

А. С. МОРГУН, І. М. МЕТЬ

**КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗРАХУНКУ
ФУНДАМЕНТНИХ КОНСТРУКЦІЙ
БУДІВЕЛЬ ТА СПОРУД
ЗА МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

А. С. Моргун, І. М. Метъ

**КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗРАХУНКУ
ФУНДАМЕНТНИХ КОНСТРУКЦІЙ
БУДІВЕЛЬ ТА СПОРУД
ЗА МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Монографія

ВНТУ
Вінниця
2025

УДК.519.635:624·044:624.15

М79

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 14 від 26.06.2025 р.)

Рецензенти:

Винников Ю. Л., доктор технічних наук, професор

Дудар І. Н., доктор технічних наук, професор

Моргун, А. С.

М79 Комп'ютерні технології розрахунку фундаментних конструкцій будівель та споруд за методом граничних елементів : монографія [Електронний ресурс] / А. С. Моргун, І. М. Меть. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – (PDF, 108 с.)

ISBN 978-617-8163-58-7 (PDF)

В роботі проведено дослідження роботи фундаментних конструкцій та ґрунтової основи в нелінійній стадії. Наведено послідовність розрахунку напружено-деформованого стану та несучої спроможності фундаментних конструкцій в дисперсному середовищі ґрунту.

Монографія розрахована на студентів спеціальності «Будівництво та цивільна інженерія», спеціалістів та наукових працівників, що працюють в області числових розрахунків фундаментних конструкцій та їх реконструкції.

В монографії наведено прикладання МГЕ до визначення та підняття несучої спроможності буронабивних, пірамідальних паль та паль-оболонки, а також порівняння цих результатів з експериментом.

УДК.519.635:624·044:624.15

ISBN 978-617-8163-58-7 (PDF)

© А. Моргун, І. Меть, 2025

© ВНТУ, 2025

ЗМІСТ

Вступ	4
Розділ 1. Вхідні параметри геологічної ситуації основи	13
Розділ 2. Уявлення про перспективні методи розрахунку основ фундаментів з урахуванням нелінійних та реологічних властивостей	25
2.1. Фізика процесів в ґрунті при його навантаженні	25
Розділ 3. Матричне та дискретне формулювання інтегрального рівняння МГЕ. Сутність, етапи створення та перспективи .	35
3.1. Теорія процесів деформування пористих середовищ	35
3.2. Етапи розв'язання нелінійної задачі механіки ґрунтів	44
Розділ 4. Основні співвідношення задач непружної поведінки матеріалу	46
4.1. Вплив пластичності ґрунту на напружено-деформований стан..	46
4.2. Дилатансія геоматеріалів	50
Розділ 5. Прикладання числового МГЕ до практичних задач визначення НДС паль (буронабивних, буроін'єкційних, пірамідальних) та паль-оболонки	61
5.1. Засоби збільшення несучої спроможності паль та їх прогнозування за числовим методом граничних елементів	61
5.1.1. Улаштування розширень в нижній частині буронабивних паль	61
5.1.2. Пошук резервів несучої здатності пірамідальних паль за МГЕ	71
5.1.3. Деформативність буроін'єкційних паль	77
5.2. Прогнозування деформативності паль-оболонки	80
5.2.1. Інноваційні технології розрахунку за МГЕ фундаментів глибокого закладання (паль-оболонки)	80
5.2.2. Контактна задача взаємодії паль-оболонки з основами за МГЕ	94

Вступ

Будівництво – одна із важливих галузей народного господарства. Успішність будівництва залежить від проникнення в тайни неживої природи, глибокого знайомства з законами механіки та геомеханіки з метою забезпечення достатньої стійкості споруд та максимальної економії засобів.

В сучасній геотехніці експеримент в натурних і лабораторних умовах є складним, довгим і дорогим, а спрощені формули механіки ґрунтів, заснованих на аналітичних рішеннях окремих задач, перестали відповідати умовам проектування, які зросли. В різних областях науки та техніки широке впровадження знайшов обчислювальний експеримент для дослідження інженерних задач. Кількісною мірою методів прогнозування деформативних процесів будівельних конструкцій та їх ґрунтових основ є напруження та деформації. Для оцінки ступеня стійкості споруди доцільно порівняти напруження та деформації з гранично допустимими значеннями.

