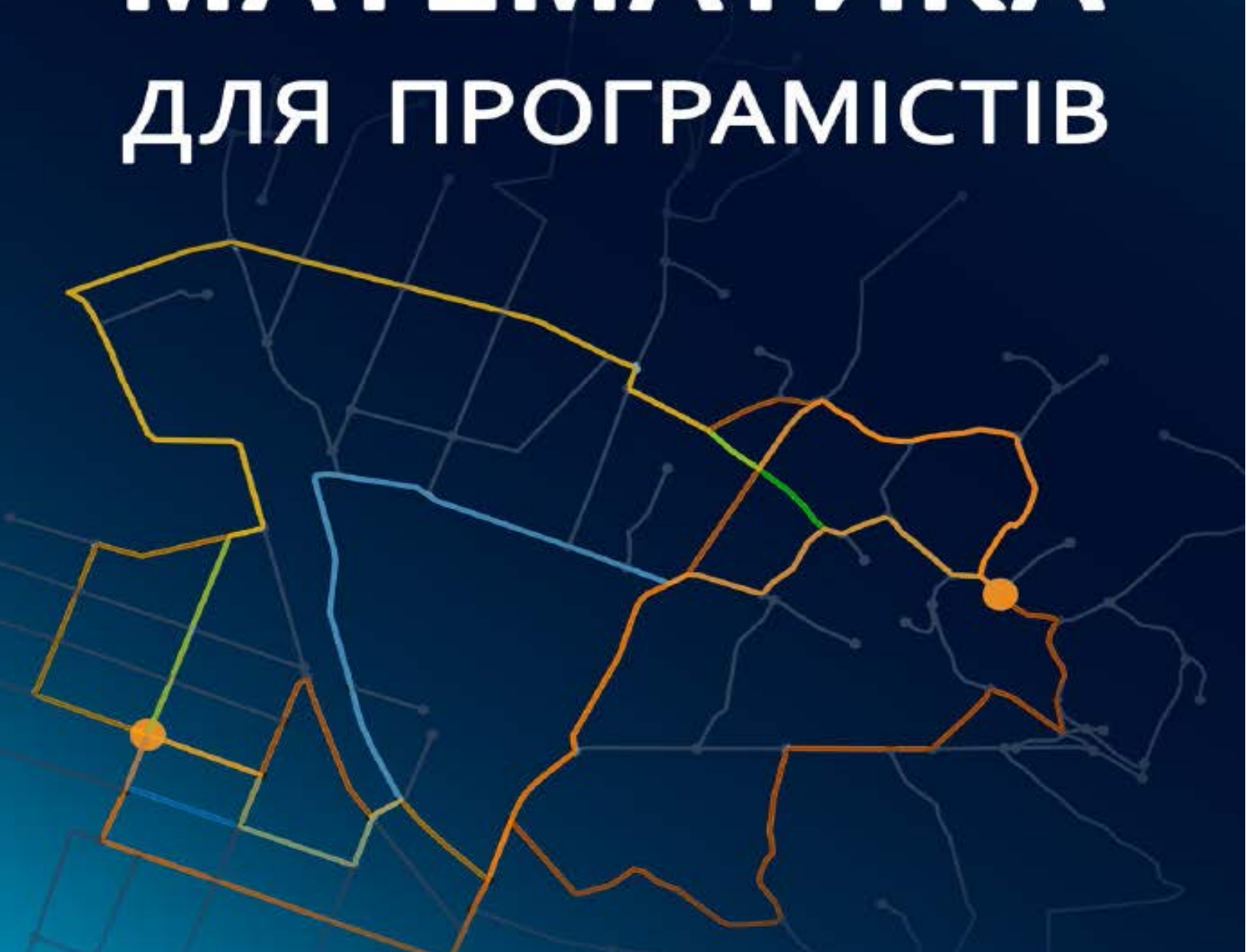


М. В. ПЕТРИЧКО
С. Д. ШТОВБА
О. М. КОЗАЧКО



ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАМІСТІВ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Петричко М. В., Штовба С. Д., Козачко О. М.

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАМІСТІВ

Електронний навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2026

УДК 519.854

ПЗ0

Рекомендовано до видання Вченою Радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 27.11.2025).

Рецензенти:

Кветний Р. Н., член-кор. НАПН України, професор, д-р техн. наук;

Лужецький В. А., професор, д-р техн. наук;

Бойко О. Р., канд. техн. наук.

