

І. А. Клеопа, О. І. Тютюнник, А. А. Коломієць

**КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ
ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

І. А. Клеопа, О. І. Тютюнник, А. А. Коломієць

КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Електронний навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2025

УДК 514.12(075.8)

К48

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (Протокол № 3 від 30.09.2025 р.)

Рецензенти:

С. М. Бак, доктор фізико-математичних наук, професор

О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук,

М. Б. Ковальчук, доктор педагогічних наук, професор

Клеопа, І. А.

К48 Криві та поверхні другого порядку : навчальний посібник [Електронний ресурс] / Клеопа І. А., Тютюнник О. І., Коломієць А. А. – Вінниця : ВНТУ, 2025. – (PDF, 126 с.)

ISBN 978-617-8163-69-3 (PDF)

У цьому посібнику розглядаються криві та поверхні другого порядку, їхні основні властивості, рівняння, способи перетворення та графічне подання. Досліджуються циліндричні поверхні та поверхні обертання, що широко використовуються в вищій математиці, фізиці, архітектурі та інженерії.

Посібник містить детальні описи та аналіз таких геометричних об'єктів:

- криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола та їхні основні властивості;
- перетворення кривих: канонічні рівняння, паралельне перенесення та обертання координат;
- поверхні другого порядку: сфери, еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди та циліндри.

Особливу увагу приділено практичним аспектам:

- способам побудови графіків за допомогою аналітичних методів та програмних засобів (GeoGebra, Python);
- використанню кривих і поверхонь у прикладних задачах;
- геометричним та аналітичним методам спрощення рівнянь.

Крім теоретичних відомостей, що відповідають навчальній програмі з курсу вищої математики, розглянуто велику кількість прикладів з докладним поясненням способів їх розв'язання як традиційними методами.

Посібник може бути використаний для проведення практичних та лекційних занять з вищої математики, а також для самостійного вивчення.

Посібник розрахований на здобувачів технічних, економічних та інших спеціальностей і може бути корисним здобувачам, викладачам, дослідникам та всім, хто цікавиться аналітичною геометрією та її застосуваннями.

УДК 514.12(075.8)

ISBN 978-617-8163-69-3 (PDF)

© ВНТУ, 2025

ЗМІСТ

Тема 1 СИСТЕМИ КООРДИНАТ	4
1.1 Система прямокутних декартових координат на площині	4
1.2 Система полярних координат	6
1.3 Параметричні рівняння лінії	12
1.4 Додаткові приклади розв'язання задач	15
Тема 2 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	28
2.1 Загальне рівняння кривих другого порядку	28
2.1.1 Центр лінії другого порядку. Асимптотичні напрямки кривих другого порядку	33
2.1.2 Діаметри лінії другого порядку. Спряжені напрямки. Осі	36
2.2 Канонічні рівняння кривих другого порядку та їх властивості	37
2.2.1 Коло	38
2.2.2 Еліпс	41
2.2.3 Гіпербола	50
2.2.4 Парабола	58
2.3 Криві вищих порядків	62
2.4 Додаткові приклади розв'язування задач	75
Тема 3 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	91
3.1 Циліндричні поверхні	91
3.2 Конічні поверхні	95
3.3 Поверхні обертання	98
3.4 Додаткові приклади розв'язування задач	104
<i>Тест для самоперевірки</i>	117
<i>Питання для самоперевірки</i>	121
ЛІТЕРАТУРА	125

ЛІТЕРАТУРА

1. Петрук В. А., Прозор О. П., Клеопа І. А. Вища математика з прикладними задачами. Ч.2 : навчальний посібник. Вінниця, ВНТУ, 2020. 132 с.
2. Абрамчук І. В., Барковська А. А., Дереч В. Д. Методи розв'язування типових задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс]. ВНТУ, 2023. 103 с.
3. Працьовитий М. В., Ковальчук М. Б., Сачанюк-Кавецька Н. В. Вища математика. Опорні схеми та алгоритми для самостійної роботи студентів. Частина 2: електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс]. Вінниця : ВНТУ, 2023. 102 с.
4. Кирилашук С. А., Бондаренко З. В., Ключко В. І. Вища математика. Частина 3. Індивідуальні завдання: електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс]. Вінниця : ВНТУ 2021. 120 с.
5. Сачанюк-Кавецька Н. В., Ковальчук М. Б. Окремі розділи спецкурсу вищої математики. Частина 2 : електронний навчальний посібник комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс]. Вінниця : ВНТУ, 2023. 119 с.
6. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч.посіб. К. : ІгнатексУкраїна, 2013. 648 с.
7. Вища математика: підручник : у 2 кн. Кн. 2 / Кулініч Г. Л. та ін. ; за ред. Г. Л. Кулініча. К. : Либідь, 2003. 368 с.
8. Числові та функціональні ряди. Ряди Фур'є. Метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання / Укладачі : М. І. Черней, Г. К. Новикова, Н. Л. Денисенко. К. : НТУУ «КПІ», 2016. 62 с.
9. Збірник задач з математичного аналізу. Ч. 2 / за ред. проф. Ю. К. Рудавського. Львів : Видавництво НУ «Львівська політехніка», 2003. 232 с.
10. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах : навч.посіб. Ч. 3. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі. К. : Книги України ЛТД, 2009. 400 с.
11. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика : підручник. Д. : Видавництво Сталкер, 2003. 496 с.
12. Вища математика із застосуванням інформаційних технологій : підручник / Іващенко В. П. та ін. Дніпропетровськ, 2013. 425 с.
13. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. К. : Ігнатекс-Україна, 2018. 648 с.

Електронне навчальне видання

*Ірина Анатоліївна Клеона
Оксана Іванівна Тютюнник
Альона Анатоліївна Коломієць*

КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Навчальний посібник

Рукопис оформлено *І. Клеона*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовлено *Т. Старічек*

Підписано до видання 21.11.2025 р.
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № P2025-169.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: irvc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.