Головна проблема технічних систем – надійність. Зростаючі запити практики ведуть до ускладнення прикладних задач. Для вирішення цієї проблеми більшість фізичних явищ в механіці може бути описана за допомогою диференціальних рівнянь (теорія пружності), інтегральних рівнянь (числовий метод МГЕ), дослідження виразу потенціальної енергії роботи (варіаційне числення, числовий метод МСЕ).

Математичне моделювання просторових контактних взаємодій натеper продовжує успішно розвиватись. В останні роки стали приділяти більше уваги математичному моделюванню просторові контактні взаємодії фундаментів з основами на базі МСЕ. Але в таких дослідженнях різко зростає розмірність алгебраїчного аналога контактної задачі і приходиться вводити обмеження на форму і розміри як фундаментів, так і ґрунтових масивів.

Відсутність надійних математичних методів стримує розробку та впровадження нових видів фундаментних конструкцій в будівництво. Тому розвиток методу граничних елементів МГЕ (порівняльно нового напрямку), заснованого на граничних інтегральних рівняннях в фундаментобудуванні для побудови розрахункових моделей і числових алгоритмів контактної взаємодії фундаментів з ґрунтовими основами є багатообіцяючим.

МГЕ використовує поверхневу дискретизацію і для тривимірних задач він є більш ефективним ніж МСЕ.

Теллес, Бреббія, Вроубел [6, 20] для отримання функцій впливу МГЕ використали фундаментальне рішення теорії пружності, отримане Р. Міндліним для півпростору [7], яке слугує ваговими функціями при переводі розрахункової краєвої задачі теорії пружності із 15 диференціальних рівнянь в частинних похідних в інтегральне рівняння МГЕ.

В роботі приведено числово-аналітична методика інтегрування фундаментальних рішень Р. Міндліна по довільно орієнтованим в півпросторі плоским трикутним граничним елементам активної зони ґрунтової основи, яка дозволяє отримати дані, більш близькі до натурних, чим інші відомі методики розрахунків. При використанні фундаментальних рішень Р. Міндліна вільна поверхня ґрунтової основи не потребує дискретизації, що значно скорочує підготовку вхідних даних та сам розрахунок значно зменшується.

Отримано формули, які дозволяють в рамках числового алгоритму МГЕ розв'язувати тривимірні контактні задачі для конструкцій складної форми, занурених в пошарові ґрунти. Розвиток алгоритмів МГЕ відображає особливості моделювання процесів просторової контактної взаємодії та придатний для компонування широкого кола просторових контактних моделей (функцій впливу).

МГЕ завдяки своїй наглядності та індиферентності до геометрії об'єкту є ефективним числовим методом для розв'язку просторових задач в геотехніці, з можливістю прогнозування реальної ситуації та отримання практичного ефекту.

Багаточисленні розрахунки з використанням МГЕ вказують на задовільну збіжність з експериментом та достатню для практичних цілей точність.

В зв'язку з універсальністю МГЕ його можна застосовувати для розрахунку деформацій практично всіх фундаментних конструкцій та уніфікувати розрахунки основ фундаментів, отримати значне скорочення розривів між теоретичними та експериментальними результатами, проводити більш економічні проектні рішення.

Прогрес обчислювальної техніки з використанням МГЕ відкриває можливість переходу від простого розрахунку деформацій основ складних фундаментних конструкцій до пошуку оптимальних рішень, тобто до використання методів оптимізації при проектуванні, які лише почали впроваджуватись.

Основним напрямком економічного і соціального розвитку України є відновлення та збільшення капітального будівництва, що буде засновуватись

на піднятті продуктивності праці, зниженні кошторисної вартості будівництва при одночасовому підвищенні його надійності. Це можуть забезпечити нові індустріальні технології, передові наукові досягнення.

Надійність основ та фундаментів у великій степені залежить від достовірної оцінки фізико-механічних властивостей ґрунту, урахування його сумісної роботи з фундаментами. Вибір раціонального типу фундаментів на пряму залежить від вірного вибору розрахункової схеми.