Петричко, М. В.

ПЗ0 Дискретна математика для програмістів : навчальний посібник [Електронний ресурс] / Петричко М. В., Штовба С. Д., Козачко О. М. – Вінниця : ВНТУ, 2026. – (PDF, 120 с.)
ISBN 978-617-8163-78-5 (PDF)

Наведено теоретичні відомості, практичні поради та завдання для самостійного дослідження із дисципліни «Дискретна математика» для здобувачів вищої освіти, які навчаються за усіма спеціальностями галузі знань «Інформаційні технології». Усі дослідницькі завдання передбачають виконання обчислювальних експериментів. Більшість експериментів проводиться або на реальних даних з інформаційних мереж, або на загальноприйнятих в предметній області тестових задачах (benchmark problems). Особливістю посібника є використання завдань на двох рівнях – базовому та поглибленому. Це дозволяє здобувачам вищої освіти реалізувати індивідуальну траєкторію навчання в межах однієї дисципліни шляхом самостійного вибору додаткових завдань. Дослідницькі завдання поглибленого рівня можуть використовуватися під час викладання споріднених дисциплін, пов'язаних з комбінаторною оптимізацією, дослідженням операцій та моделюванням інформаційних систем.

УДК 519.854

ISBN 978-617-8163-78-5 5 (PDF)

© ВНТУ, 2026

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	5
РОЗДІЛ 1 МНОЖИНИ, ВІДНОШЕННЯ ТА ФУНКЦІЇ	7
1.1 Множини.....	7
1.2 Відношення.....	8
1.3 Функції.....	11
1.4 Хеш-функції.....	12
1.5 Програмна реалізація множини.....	14
1.6 Завдання для самостійного дослідження	17
1.7 Поради та рекомендації	20
1.8 Питання для самоконтролю та професійного розвитку	21
РОЗДІЛ 2 БАЗОВІ МАНІПУЛЯЦІЇ НА ГРАФАХ	23
2.1 Поняття графу.....	23
2.2 Способи подання графів	26
2.3 Типові задачі обходу графів	30
2.3.1 Шлях на графі	30
2.3.2 Зв'язність.....	31
2.3.3 Обхід графу	33
2.3.4 Пошук в глибину	33
2.3.5 Пошук в ширину	34
2.3.6 Пошук найкоротшого маршруту на неорієнтованому графі	35
2.3.7 Виявлення зв'язності графу	36
2.3.8 Перевірка існування циклу	37
2.4 Завдання для самостійного дослідження	37
2.5 Поради та рекомендації	42
2.6 Питання для самоконтролю та професійного розвитку	43
РОЗДІЛ 3 ПОШУК НАЙКОРОТШИХ МАРШРУТІВ МІЖ ВЕРШИНАМИ ГРАФУ	45
3.1 Зважений граф	45
3.2 Знаходження найкоротших маршрутів за алгоритмом Дейкстри .	46

3.3 Знаходження найкоротших маршрутів за алгоритмом Флойда– Воршелла.....	51
3.4 Завдання для самостійного дослідження	56
3.5 Питання для самоконтролю та професійного розвитку	64
РОЗДІЛ 4 ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА	66
4.1 Постановка задачі комівояжера.....	66
4.2 Жадібний алгоритм розв’язання задачі комівояжера.....	69
4.3 Рандомізований жадібний пошук.....	70
4.4 Методи локального покращення	72
4.5 Модифікації задачі комівояжера	77
4.6 Завдання для самостійного дослідження	78
4.7 Поради та рекомендації	89
4.8 Питання для самоконтролю та професійного розвитку	90
РОЗДІЛ 5 ІНФОРМАЦІЙНИЙ ПОШУК ТА АНАЛІЗ СОЦІАЛЬНИХ МЕРЕЖ НА ОСНОВІ ЦЕНТРАЛЬНОСТІ ВЕРШИН ГРАФУ	93
5.1 Поняття центральності вершини	93
5.2 Алгоритм Google PageRank	93
5.3 Застосування теорії графів для аналізу соціальних мереж	98
5.4 Завдання для самостійного дослідження	104
5.5 Питання для самоконтролю та професійного розвитку	116
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	118

