київ, 2020. 71 с. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/rizne/2020/09/25/rozvitku-vishchoi-osviti-v-ukraini-02-10-2020.pdf
63. Тютюн Л. А., Соя О. М. Використання пакетів прикладних програм у процесі професійної підготовки студентів фізико-математичних спеціальностей. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми.* Київ–Вінниця, 2018. Вип. 52. С. 415–421.
64. Тютюн Л. А., Соя О. М. Забезпечення E-learning за допомогою персонального сайту викладача *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання : досвід, тенденції, перспективи* : зб. наук. праць за матеріалами ІІ Міжнар. наук.-практ. інтернет-

конф., Тернопіль, 8-9 листоп. 2018 р. Тернопіль, 2018. С. 247-249. URL: http://conf.fizmat.tnpu.edu.ua/media/arhive/2018.pdf.

65. Хвостецький О. В., Соя О. М. Використання цифрових технологій комунікації та співпраці учасниками освітнього процесу в умовах дистанційного навчання у закладах загальної середньої освіти. *Теорія і практика використання інформаційних технологій в умовах цифрової трансформації освіти*: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. присвяченій пам'яті академіка АНВО України, доктора педагогічних наук, професора Рамського Юрія Савіяновича. (м. Київ, 29 червня 2023 р.). Київ, 2023. С. 191–194.
66. Хміль Н. В., Соя О. М. Вплив STEM-освіти на інноваційний розвиток природничо-математичної освіти в Україні. Новітні інформаційно-комунікаційні технології в освіті : матеріали VII Всеукр. наук.-практ. Інтернет-конф. молодих учених та студентів (м. Полтава, 24–25 листопада 2021 р.). Полтава: ПП "Астрая", 2021. С. 87–89.

Авторський колектив

Бак Сергій Миколайович – професор кафедри математики та інформатики, заступник декана факультету математики, фізики і комп'ютерних наук з наукової роботи, доктор фізико-математичних наук, професор;

Ковтонюк Галина Миколаївна – доцент кафедри математики та інформатики, кандидат педагогічних наук, доцент;

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна – завідувач кафедри математики та інформатики, доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, професор;

Косовець Олена Павлівна – доцент кафедри математики та інформатики, кандидат педагогічних наук;

Крупський Ярослав Володимирович – доцент кафедри математики та інформатики, кандидат педагогічних наук, доцент;

Леонова Іванна Миколаївна – асистент кафедри математики та інформатики;

Соя Олена Миколаївна – доцент кафедри математики та інформатики, кандидат педагогічних наук;

Туржанська Оксана Степанівна – доцент кафедри математики та інформатики, кандидат педагогічних наук, доцент;

Тютюн Любов Андріївна – доцент кафедри математики та інформатики, кандидат педагогічних наук, доцент.

Зміст

Передмова……………………………………………………………………………3

РОЗДІЛ 1. ІСНУВАННЯ І ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗЧИСЛЕННИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. *Бак С. М., Ковтонюк Г. М.* Існування біжучих і стоячих хвиль в системах осциляторів..4

1.1.1. Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці……………………………………………………………………...4

1.1.2. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона…………33

1.2. *Ковтонюк М. М.* Асимптотичні розв'язки зчисленної системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами…………………………54

РОЗДІЛ 2. ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ТА ІНФОРМАТИЧНОГО ОСВІТНЬОГО ПРОСТОРУ ЗАКЛАДУ ВИЩОЇ ОСВІТИ

2.1. *Ковтонюк М. М., Соя О. М., Косовець О. П., Леонова І. М.* Концептуальні засади форсайт моделювання синергетичного освітнього простору бакалавра математики……..80

2.2. *Туржанська О. С.* Системи комп'ютерної математики як складові освітнього середовища у навчанні математичних дисциплін………………………………130

2.3. *Крупський Я. В.* Застосуванням систем комп'ютерної математики при проведенні інтегрованих уроків з інформатики…………………………………152

2.4. *Соя О.М.*, *Тютюн Л.А.*, *Косовець О.П.* Аналіз та стратегії використання цифрових технологій в освіті……………………………………………………..178

Авторський колектив……………………………………………………..241

Електронне наукове видання

Проблеми математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика

колективна монографія

за заг. ред. М. М. Ковтонюк та С. М. Бака

До 90-ї річниці
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

Підписано до видання 21.12.2023 р.
Гарнітура Times New Roman.
Замовлення № Р2024-051.

Видавець та виготовлювач –
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114, Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua
email: irvc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.