Для конструкції першочергове значення має **матеріал**, з якого вона виготовлена. Саме він (матеріал) в основному визначає 3 основні вимоги до матеріалів для будівельних конструкцій та ґрунтових основ: – несучу спроможність, – довговічність, – кошторисну вартість.

Вимогу високої міцності конструкції легко пояснити: саме міцність матеріалу визначає несучу спроможність конструкції, само її існування. Та міцність має забезпечуватись ціною малих деформацій.

Зовнішня сила – це вплив навантаження, яке частіше всього обумовлено гравітаційним земним притягінням. А внутрішня сила (її ще називають внутрішній опір) обумовлена молекулярною побудовою тіла, когезією внутрішніх частинок. Ці істини пояснюють багато явищ, пов'язаних з роботою різних конструкцій. Коли мова йде про внутрішнє зусилля, зручно брати не всю силу, а лише ту її частину, яка діє на одиницю площі перетину – напруження σ . По тих же причинах зручніше розглядати не повне подовження елемента, а подовження по відношенню до одиниці довжини – деформацію ε .

На рисунку 1 наведено лабораторне дослідження одного з основних будівельних матеріалів сталюого стержня діаметром 20 мм з малим змістом углероду (біля 0.2 %). Саме така сталь в основному використовується для будівельних цілей – А240 С. Перший, доволі довгий період експерименту підтверджує слова Гука про те, що «яке подовження, така і сила», а закон Гука давно використовується в основі технічних розрахунків людства. Записуючий механізм з початку досліду до тч. «а» викреслює пряму лінію, що круто піднімається. Від тч. «а» до тч. «б» лінія стає горизонтальною, деформації в матеріалі різко зростають (приблизно в 20 раз). Горизонтальну площадку називають площадкою текучості. Та це ще не межа можливостей матеріалу. Від тч. «б» графік знов починає підніматися вгору криволінійно: зростають σ і ε . Залежність $\sigma - \varepsilon$ вже не підкоряється закону Гука, збільшення напружень в матеріалі проходить ціною значних деформацій. А це вже дуже велика ціна, яка ні в якому випадку неприйнятна. Дослід наближується до

кінця. В останній момент зразок розривається, це відповідає $\sigma = 4200 \text{ кг/см}^2$, $\epsilon = 25 \%$. Таким чином, практичне значення має лише частина графіка, яка знаходиться нижче площадки текучості (лінія 0-a).

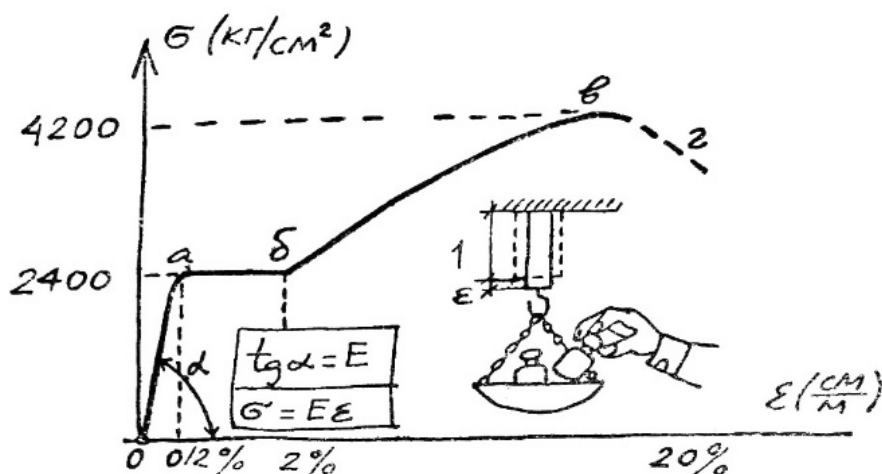


Рисунок 1 – «Посвідчення особи» низьковуглецевої м'якої сталі A240C

Експериментально встановлені залежності між деформаціями і напруженнями є найважливішою характеристикою будівельного конструкційного матеріалу.