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник призначено для здобувачів вищої освіти перших курсів бакалаврату усіх спеціальностей галузі знань «Інформаційні технології» для вивчення дискретної математики та споріднених дисциплін. Посібник створено з урахуванням актуальних потреб майбутніх фахівців з комп'ютерних наук, інформаційних технологій, системного аналізу та розробки програмного забезпечення. Завдання для самостійного виконання закріплюють теоретичні знання через практичну реалізацію задач, що мають як навчальне, так і фахове наповнення. Особлива увага приділяється моментам, які важливі в інформатиці, теорії алгоритмів, штучному інтелекті, логістиці та дискретній оптимізації. Усі завдання передбачають виконання обчислювальних експериментів. Більшість експериментів проводиться або на реальних даних з інформаційних мереж, або на загальноприйнятих в предметній області тестових задачах (benchmark problems). За дидактичної доцільності наведені у посібнику завдання можна легко трансформувати у лабораторні роботи.

Особливістю посібника є подання завдань на двох рівнях – базовому та поглибленому. Це дозволяє здобувачам вищої освіти реалізовувати індивідуальну траєкторію навчання в межах однієї дисципліни шляхом самостійного вибору додаткових завдань. Трудомісткість ґрунтовного виконання усієї сукупності завдань базового рівня в межах одного розділу становить 7–15 академічних годин. Залежно від особливостей освітньої програми за різними спеціальностями галузі знань «Інформаційні технології», гарант може вибрати ту чи іншу підмножину завдань. Завдання поглибленого рівня можна використовувати під час викладання споріднених дисциплін, пов'язаних з комбінаторною оптимізацією, дослідженням операцій та моделюванням інформаційних систем на старших курсах бакалаврату або в магістратурі. Таку структуру посібника сформовано авторами з метою формування у здобувачів вищої освіти цілісного уявлення про міждисциплінарні зв'язки дискретної математики та її ролі в майбутній фаховій діяльності.

Посібник містить як теоретичні відомості, так і перевірені на практиці поради, рекомендації та покрокові інструкції виконання завдань, що надає змогу здобувачам вищої освіти сформувати навички осмисленого застосування та програмної реалізації дискретних структур і алгоритмів.

За результатами виконання завдань здобувачі вищої освіти мають підготувати звіт. Обов'язковими структурними елементами звіту є постановка задачі, протокол її вирішення та висновки. Протокол виконання завдання має містити викладені у логічній послідовності власні інформаційні

матеріали – лістинги програм, результати моделювання у формі графіків, діаграм та таблиць. Кожен результат моделювання має бути прокоментований або за ним має бути сформульований проміжний висновок. Загальні висновки мають надавати вичерпну інформацію щодо аналізованого дослідницького питання.

Більшість матеріалу посібника апробовано авторами під час багаторічного викладання дискретної математики, дослідження операцій, дискретної оптимізації та моделювання інформаційних систем у Вінницькому національному технічному університеті та у Донецькому національному університеті імені Василя Стуса. Водночас, деякі завдання не оприлюднювалися; вони створені авторами з нуля під час роботи над цим посібником. Формуючи перелік завдань, автори також спиралися на власний досвід наукових досліджень та практичної розробки комерційних інформаційних систем. Автори будуть вдячні за зворотний зв'язок – знайдені помилки та мимодруки, зауваження, поради та рекомендації щодо змісту посібника та їх релевантності сучасним вимогам до підготовки айтишників.

Автори намагалися викладати матеріал посібника просто і доступно з урахуванням особливостей сприйняття інформації цільовою аудиторією – другорядні математичні викладки мінімізовано, водночас акцентовано увагу на прикладах з інформаційних систем. Під час підготовки матеріалу посібника використовувалася така література:

- для розділу 1 – [1-4, 26];
- для розділу 2 – [5, 13, 19, 23-26];
- для розділу 3 – [5-8, 13, 15-17, 19-22];
- для розділу 4 – [9-12, 18];
- для розділу 5 – [14, 25, 27-34].

Ця література рекомендована для поглибленого вивчення курсу.