Відносно поведінки і властивостей ґрунтової основи, яка на протязі багатьох років має нести на собі тисячотонний вантаж будівель і споруд, теж не все ясно, оскільки тут значно більше тайн та ненадійностей, ніж в інших областях будівництва. Саме геомеханіка займається розгадуванням цих тайн. Роль теоретичного апарату в будівельному проектуванні дуже висока.

Глобальні види подання тензора напружень.

Вирішення проблеми міцності фундаментів тісно пов'язане з аналізом їх НДС. Хоч молекулярна природа будови матерії на нашій планеті точно встановлена, при дослідженні поведінки матеріалів під навантаженням, динамічними впливами, температурою важливим є поведінка не окремих молекул, а матеріалу як цілого. Тоді при поясненні макроскопічних процесів матеріалу не враховується молекулярна структура середовища, а рахується, що середовище рівномірно розподілено по всьому об'єму. Ця концепція суцільності є основним постулатом континуума (механіки суцільних середовищ) та дає основу для єдиного математичного описання поведінки твердих тіл, рідин, газів, і означає, що напруження і деформації можна виражати кусочно-неперервними функціями координат і часу.

Ізотропним (однорідним) рахується матеріал, який має однакові властивості у точках по всіх напрямках. Якщо властивості матеріалу залежать від напрямку в точці – це анізотропний матеріал. Щоб охарактеризувати напружений стан влюбі точці ґрунтового масиву виділяється нескінченно малий об'єм (елементарний тетраедр) і якщо відомі напруження на трьох взаємно перпендикулярних гранях цього елементарного об'єму (тетраедра), то можна знайти напруження на довільно нахилений площині.

При зміні напрямку площадки кінець вектора напружень описує еліпсоїд Ламе (центральну поверхню другого порядку) – еліпсоїд напружень.

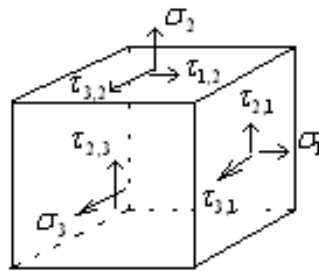


Рисунок 2 – Елементарний тетраедр

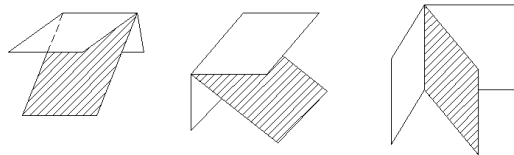


Рисунок 3 – Площинки головних дотичних напружень

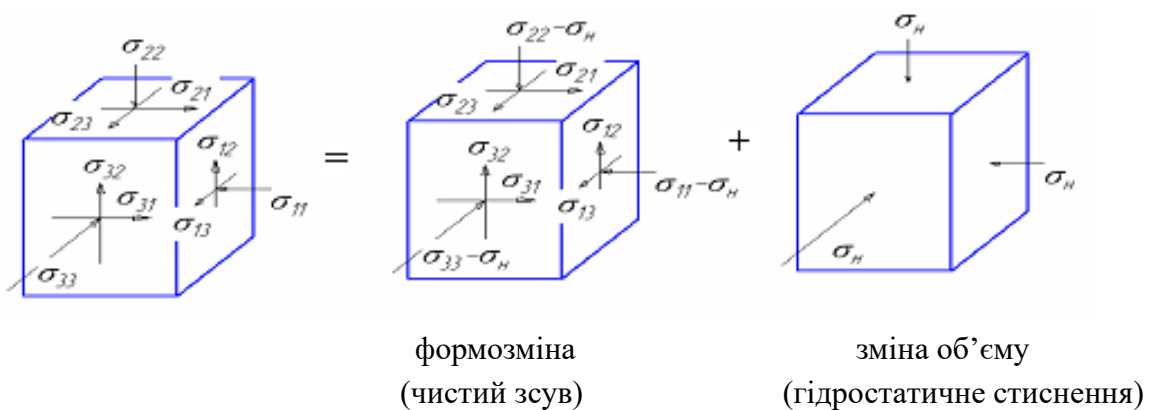


Рисунок 4 – Девіаторна та сферова складові тензора напружень

$$\sigma_n = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33});$$

$$T_\sigma = H_\sigma + D_\sigma; \quad T_\varepsilon = H_\varepsilon + D_\varepsilon.$$

Якщо сумістити початок координат з центром еліпсоїда, а осі координат направити по осях симетрії, то еліпсоїд повністю визначається трьома величинами, які відповідно рівні головним напруженням $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Тоді еліпсоїд напружень є геометричним зображенням тензора напружень.

Тензор напружень можна подати складовим із шарового тензора, який в суцільних середовищах пов'язаний із зміною об'єму, та девіатора напруг, що пов'язаний із зміною форми. В процесі розв'язання практичних задач значний інтерес викликають площадки, рівнонахилені до головних осей – **октаедричні площадки**. Згідно з поняттями механіки континіуму, на них будуть діяти нормальні октаедричні напруження, рівні гідростатичному тиску:

$$\sigma_{\text{окт}} = \sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$$

де $\sigma_m, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – гідростатичний тиск та головні напруження.

$$\tau_{\text{окт}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \sqrt{I_2(D_\sigma)} = (\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}) / 3$$

де $I_2(D_\sigma)$ – другий інваріант девіатора напружень.

В математичних моделях роботи ґрунту часте використання знаходить σ_i .

По різноманіттю і мінливості ґрунти не мають аналогів серед матеріалів, які використовуються в будівництві людиною. Вони завжди неоднорідні та анізотропні. Ґрунти – природна субстанція, яку будівельник може замінити не завжди і в дуже обмежених границях.

Як матеріал для основи, ґрунти по якості сильно поступаються будівельним матеріалам і відповідно їх можливості значно обмежені. Поведінку ґрунту важко передбачити кількісно (а деколи і якісно). Неочікуваність в його поведінці, не будучи правилом, не є і виключенням. Деформації в ґрунті неминучі, та якщо вони перебільшують граничні значення споруді погрожує аварія.

Основна задача при проектуванні ґрунтової основи – зведення до мінімуму осідань ґрунту під фундаментами, оскільки при цьому

зменшуються додаткові навантаження конструкцій. Значне осідання ґрунту може привести до утворення тріщин, катастроф.

Експериментальна крива «осідання – навантаження» **ґрунтової основи** свідчить на різко виражену нелінійну залежність «P–S».

Визначальними параметрами в зоні ущільнення слугують: коефіцієнт Пуассона ν та модуль деформацій E .

В зоні зсувів здійснюються структурні зміни ґрунтової основи, визначальними параметрами є: ν , E , пористість e . Точка 1 – структурна міцність ґрунту. При тисках, менших структурної міцності ($p < p_{\text{стр}}$), коли тиск сприймають водно-колоїдні і кристалічні зв'язки, процес ущільнення практично не розвивається. Лише після порушення цих зв'язків ($p > p_{\text{стр}}$) проходить ущільнення ґрунту.

Відсутність різко виражених переломів реальних кривих $S = f(P)$ пояснюється тим, що процес руйнування зв'язків в ґрунтах йде поступово. З ростом навантаження він розвивається як із-за збільшення числа руйнувань в мікрооб'ємі ґрунту так і завдяки перерозподілу навантажень. Процесу руйнування зв'язків в кінці властивий глобальний лавиноподібний характер.



Рисунок 5 – Експериментальні дослідження залежності
«осідання – навантаження» ґрунту

При досягненні окремими елементами ґрунту граничного стану не виникає самовільного зростання пластичних деформацій ε_{ij}^P .

Сусідні пружні елементи середовища ґрунту здійснюють обмежуючу дію, визначаючи кінцеве значення пластичних деформацій ε_{ij}^P . Це ще раз підтверджує думку, що в матеріалах, які слабо опираються розтягу (бетон, ґрунт) здійснюється *перерозподіл* зусиль. В пористому середовищі ґрунту перерозподіл зусиль може сягати значних розмірів та має наслідки – розподільча здатність реальних ґрунтів сприяє виникненню навколо фундаменту *воронки осідання*.

При незначних вертикальних тисках на ґрунтову основу 0,1-0,3 МПа, а для щільних ґрунтів 0,3-0,4 МПа, залежність напруження-деформації (σ - ϵ) ґрунту можна приймати лінійною, і до ґрунтових основ при невеликих напруженнях можна застосовувати теорію лінійно-деформованого суцільного середовища – теорію пружності, яку широко використовують в механіці ґрунтів.