Автори над усіма розділами посібника працювали спільно. Загальний обсяг посібника становить 6.4 авторських аркушів. Розподіл внеску такий: Петричко М.В. – 2.2 авторських аркушів; Штовба С.Д. – 2.2 авторських аркушів; Козачко О.М. – 2 авторські аркуші.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Lewis, H., & Zax, R. (2019). *Essential Discrete Mathematics for Computer Science*. USA: Princeton University Press.
2. Rosen, K. H. (2002). *Discrete Mathematics and Its Applications* (7th ed.). McGraw-Hill Higher Education.
3. Carter, J. L., & Wegman, M. N. (1979). Universal classes of hash functions. *Journal of Computer and System Sciences*, 18(2), 143–154. [https://doi.org/10.1016/0022-0000\(79\)90044-8](https://doi.org/10.1016/0022-0000(79)90044-8)
4. Dietzfelbinger, M. (1996). Universal hashing and k-wise independent random variables via integer arithmetic without primes. In *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)* (Vol. 1046, pp. 567–580). Springer Verlag. https://doi.org/10.1007/3-540-60922-9_46
5. West, D. B. (2000). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall. ISBN: 0130144002
6. Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1), 269–271. <https://doi.org/10.1007/BF01386390>
7. Fredman, M. L., & Tarjan, R. E. (1987). Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. *Journal of the ACM (JACM)*, 34(3), 596–615. <https://doi.org/10.1145/28869.28874>.
8. Cherkassky, B. V., Goldberg, A. V., & Radzik, T. (1996). Shortest paths algorithms: Theory and experimental evaluation. *Mathematical Programming, Series B*, 73(2), 129–174. <https://doi.org/10.1007/BF02592101>
9. Gutin, G., & Punnen, A. (2003). *The traveling salesman problem and its variations* (Issue 1). Springer. <https://doi.org/10.16309/j.cnki.issn.1007-1776.2003.03.004>
10. Garey, M. R., & Johnson, D. S. (1990). *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*. USA: W. H. Freeman & Co.
11. Croes, G. A. (1958). A Method for Solving Traveling-Salesman Problems. *Operations Research*, 6(6), 791–812. <https://doi.org/10.1287/opre.6.6.791>
12. Johnson, D. S., & McGeoch, L. A. (1997). The traveling salesman problem: A case study in local optimization. *Local Search in Combinatorial Optimization*, 215–310. Retrieved from <http://142.103.6.5/~hutter/previous-earg/EmpAlgReadingGroup/TSP-JohMcg97.pdf>
13. Іглін С. П. Теорія графів. Лекції та варіанти індивідуальних домашніх завдань : навчальний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2017. 146 с.
14. Іглін С. П. Теорія ймовірностей та математична статистика на базі MATLAB : навч. посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2019. 470 с.

15. Dijkstra algorithm visualization. URL: <https://visualgo.net/en/ssp> (дата звернення 01.04.2025).
16. Dijkstra algorithm. URL: https://www.w3schools.com/dsa/dsa_algo_graphs_dijkstra.php (дата звернення 01.04.2025).
17. NetworkX – Network Analysis in Python. Python package documentation. URL: <https://networkx.org/> (дата звернення 01.04.2025).
18. Discrete and Combinatorial Optimization Datasets. TSP datasets. URL: <http://comopt.ifl.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/index.html> (дата звернення 01.04.2025).
19. CS Academy Online Graph Editor. URL: https://csacademy.com/app/graph_editor/ (дата звернення 01.04.2025).
20. OpenStreetMap. URL: <https://www.openstreetmap.org/#map=6/49.97/33.64> (дата звернення 01.04.2025).
21. OSMnx – download, model, analyze, and visualize street networks and other geospatial features from OpenStreetMap in Python. Python package documentation. URL: <https://osmnx.readthedocs.io/en/stable/> (дата звернення 01.04.2025).
22. Boeing, G. 2024. Modeling and Analyzing Urban Networks and Amenities with OSMnx. Working paper. URL: <https://geoffboeing.com/publications/osmnx-paper/> (дата звернення 01.04.2025).
23. Learn Depth-First Search(DFS) Algorithm From Scratch. URL: <https://www.simplilearn.com/tutorials/data-structure-tutorial/dfs-algorithm> (дата звернення 01.04.2025).
24. All You Need to Know About Breadth-First Search Algorithm. URL: <https://www.simplilearn.com/tutorials/data-structure-tutorial/bfs-algorithm> (дата звернення 01.04.2025).
25. Мазуренко В.В., Штовба С.Д. Огляд моделей аналізу соціальних мереж // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2015. – №1. – С. 62-73.
26. Biggs N. L. Discrete Mathematics. – Oxford: Oxford University Press, 2nd eds., 2002. – 425 p.
27. Page, L., Brin, S., Motwani, R., & Winograd, T. (1998). The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. World Wide Web Internet And Web Information Systems, 54(1999–66), 1–17. <https://doi.org/10.1.1.31.1768>
28. Langville, A. N., & Meyer, C. D. (2011). Google’s PageRank and beyond: The science of search engine rankings. Google’s PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings (pp. 1–224). Princeton University Press. <https://doi.org/10.1063/1.2711640>