Та для визначення напружень в ґрунті закон Гука повністю не є прийнятним. Поки зовнішнім навантаженням не перебільшена структурна міцність ґрунту, він отримує незначні деформації, які є пружними і повністю відновлюються після зняття тиску. За межею структурної міцності виникає ущільнення ґрунту, яке супроводжується зменшенням пористості під навантаженою поверхнею (це фаза ущільнення).

По відношенню до будівництва фаза ущільнення не являє небезпеки, оскільки ґрунт отримує більш щільну структуру і його осідання невеликі, тому для практичних цілей в межах фази ущільнення залежність σ - ϵ можна приймати прямолінійною. Подальше збільшення навантажень (при тисках більших межі структурної міцності та фази ущільнення) в окремих точках ґрунту сили внутрішнього опору перебільшуються і між частинками ґрунту виникає ковзання, яке формує площадки ковзання і зони зсуву, виникають як пружні, так і залишкові деформації. Настає фаза зсувів, коли приріст осідань значно перебільшує збільшення навантаження, залежність σ - ϵ стає нелінійною.

Різке збільшення кривизни графіка (σ - ϵ) свідчить **про зрив сил тертя**, при цьому несуча спроможність практично вичерпується.

Подальше збільшення навантажень супроводжується прогресуючими деформаціями, що недопустимо для будівель і споруд. У зв'язку з цим постає питання знаходження найбільш раціонального рішення, яке забезпечується впровадженням досягнень науки і техніки з урахуванням їх економічної ефективності.

Кінець фази ущільнення і початок фази зсувів відповідає початковому критичному навантаженню на ґрунт. Величину граничного навантаження на ґрунт можна оцінити при наявності обрисів поверхні ковзання, яку математично можна знайти шляхом розв'язку диференціальних рівнянь рівноваги сумісно з умовами граничної рівноваги.

Фізична сторона процесів в ґрунті при його навантаженні:

– Неспроможність ґрунту витримувати розтяг приводить до низьких критичних висот схилів.

Порівняння результатів числового моделювання (рис. 5.15) з експериментальними даними [28] рис. 5.14, дали задовільне співпадання. Згідно [28] несуча спроможність палі-оболонки при осіданні $s = 30$ мм склала 4000 кН, числові дослідження за МГЕ зафіксували $P = 3970$ кН.

Сучасне числове моделювання дозволяє визначити НДС палі-оболонки з точністю, достатньою для проектування, та виявити їх несучу спроможність. Знаючи НДС системи «палі-грунт», можна зробити прогноз розвитку подій.

Використання при розрахунках ґрунтових основ пружно-пластичних моделей з неасоційованим законом пластичної течії та дилатансійних співвідношень В. Н. Ніколаєвського, І. П. Бойка – це відправний шлях для розв’язання широкого кола задач, які мають безпосередні інженерні застосування.

Розрахунки базуються на теорії граничної рівноваги, яка розглядає граничний напружений стан. МГЕ – прогресивний метод, новий шлях розв’язку краєвих задач фундаментобудування.

Список використаних джерел

1. ДБН В.2.1 – 10: 2018. Основи та фундаменти споруд. Основні положення. [Чинний від 2019-01.01.] Вид. офіц. Київ, 2019. – 42 с.
2. Ніколаєвський В. Н. Механіка пористих і тріщиноватих середовищ. Недра. – 1984. – 232 с.
3. Бойко І. П. Теоретичні основи проектування пальових фундаментів на пружньо-пластичні основи / І. П. Бойко // Зб. Основи та фундаменти. – К. : Будівельник, 1985. – № 18. – С. 11-18.
4. Рейнер М. Деформація і течія. Введення в реологію. «Наука». 1965.
5. В'ялов С. С. Реологічні основи механіки ґрунтів. 1978.
6. C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wroubel. Boundary element techniques, Theory and Applications in Engineering. New York. 1984. <http://www.mymanual.ru/ebooks/texnicheskaia>
7. Mindlin R.D. Force at a point in the interior of a semi – infinite solid, Physics 7, 196-202, 1936.
8. Моргун А. С. Нелінійні проблеми механіки ґрунтів. Монографія / А. С. Моргун // Вінниця, ВНТУ, 2016. – 122 с.
9. Кушнір С. Г. Розрахунок деформацій основ будівель і споруд. З. «ІПО Запоріжжя». 2008. – 96 с.
10. Моргун А. С. Деформативність ґрунту при пластичній формозміні та дилатансії. Монографія / А. С. Моргун // Вінниця, ВНТУ. – 2017. – 117 с.
11. Бенерджі П., Баттерфілд Р. Методи граничних елементів в прикладних науках. 1984, 494 с.
12. Hill R. Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford, 1950.
13. Drucker D. C. Soil mechanic and work – hardening theories of plasticity / D. C. Drucker, R. E. Gibson, D. S. Henkel. – Trans. Amer. Soc. Civ. Eng., 1957.
14. Далматов Б. І. Механіка ґрунтів, основ і фундаментів. 1981.
15. Бартоломій А. А. Основи розрахунку стрічкових пальових фундаментів по гранично допустимих осіданнях. Будвидат. 1982 р.

16. Бойко І. П. Напружено-деформований стан ґрунтового масиву при побудові нових фундаментів поблизу існуючих будинків / І. П. Бойко, О. В. Сахаров // Основи і фундаменти : Міжвідомчий науково – технічний збірник. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 28. – С. 3-10.
17. Бойко І. П. Пальові фундаменти на нелінійно-деформовані основі: автореферат дисертації д.т.н. : 05.23.02.1989. – 45 с.
18. Бабічев З. В. Дослідження зусиль та деформацій в пальовому фундаменті великопанельного дому. ОФМГ. – 1966, № 5.
19. Ніколаєвський В. Н. Дилатансія та закони незворотнього деформування ґрунтів / В. Н. Ніколаєвський // Зб. Основи, фундаменти та механіка ґрунтів. – 1979. – № 5. – С. 29-31.
20. Ільюшин А. А. Пластичність. Основи загальної математичної теорії. 1963. – 272 с.
21. Телес Д. К. Прикладання методу граничних елементів до розв'язку непружних задач. Будвидат. 1987, 160 с.
22. Алейников С. М. МГЕ в контактних задачах для пружних просторових неоднорідних основ. 2000. – 754 с.
23. Григорян А. А., Хабібулін І. І. Несуча спроможність буронабивних паль на площадках будівництва заводу важкого машинобудування. Зб. ОФМГ, № 2, 1977.
24. В. І. Крутов, В. Л. Рафальзук, Ю. В. Власов. Фундаменти у витрамбованих котлованах з розширеною основою.: Будвидат, ОФМГ, № 3, 1978, с. 3-6.
25. Левченко В. П. Напружено-деформований стан системи «буроін'єкційна паля – основа». Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня к.т.н. Полтавський національний технічний університет – 2011 р. : Полтава, 2011 р.
26. Бабічев З. В. Дослідження зусиль та деформацій в пальовому фундаменті великопанельного дому. ОФМГ. – 1966, № 5.
27. Кушнір С. Г. Розрахунок деформацій основ будівель і споруд. З. «ІПО Запоріжжя». – 2008. – 96 с.
28. Гугуцідзе Г. Н. Несуча спроможність паль-оболочок, заглиблених в слабкі ґрунти // Зб. Основи, фундаменти та механіка ґрунтів. – 1978. – № 5. – С. 8-10.

Електронне наукове видання

Моргун Алла Серафимівна

Меть Іван Миколайович

**КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗРАХУНКУ
ФУНДАМЕНТНИХ КОНСТРУКЦІЙ
БУДІВЕЛЬ ТА СПОРУД
ЗА МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Монографія

Видається в авторській редакції

Рукопис оформила А. С. Моргун

Оригінал-макет підготовлено у РВВ ВНТУ

Підписано до видання 26.08.2025.

Гарнітура Times New Roman.

Зам. № P2025-116.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.

press.vntu.edu.ua;

E-mail: rvv.vntu@gmail.com.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.