29. Austin, D. (2013). How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack. AMS Feature Column, 1–11. Retrieved from <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank>
30. Peng, S., Zhou, Y., Cao, L., Yu, S., Niu, J., & Jia, W. (2018, March 15). Influence analysis in social networks: A survey. *Journal of Network and Computer Applications*. Academic Press. <https://doi.org/10.1016/j.jnca.2018.01.005>
31. Zachary, W. W. (1977). An Information Flow Model for Conflict and Fission in Small Groups. *Journal of Anthropological Research*, 33(4), 452–473. <https://doi.org/10.1086/jar.33.4.3629752>
32. Girvan, M., & Newman, M. E. J. (2002). Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 99(12), 7821–7826. <https://doi.org/10.1073/pnas.122653799>
33. Rossi, R. A., & Ahmed, N. K. (2015). The Network Data Repository with interactive graph analytics and visualization. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. Retrieved from <https://networkrepository.com>
34. Borgatti, S. P., Everett, M. G., & Shirey, P. R. (1990). LS sets, lambda sets and other cohesive subsets. *Social Networks*, 12(4), 337–357. [https://doi.org/10.1016/0378-8733\(90\)90014-Z](https://doi.org/10.1016/0378-8733(90)90014-Z)

Електронне навчальне видання

**Микола Володимирович Петричко
Сергій Дмитрович Штовба
Олексій Миколайович Козачко**

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАМІСТІВ

Навчальний посібник

Рукопис оформив *М. Петричко*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовила *Т. Старічек*

Підписано до видання 16.01.2026 р.

Гарнітура Times New Roman.

Зам. P2026-006

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,

Редакційно-видавничий відділ.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

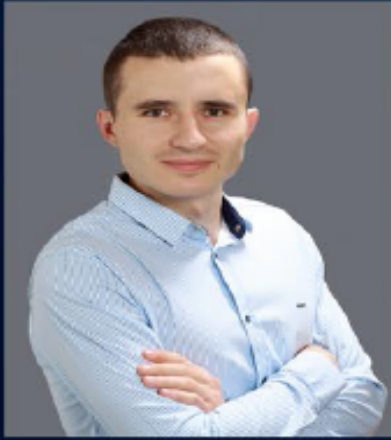
м. Вінниця, 21021.

press.vntu.edu.ua;

Email: irvc.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.



mpetrychko@vntu.edu.ua

Петричко Микола Володимирович

Доктор філософії з інформаційних систем та технологій, асистент кафедри комп'ютерних систем управління Вінницького національного технічного університету. В 2019 р. закінчив Вінницький національний технічний університет за спеціальністю "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології". В 2024 р. захистив дисертацію на здобуття ступеня доктора філософії зі спеціальності 126 "Інформаційні системи та технології". Автор 26 статей з наукометрії та інформаційних систем.



s.shtovba@donnu.edu.ua
shtovba@vntu.edu.ua

Штовба Сергій Дмитрович

Професор, доктор технічних наук, професор кафедри інформаційних технологій Донецького національного університету імені Василя Стуса, професор кафедри комп'ютерних систем управління Вінницького національного технічного університету. В 1993 р. закінчив Вінницький політехнічний інститут за спеціальністю «Конструювання та технологія електронно-обчислювальних засобів». В 1997 р. захистив кандидатську дисертацію з математичного моделювання, а в 2009 р. – докторську дисертацію з інформаційних технологій. Автор 10 книг та біля 150 статей з моделювання, штучного інтелекту та інформаційних технологій.



kozachko@vntu.edu.ua

Козачко Олексій Миколайович

Доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри системного аналізу та інформаційних технологій Вінницького національного технічного університету. В 2002 р. закінчив Вінницький національний технічний університет за спеціальністю "Комп'ютеризовані системи управління і автоматика". В 2006 р. захистив кандидатську дисертацію з математичного моделювання та обчислювальних методів. Автор 5 книг та понад 50 статей з інформаційних технологій та математичного моделювання.